I, Kapitel 1. Die Konstruktion logischer Formen

1.1. Die Struktur der logischen Formen

Mit intuitiver Sicherheit gebrauchen wir in Alltag und Wissenschaft vielfältige umgangssprachliche Mittel zum Ausdruck gesetzmäßiger Zusammenhänge – z.B. Partikeln wie „Wenn-dann“, „Entweder-oder“, „Weder-noch“ usw., ohne je ausdrücklich auf ihren jeweiligen gemeinsamen, allgemeinen Gehalt und ihre gemeinsame Struktur reflektiert zu haben. Ohne dass wir irgendeine logische Analyse durchgeführt haben müssten, verstehen wir Gesetzesaussagen der folgenden Form:

- Wenn durch einen Draht elektrischer Strom fließt, dann erwärmt sich dieser Draht.
- Wenn etwas ein Vogel ist, ist es ein Wirbeltier.
- Wenn ein Mensch ein Mörder ist, dann ist er ein Verbrecher.
- Wenn eine Zahl größer als 2 ist, dann ist ihr Quadrat größer als 2.
- Wenn die Sonne scheint, dann erwärmt sich die Luft.
- Wenn es regnet, ist die Straße nass.

Wir können diese Wenn-dann-Sätze darauf hin befragen, welche *Art von Beziehung* sie zwischen welcher *Art von Inhalten* behaupten. Die Inhalte, die hier in Beziehung gebracht sind – nämlich die Sachverhalte, die durch Ausdrücke wie „durch einen Draht fließt elektrischer Strom“, „es regnet“, „die Luft erwärmt sich“ oder „eine Zahl ist größer als 2“ bezeichnet werden, sind zunächst keine entweder wahren oder falschen Aussagen. Dies heißt aber nicht, dass diese Ausdrücke, wie **Frege** behauptet, ohne hinzukommenden Wink gehaltlos sind; sie benennen vielmehr jeden beliebigen Fall – in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft –, in welchem ein Ereignis bestimmter Art stattfindet bzw. ein Sachverhalt bestimmter Art der Fall ist. So wie wir nicht nur von diesem oder jenem einzelnen Menschen, und nicht nur von dieser oder jener einzelnen Rose, sondern über alle beliebigen Menschen und Rosen sprechen können, so können wir nicht nur über den einzelnen Fall, dass es zu bestimmter Zeit und an bestimmtem Ort regnet, sondern über jeden beliebigen Fall, dass es regnet, über jeden beliebigen Fall, dass ein Kind die Masern hat, dass sich die Luft erwärmt, usw. sprechen. Wir können nicht nur über den einzelnen Fall sprechen, dass die Zahl 5 größer als 2 ist, sondern über jeden beliebigen Fall, da eine Zahl größer als 2 ist. Ohne die Möglichkeit, eindeutig über jeden beliebigen Fall reden zu können, in dem ein Ereignis bestimmter Art vorliegt, könnten wir keine Gesetze formulieren. Alle beliebigen Fälle, in denen Sachverhalte bestimmter Art der Fall sind oder Ereignisse bestimmter Art stattfinden, bilden eine bestimmte *Sachverhalts-/Ereignisklasse*.

Eine Sachverhalts- oder Sachverhalts-/Ereignisklasse benennt alle Fälle, da eine Sache, ein Ding bestimmter Art eine bestimmte dauerhafte Artbestimmung oder Beschaffenheit/Eigenschaft aufweist, oder sich auf eine bestimmte Weise verhält, oder einen ganz bestimmten zeitweiligen Zustand durchläuft: ein Tier ist ein Vogel Artbestimmtheit), ein Mensch ist rothaarig (bleibende Eigenschaft), ein Draht erwärmt sich (zeitweiliger Zustand)… Ein solcher Sachverhalt, ein solches Ereignis ist *allgemein* in dem Sinne, dass jeder beliebige Fall gemeint ist, in dem ein Sachverhalt oder Ereignis der betreffenden Art stattfindet.

Wenn wir ein umgangssprachlich formuliertes Wenn-dann-Gesetz wie „*Wenn es regnet, ist die Straße nass*“ behaupten, beziehen wir uns also weder auf diesen oder jenen Einzelfall, da es regnet, geregnet hat oder regnen wird, noch meinen wir eine Beziehung zwischen wahrheitsdefiniten, d.h. entweder wahren oder falschen Aussagen. Ein derartiger Wenn-Satz bringt zum Ausdruck, dass in jedem Falle, da es regnet, dieses Ereignis mit einem anderen Ereignis bestimmter Art in einer ganz bestimmten Weise gesetzmäßig verbunden ist. Aussagen von der Art unserer Beispielssätze besagen, dass in jedem Fall, in dem ein Ding oder System bestimmter Art einen bestimmten veränderlichen Zustand oder eine bestimmte bleibende Beschaffenheit aufweist, eben dieses Ding/System zugleich einen anderen Zustand, eine andere Beschaffenheit aufweisen muss oder aufweisen kann oder nicht aufweisen kann. Diese Beschaffenheiten und Zustände sind jeweils auf ein und dasselbe Ding oder System bestimmter Art bezogen; ich werde vom *Ereignis-Bezugssystem* sprechen. Gesetze charakterisieren solche Ereignis-Bezugssysteme bestimmter Art (es geht beispielsweise um den gesetzmäßigen Zusammenhang der Fälle, da durch irgendeinen bestimmten Draht Strom fließt und *eben dieser* Draht erwärmt wird, oder um die Gesetzmäßigkeit aller Fälle, da irgendein Mensch ein Mörder ist und *eben dieser* Mensch ein Verbrecher ist, oder um alle Fälle, da irgendeine Zahl größer als zwei ist und das Quadrat *eben dieser* Zahl 2 ist, usw.). Im Folgenden versuche ich, die allgemeine Struktur der gesetzmäßigen, logischen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zuständen/Beschaffenheiten von Ereignis-Bezugssystemen näher zu bestimmen.

Wenn wir in einer verallgemeinernden Reflexion *verschiedener* Wenn-dann-Sätze die *eine*, begrifflich-identische Beziehung erfassen wollen, deren Geltung in allen diesen verschiedenen Äußerungen behauptet wird, wollen wir nicht wissen, ob zwischen diesen oder jenen konkreten Sachverhalts-/Ereignisklassen eine derartige Beziehung besteht, sondern wir wollen alle notwendigen Bedingungen auffinden, die erfüllt sein müssen, wann immer die Geltung eines derartigen Wenn-dann-Gesetzes rechtens behauptet wird. Mit den Buchstaben „p“, „q“, „r“,… werde ich solche beliebigen, stets auf ein Ereignis-Bezugssystem bestimmter Art bezogene Sachverhalts-/Ereignisklassen (keine Aussagen!) bezeichnen[1].

Zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q kann nur dann eine gesetzmäßige Beziehung bestehen, wenn p und q jeweils sowohl vorkommen wie nicht vorkommen können – derartige Ereignisse müssen *realmöglich* sein. Es macht keinen Sinn, über die „Gesetzmäßigkeit“ von Sachverhalten/Ereignissen zu sprechen, die überhaupt nicht passieren können. Ich bezeichne dieses *Vorkommenkönnen* oder diese *Realmöglichkeit* einer beliebigen Sachverhalts-/Ereignisklasse p durch „*rm* (p)“. Das Vorkommenkönnen oder die Realmöglichkeit einer Sachverhalts-/Ereignisklasse bedeutet einfach, dass es Fälle gibt, in denen derartige Ereignisse vorliegen, und dass es ebenso Fälle gibt, in denen derartige Ereignisse nicht vorliegen – *rm*(~p). Immer dann, wenn *rm*(p) gilt, gilt auch *rm*(~p) und umgekehrt, wobei der Ausdruck „p“ eine beliebige Sachverhalts-/Ereignisklasse bezeichnet – genauer *jeden beliebigen* Fall, in dem ein Ereignis ganz bestimmter Art, p, vorliegt; „~p“ soll jeden beliebigen Fall bezeichnen, in denen dieses Ereignis p nicht vorliegt. Gilt *rm*(p), dann ist p ein *echtes* (eben realmögliches) *Ereignis*; kann ein p unter keinen Umständen vorkommen, handelt es sich um ein *unbedingt unmögliches* (nicht-realmögliches) Ereignis und ich schreibe „*nrm* (p)“[2].

Der Ausdruck „*rm*(p)“ besagt, dass die Sachverhalte/Ereignisse, die der Sachverhalts-/Ereignisklasse p angehören, überhaupt vorkommen können, ohne dass die Bedingungen dieses Vorkommens irgendwie schon angesprochen würden; da die *Realmöglichkeit* wie die *Nicht-Realmöglichkeit* den Sachverhalts-/Ereignisklassen ohne Bezug auf irgendwelche bestimmte andere Gegebenheiten zugesprochen wird, handelt es sich bei beiden Bestimmungen um die *unbedingten (nicht-relativen) Modalitäten* der *Möglichkeit* und der *Unmöglichkeit*. Eine *unbedingte Notwendigkeit* kann Ereignissen prinzipiell nicht zugesprochen werden, da ein solcher Sachverhalt bzw. ein solches Ereignis immer und zu jeder Zeit vorliegen müsste, was dem Begriff des Ereignisses und der Endlichkeit aller wirklichen Dinge widerspräche. Für beliebige Ereignisse p können wir so behaupten, dass entweder *rm*(p) oder *nrm*(p) gilt. Wir unterscheiden dadurch die Ereignisse, die vorkommen können von den fiktiven Ereignissen, die unter keinen Umständen vorkommen können; nur erstere können Relata logischer Formen sein, nur für sie können Gesetze behauptet werden[3] und nur sie sind für die Logik von Belang.

Immer wenn wir im Sinne der Umgangssprache die Geltung einer Implikations-Beziehung *Wenn p, dann q* behaupten, wollen wir zum Ausdruck bringen, dass in *allen* Fällen, in denen p vorliegt, auch q vorliegt, dass es also nicht möglich ist, dass auch nur in einem Falle, in dem p beobachtet wird, q nicht vorliegt. Es geht in einer Wenn-dann-Beziehung um einen Zusammenhang zwischen den Fällen, dass eines der Ereignisse vorliegt bzw. nicht vorliegt, mit den Fällen, in denen das andere Ereignis vorliegt bzw. nicht vorliegt. Für jedes Paar von auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogenen Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q gibt es genau vier verschiedene Fälle, in denen die Fälle des Vorliegens und Nicht-Vorliegens der beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen miteinander kombiniert sind; ich spreche von den „*Vorkommenskombinationen*“ gegebener Sachverhalts-/Ereignisklassen.

1. der Fall, dass beide Ereignisse zusammen vorliegen: ich schreibe „p⌢q“.
2. der Fall, dass das erste, nicht aber das zweite der Ereignisse vorliegt: „p⌢~q“
3. der Fall, dass das zweite, nicht aber das erste der beiden Ereignisse vorkommt: „~p⌢q“
4. der Fall, dass keines der beiden Ereignisse vorliegt: „~p⌢~q“

Ich bezeichne die Vorkommenskombinationen (abgekürzt: VK) in der angeführten Reihenfolge mit römischen Ziffern (p⌢q ist VK I, p⌢~q ist VK II, usw.).

Für *beliebige* Paare (p, q) von Klassen echter Ereignisse sind diese vier Fälle zunächst jeweils nur *hypothetisch möglich*, weil es unter der Voraussetzung von *rm*(p) und *rm*(q) noch offen ist, welche dieser vier Vorkommenskombinationen auch tatsächlich vorliegen kann und welche nicht. Ich nenne die Menge der überhaupt möglichen Kombinationen der Vorkommenswerte einer bestimmten Anzahl von Sachverhalts-/Ereignisklassen den *Raum des Hypothetischmöglichen* oder das *Hypothetischmögliche*. *Der bedingungslogisch-gesetzmäßige Zusammenhang zwischen einer Anzahl von Ereignissen bestimmter Art ist dann vollständig erkannt, wenn von* ***allen*** *hypothetischen Kombinationen der Vorkommenswerte* ***jeweils*** *eindeutig feststeht, ob sie realmöglich oder nicht realmöglich sind.*

Zusammen mit dem Begriff der auf ein Ereignis-Bezugssystem bezogenen Sachverhalts-/Ereignisklasse und der angegebenen Kombinationen solcher Sachverhalts-/Ereignisklassen bilden die beiden unbedingten Modalitäten der Möglichkeit (Realmöglichkeit) und der Unmöglichkeit (Nicht-Realmöglichkeit) die begriffliche Basis eines infiniten Systems aller nur denkbaren Gesetzeszusammenhänge von der Art der Wenn-dann-Beziehung. Ich nenne solche bedingungslogischen Zusammenhänge „**logische Totalformen**“ oder „logische Totalrelationen“; das Attribut „total“ verweist darauf, dass die Realmöglichkeit bzw. Nichtrealmöglichkeit *aller* hypothetischmöglichen Vorkommenskombinationen festliegt.

Betrachten wir die Vorkommenskombinationen der im Satz „Wenn eine natürliche Zahl größer als zwei ist, ist ihr Quadrat größer als zwei“ angesprochenen Sachverhalts-/Ereignisklassen, dass irgendeine natürliche Zahl größer als zwei ist, und dass das Quadrat *eben dieser* Zahl größer als 2 ist!

> Vorkommenskombination I ist realmöglich, denn dass eine natürliche Zahl größer als 2 ist, und ihr Quadrat ebenfalls größer als 2, ist realmöglich (es trifft z.B. für die Zahl 3 zu).
>
> Auch die Vorkommenskombinationen III und IV sind realmöglich, denn es ist einerseits möglich, dass eine natürliche Zahl nicht größer als 2 ist, während dies für ihr Quadrat gilt (die Zahl 2), und es ist andererseits realmöglich, dass weder eine natürliche Zahl noch ihr Quadrat größer als 2 sind (die Zahl 1).
>
> Vorkommenskombination II ist jedoch nicht realmöglich, denn es gibt keine natürliche Zahl, die größer als 2 ist, deren Quadrat jedoch nicht größer als 2 wäre (diese Nicht-Realmöglichkeit einer Vorkommenskombination kann im Gegensatz zur Realmöglichkeit nicht durch Einzelfälle, sondern nur durch den Bezug auf ein geltendes Gesetz begründet werden).

Auch für die anderen angeführten Wenn-dann-Gesetze ergibt eine entsprechende Prüfung, dass alle Vorkommenskombinationen außer der Vorkommenskombination II realmöglich sind. *Es gibt keine Wenn-dann-Gesetzesaussage anführen können, die nicht diese Struktur aufweist*. Ich kann die allgemeine Struktur dieser Gesetzesbeziehung somit durch eine Matrix (1011) darstellen, wobei die Ziffer „1“ *realmöglich*, die Ziffer „0“ *nichtrealmöglich* bedeutet und die vier Positionen der Reihe nach die vier Vorkommenskombinationen I, II, III und IV bezeichnen. Da die vier Vorkommenskombinationen zweier Sachverhalts-/Ereignisklassen auf 16 verschiedenen Weisen als realmöglich bzw. nicht-realmöglich bestimmbar sind, erhalten wir genau 16 verschiedene zweistellige logische Totalrelationen, die zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen bestehen können. Die Matrizen, die wie (1011) die Realmöglichkeit und Nicht-Realmöglichkeit der einzelnen Vorkommenskombinationen angeben, nenne ich „*Normalmatrizen*“; die 16 zweistelligen logischen Totalformen können durch ihre jeweilige Normalmatrix eindeutig dargestellt werden.

1.2. Die logischen Formen als Verhältnisse relativer Modalisierung

Die Normalmatrizen einer Totalform geben an, welche der hypothetischmöglichen Vorkommenskombinationen realmöglich und welche nichtrealmöglich sind; diese Bestimmungen der einzelnen Vorkommenskombinationen werden unabhängig voneinander[4] vorgenommen. Wenn wir jedoch die Vorkommenskombinationen einer solchen vorgegebenen Matrix, etwa die Matrix der Implikation (1011), in ihrem Zusammenhang betrachten, erkennen wir die Struktur einer durchgehenden *relativen Modalisierung* der Sachverhalts-/Ereignisklassen – und in dieser relativen Modalisierung von Sachverhalts-/Ereignisklassen liegt der wesentliche Gehalt der umgangssprachlichen Partikeln, mit denen wir schon vor jeder theoretischen Logik logische Zusammenhänge ausdrücken.

Von den 6 verschiedenen Paaren, die sich aus den vier Vorkommenskombinationen bilden lassen, haben vier eine besondere Bedeutung:

Zusammen stellen die ersten beiden **Vorkommenskombinationen I und II** alle Fälle dar, da p vorliegt: die Menge dieser p-Fälle zerfällt dann in jene Fälle, da *bei p* auch q vorliegt (diese Fälle entsprechen der Vorkommenskombination I), und in jene Fälle, da *bei p* q nicht vorliegt (diese Fälle entsprechen der Vorkommenskombination II).

Die **Vorkommenskombinationen III und IV** stellen zusammen die Gesamtheit der Fälle dar, da p nicht vorliegt; in einem Teil dieser Fälle liegt *bei* $\sim p$ q vor (die Vorkommenskombination III stellt diese Fälle dar), in den restlichen Fälle liegt *bei* $\sim p$ q nicht vor (diese Fälle entsprechen der Vorkommenskombination IV).

Die **Vorkommenskombinationen I und III** stellen zusammen die Menge der Fälle dar, da q vorliegt; die Gesamtheit dieser q-Fälle zerfällt in jene Fälle, da *bei q* auch p vorliegt (dies ist die Vorkommenskombination I), und in jene Fälle, da *bei q* p nicht vorliegt (Vorkommenskombination III).

Die Vorkommenskombinationen **II und IV** schließlich stellen die Fälle dar, da q nicht vorliegt; diese $\sim$q-Fälle zerteilen sich in die Fälle, da *bei* $\sim q$ p vorliegt (Vorkommenskombination II), und in die Fälle, da *bei* $\sim q$ p nicht vorliegt (Vorkommenskombination IV).

Die angeführten Paare von Vorkommenskombinationen – (I, II), (III, IV), (I, III) und (II, IV) – stellen *jeweils* zusammen die Fälle dar, da einer der beiden Sachverhalte/Ereignisse vorliegt bzw. nicht vorliegt, wobei jeder dieser Fälle *jeweils* in die Fälle, da das andere vorliegt, und in die Fälle, da das andere nicht vorliegt, zerfällt. Betrachten wir bei einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Relation nacheinander die vier oben dargelegten Paare von Vorkommenskombinationen (I, II), (III, IV), (I, III) und (II, IV), zeigt sich, dass eine solche Form die durchgehende *relative Modalisierung* der beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen darstellt. Für die Implikationsbeziehung mit der Normalmatrix (1011) ergibt sich:

Vorkommenskombinationen I und II – alle p-Fälle: Vorkommenskombination I ($p \frown q$) ist realmöglich, Vorkommenskombination II ($p \frown \sim q$) ist nichtrealmöglich: p kann also mit q vorliegen (Vorkommenskombination I), aber bei p ist es unmöglich, dass q nicht vorliegt (Vorkommenskombination II): dies bedeutet, dass *bei p* q *notwendig* ist im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{N}$. Die ersten beiden Stellen einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen also die Modalisierung des Vorkommens von q relativ zum Vorkommen von p dar.

Vorkommenskombinationen III und IV – alle nicht-p-Fälle: die Vorkommenskombinationen III und IV sind beide realmöglich; nicht-p kann demnach einerseits mit q (Vorkommenskombination III), andererseits ohne q vorliegen (Vorkommenskombination IV); dies bedeutet, *bei nicht-p* ist q *möglich* im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{K}$. Die letzten beiden Stellen einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen somit die Modalisierung des Vorkommens von q relativ zum Nichtvorkommen von p dar.

Vorkommenskombinationen I und III – alle q-Fälle: die Vorkommenskombinationen I und III sind beide realmöglich; q liegt also entweder mit p (Vorkommenskombination I) oder ohne p vor (Vorkommenskombination III); demnach ist das Vorliegen von p relativ zum Vorliegen von q *möglich* im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{K}$. Die erste und dritte Stelle einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen somit die Modalisierung des Vorkommens von p relativ zum Vorkommen von q dar.

Vorkommenskombinationen II und IV – alle nicht-q-Fälle: die Vorkommenskombination $p \frown \sim q$ ist nichtrealmöglich, die Vorkommenskombination $\sim p \frown \sim q$ ist realmöglich: liegt also q nicht vor, dann ist $\sim$p möglich (Vorkommenskombination IV), aber bei nicht-q ist p unmöglich (Vorkommenskombination II): dies bedeutet, relativ zu nicht-q ist p unmöglich im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{U}$. Die zweite und vierte Stelle einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen somit die Modalisierung des Vorkommens von p relativ zum Nichtvorkommen von q dar.

Der Gehalt einer umgangssprachlichen Wenn-dann-Gesetzesaussage wie „Wenn eine natürliche Zahl größer als zwei ist, ist ihr Quadrat größer als zwei" involviert demnach die vier folgenden relativen Modalisierungen:

1) ist eine Zahl größer als 2, dann ist auch ihr Quadrat notwendig ($\mathcal{N}$) größer als 2 (d.h. es ist unmöglich, dass das Quadrat dieser Zahl nicht größer als 2 ist).

2) Ist eine Zahl nicht größer als 2, dann ist es möglich ($\mathcal{K}$), dass das Quadrat dieser Zahl größer als zwei ist (dies trifft für die Zahl 2 zu); es sind jedoch auch Fälle möglich, da sich unter der Bedingung, dass eine Zahl nicht größer als 2 ist, das Quadrat dieser Zahl auch nicht größer als 2 ist (dies gilt etwa für die Zahl 1,42).

3) Ist das Quadrat einer Zahl größer als zwei, dann ist es möglich ($\mathcal{K}$), dass diese Zahl größer als 2 ist (dies gilt etwa für die Zahl 3); es kommen jedoch auch Fälle vor, da das Quadrat einer Zahl größer als zwei ist, diese Zahl jedoch nicht größer als zwei ist (dies gilt etwa für die Zahl 1,9)

4) Ist das Quadrat einer Zahl nicht größer als 2, dann ist es unmöglich ($\mathcal{U}$), dass diese Zahl größer als 2 ist; denn es gibt wohl Fälle, da das Quadrat einer Zahl nicht größer als 2 ist und auch diese Zahl nicht größer als 2 ist – aber es gibt keinen Fall, dass das Quadrat einer Zahl nicht größer als 2 ist und diese Zahl größer als Geist ist.

Man überzeugt sich leicht, dass jedes gültige Wenn-dann-Gesetz genau diese vier relativen Modalisierungen behauptet[5].

Man kann die Struktur der Implikation durch die „*Modalitätenmatrix*“ ($\mathcal{NKKU}$) bestimmen, wobei die Positionen der Reihe nach folgende relative Modalisierungen bedeuten:

q relativ zu p (ich spreche vom *Modalisierungsfall* α);
q relativ zu ~p (*Modalisierungsfall* β);
p relativ zu q (*Modalisierungsfall* γ)
p relativ zu ~q (*Modalisierungsfall* δ).

Aus allen 16 Normalmatrizen der zweistelligen Totalformen können in der angegeben Weise die jeweiligen Modalitätenmatrizen abgelesen werden.

Auch das umgangssprachliche (ausschließende) *Entweder-oder* drückt eine spezielle relative Modalisierung aus; die Gesetzesaussage *Eine natürliche Zahl ist* ***entweder*** *gerade* ***oder*** *ungerade* besagt, dass eine gerade Zahl unmöglich ungerade ist, eine ungerade Zahl unmöglich gerade ist; eine nicht gerade Zahl ist notwendigerweise ungerade und eine nicht ungerade Zahl ist notwendigerweise gerade. Die Normalmatrix (0110) und die von ihr abgeleitete Modalitätenmatrix ($\mathcal{UUNN}$) legen den reinen logischen Gehalt des umgangssprachlichen *Entweder-oder*, die Beziehung zweier einziger unverträglicher Alternativen dar.

Für eine beliebige Sachverhalts-/Ereignisklasse p können ebenfalls alle möglichen *einstelligen* Totalformen ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass von *jeder* Sachverhalts-/Ereignisklasse p, die als Teil eines logischen Zusammenhangs auftritt, vorausgesetzt werden muss, dass sie überhaupt realmöglich ist; dieses Vorkommenkönnen ist unbedingt, es gilt nicht bloß relativ zum Vorliegen/Nichtvorliegen anderer Ereignisse. Nichtrealmögliche Sachverhalte/Ereignisse werden aus der logischen Betrachtung ausgeschlossen. Unter der Voraussetzung dieser unbedingten Möglichkeit kann von jeder Sachverhalts-/Ereignisklasse *darüber hinaus* bestimmt werden, ob die ihr zugehörenden Sachverhalte/Ereignisse *im Hinblick auf das Vorliegen oder das Nichtvorliegen irgendwelcher anderer Ereignisse* vorkommen können oder nicht; im Hinblick auf das Vorliegen oder Nichtvorliegen irgendeines anderen Ereignisses bestimmter Art steht für eine Sachverhalts-/Ereignisklasse zunächst nur in hypothetischer Weise fest, ob das Vorliegen (p) oder Nichtvorliegen (~p) derartiger Ereignisse realmöglich ist. Es gibt die hypothetischen Fälle, dass p vorliegt (Vorkommenskombination I) und die Fälle, dass p nicht vorliegt (Vorkommenskombination II); es gibt dann vier Möglichkeiten, die Realmöglichkeit der beiden Vorkommenskombinationen zu bestimmen; jede dieser Möglichkeiten stellt eine logische einstellige Form dar.

Tabelle 1: Die einstelligen logischen Totalformen

Sachverhalts-/Ereignisklasse p		relative Möglichkeit $\mathcal{K}$	relative Notwendigkeit $\mathcal{N}$	relative Unmöglichkeit $\mathcal{U}$	Leere logische Relation O
Vorkommenskombination I	p	1	1	0	0
Vorkommenskombination II	~p	1	0	1	0

Eine Sachverhalts-/Ereignisklasse p, für die es relativ zum Vorliegen oder Nichtvorliegen eines anderen Sachverhalts oder Ereignisses einerseits Fälle gibt, in denen derartige Ereignisse vorliegen, und andererseits Fälle gibt, in denen derartige Sachverhalte oder Ereignisse nicht vorliegen (Normalmatrix (11)), ist ein *möglicher* Sachverhalt (ein mögliches Ereignis): $\mathcal{K}$(p). Ein Sachverhalt/Ereignis p, das – wiederum relativ zum (Nicht-) Vorliegen eines anderen Sachverhalts/Ereignisses bestimmter Art – vorkommen kann, deren Nichtvorkommen aber nicht-realmöglich ist (Normalmatrix (10)), ist ein *notwendiger* Sachverhalt (ein notwendiges Ereignis): $\mathcal{N}$(p). Ein Sachverhalt oder ein Ereignis, dessen Vorkommen – relativ zum (Nicht-)Vorliegen eines anderen Ereignisses – nicht-realmöglich ist, und das aber nicht vorkommen kann (Normalmatrix (01)), ist ein *unmöglicher* Sachverhalt (ein unmögliches Ereignis): $\mathcal{U}$(p). Sachverhalte/Ereignisse, die bezüglich anderer Sachverhalte/Ereignisse weder vorkommen noch nicht vorkommen können (00), sind keine unmöglichen, sondern Sachverhalte/Ereignisse, die sich nicht einmal ausdenken lassen – Un-Sachverhalte oder Un-Ereignisse; O(p) ist die leere einstellige logische Form. Die vier einstelligen Totalformen erweisen sich so als die elementaren *relativen* Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{K}$ und die „Quasimodalität“ O; relativ ist diese Modalisierung, weil von vorneherein vorausgesetzt ist, dass p ein echtes Ereignis ist. Da vorausgesetzt werden muss, dass p realmöglich ist (nicht-relative, unbedingte Möglichkeit), können die Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ der Sachverhalts-/Ereignisklasse p nur bezüglich des Vorliegens oder Nicht-Vorliegens anderer Sachverhalts-/Ereignisklassen bestimmter Art zugesprochen werden. Die unbedingte Möglichkeit einer Sachverhalts-/Ereignisklasse p ist Voraussetzung dafür, dass diese Sachverhalts-/Ereignisklasse relativ zum Vorliegen anderer Ereignisse notwendig, relativ zu wieder anderen Sachverhalts-/Ereignisklassen möglich ($\mathcal{K}$) und wiederum relativ zu dritten Sachverhalts-/Ereignisklassen unmöglich ist. Von einer Sachverhalts-/Ereignisklasse p wird rm (p) ohne jeden Bezug auf andere Sachverhalts-/Ereignisklassen ausgesagt; von p kann dann ohne Widerspruch nur bezüglich anderer Sachverhalts-/ Ereignisklassen$\mathcal{N}$(p), $\mathcal{K}$(p) oder $\mathcal{U}$(p) ausgesagt werden. Die Quasimodalität O ergibt als einstellige logische Form nicht viel Sinn, sie spielt aber in umfassenderen bedingungslogischen Zusammenhängen eine unverzichtbare Rolle.

Es gibt drei nicht-leere einstellige logische Formen (elementare relative Modalitäten); nun werden oft nicht nur zwei *apodiktische* – $\mathcal{N}$ und $\mathcal{U}$ –, sondern auch zwei nicht-apodiktische Modalitäten unterschieden, das *Mögliche im engeren Sinne* (ich schreibe „$\mathcal{M}$“) und das *Zufällige* („$\mathcal{Z}$“). Wird versucht, das Mögliche i.e.S. als das, was *nicht notwendig nicht* vorliegt (was also *nicht unmöglich* ist), das Zufällige aber als das, was *nicht notwendig* vorliegt, zu bestimmen[6], so stellt dies keine differenzierende Zerlegung der nicht-apodiktischen Modalität $\mathcal{K}$ dar, denn die Disjunktivität der Bestimmungen $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{K}$ wird nicht berücksichtigt: was nicht möglich (~$\mathcal{K}$) ist, ist entweder nicht notwendig oder nicht unmöglich. Wäre das „Mögliche“ das Nicht-Unmögliche, wäre es entweder möglich ($\mathcal{K}$) oder notwendig; das Mögliche im eigentlichen Sinne ist aber in keinem Falle notwendig. Wäre das „Zufällige“ das Nicht-Notwendige, wäre es entweder möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich; das Zufällige ist aber in keinem Falle unmöglich. Diese Bestimmungen – „möglich“ = nicht unmöglich und „zufällig“ = nicht notwendig – sind demnach nicht korrekt, sie widersprechen schon dem intuitiven Verständnis der Wörter „möglich“ und „zufällig“. Eine sachhaltige, mit dem intuitiven Verständnis übereinstimmende und logisch bedeutsame Differenzierung der nicht-apodiktischen Modalität $\mathcal{K}$ in ein *Mögliches im engeren Sinne* ($\mathcal{M}$) und ein *Zufälliges* wird erst durch die Einbeziehung umfassenderer bedingungslogischer Zusammenhänge, für welche in gleicher Weise $\mathcal{K}$(p) gilt, möglich; es gibt zwei grundlegende Möglichkeiten einer dichotomen Zerlegung des Relativ-Möglichen i.w.S. ($\mathcal{K}$).

Gilt $\mathcal{K}$(p, q) – liegt p vor, kann p, aber auch q vorliegen[7] –, kann es sein, dass in jenen Fällen, in denen bei p das Ereignis q nicht vorliegt, notwendig ein drittes Ereignis r vorliegt, welches zusammen mit q einer wohlbestimmten Menge alternativer Ereignisse angehört. Falls p realisiert ist, muss zumindest eines dieser alternativen Ereignisse vorliegen; bei p ist jede der Alternativen möglich im Sinne von $\mathcal{M}$ (*möglich i.e.S.*). Dies bedeutet zugleich, dass, falls p nicht vorliegt, keine dieser Alternativen vorliegen kann, denn das Vorliegen von q, setzt wie das Vorliegen jeder anderen der Alternativen notwendig das Vorliegen von p voraus: bei $\mathcal{M}(p,q)$ gilt dann zugleich $\mathcal{N}(q,p)$ und $\mathcal{U}(\sim p,q)$. Dieser Zusammenhang lässt sich an einem einfachen Beispiel erläutern. Wenn ich mit einem Würfel werfe (Ereignisklasse $\mathfrak{a}$), ist es im Sinne von $\mathcal{M}$ möglich, dass ich die Augenzahl 4 werfe (Ereignisklasse $\mathfrak{b}$); es gilt $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, ebenso wie $\mathcal{N}(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ und $\mathcal{U}(\sim\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Das Ereignis $\mathfrak{b}$ ist eine von sechs wohlunterschiedenen, sich gegenseitig ausschließenden Alternativen. Wenn ich mit einem Würfel werfe, kann ich nicht sagen, dass das Eintreten der Augenzahl 4 völlig unvorhersehbar, und damit zufällig ist, dass man mit dem Ereignis $\mathfrak{b}$ also verständigerweise nicht zu rechnen hat; dem Ereignis $\mathfrak{b}$ kann ja ein bestimmter Wahrscheinlichkeitswert zugeschrieben werden. Den Wahrscheinlichkeitserwägungen liegt stets die Modalität $\mathcal{M}$ zu Grunde, d.h. ein Wissen um die überhaupt möglichen Alternativen.

Verschiedene zusammengehörende Alternativen können miteinander verträglich sein, d.h. zusammen realisiert sein, oder nicht. Sind zwei Alternativen unverträglich, dann ist, falls eine davon vorliegt, jede andere unmöglich ($\mathcal{U}$). Sind zwei Alternativen verträglich, dann ist, falls die eine vorliegt, die andere im Sinne von $\mathcal{M}$ möglich. Wenn ich z.B. mit einem Würfel werfe (Ereignisklasse $\mathfrak{a}$), ist es im Sinne von $\mathcal{M}$ möglich, dass eine gerade Augenzahl geworfen wird (Ereignisklasse $\mathfrak{b}$) oder dass eine Augenzahl größer als 3 geworfen wird (Ereignisklasse $\mathfrak{c}$); $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind verträgliche Alternativen. Es gilt dann $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ und $\mathcal{N}(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$, sowie $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{c})$ und $\mathcal{N}(\mathfrak{c},\mathfrak{a})$. Tritt $\mathfrak{b}$ auf ($\mathfrak{a}$ ist dann notwendig), ist es auch möglich ($\mathcal{M}$), dass $\mathfrak{c}$ auftritt. Umgekehrt ist bei $\mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{b}$ möglich im Sinne von $\mathcal{M}$. Diese symmetrische $\mathcal{M}$-Beziehung zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist durch $\mathfrak{a}$ vermittelt: weil bei $\mathfrak{b}$ notwendig $\mathfrak{a}$ vorliegt, und bei $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{c}$ möglich ($\mathcal{M}$) und $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b}$ verträglich ist, ist bei $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ möglich ($\mathcal{M}$). Während für die *„unmittelbare“ und asymmetrische* $\mathcal{M}$-Beziehung $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ die Umkehrung $\mathcal{N}(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ gilt, weist die *„mittelbare“ oder symmetrische* $\mathcal{M}$-Beziehung $\mathcal{M}(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ die Umkehrung $\mathcal{M}(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ auf.

Gilt bei $\mathcal{K}(p,q)$ die Umkehrung $\mathcal{K}(q,p)$, und gibt es kein drittes Ereignis r, das *sowohl* zu p *als auch* zu q in einer apodiktischen Modalitätenbeziehung steht, liegt die Zufallsrelation $\mathcal{Z}(p,q)$ vor: das Vorliegen von q ist hinsichtlich des Vorliegens von p zufällig. Diese Beziehung ist vollkommen symmetrisch; es gilt notwendig auch $\mathcal{Z}(\sim p,q)$, $\mathcal{Z}(q,p)$ und $\mathcal{Z}(\sim q,p)$. Jedes der beiden Ereignisse kann auftreten und nicht auftreten, falls das andere Ereignis vorliegt und falls dieses nicht vorliegt; es gibt so keinerlei bedingungslogische Abhängigkeit zwischen zueinander zufälligen Ereignissen, sie müssen nur miteinander verträglich sein. Die Zufälligkeit wird von der Totalform $\mathbb{V}$ (Independenz) mit der Modalitätenmatrix ($\mathcal{ZZZZ}$) zum Ausdruck gebracht.

Vom *Möglichen* kann in den folgenden verschiedenen Bedeutungen gesprochen werden:

1. Das *Hypothetischmögliche* ist das Denkbare und der Bereich dieses Möglichen ist umfassender als der Bereich desjenigen, von dem wir wissen, dass es wirklich sein kann, oder zu einer bestimmten Zeit wirklich ist[8]. Gleichwohl kann alles Wirkliche und Realmögliche nur dann in seiner jeweiligen objektiven Bestimmtheit und Gesetzmäßigkeit erkannt werden, wenn es im umfassenderen Bereich des Hypothetischmöglichen dem Nicht-Wirklichen bzw. Unmöglichen entgegengesetzt und von ihm abgegrenzt wird. Was vorliegt, kann nur in der Abgrenzung gegen das, was nicht vorliegt, bestimmt werden. In seiner Notwendigkeit/Gesetzmäßigkeit ist das Wirkliche nur dann erkennbar, wenn begründet werden kann, dass es nicht anders sein kann – wenn dieses Wirkliche also zusammen mit dem gedacht wird und auf dasjenige bezogen wird, das unter keinen Umständen wirklich sein kann. Dass z.B. *bei* p q *notwendig* ist, ergibt sich daraus, dass $p \frown q$ und $\sim p \frown \sim q$ vorkommen können, $p \frown \sim q$ aber unbedingt unmöglich ist. Die hypothetische Möglichkeit $p \frown \sim q$ muss *gedacht* werden können, damit sie auf Realmöglichkeit hin überprüft werden kann. Es ist eine fundamentale Gesetzmäßigkeit, dass das Seiende nur zusammen mit dem Nicht-Seienden (mit den Nichtwirklichen und Unmöglichen) erkannt und bestimmt werden kann.

   Alles Denkbare fällt in den Bereich des Hypothetischmöglichen; der Gegensatz der hypothetischen Möglichkeit ist das *Undenkbare*. Undenkbar ist z.B. ein Ereignis, das weder vorkommen noch nicht vorkommen kann; undenkbar sind etwa für n Sachverhalts-/Ereignisklassen mehr als 2^n Vorkommenswertkombinationen, oder für n geordnete Elemente mehr als n! Permutationen. Kombinatorische Operationen begrenzen das Hypothetischmögliche; sie spielen bei der Bestimmung aller hypothetischen Möglichkeiten in einem bestimmten Bereich eine entscheidende Rolle und bilden eine wichtige Grundlage der systematischen Hypothesenbildung und Hypothesenüberprüfung. Um den bedingungslogischen Zusammenhang von *n* Sachverhalts-/Ereignisklassen zu überprüfen, müssen wir zunächst in hypothetischer Weise alle nur möglichen Vorkommenskombinationen konstruieren, um dann zu bestimmen, welche dieser Kombinationen realmöglich sind und welche nicht. Im Bereich des Hypothetischmöglichen wird dann das Realmögliche, das wirklich sein kann, vom Nicht-Realmöglichen geschieden (aus dieser Scheidung resultiert die Erkenntnis des Gesetzmäßigen). Diese *Realmöglichkeit* – eine nicht-relative, unbedingte Modalität – stellt die zweite Art von Möglichkeit dar.

2. Der eigentümliche Gegensatz dieses *Realmöglichen* ist das *unbedingt Unmögliche* oder *Nicht-Realmögliche*, das unter keinen Umständen vorliegen kann. Ein Ereignis ist entweder realmöglich (dann ist es ein *echtes Ereignis*) oder unbedingt unmöglich (nicht realmöglich). Die unbedingte Modalität der Realmöglichkeit (*rm*) ist eine notwendige Bedingung dafür, dass einem Ereignis überhaupt eine relative Modalität zugeschrieben werden kann[9].

3. Die dritte Art des *Möglichen* ist *das Mögliche im Sinne der relativen Modalität* $\mathcal{K}$; ihr spezifischer Gegensatz ist die relative apodiktische Modalität (entweder $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{U}$), und dieser Gegensatz der apodiktischen und der nicht-apodiktischen relativen Modalität fällt in den Begriff der relativen Modalität selber. Für alle p gilt das Gesetz: *Genau dann, wenn* $\mathcal{K}$(p), so $\mathcal{K}$(∼p)[10].

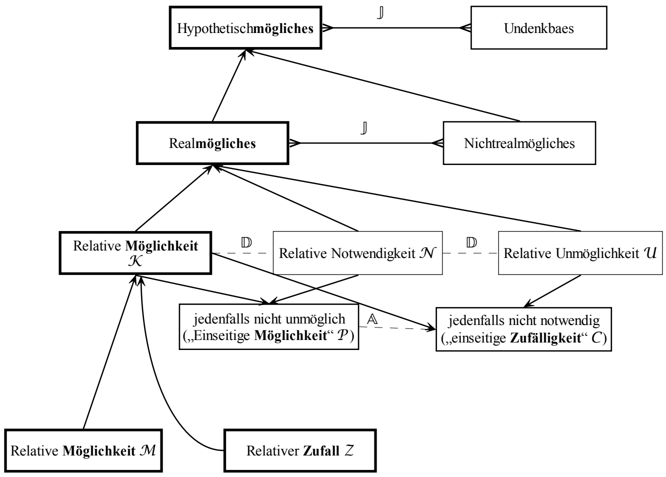
4. In den Begriff des Möglichen im Sinne von $\mathcal{K}$ fällt der Gegensatz des *Möglichen im engeren Sinne* ($\mathcal{M}$) und des *Zufälligen* $\mathcal{Z}$.

5. Vom Möglichen wird seit **ARISTOTELES** auch noch in einer weiteren Bedeutung gesprochen, im Sinne der sog. *einseitigen Möglichkeit*; als „zweiseitige Möglichkeit“ werden die Begriffe *rm*, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{M}$ bezeichnet, weil in diesen Fällen die jeweilige Möglichkeiten von p immer die entsprechende Möglichkeit von ∼p mit umfasst. Ein Ereignis wird hingegen dann „einseitig möglich“ genannt, wenn es *jedenfalls nicht unmöglich* ist, d.h. wenn es entweder notwendig ($\mathcal{N}$) oder möglich im Sinne von $\mathcal{K}$ ist. Ich bezeichne diese Bestimmung der *Nicht-Unmöglichkeit* mit „$\mathcal{P}$(p)“. In gleichem Sinne heißt es irreführend, ein Ereignis p sei „zufällig“, wenn es jedenfalls nicht notwendig ist, wenn ihm also entweder $\mathcal{U}$ oder $\mathcal{K}$ zukommt; ich schreibe dafür „$\mathcal{C}$(p)“[11]. Ist p im Sinne von $\mathcal{P}$ „einseitig möglich“, ist nicht auch notwendigerweise ∼p „einseitig möglich“, es gilt vielmehr: $\mathcal{C}$(p) *gilt genau dann, wenn* $\mathcal{P}$(∼p) *gilt*; und: $\mathcal{P}$(p) *gilt genau dann, wenn* $\mathcal{C}$(∼p) *gilt*. In entsprechender Weise kann das logische Prädikat „jedenfalls nicht möglich im Sinne von $\mathcal{K}$ (entweder $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{U}$)“ bestimmt werden; ich schreibe dafür „$\mathcal{A}$(p)“. Ich echten Wortsinne handelt es sich bei $\mathcal{P}$(p) und $\mathcal{C}$(p) nicht um Möglichkeiten, da sie neben der echten zweiseitigen Möglichkeit $\mathcal{K}$ die Notwendigkeit bzw. die Unmöglichkeit $\mathcal{U}$ einschließen.

Relative Modalisierung bezieht den Einzelfall auf alle Fälle derselben Art. Ist ein einzelner Sachverhalt (ein einzelnes Ereignis) unter bestimmten Bedingungen notwendig ($\mathcal{N}$), dann weil es unter gleichartigen Bedingungen keinen einzigen Fall gibt, in dem ein Ereignis von derselben Art nicht vorliegt. Ist ein einzelner Sachverhalt (ein einzelnes Ereignis) unter bestimmten Bedingungen möglich ($\mathcal{K}$), dann weil es unter gleichartigen Bedingungen auch Fälle gibt, in denen ein Ereignis von derselben Art nicht vorliegt. Ist ein einzelner Sachverhalt (ein einzelnes Ereignis) unter bestimmten Bedingungen unmöglich ($\mathcal{U}$), dann weil es unter gleichartigen Bedingungen keinen einzigen Fall gibt, in dem ein Ereignis von derselben Art vorliegt.

Diese verschiedenen Arten des (*objektiven*) Möglichen dürfen nicht mit dem Problematischen im Sinne der subjektiven Ungewissheit verwechselt werden; dass ein Ereignis p „möglich“ im Sinne der subjektiven Ungewissheit ist, besagt, dass der Sprecher sich unschlüssig ist, ob p der Fall ist oder nicht, dass er es aufgrund seines unvollständigen Wissens weder behaupten noch ausschließen kann. Der ganze logische Zusammenhang der objektiven Modalitäten ist in folgender Abbildung dargelegt[12].

Abbildung 1: Die Arten des objektiven Möglichen



Die einstelligen logischen Formen sind *relative* Modalitäten und bestimmen daher Sachverhalts-/Ereignisklassen nur bezüglich des Vorkommens und Nicht-Vorkommens von zumindest einer weiteren Sachverhalts-/Ereignisklasse; sie können nicht für sich alleine gelten. Einen logischen Zusammenhang zwischen n Sachverhalts-/Ereignisklassen, der nur in einem Zusammenhang gelten kann, der mindestens n+1 Sachverhalts-/Ereignisklassen umfasst, nenne ich ***obligatorisch unselbständig***; alle einstelligen Totalformen sind obligatorisch unselbständig, ihre Betrachtung erfordert notwendig den Übergang zur Analyse zweistelliger Totalformen. Die Gesamtheit aller zweistelligen Totalformen lässt sich konstruieren, wenn alle möglichen Kombinationen der relativen Modalisierung von q einerseits für p, andererseits für ~p bestimmt werden; die Bestimmung der Modalisierungsfälle α und β legen ja die jeweilige Normalmatrix einer zweistelligen logischen Totalform vollständig fest.

Die Normal- und Modalitätenmatrizen aller zweistelligen Totalformen sind in den folgenden Tafeln mit den Namen und den Bezeichnungen dieser logischen Verhältnisse dargelegt[13]. Besteht z.B. zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q die logische Relation der Kontravalenz, so schreibe ich „𝕁(p,q)“, „p >< q“ oder „(0110)(p,q)“.

Tabelle 2: Die zweistelligen logischen Totalformen[14]

Vorkommens-kombination		Indepen-denz 𝕍 p ⊤ q	Alter-nation 𝔸 p ∨ q	Replika-tion 𝔹 p ← q	Implika-tion ℂ p → q	Exklusi-on 𝔻 p ↑ q	Äquiva-lenz 𝔼 p ↔ q	Pränon-pendenz 𝔽 p ⌉ q	Postnon-pendenz ≣ p ⌈ q
I	p⌢q	1	1	1	1	0	1	0	0
II	p⌢~q	1	1	1	0	1	0	0	1
III	~p⌢q	1	1	0	1	1	0	1	0
IV	~p⌢~q	1	0	1	1	1	1	1	1
I	p⌢q	0	0	0	0	1	0	1	1
II	p⌢~q	0	0	0	1	0	1	1	0
III	~p⌢q	0	0	1	0	0	1	0	1
IV	~p⌢~q	0	1	0	0	0	0	0	0
		Antilogie 𝕆 p ⊥ q	Rejektion 𝕏 p ↓ q	Präsekti-on 𝕄 p ⋞ q	Post-sektion 𝕃 p ⋟ q	Konjunk-tion 𝕂 p ∧ q	Kontra-valenz 𝕁 p >< q	Prä-pendenz 𝕀 p ⌋ q	Postpendenz ℍ p ⌊ q

Tabelle 3: Die Modalitätenstruktur der zweistelligen logischen Totalformen

Modalisie-rungsfall	gege-ben	moda-lisiert	𝕍 ⊤	𝔸 ∨	𝔹 ←	ℂ →	𝔻 ↑	𝔼 ↔	𝔽 ⌉	𝔾 ⌈	ℍ ⌊	𝕀 ⌋	𝕁 ≻≺	𝕂 ∧	𝕃 ⋟	𝕄 ⋞	𝕏 ↓	𝕆 ⊥
α	p	q	𝒦	𝒦	𝒦	𝒩	𝒰	𝒩	𝒪	𝒰	𝒩	𝒦	𝒰	𝒩	𝒰	𝒪	𝒪	𝒪
β	~p	q	𝒦	𝒩	𝒰	𝒦	𝒦	𝒰	𝒦	𝒰	𝒩	𝒪	𝒩	𝒪	𝒪	𝒩	𝒰	𝒪
γ	q	p	𝒦	𝒦	𝒩	𝒦	𝒰	𝒩	𝒰	𝒪	𝒦	𝒩	𝒰	𝒩	𝒪	𝒰	𝒪	𝒪
δ	~q	p	𝒦	𝒩	𝒦	𝒰	𝒦	𝒰	𝒰	𝒦	𝒪	𝒩	𝒩	𝒪	𝒩	𝒪	𝒰	𝒪

1.3. Dreistellige logische Totalformen

Eine *dreistellige logische Totalform* bestimmt, welche der hypothetischmöglichen Kombinationen der Vorkommenswerte (Vorkommenskombinationen) von drei Sachverhalts-/Ereignisklassen realmöglich bzw. nicht-realmöglich sind. Es gibt 8 Vorkommenskombinationen; da diese auf $2^8 = 256$ unterschiedliche Weisen als realmöglich bzw. nicht-realmöglich bestimmbar sind, gibt es genau 256 dreistellige Totalformen. Wie der Übergang von den ein- zu den zweistelligen, so ist der Übergang von den zwei- zu den dreistelligen Totalformen zwangsläufig, da die meisten zweistelligen Totalformen obligatorisch unselbständig sind und deshalb nur als Bestandteile bedingungslogischer Zusammenhänge bestehen können, die mehr als zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen umfassen.

Die 8 Vorkommenskombinationen der dreistelligen Totalformen bezeichne ich wiederum mit römischen Ziffern. Die Vorkommenskombination I stellt die Gesamtheit der Umstände dar, bei denen drei Ereignisse p, q und r zusammen vorliegen – hypothetisch betrachtet, denn für drei Ereignisse steht nicht von vorneherein fest, dass sie zusammen vorkommen können; dafür schreibe ich auch „p⌢q⌢r“. Die Vorkommenskombination II ist die Gesamtheit der Fälle, bei denen – hypothetisch – p und q vorliegen, r jedoch nicht vorliegt; ich schreibe „p⌢q⌢~r“, usw. Jede dreistellige Totalform kann durch eine Normalmatrix wie (1110 1001) dargestellt werden; diese logische Form ist in Tabelle 4 ausführlich dargestellt:

Tabelle 4: Die Totalform [𝔸𝕏]

Vorkommenskombination		∨ ↓
I	p⌢q⌢r	1
II	p⌢q⌢~r	1
III	p⌢~q⌢r	1
IV	p⌢~q⌢~r	0
V	~p⌢q⌢r	0
VI	~p⌢q⌢~r	0
VII	~p⌢~q⌢r	0
VIII	~p⌢~q⌢~r	1

Unter den 8 Vorkommenskombinationen einer *drei*stelligen Totalform kommt jede der vier Vorkommenskombinationen von *zwei* der drei Sachverhalts-/Ereignisklassen genau zweimal vor; einmal, wenn das jeweils dritte Ereignis vorliegt, und dann wenn das dritte Ereignis nicht vorliegt. Auf diese Weise gibt jede dreistellige Totalform erschöpfend darüber Auskunft, welche zweistellige Totalform zwischen zwei der drei Sachverhalts-/Ereignisklassen besteht, wenn das dritte Ereignis vorliegt *und* wenn das dritte Ereignis nicht vorliegt. Die nebenstehende Totalform sagt aus, dass bei p die Beziehung q∨r gilt; ich schreibe: „p⁝ q∨r“. Bei ~p gilt q ↓ r, ich schreibe: „~p⁝ q ↓ r“. Diese dreistellige Gesetzesbeziehung kann durch die Ausdrücke „[p, q, r 𝔸𝕏]“ oder „[p, q, r ∨↓]“ eindeutig bezeichnet werden: bei p gilt q∨r und bei ~p gilt q↓r.

Die Normalmatrix einer dreistelligen logischen Totalform kann auch wie folgt gelesen werden: es wird festgestellt, welche elementare relative Modalität, dem Ereignis r zukommt, falls p⌢q gilt (Vorkommenskombinationen I und II), falls p⌢~q (Vorkommenskombinationen III und IV), ~p⌢q (Vorkommenskombinationen V und VI) und ~p⌢~q (Vorkommenskombinationen VII und VIII) gilt. Die obige dreistellige Totalform setzt sich somit zusammen aus den Beziehungen:

- ((p⌢q), r) bei p⌢q ist r möglich (𝒦)
- ((p⌢~q), r) bei p⌢~q ist r notwendig
- ((~p⌢q), r) bei ~p⌢q ist r notwendig
- ((~p⌢~q), r) bei ~p⌢~q ist r unmöglich.

Gilt [p, q, r $\mathbb{A}\mathbb{X}$], so sind q und r die beiden einzigen verträglichen hinreichenden Bedingungen des Ereignisses p. Dieser gesetzmäßige Zusammenhang lässt sich, wie jede andere dreistellige Totalform, nicht eindeutig durch den Ausdruck „$p \leftrightarrow (q \vee r)$" darstellen; der Ausdruck „$p \leftrightarrow (q \vee r)$" besagt zwar, dass bei p das Verhältnis $q \vee r$ gilt, jedoch steht für den Fall, dass $\sim p$ vorliegt, nur fest, dass $p \vee q$ nicht gilt; gilt $p \vee q$ nicht, so bedeutet dies, dass irgendeine zweistellige logische Totalform, nur eben nicht $\mathbb{A}$, zwischen p und q besteht; der Ausdruck „$r \leftrightarrow (p \vee q)$" drückt also im Gegensatz zum Ausdruck „[p, q, r $\mathbb{A}\mathbb{X}$]" nicht eindeutig aus, dass bei $\sim r$ gilt $p \downarrow q$.

Es ist auf diese Weise für jede natürliche Zahl *n* jeder beliebig komplexe ereignislogisch/bedingungslogische n-stellige Zusammenhang rekursiv konstruierbar, was den einheitlichen, zusammenhängenden und infiniten Charakter des *Systems der logischen Relationen* zeigt: jede n-stellige logische Totalrelation baut sich aus (n-1)-stelligen logischen Relationen auf, wobei am Ausgangspunkt der Konstruktion die relativen logischen Modalitäten stehen; jede n-stellige logische Form sagt aus, welche (n-1)-stellige bedingungslogische Relation zwischen (n-1) Ereignissen besteht, wenn ein n-tes Ereignis vorliegt und welche (n-1)-stellige bedingungslogische Relation zwischen genau diesen (n-1) Ereignissen besteht, wenn dieses n-te Ereignis nicht vorliegt. So sagt etwa die zweistellige Relation der Implikation $p \rightarrow q$ aus, dass bei p q notwendig ($\mathcal{N}$) und dass bei $\sim p$ q möglich ($\mathcal{K}$) ist; die dreistellige Relation [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{V}$] sagt aus, dass bei p zwischen q und r die Beziehung $\mathbb{C}$, und dass bei $\sim p$ zwischen q und r die Beziehung $\mathbb{V}$ besteht. Die vierstellige logische Relation [p, q, r, s $\mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{C}\mathbb{B}$] besagt, dass beim Vorliegen von p die dreistellige Relation [q, r, s $\mathbb{A}\mathbb{X}$] und beim Nichtvorliegen von p die Relation [q, r, s $\mathbb{C}\mathbb{B}$] gilt.

Diese Konstruktion legt für jede beliebige logische Form in vollständiger und endgültiger Weise alle notwendigen Bedingungen fest, die erfüllt sein müssen, damit in irgendeinem Bereich der Wirklichkeit mit Recht von der Geltung des betreffenden bedingungslogischen Zusammenhangs gesprochen werden kann; die vollständige und unverrückbare Bestimmtheit einer beliebigen logischen Form ist völlig unberührt davon, ob das empirische Bestehen eines derartigen bedingungslogischen Zusammenhanges je schon nachgewiesen worden ist oder jemals nachgewiesen werden wird.

1.4. Logische Totalformen und logische Partialformen

Jede in einer Menge N erklärte n-stellige Relation R ist in extensionaler Betrachtung die Menge derjenigen n-Tupel von Elementen aus N, denen R zukommt. Wenn R_1 und R_2 verschiedene zweistellige Relationen auf einer Menge M×M, $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ die entsprechenden Mengen von Paar-Elementen aus M×M sind, denen R_1 bzw. R_2 zukommt, ist die Vereinigungsmenge $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ die Extension einer Relation, die ich durch den Ausdruck „$R_1 \Cup R_2$" darstelle. Ist ein Mensch z.B. entweder die Schwester (R_1) oder der Bruder (R_2) eines anderen Menschen, so besteht zwischen ihnen die Relation des Geschwisterseins ($R_1 \Cup R_2$). Das Zeichen $\Cup$ bezeichnet eine Verknüpfung von zwei n-stelligen Prädikaten zu einem dritten Prädikat; ich nenne diese Verknüpfung „Prädikatenvereinigung": $R_1 \Cup R_2$ ist das Prädikat, das allen Elementen der Menge $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \in (M \times M)$ zukommt. Die zwei Prädikate R_1 und R_2 können auch durch die „Prädikatenmultiplikation" $R_1 \Cap R_2$ zu jener Relation verknüpft werden, die allen jenen Elementen zukommt, denen sowohl R_1 wie auch R_2 zukommt, d.h. die den Elementen von $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ zukommen. Auch beliebige Prädikatverknüpfungen von logischen Relationen sind wiederum logische Relationen.

Sind z.B. zwei Ereignisse p und q die einzigen hinreichenden Bedingungen eines dritten Ereignisses r, und bleibt es offen, ob p und q verträglich sind, so stehen, falls r vorliegt, p und q entweder in der Relation $\mathbb{A}$ oder in der Relation $\mathbb{J}$. Diese neue logische Relation kann durch den Ausdruck „$\mathbb{A} \Cup \mathbb{J}(p, q)$" bezeichnet werden. Für diese logische Relation $\mathbb{A} \Cup \mathbb{J}(p, q)$ sind nur drei der vier hypothetischmöglichen Vorkommenskombinationen bestimmt: die Vorkommenskombinationen II und III als realmöglich, die Vorkommenskombination IV als nicht-realmöglich. Ob die Vorkommenskombination I realmöglich ist, bleibt offen. Die Relation $\mathbb{A} \Cup \mathbb{J}$ lässt sich so auch durch den Ausdruck „(•110)" bezeichnen. Ist eine Vorkommenskombination nicht definitiv bestimmt, so steht an seiner Position in der Normalmatrix das Zeichen „•". Eine logische Relation, die eine Vorkommenskombination unbestimmt lässt, gilt genau dann, wenn diese unbestimmte Vorkommenskombination entweder realmöglich oder wenn sie nicht-realmöglich ist. Beispielsweise gilt (10•1)(p, q) genau dann, wenn $p \rightarrow q$ oder wenn $p \leftrightarrow q$ gilt; die Ausdrücke „(10•1)(p, q)" und „$\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}(p, q)$" sind bedeutungsgleich. Logische Relationen, die aus einer Prädikatenverknüpfung oder aus einer Prädikatenmultiplikation resultieren und bei denen nicht alle

Vorkommenskombinationen definitiv bestimmt sind, nenne „ich ***logische Partialformen***, die logischen Relationen, bei welche alle Vorkommenskombinationen definitiv als realmöglich oder nichtrealmöglich bestimmt sind, nenne ich ***logische Totalformen.***

Logische Relationen können auch durch die Angabe der Bedingungen für die Bestimmung ihrer Vorkommenskombinationen dargestellt werden. Die zweistellige logische Relation, für die gefordert wird, dass von den Vorkommenskombinationen I und II zumindest eine realmöglich soll, und dass die Vorkommenskombinationen II und IV gegensätzlich – die eine als realmöglich, die andere als nicht-realmöglich – bestimmt sein sollen, ist die Relation $\mathbb{E} \Cup \mathbb{H} \Cup \equiv \Cup \mathbb{J} \Cup \mathbb{A} \Cup \mathbb{B}(p,q)$; genau diese und nur diese 6 Totalformen genügen den angegebenen Bedingungen[15]. Die zweistellige logische Relation $\mathbb{V} \Cup \mathbb{C} \Cup \mathbb{B}$ ist dadurch definiert, dass die Vorkommenskombinationen I und IV realmöglich sind und dass von den Vorkommenskombinationen II und III zumindest einer realmöglich ist; diese Relation stelle ich auch durch den Ausdruck „$(1 \circ \circ 1)(p,q)$“ dar; von den Vorkommenskombinationen, an deren Position das Zeichen $\circ$ steht, ist immer zumindest einer realmöglich.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich die Menge der logischen Relationen mit Hilfe der Operation der Potenzmengenbildung[16] kombinatorisch bestimmen. Wenn die Menge der 16 zweistelligen *Totalformen* mit „$\mathcal{F}$“ bezeichnet wird, stellt jede Vereinigung von irgendwelchen Teilmengen aus $\mathcal{F}$ eine *logische Partialform* dar. Da es für die 16-elementige Menge $\mathcal{F}$ genau 2^{16} verschiedene Teilmengen gibt, gibt es genau 2^{16} verschiedene zweistellige logische Relationen. Wenn wir vernünftigerweise die leere Totalform $\mathbb{O}$ ausschließen, erhalten wir (2^{15})-1 nichtleere zweistellige logische Relationen[17]. Für die vier einstelligen Totalformen gibt es $2^4 = 16$ Möglichkeiten, davon sind $(2^3)-1$ nicht-leer[18]. Für *n* Sachverhalte/Ereignisse gibt es 2^n Vorkommenskombinationen, $2^{(2^n)}$ n-stellige Totalformen (davon sind $2^{(2^n)-1}$ nicht-leer) und $2^{(2^{(2^n)})}$ n-stellige logische Relationen – darunter $2^{(2^{(2^n)}-1)}-1$ nicht-leer. Unter den logischen Relationen unterscheiden wir die Totalformen (alle Vorkommenskombinationen sind definitiv als realmöglich oder nicht-realmöglich bestimmt) und die logischen Partialformen (zumindest eine Vorkommenskombination ist nicht definitiv bestimmt).

Viele zweistellige logische Partialformen lassen sich durch Modalitätenmatrizen darstellen, wenn zu den drei elementaren Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{K}$ ihre jeweiligen Negationen hinzugefügt werden: $\sim\mathcal{N} = \mathcal{C}$, $\sim\mathcal{U} = \mathcal{P}$ und $\sim\mathcal{K} = \mathcal{A}$[19]. Die logische Relation $(\bullet 110)$ – entweder $\mathbb{A}$ oder $\mathbb{J}$, entweder also ausschließende oder nicht-ausschließende *Oder*-Alternativen – hat dann die Modalitätenmatrix: $(\mathcal{CNCN})$: bei p ist q jedenfalls nicht notwendig, bei $\sim$p ist q notwendig, bei q ist p jedenfalls nicht notwendig und bei $\sim$q ist p notwendig. Diese Modalitätenmatrix kann direkt aus der Normalmatrix $(\bullet 110)$ abgelesen werden. Ein anderes Beispiel: macht p das Ereignis q echt notwendig, ohne dass bestimmt ist, ob auch bei q p notwendig ist (es gilt entweder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{E}$, d.h. die Relation $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}$), haben wir die Normalmatrix $(10\bullet 1)$ und die Modalitätenmatrix $(\mathcal{NCPU})$: bei p ist q notwendig, und bei $\sim$q ist p unmöglich; bei $\sim$p aber ist q jedenfalls nicht notwendig, und bei q ist p jedenfalls nicht unmöglich. – Beispiel 3: besteht zwischen den Ereignissen p und q entweder der konträre Gegensatz ($\mathbb{D}$) oder der kontradiktorische Gegensatz ($\mathbb{J}$) also die Relation $\mathbb{D} \Cup \mathbb{J}$, ergibt sich die Normalmatrix $(011\bullet)$ und die Modalitätenmatrix $(\mathcal{UCUC})$: bei p ist q und bei q ist p unmöglich; bei $\sim$p ist q und bei $\sim$q ist p jedenfalls nicht notwendig. Die beliebige *nichtleere* zweistellige logische Relation kann durch den Ausdruck „$(\circ\circ\circ\circ)(p,q)$“ dargestellt werden; zumindest einer der Vorkommenskombinationen ist realmöglich: alle Paare von Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen in dieser Beziehung.

Anmerkungen zu Teil I, Kapitel 1

1 p, q, r,… sind Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen; mit den Frakturbuchstaben $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ bezeichne ich Abkürzungen bestimmter, *konkreter* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „eine Zahl ist größer als zwei“, „durch ein Stück Draht fließt elektrischer Strom“.

2 Die Sachverhalte *rm*($\sim$p) und *nrm*(p) sind strikt zu unterscheiden. Da bei *rm($\sim$p)* stets auch *rm*(p) gilt, sind *rm*($\sim$p) [= *rm*(p)] und *nrm*(p) kontradiktorische Gegensätze.

3 Realmöglich wäre die Sachverhalts-/Ereignisklasse, dass ein Mensch 100 Jahre alt wird, nicht-realmöglich hingegen die Sachverhalts-/Ereignisklasse, dass ein Mensch 300 Jahre alt wird oder er sich zugleich an zwei verschiedenen Orten aufhält.

4 Das heißt dadurch, dass eine der Vorkommenskombinationen als realmöglich oder nichtrealmöglich bestimmt ist, ist die Bestimmung der anderen Vorkommenskombinationen noch nicht determiniert. Jede einzelne Vorkommenskombination muss für sich, unabhängig von den anderen Vorkommenskombinationen auf Realmöglichkeit hin geprüft werden.

5 Wenn wir das Implikationsgesetz ***Wenn** durch einen Draht elektrischer Strom fließt* ($\mathfrak{p}$), ***dann** erwärmt sich dieser Draht* ($\mathfrak{q}$) behaupten, wollen wir sagen, dass ein von Strom durchflossener Draht notwendig (ohne Ausnahme) erwärmt wird (Modalisierungsfall α: relativ zu $\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{q}$ notwendig), während die Erwärmung eines Drahtes nicht in jedem Falle durch das Durchfließen eines Stroms bedingt ist (Modalisierungsfall β: relativ zu $\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{p}$ nur möglich ($\mathcal{K}$), nicht notwendig); die Gesetzesaussage bringt außerdem zum Ausdruck, dass es, wenn ein Draht nicht erwärmt wird, nie vorkommt, dass Strom durch diesen Draht fließt (Modalisierungsfall δ: bei $\sim\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{p}$ unmöglich), und dass, falls durch einen Draht kein Strom fließt, dieser Draht in dem einen Falle erwärmt sein kann, in einem anderen Falle nicht (Modalisierungsfall γ: relativ zu $\sim\mathfrak{p}$ ist also $\mathfrak{q}$ möglich im Sinne von $\mathcal{K}$).

6 Diese Einteilung der Modalitäten in *notwendig*, *unmöglich*, *möglich* (im Sinne von *nicht unmöglich*) und *zufällig* (im Sinne von *nicht notwendig*) ist in der traditionellen und modernen Logik vorherrschend; vgl. etwa **BOCHEŃSKI/MENNE**, Grundriss der Logistik, S.112f; **J.A.SLININ**, Die Modalitätentheorie in der modernen Logik, S.362f.

7 „$\mathcal{N}(p,q)$" bedeutet: bei p ist q notwendig; „$\sim\mathcal{N}(p,q)$" bedeutet: bei p ist q nicht notwendig; „$\mathcal{N}(\sim p,q)$" bedeutet: bei $\sim$p ist q notwendig; „$\mathcal{N}(p,\sim q)$" bedeutet: bei p ist $\sim$q notwendig. Für die Ausdrücke „$\mathcal{K}$", „$\mathcal{U}$", „$\mathcal{Z}$", „$\mathcal{M}$" gilt Entsprechendes.

8 Der Bereich des Meinbaren (τὸ δοξαστόν), schreibt **ARISTOTELES**, ist weiter als der Umfang des Seienden und Wissbaren; er umfasst das Seiende und das Nichtseiende. Vgl. Top. Δ 1, 121a 20-26, b 1-4.

9 Es gelten deshalb für alle Ereignisse p die Gesetze: $rm(p) \leftarrow \mathcal{N}(p)$; $rm(p) \leftarrow \mathcal{U}(p)$ und $rm(p) \leftarrow \mathcal{K}(p)$: $\mathcal{N}(p)$ bzw. $\mathcal{U}(p)$ bzw. $\mathcal{K}(p)$ gelten nur, wenn $rm(p)$ gilt.

10 Dieses Gesetz bedeutet nicht, dass in einer Situation sowohl p wie $\sim$p vorliegen könnte, sondern nur, dass es relativ zum Vorliegen eines zweiten Ereignisses einerseits Fälle gibt, wo p vorliegt, und andererseits auch *andere* Fälle gibt, wo p nicht vorliegt.

11 „$\mathcal{C}(p)$" ($\equiv$ „p ist jedenfalls nicht relativ notwendig)" darf nicht mit $\mathcal{Z}(p)$ verwechselt werden.

Bezeichnen „A" und „B" irgendwelche Ausdrücke, dann bedeutet „A $\equiv$ B": A hat dieselbe Bedeutung wie B.

12 Führt von einer Bestimmung ein Pfeil zu einer anderen Bestimmung, dann impliziert die erste Bestimmung die zweite.

13 Die in der Tafel dargelegten logischen Beziehungen dürfen auf keinen Fall den Aussagejunktoren oder „Wahrheitswertfunktionen" der „modernen Logik" gleichgestellt werden, sie sind von diesen radikal verschieden, sie haben eine völlig verschiedenen Gehalt und eine ganz andere Struktur. Die Namen (etwa „Implikation") und Ausdrücke wie „p" oder „$p \rightarrow q$" werden auch dort verwandt, haben aber eine ganz andere Bedeutung. Man müsste, zumindest bis die Beziehungen der hier dargelegten Formen zu denen der „modernen Logik" geklärt sind, eigentlich immer von „bedingungslogischer Implikation", „bedingungslogischem Form", „bedingungslogischem Gesetz" usw. reden; da ich im ersten Teil dieser Arbeit nur bedingungslogische Beziehungen behandle, kann dieser *immer mitgemeinte* Zusatz wegfallen.

14 Zum umgangssprachlichen Ausdruck dieser zweistelligen bedingungslogischen Zusammenhänge:

Bei p kann q vorliegen und umgekehrt.
Alternation: p oder q (oder beides) liegt vor.
Replikation: nur wenn p, dann q
Implikation: wenn p, dann q (und nicht umgekehrt)
Exklusion: p und q liegen jedenfalls nicht beide zusammen vor.
Äquivalenz: Wenn p, genau dann q.
Pränonpendenz: Keinesfalls p, gleichgültig ob q vorliegt oder nicht.
Postnonpendenz: Keinesfalls q, gleichgültig ob p vorliegt oder nicht.
Postpendenz: Jedenfalls q, gleichgültig ob p vorliegt oder nicht.
Präpendenz: Jedenfalls p, gleichgültig ob q vorliegt oder nicht.
Kontravalenz: Entweder liegt p oder q vor.
Konjunktion: Von p und q liegen beide vor.
Postsektion: p liegt ohne q vor.
Präsektion: q liegt ohne p vor.
Rejektion: Weder p noch q liegt vor.

Es gibt immer mehrere Möglichkeit einen solchen zweistelligen Gesetzeszusammenhang umgangssprachlich auszudrücken: die Implikation z. B.: Bei p liegt notwendig auch q vor (aber nicht umgekehrt). Exklusion: von p und q liegt entweder höchsten eines oder keines vor. Bei p ist q unmöglich, während, wenn p nicht vorliegt, q vorliegen kann.

15 Die Normalmatrizen zeigen unmittelbar, dass diese sechs Totalformen den angegebenen Bedingungen genügen: (1001), (1010), (0101), (0110), (1110) und (1101).

16 Die zu jeder n-elementigen (also *endlichen*) Menge M gehörende Potenzmenge (Menge aller möglichen Teilmengen) $\mathfrak{P}(M)$ hat genau 2^n Elemente.

17 Jede Teilmenge der Menge der 15 nichtleeren logischen Totalformen bestimmt insofern eine zweistellige logische Relation Θ(p,q), als einem Paar (p,q) diese Relation Θ(p,q) zukommt, wenn ihm eine der der betreffenden Teilmenge zugehörigen Totalformen zukommt. Da jede der 15 nichtleeren Totalformen einer Teilmenge entweder angehört oder nicht angehört, gibt es 2^{15} verschiedene Teilmengen; eine davon ist aber leer und muss abgezogen werden.

18 Wir erhalten die folgenden einstelligen logischen Formen:

1. $\mathcal{K}$(p): (11)(p) – Totalform, elementare Modalität
2. $\mathcal{N}$(p): (10)(p) – Totalform, elementare Modalität
3. $\mathcal{U}$(p): (01)(p) – Totalform, elementare Modalität
4. $\sim\mathcal{N}$(p) = $\mathcal{P}$(p): (1•)(p); entweder (11)(p) oder (10)(p) – Partialform, nicht-elementare Modalität
5. $\sim\mathcal{U}$(p) = $\mathcal{C}$(p): (•1)(p); entweder (11)(p) oder (01)(p) – Partialform, nicht-elementare Modalität
6. $\sim\mathcal{K}$(p) = $\mathcal{A}$(p): entweder (10)(p) oder (01)(p) – Partialform, nicht-elementare Modalität
7. (∘∘)(p): entweder (11)(p) oder (10)(p) oder (01)(p) – Partialform: dieses nichtelementare Modalitäten-Prädikat kommt jedem Sachverhalt/Ereignis relativ zu jedem anderen Sachverhalt/Ereignis zu; es ist ein „Allprädikat“, d.h. ein Prädikat, das allen geeigneten Gegenständen (hier Sachverhalts-/Ereignisklassen) zukommt.

19 Die durch Negation von $\mathcal{K}$ abgeleitete Modalität $\mathcal{A}$ kann durch die Bedingung *entweder ist nur Vorkommenskombination I oder nur Vorkommenskombination II realmöglich* definiert und bezeichnet werden.