I, Kapitel 3. Logische Gesetze

In einer logischen Untersuchung gilt das Interesse nicht den Gesetzmäßigkeiten, die zwischen konkreten Sachverhalts-/Ereignisklassen bestehen, sondern es sollen die allgemeinen und notwendigen Bedingungen erkannt werden, die gegeben sein müssen, wenn beliebigen Sachverhalts-/Ereignisklassen eine logische Relation bestimmter Art zugesprochen werden soll. Wir müssen von *beliebigen* Sachverhalts-/Ereignisklassen reden und diese durch *Beliebig-Element-Zeichen* wie „p“, „q“, „r“, „s“,… bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass Sachverhalts-/Ereignisklassen und ihre Vorkommenskombinationen eindeutig identifizierbar sind, und dass wir Ereignisklassen und diese Kombinationen korrekt als realmöglich oder nichtrealmöglich bestimmen können, können wir die Gesamtheit aller nur möglichen n-stelligen logischen Relationen für jede beliebige natürliche Zahl *n* konstruieren. Das *konkrete* Implikationsgesetz „Wenn durch einen Draht Strom fließt, erwärmt sich dieser Draht“ spricht von jedem beliebigen Draht, durch den Strom fließt, bzw. der erwärmt wird; aber auch bezüglich dieser Implikationsbeziehungen und anderer bedingungslogischer Beziehungen lässt sich sinnvoll über *jeden beliebigen Fall* reden, in dem diese Gesetzesbeziehungen zwischen *irgendwelchen* beliebigen Sachverhalts-/Ereignisklassen gelten bzw. nicht gelten. Wie eine konkrete zweistellige Relation (z.B. *…ist Vater von…*) unbestimmt vielen Paaren einzelner Individuen zukommt, so besteht eine logische Relation wie die Implikation zwischen unbestimmt vielen Paaren konkreter Sachverhalts-/Ereignisklassen. Der Ausdruck „$p \rightarrow q$“ bezeichnet eine bestimmte Struktur eines gesetzmäßigen Zusammenhangs, nämlich jeden beliebigen Fall eines Gesetzes, in dem irgendeine Ereignisklasse p irgendeine Ereignisklasse q impliziert, wobei dieser Zusammenhang immer ein und dasselbe Ereignis-Bezugssystem ganz bestimmter Art betrifft. Wie für jedes echte Ereignis p die Realmöglichkeit, also rm(p) vorausgesetzt wird, so gilt auch für $p \rightarrow q$: rm($p \rightarrow q$), denn es ist möglich, dass diese Gesetzesbeziehung zwischen zwei Ereignisklassen gilt, und dass sie zwischen zwei anderen Ereignisklassen nicht gilt; es können für alle Paare von Ereignisklassen die normativen Bedingungen dafür bestimmt werden, die gegeben sein müssen, wenn zwischen ihnen die Relation der Implikation besteht und wenn zwischen ihnen diese Relation nicht besteht. Auch zwischen diesen allgemeinen *logischen Sachverhalten* (*Sachverhaltsklassen*) – zwischen irgendwelchen Ereignisklassen gelten diese oder jene bedingungslogischen Beziehungen – gelten exakt und eindeutig bestimmbare bedingungslogische Beziehungen, und es obliegt der Logik, diese gesetzmäßigen Beziehungen zwischen logischen Sachverhalten in *logischen Gesetzen* zu formulieren und ihre Gültigkeit nachzuweisen. Es gibt verschiedene Typen solcher logischer Gesetze: bedingungslogische Beziehungen zwischen beliebigen ereignislogischen Formen (ich spreche von „elementaren logischen Gesetzen“), Obversions- und Konversionsgesetze, sowie Gesetze der mehrdeutigen und eindeutigen Verkettung solcher ereignislogischer Relationen; alle logischen Gesetze, welche die traditionelle, vorlogistische Logik darstellt, gehören diesen Typen an. Ich werde im Folgenden Verfahren darlegen, durch welche jedes beliebige logische Gesetz dieser Typen auf seine Wahrheit geprüft werden kann.

3.1. Elementare logische Gesetze

Wir haben zwei logische Relationen: Δ und Λ; M_{Δ} ist die Menge der Sachverhalts-/Ereignisklassen, die Relata der Relation Δ sind; ich sage: „die logische Relation Δ bezieht sich auf die Elemente (Sachverhalts-/Ereignisklassen) der Menge M_{Δ}“. Für M_{Λ} entsprechend.

Jede logische Relation Δ kann als Prädikatenvereinigung der logischen Totalformen $\text{Ŧ}_{\Delta 1}$, $\text{Ŧ}_{\Delta 2}$, …, $\text{Ŧ}_{\Delta n}$ gefasst werden, die unter sie fallen: $\Delta = \text{Ŧ}_{\Delta 1} \Cup \text{Ŧ}_{\Delta 2} \Cup \ldots \Cup \text{Ŧ}_{\Delta n}$.

Ich sage: „Δ umfasst jede Totalrelation $\text{Ŧ}_{\Delta i}$“; und „$\text{Ŧ}_{\Delta i}$ ist in Δ enthalten“.

Beispielsweise ist $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}(p, q)$ [= (10•1)(p, q)] jene Relation, die zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q genau dann gilt, wenn für (p, q) entweder $p \rightarrow q$ oder $p \leftrightarrow q$ gilt.

$[\mathbb{B}\mathbb{X}] \Cup [\mathbb{A}\mathbb{D}] \Cup [\mathbb{C}\mathbb{V}](p, q, r)$ ist jene logische Relation, die zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p, q, r genau dann gilt, wenn entweder $[p, q, r\ \mathbb{B}\mathbb{X}]$ oder $[p, q, r\ \mathbb{A}\mathbb{D}]$ oder $[p, q, r\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$ gilt.

Logische Relationen sind wohlbestimmte logische Sachverhaltsklassen, d.h. die Bedingungen für die Geltung und Nichtgeltung einer logischen Relation stehen definitiv fest. Zwischen zwei beliebigen logischen Relationen gilt somit selbst wieder eine eindeutig bestimmbare logische Totalrelation. Die *elementaren logischen Gesetze* sind jene Aussagen, die besagen, dass zwischen zwei gegebenen logischen Formen eine bestimmte logische Relation gilt.

Die logischen Gesetze sind strikt von den logischen Formen selbst zu unterscheiden: der apophantische Ausdruck „$(p\rightarrow q)\uparrow(p\leftrightarrow q)$“ bezeichnet eine apophantisch-wahrheitswertdefinite Gesetzes*aussage*, der nicht-apophantische Ausdruck „$p\rightarrow q$“ bezeichnet eine logische Sachverhaltsklasse.

Die zwischen zwei beliebigen logischen Formen Δ und Λ geltende logische Totalform lässt sich auf folgende Weise bestimmen[1]:

Es seien irgendeine Relation Δ mit M_Δ und eine logische Relation Λ gegeben mit M_Λ.

Jede logische Form Δ entspricht dann *eineindeutig* einer logischen *Partial*form $\Delta_{\Delta\cup\Lambda}$, die sich auf die Elemente der Menge $M_\Delta\cup M_\Lambda$ bezieht. Entsprechendes gilt für Λ.

Es kommt jede einzelne Vorkommenskombination, die sich aus den Elementen der Menge M_Δ bilden lässt, mehrere Male in den Vorkommenskombinationen vor, die sich aus den Vorkommenskombinationen der Elemente von $M_\Delta\cup M_\Lambda$ bilden lassen. Die Vorkommenskombinationen der Elemente von $M_\Delta\cup M_\Lambda$, in denen eine Vorkommenskombination von Δ vorkommt, nenne ich die durch diese Vorkommenskombination in $M_\Delta\cup M_\Lambda$ *induzierten Vorkommenskombinationen*.

Beispiel 1: M_Δ sei $\{p,q\}$, M_Λ sei $\{q,r\}$; $M_\Delta\cup M_\Lambda = \{p,q,r\}$.

- Die Vorkommenskombination $p\frown q$ kommt in $p\frown q\frown r$ und $p\frown q\frown{\sim}r$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown{\sim}q$ kommt in $p\frown{\sim}q\frown r$ und $p\frown q\frown{\sim}r$ vor;
- die Vorkommenskombination ${\sim}p\frown q$ kommt in ${\sim}p\frown q\frown r$ und ${\sim}p\frown q\frown{\sim}r$ vor;
- die Vorkommenskombination ${\sim}p\frown{\sim}q$ kommt in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown r$ und ${\sim}p\frown{\sim}q\frown{\sim}r$ vor.

Beispiel 2: M_Δ sei $\{p,q,r\}$, M_Λ sei $\{s,t\}$; $M_\Delta\cup M_\Lambda = \{p,q,r,s,t\}$.

- Die Vorkommenskombination $p\frown q\frown r$ kommt in $p\frown q\frown r\frown s\frown t$, in $p\frown q\frown r\frown s\frown{\sim}t$, in $p\frown q\frown r\frown{\sim}s\frown t$, in $p\frown q\frown r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown q\frown{\sim}r$ kommt in $p\frown q\frown{\sim}r\frown s\frown t$, in $p\frown q\frown{\sim}r\frown s\frown{\sim}t$, in $p\frown q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown t$, in $p\frown q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown{\sim}q\frown r$ kommt in $p\frown{\sim}q\frown r\frown s\frown t$, in $p\frown{\sim}q\frown r\frown s\frown{\sim}t$, in $p\frown{\sim}q\frown r\frown{\sim}s\frown t$, in $p\frown{\sim}q\frown r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown{\sim}q\frown{\sim}r$ kommt in $p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown s\frown t$, in $p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown s\frown{\sim}t$, in $p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown t$, in $p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor;
- die Vorkommenskombination ${\sim}p\frown q\frown r$ kommt in ${\sim}p\frown q\frown r\frown s\frown t$, in ${\sim}p\frown q\frown r\frown s\frown{\sim}t$, in ${\sim}p\frown q\frown r\frown{\sim}s\frown t$, in ${\sim}p\frown q\frown r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor;
- die Vorkommenskombination ${\sim}p\frown q\frown{\sim}r$ kommt in ${\sim}p\frown q\frown{\sim}r\frown s\frown t$, in ${\sim}p\frown q\frown{\sim}r\frown s\frown{\sim}t$, in ${\sim}p\frown q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown t$, in ${\sim}p\frown q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor;
- die Vorkommenskombination ${\sim}p\frown{\sim}q\frown r$ kommt in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown r\frown s\frown t$, in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown r\frown s\frown{\sim}t$, in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown r\frown{\sim}s\frown t$, in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor;
- die Vorkommenskombination ${\sim}p\frown{\sim}q\frown{\sim}r$ kommt in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown s\frown t$, in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown s\frown{\sim}t$, in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown t$, in ${\sim}p\frown{\sim}q\frown{\sim}r\frown{\sim}s\frown{\sim}t$ vor.

Eine logische Relation Δ mit M_Δ legt die ihr eineindeutig entsprechende Relation, die sich auf $M_\Delta\cup M_\Lambda$ bezieht, in folgender Weise fest.

Die unter Δ fallende Totalrelation $\text{Ŧ}_{\Delta 1}$ legt eine logische *Partial*relation in der Menge $M_\Delta\cup M_\Lambda$ in folgender Weise eineindeutig fest (die „durch $\text{Ŧ}_{\Delta 1}$ induzierte logische Relation“).

Ist eine Vorkommenskombination von $\text{Ŧ}_{\Delta 1}$ realmöglich, genau dann ist zumindest eine der ihr bezüglich $M_\Delta \cup M_\Lambda$ entsprechenden Vorkommenskombinationen realmöglich.

Ist eine Vorkommenskombination von $\text{Ŧ}_{\Delta 1}$ nichtrealmöglich, genau dann sind alle der ihr bezüglich $M_\Delta \cup M_\Lambda$ entsprechenden Vorkommenskombinationen nichtrealmöglich.

Die durch eine logische Totalform $\text{Ŧ}_{\Delta i}$ induzierte logische Relation, umfasst mehrere Totalformen.

3.1.1 Beispiel

Gegeben sei die logische Form $\Delta = \mathbb{K}\Cup\mathbb{J}(p,q)$, also $\text{Ŧ}_{\Delta 1} = p \wedge q$ und $\text{Ŧ}_{\Delta 2} = p \rtimes\ltimes q$.

$p \wedge q$ induziert in der Menge $\{p,q,r\}$ eineindeutig eine logische Relation, die durch die folgenden Bedingungen festgelegt ist:

1. da $p\frown q$ realmöglich ist, ist entweder $p\frown q\frown r$ realmöglich oder $p\frown q\frown\sim r$ oder beide realmöglich: $rm(p\frown q\frown r)\vee rm(p\frown q\frown\sim r)$.
2. da $p\frown\sim q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $p\frown\sim q\frown r$ noch $p\frown\sim q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(p\frown\sim q\frown r)$ & $nrm(p\frown\sim q\frown\sim r)$.
3. da $\sim p\frown q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $\sim p\frown q\frown r$ realmöglich noch $\sim p\frown q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(\sim p\frown q\frown r)$ & $nrm(\sim p\frown q\frown\sim r)$.
4. da $\sim p\frown\sim q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $\sim p\frown\sim q\frown r$ realmöglich noch $\sim p\frown\sim q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(p\frown q\frown r)$ & $nrm(p\frown q\frown\sim r)$.

Die logische Relation $p\wedge q$ induziert in $\{p,q,r\}$ also die logische Relation $[p,q,r\ (\circ\circ 00)\ \mathbb{O}] = [\mathbb{I}\mathbb{O}]\Cup[\mathbb{K}\mathbb{O}]\Cup[\mathbb{L}\mathbb{O}](p,q,r)$.

Die Menge der durch eine logische Relation Θ in einer Menge K von Sachverhalts-/Ereignisklassen induzierten Totalformen stelle ich durch den Ausdruck „$IM_{\Theta,K}$" dar.

Die Elemente der Menge $IM_{p\rtimes\ltimes q,\{p,q,r\}}$ sind durch die folgenden Bedingungen definiert:

1'. da $p\frown q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $p\frown q\frown r$ noch $p\frown q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(p\frown q\frown r)$ & $nrm(p\frown q\frown\sim r)$

2'. da $p\frown\sim q$ realmöglich ist, ist entweder $p\frown\sim q\frown r$ realmöglich oder $p\frown\sim q\frown\sim r$ oder beide realmöglich: $rm(p\frown\sim q\frown r)\vee rm(p\frown\sim q\frown\sim r)$

3'. da $\sim p\frown q$ realmöglich ist, ist entweder $\sim p\frown q\frown r$ realmöglich oder $\sim p\frown q\frown\sim r$ oder beide realmöglich: $rm(\sim p\frown q\frown r)\vee rm(\sim p\frown q\frown\sim r)$

4'. da $\sim p\frown\sim q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $\sim p\frown\sim q\frown r$ noch $\sim p\frown\sim q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(\sim p\frown\sim q\frown r)$ & $nrm(\sim p\frown\sim q\frown\sim r)$

Die durch $p \rtimes\ltimes q$ auf $\{p,q,r\}$induzierte Menge $IM_{p\rtimes\ltimes q,\{p,q,r\}}$ ist die Menge $\{[p,q,r\ \mathbb{F}\mathbb{I}], [p,q,r\ \mathbb{F}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{F}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{M}\mathbb{I}], [p,q,r\ \mathbb{M}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{M}\mathbb{L}], [p,q,r\ \mathbb{X}\mathbb{I}], [p,q,r\ \mathbb{X}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{X}\mathbb{L}]\}$

Die durch die logische Relation $\mathbb{C}\Cup\mathbb{J}(p,q)$ auf $\{p,q,r\}$ induzierte Menge von dreistelligen logischen Totalformen ist die Menge $IM_{\mathbb{C}\Cup\mathbb{J}(p,q),\{p,q,r\}} = IM_{p\wedge q,\{p,q,r\}} \cup IM_{p\rtimes\ltimes q,\{p,q,r\}}$.

Allgemein gilt: Sind zwei beliebige logische Relationen $\Delta = \text{Ŧ}_{\Delta 1}\Cup\text{Ŧ}_{\Delta 2}\Cup \ldots \Cup\text{Ŧ}_{\Delta n}$ und Λ gegeben, dann wird durch Δ in der Menge $M_\Delta \cup M_\Lambda$ eine logische Relation induziert, die die Elemente der Menge $IM_{\text{Ŧ}_{\Delta 1},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta 2},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup \ldots \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta n},M_\Delta\cup M_\Lambda}$ umfasst. Es gilt also:

$$IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} = IM_{\text{Ŧ}_{\Delta 1},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta 2},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup \ldots \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta n},M_\Delta\cup M_\Lambda}.$$

3.1.2. Die logische Beziehung zwischen 2 beliebigen logischen Formen Δ und Λ:

Gegeben seien zwei logische Relationen Δ und Λ. Es müssen auf die dargelegte Weise die Mengen $IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda}$ und $IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$ gebildet werden. Die Beziehungen, die zwischen diesen beiden Mengen bestehen, entsprechen eineindeutig den logischen Relationen, die den beiden logischen Formen Δ und Λ zukommen.

- Ist die Menge $IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$ nichtleer (es gibt dann logische Formen, die sowohl von Δ wie von Λ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann können Δ und Λ zusammen gelten. Die Vorkommenskombination I der logischen Form von Δ und Λ – also $\Delta \frown \Lambda$ – ist realmöglich.
- Ist die Menge $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ nichtleer (es gibt dann logische Formen, die wohl von Δ, nicht aber von Λ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann kann Δ ohne Λ gelten. Die Vorkommenskombination II der logischen Form von Δ und Λ – also $\Delta \frown \sim\Lambda$ – ist realmöglich.
- Ist die Menge $IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ nichtleer (es gibt dann logische Formen, die wohl von Λ, nicht aber von Δ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann kann Λ ohne Δ gelten. Die Vorkommenskombination III der logischen Form von Δ und Λ – also $\sim\Delta \frown \Lambda$ – ist realmöglich.
- Ist die Menge $\complement(IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda})$[2] nichtleer (es gibt dann logische Formen, die weder von Λ, noch von Δ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann können Λ und Δ beide nicht gelten. Die Vorkommenskombination IV der logischen Form von Δ und Λ – also $\sim\Delta \frown \sim\Lambda$ – ist realmöglich.

Die folgende Tabelle führt alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass zwischen zwei beliebigen logischen Relationen eine der möglichen nichtleeren zweistelligen Totalrelationen besteht.

$IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$	$IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$	$IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$	$\complement(IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda})$	$\Delta \boxplus \Lambda$
nichtleer	nichtleer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \top \Lambda$
nichtleer	nichtleer	nichtleer	leer	$\Delta \vee \Lambda$
nichtleer	nichtleer	leer	nichtleer	$\Delta \leftarrow \Lambda$
nichtleer	leer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \rightarrow \Lambda$
leer	nichtleer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \uparrow \Lambda$
nichtleer	leer	leer	nichtleer	$\Delta \leftrightarrow \Lambda$
leer	leer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \rceil \Lambda$
leer	nichtleer	leer	nichtleer	$\Delta \lceil \Lambda$
nichtleer	leer	nichtleer	leer	$\Delta \lfloor \Lambda$
nichtleer	nichtleer	leer	leer	$\Delta \rfloor \Lambda$
leer	nichtleer	nichtleer	leer	$\Delta \succ\!\!\prec \Lambda$
nichtleer	leer	leer	leer	$\Delta \wedge \Lambda$
leer	nichtleer	leer	leer	$\Delta \succcurlyeq \Lambda$
leer	leer	nichtleer	leer	$\Delta \preccurlyeq \Lambda$
leer	leer	leer	nichtleer	$\Delta \downarrow \Lambda$

Da für zwei gegebene logische Formen Δ und Λ sich die Mengen $IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ und $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ immer konstruieren lassen, kann die logische Relation, die zwischen zwei logischen Formen gilt, immer eindeutig bestimmt werden.

3.2. Die Verkettungsrelation – das Relationenprodukt von logischen Formen.

Gibt es zu einer Relation R zwischen einem ersten und zweiten Element, und zu einer Relation S zwischen diesem zweiten und einem dritten Element eine Relation $R \cdot S$, die zwischen dem ersten und dritten Element besteht, heißt die Relation $R \cdot S$ das *Relationenprodukt* von R und S. Man spricht auch von der *Verkettung*, der *Multiplikation* oder der *Komposition* der Relationen R und S. Auch logische Relationen besitzen genau dann ein Relationenprodukt; wenn es beispielsweise bei Geltung von verträglichen logischen Formen $(p \boxplus q)$ und $(q \boxminus r)$ eine zweistellige logische Relation $(p \boxtimes r)$ gilt, wobei die Zeichen ⊞, ⊟ und ⊠ irgendwelche zweistellige (nicht notwendig paarweise verschiedene) logische Relationen bezeichnen sollen. Sind zwei Relationen R_1 und R_2 von jeweils beliebiger Stelligkeit gegeben, so ist das Relationenprodukt $R_1 \cdot R_2$ die Relation, die zwischen den Elementen, die Relata von R_1, aber nicht von R_2 sind, und den Elementen, die Relata von R_2, nicht aber von R_1 sind.

Für zwei beliebige vorgegebene logische Relationen Δ und Λ gibt es genau dann ein Relationenprodukt $\Delta \cdot \Lambda$, wenn die Menge $IM_{\Delta,M_\Delta \cup M_\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M_\Delta \cup M_\Lambda}$ nicht leer ist. Die Menge der Sachverhalts-/Ereignisklassen, auf die sich die Verkettungsrelation $\Delta \cdot \Lambda$ bezieht, ist die Menge der Sachverhalts-/Ereignisklassen, auf die sich Δ oder Λ, aber nicht beide beziehen: $M_{\Delta \cdot \Lambda} = M_\Delta \cup M_\Lambda \backslash M_\Delta \cap M_\Lambda$.

Für zwei logische Relationen Δ und Λ sei die Menge $IM_{\Delta,M_\Delta \cup M_\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M_\Delta \cup M_\Lambda}$ nicht leer. Gilt eine der zu $IM_{\Delta,M_\Delta \cup M_\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M_\Delta \cup M_\Lambda}$ gehörenden Totalformen, dann gelten einerseits zugleich auch Δ und Λ, aber es gilt genau dann auch eine bestimmte Totalform, die zum Relationenprodukt $\Delta \cdot \Lambda$ gehört.

Für jede logische Totalform, die zur Menge $IM_{\Delta,M_\Delta \cup M_\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M_\Delta \cup M_\Lambda}$ lässt sich eineindeutig die logische Relation bestimmen, die zwischen den Elemente der Menge $M_\Delta \cup M_\Lambda \backslash M_\Delta \cap M_\Lambda = M_{\Delta \cdot \Lambda}$ gilt.

Jeder Vorkommenskombination, die sich aus den Elementen der Menge $M_{\Delta \cdot \Lambda}$ bilden lässt, kommt mehrere Male in den Vorkommenskombinationen vor, die sich aus den Elementen von $M_\Delta \cup M_\Lambda$ bilden lassen. Es seien nun $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ die logischen *Total*formen, die zur Menge $IM_{\Delta,M_\Delta \cup M_\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M_\Delta \cup M_\Lambda}$ gehören. Ist zumindest eine der Vorkommenskombinationen von Ψ_1 realmöglich, die einer bestimmten Vorkommenskombination von $\Delta \cdot \Lambda$ entsprechen, genau dann ist auch die betreffende Vorkommenskombination von $\Delta \cdot \Lambda$ realmöglich. Sind alle Vorkommenskombinationen von Ψ_1 nichtrealmöglich, die einer bestimmten Vorkommenskombination von $\Delta \cdot \Lambda$ entsprechen, genau dann ist auch die betreffende Vorkommenskombination von $\Delta \cdot \Lambda$ nichtrealmöglich. Gilt also Ψ_1, genau dann gilt eine logische Totalform $Ŧ_{(\Delta \cdot \Lambda)1}$. Es gilt: $\Psi_1 \leftrightarrow Ŧ_{(\Delta \cdot \Lambda)1}$; $\Psi_2 \leftrightarrow Ŧ_{(\Delta \cdot \Lambda)2}$; … $\Psi_k \leftrightarrow Ŧ_{(\Delta \cdot \Lambda)k}$. Die Verkettungsrelation $\Delta \cdot \Lambda$ ist dann die Relation $Ŧ_{(\Delta \cdot \Lambda)1} \Cup Ŧ_{(\Delta \cdot \Lambda)2} \Cup \ldots \Cup Ŧ_{(\Delta \cdot \Lambda)k}$.

Dieses Vorgehen möchte ich am Beispiel der Verkettung zweistelliger Totalformen illustrieren.

Gegeben seien die beiden Relationen $p \rightarrow q$ und $p >\!\!< q$. Es sind einerseits die logischen Totalformen zu bestimmen, die zur Menge $IM_{p \rightarrow q,\{p,q,r\}}$ gehören, andererseits die logischen Totalformen, die zur Menge $IM_{p >< q,\{p,q,r\}}$ gehören; gelten $p \rightarrow q$ und $p >\!\!< q$ zusammen, genau dann gilt eine der Totalformen, die zur Menge $IM_{p \rightarrow q,\{p,q,r\}} \cap IM_{p >< q,\{p,q,r\}}$ gehören. Die Totalformen, die der Menge $IM_{p \rightarrow q,\{p,q,r\}} \cap IM_{p >< q,\{p,q,r\}}$ angehören, müssen sowohl den Bedingungen genügen, die durch $p \rightarrow q$ für $IM_{p \rightarrow q,\{p,q,r\}}$ und die durch $p >\!\!< q$ $IM_{p >< q,\{p,q,r\}}$ festgelegt sind.

Durch $p \rightarrow q$ sind die ersten vier Bedingungen der der Menge $IM_{p \rightarrow q,\{p,q,r\}} \cap IM_{p >< q,\{p,q,r\}}$ angehörenden logischen Totalformen festgelegt.

1. Bei $p \rightarrow q$ ist $p \frown q$ realmöglich, und so ist entweder $p \frown q \frown r$ (Vorkommenskombination I der dreistelligen Relation) realmöglich, oder $p \frown q \frown \sim r$ (Vorkommenskombination II) realmöglich, oder beide Fälle sind realmöglich; diese Bedingung bezeichne ich durch „rm(I) $\vee$ rm(II)“, was bedeutet: zumindest einer der beiden Vorkommenskombinationen I und II ist realmöglich.
2. Bei $p \rightarrow q$ ist $p \frown \sim q$ nichtrealmöglich, und so ist sowohl $p \frown \sim q \frown r$ (Vorkommenskombination III) wie $p \frown \sim q \frown \sim r$ (Vorkommenskombination IV) nichtrealmöglich; ich bezeichne diese Bedingung durch „nrm(III) & nrm(IV)“, was bedeutet: sowohl Vorkommenskombination II wie Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich.

In entsprechender Weise werden die restlichen Bedingungen der der Menge $IM_{p \rightarrow q,\{p,q,r\}} \cap IM_{p >< q,\{p,q,r\}}$ angehörenden logischen Totalformen festgelegt:

3. rm($\sim p \frown q$), also: rm(V) $\vee$ rm(VI).
4. rm($\sim p \frown \sim q$), also: rm(VII) $\vee$ rm(VII).

Durch die Beziehung $q >\!\!< r$ sind weitere vier Bedingungen der der Menge $IM_{p \rightarrow q,\{p,q,r\}} \cap IM_{p >< q,\{p,q,r\}}$ angehörenden logischen Totalformen determiniert:

5. nrm($q \frown r$), also: nrm(I) & nrm(V); aus dieser Bedingung und den Bedingungen (1) und (3) folgt: rm(II) & rm(VI).
6. rm($q \frown \sim r$), also: rm(II) $\vee$ rm(VI).
7. rm($\sim q \frown r$), also: rm(III) $\vee$ rm(VII); aus dieser Bedingung und der Bedingung (2) folgt: rm(VII).
8. nrm($\sim q \frown \sim r$), also: nrm(IV) & nrm(VIII).

Die beiden Beziehungen $p \rightarrow q$ und $q \rightarrowtail\!\!\!\!\prec r$ legen somit eindeutig eine dreistellige Totalform fest: $(0100\ 0110)(p,q,r)$; $IM_{p \rightarrow q, \{p,q,r\}} \cap IM_{p \succ\!\prec q, \{p,q,r\}} = \{[p, q, r\ \mathbb{L}\mathbb{J}]$ und es gilt also das logische Äquivalenzgesetz: Für alle p, q und r: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \succ\!\prec r)] \leftrightarrow [p\ , q,\ r\ \mathbb{L}\mathbb{J}]$.

Aus $[p, q,\ r\ \mathbb{L}\mathbb{J}]$ kann – gewissermaßen durch die „Umkehrung“ des eben durchgeführten Verfahrens – die Beziehung abgelesen werden, die unabhängig von q zwischen p und r besteht: $p \frown r$ ist nur dann realmöglich, wenn von $p \frown q \frown r$ (Vorkommenskombination I) oder $p \frown {\sim} q \frown r$ (Vorkommenskombination II) zumindest einer realmöglich ist; dies ist hier nicht der Fall. $p \frown {\sim} r$ ist nur realmöglich, wenn von $p \frown q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination II) oder von $p \frown {\sim} q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination IV) zumindest einer realmöglich ist; dies trifft hier zu. Der Vorkommenskombination ${\sim} p \frown r$ ist realmöglich nur dann, wenn von ${\sim} p \frown q \frown r$ (Vorkommenskombination V) oder ${\sim} p \frown {\sim} q \frown r$ (Vorkommenskombination VII) mindestens einer realmöglich ist, was hier zutrifft. ${\sim} p \frown {\sim} r$ ist nur realmöglich, wenn von ${\sim} p \frown q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination VI) oder ${\sim} p \frown {\sim} q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination VIII) wenigstens einer realmöglich ist, was hier zutrifft. Aus $[p, q,\ r\ \mathbb{L}\uparrow]$ folgt also implikativ $p \Uparrow r$, und es gilt das Verkettungsgesetz: Für alle p, q, r: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \succ\!\prec r)] \rightarrow (p \Uparrow r)$. Umfasst das Relationenprodukt $\Delta \cdot \Lambda$ zweier logischer Relationen Δ und Λ nur eine einzige Totalform spreche ich von einer *eindeutigen Verkettung*. Es kann gezeigt werden, dass es für die zweistelligen logischen Totalformen genau 82 eindeutige Verkettungen gibt. In einem solchen Verkettungsgesetz $[(p \boxplus q) \wedge (q \boxminus r)] \rightarrow (p \boxtimes r)$ nenne ich $p \boxplus q$ das erste Oberglied (O_1) und $q \boxminus r$ das zweite Oberglied (O_2) und $p \boxtimes r$ das Unterglied (U).

Besteht zwischen p und q die logische Totalform Ω_1, zwischen q und r die Totalform Ω_2 und ist das eindeutige Relationenprodukt $\Omega_3(p,r)$, dann stelle ich das Verkettungsgesetz durch den Ausdruck „$\Omega_1\Omega_2\Omega_3$“ dar; das Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ durch den Ausdruck „$\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}$“, das Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (q \succ\!\prec r)] \rightarrow (p \Uparrow r)$ durch den Ausdruck „$\mathbb{C}\mathbb{J}\mathbb{D}$“, usw.

Die Oberglieder können je einzeln oder beide durch ihre äquivalenten Konversen ersetzt werden; dies führt dann auf Verkettungs-„Figuren“ $[(q \boxplus p) \wedge (q \boxminus r)] \rightarrow (p \boxtimes r)$, $[(p \boxplus q) \wedge (r \boxminus q)] \rightarrow (p \boxtimes r)$ und $[(q \boxplus p) \wedge (r \boxminus q)] \rightarrow (p \boxtimes r)$. Die „Figuren“ unterscheiden sich nach der Stellung der Sachverhalts-/Sachverhalts-/Ereignisklasse, die in beiden Obergliedern vorkommt. Diese Verkettungsgesetze lassen sich auf der Basis der Konversionsgesetze für zweistellige logische Relationen und der untenstehenden Tabelle der eindeutigen Verkettungen zweistelliger logischer Totalformen leicht bestimmen.

Tabelle 1: Die eindeutigen Verkettungen der zweistelligen logischen Totalformen

1.Oberglied	2.Oberglied	Unterglied
p ⊤ q	q ↔ r	p ⊤ r
	q ≻≺ r	p ⊤ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
p ∨ q	q → r	p ∨ r
	q ↑ r	p ← r
	q ↔ r	p ∨ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q ≻≺ r	p ← r
p ← q	q ∨ r	p ∨ r
	q ← r	p ← r
	q ↔ r	p ← r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q ≻≺ r	p ← r
p → q	q → r	p → r
	q ↑ r	p ↑ r
	q ↔ r	p → r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q ≻≺ r	p ↑ r
p ↑ q	q ∨ r	p → r
	q ← r	p ↑ r
	q ↔ r	p ↑ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q ≻≺ r	p ↑ r

1.Oberglied	2.Oberglied	Unterglied
p ↔ q	q ⊤ r	p ⊤ r
	q ∨ r	p ∨ r
	q ← r	p ← r
	q → r	p → r
	q ↑ r	p ↑ r
	q ↔ r	p ↔ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q ≻≺ r	p ≻≺ r
p ⌉ q	q ⊤ r	p ⊤ r
	q ∨ r	p ⌉ r
	q ← r	p ⌉ r
	q → r	p ⌉ r
	q ↑ r	p ⌉ r
	q ↔ r	p ⌉ r
	q ⌈ r	p ↓ r
	q ⌊ r	p ≽ r
	q ≻≺ r	p ≻≺ r
p ⌋ q	q ⊤ r	p ⌋ r
	q ∨ r	p ⌋ r
	q ← r	p ⌋ r
	q → r	p ⌋ r
	q ↑ r	p ⌋ r
	q ↔ r	p ⌋ r
	q ⌈ r	p ≽ r
	q ⌊ r	p ∧ r
	q ≻≺ r	p ⌋ r

1.Oberglied	2.Oberglied	Unterglied
p ≻≺ r	q ⊤ r	p ⊤ r
	q ∨ r	p → r
	q ← r	p ↑ r
	q → r	p ∨ r
	q ↑ r	p ← r
	q ↔ r	p ≻≺ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q ≻≺ r	p ↔ r
p ⌈ q	q ⌉ r	p ⊤ r
	q ≼ r	p ⌊ r
	q ↓ r	p ⌈ r
p ⌊ q	q ⌋ r	p ⊤ r
	q ∧ r	p ⌊ r
	q ≽ r	p ⌈ r
p ∧ q	q ⌋ r	q ⌋ r
	q ∧ r	p ∧ r
	q ≽ r	p ≽ r
p ≽ q	q ⌉ r	p ⌋ r
	q ≼ r	p ∧ r
	q ↓ r	p ≽ r
p ≼ q	q ⌋ r	p ⌉ r
	q ∧ r	p ≼ r
	q ≽ r	p ↓ r
p ↓ q	q ⌉ r	p ⌉ r
	p ≼ r	p ≼ r
	q ↓ r	p ↓ r

Für die beiden Beziehungen $p\wedge q$ und $q\vee r$ ist die Menge $IM_{p_\wedge q,\{p,q,r\}} \cap IM_{p_\vee q,\{p,q,r\}}$ leer: es gibt kein Relationenprodukt, da sich die Bedingungen für $IM_{p_\wedge q,\{p,q,r\}}$ und $IM_{p_\vee q,\{p,q,r\}}$ widersprechen. Bei $p\wedge q$ ist der Fall $p\frown\sim q$ nichtrealmöglich, und es gilt für die Bestimmung der Normalmatrix der Elemente von $IM_{p_\wedge q,\{p,q,r\}}$: **nrm(III)** & nrm(IV). Bei $p \wedge q$ gilt außerdem nrm($\sim p\frown\sim q$), folglich: **nrm(VII)** & nrm(VIII). Bei $q \vee r$ ist $\sim q\frown r$ realmöglich, es gilt also: rm(III) ∨ rm(VII); dies steht im Widerspruch zu nrm(III) & nrm(VII).

Für die beiden Beziehungen $p\vee q$ und $q\vee r$ bestehen mehrere Relationenprodukte. Die beiden Beziehungen legen mit acht Restriktionen eine dreistellige logische Relation fest, die mehrere logische Totalformen umfasst.

Bei p∨q gilt:

1. rm(p⌢q), also: rm(I) ∨ rm(II).
2. rm(p⌢~q), also rm(III) ∨ rm(IV).
3. rm(~p⌢q), also rm(V)∨ rm(VI).
4. nrm(~p⌢~q), also nrm(VII) & nrm(VIII).

Bei q∨r gilt:

5. rm(q⌢r), also rm(I) ∨ rm(V).
6. rm(q⌢~r), also rm(II) ∨ rm(VI).
7. rm(~q⌢r), als rm(III) ∨ rm(VII); aus dieser Bedingung und aus der Bedingung (4) folgt III=1.
8. nrm(~q⌢~r), also nrm(IV) & nrm(VII); aus dieser Bedingung und der Bedingung (2) folgt III=1.

Diese acht Bedingungen legen keine dreistellige Totalform, sondern eine dreistellige Partialform fest, deren Vorkommenskombinationen noch nicht alle definitiv bestimmt sind. Den 8 Bedingungen entsprechen genau 7 verschiedene dreistellige Totalformen: [p,q,r 𝔸𝕀] mit p⊤r, [p,q,r 𝕁𝕀] mit p⊤r, [p,q,r 𝕁𝕂] mit p∨r, [p,q,r ℍ𝕀] mit p→r, [p,q,r ℍ𝕃] mit p↔r, [p,q,r 𝔸𝕃] mit p→r und [p,q,r 𝔸𝕂] mit p∨r. Es liegt ein mehrdeutiges Verkettungsgesetz vor, das folgendermaßen formuliert werden kann:

Für beliebige p,q und r: [(p∨q)∧(q∨r)] → 𝕁[(p⊤r), (p∨r), (p←r), (p→r), (p↔r)],

wobei der Ausdruck „𝕁(p_1, p_2, …, p_n)“ bedeuten soll, dass von den Ereignissen p_1, p_2, …, p_n nur eines und genau eines vorliegt.

Auch die Geltung der folgenden mehrdeutigen Verkettungsgesetze lässt sich leicht nachweisen:

- [(p→q) ∧ (q←r)] → 𝕁[(p⊤r), (p↑r), (p←r), (p→q)]
- [(p∨q) ∧ (q←r)] → 𝕁[(p⊤r), (p∨r), (p←r), (p↑r), (p ⋈ q)]
- [(p←q) ∧ (q↑r)] → 𝕁[(p⊤r), (p←r), (p∨r), (p ⋈ r), (p↑q)]
- [(p←q) ∧ (q→r)] → 𝕁[(p⊤r), (p∨r), (p←r), (p→r), (p↔ q)]
- [(p→q) ∧ (q∨r)] → 𝕁[(p⊤r), (p∨r), (p→r), (p↑r), (p ⋈ q)]
- [(p↑q) ∧ (q↑r)] → 𝕁[(p⊤r), (p←r), (p→r), (p↑r), (p↔q)]
- [(p↑q) ∧ (q→r)] → 𝕁[(p⊤r), (p∨r), (p→r), (p↑r), (p ⋈ q)].

1. 3.2.1 Die Verkettungsrelation für zweistellige logische Totalformen

Die Beziehung, die in Verkettungsgesetzen der Form [(p ⊞ q) ∧ (p ⊟ q)] → (p ⊠ q) zwischen O_1, O_2 und U besteht ist selbst wieder eine dreistellige logische Relation, die *Verkettungsrelation* 𝕾*(O_1,O_2,U). Für diese Verkettungsrelation gilt zunächst, dass, falls O_1 und O_2 vorliegen, notwendig auch U gilt. Es gilt also 𝒩(O_1&O_2, U) und – wegen des Obversionsgesetzes: für alle p und q: (p→q) ↔ (~q→ ~p) – gilt auch 𝒰(~U, O_1&O_2). Dies ist der besondere Fall einer dreistelligen logischen Relation von (p,q, r), die durch die beiden Bedingungen 𝒩(p&q, r) und 𝒰(~r, p∧q) definiert ist; in der Normalmatrix dieser Relation von (p,q, r) sind die Vorkommenskombinationen I und VIII mit 1 und der Vorkommenskombination II mit 0 bestimmt; diese dreistellige logische Relation bezeichne ich durch „𝕽*(p,q,r)“.

Die Verkettungsgesetze werden i.R. in folgender Form dargestellt: „(O_1 ∧ O_2) → (U)“; dies ist ein Sonderfall von (p∧q)→ r[3]. Für diese Relation schreibe ich „𝕿*(p,q,r)“. Gegenüber 𝕽*(p,q,r) gelten bei 𝕿*(p,q,r) noch zusätzliche Bedingungen: zusammen implizieren p und q den Sachverhalt r, und für die Implikation gilt: ℂ/β = 𝒦. Ist p⌢q nicht der Fall, liegt also von den Sachverhalten p und q höchstens eines vor, muss r möglich (𝒦) sein. Von den Vorkommenskombinationen III, V und VII, bei denen von p und q höchsten eines, r aber immer vorliegt, muss demnach zumindest einer realmöglich sein: (III=1)∨(V=1)∨(VII=1)[4]. Wegen ℂ/β = 𝒦 muss beim Nichtvorliegen von p⌢q der Sachverhalt r auch nicht möglich sein können, es muss deshalb gelten: (IV=1)∨(VI=1)∨(VIII=1). Diese Bedingung ist schon von 𝕽*(p,q, r), wegen VIII=1, erfüllt. Endlich muss wegen ℂ/γ = 𝒦 r mit p⌢q möglich sein; dies ist schon bei 𝕽*(p,q, r) wegen I=1 der Fall. Wegen ℂ/γ = 𝒦 muss bei r auch p⌢q nicht vorliegen können: (III=1)∨(V=1)∨(VII=1); diese Bedingung ist schon wegen ℂ/β erfüllt. Wir haben für 𝕿*(p,q, r) also im Vergleich zu 𝕽*(p,q, r) die zusätzliche Bedingung : (III=1)∨(V=1)∨(VII=1). Wegen dieser zusätzlichen Restriktion gehören zu 𝕿*(p,q, r) genau vier Funktoren weniger als zu 𝕽*(p,q, r).

Aber auch mit $\mathfrak{T}^*(p,q,r)$, d.h. $(p\wedge q) \rightarrow r$, ist die Verkettungsrelation $\mathfrak{S}^*(p,q,r)$ noch nicht exakt bestimmt; für diese gilt darüber hinaus die Restriktion IV = VI = VII. Der Grund liegt in folgendem Umstand: Für jedes O_1 ist es möglich, dass weder O_2 noch U vorliegt, also ist Vorkommenskombination IV realmöglich. Ebenso kann jedes O_2 vorliegen, ohne dass zugleich O_1 und U gilt: Vorkommenskombination VI ist realmöglich. Schließlich ist jedes U möglich, ohne dass ein O_1 und O_2 vorliegt. In der Verkettungsrelation sind damit alle Vorkommenskombinationen der Beziehung von (O_1,O_2,U) bis auf zwei definitiv bestimmt: $[O_1,O_2,U\ (10\bullet1)(\bullet111)]$. Es kommen also 2^2 dreistellige Funktoren für die Verkettungsrelation in Frage, und es gibt deshalb 4 verschiedene Arten von Verkettungen. Diese logischen Unterschiede werden bei der Darstellung der Verkettungsgesetze in der Form „$(p\wedge q) \rightarrow r$" nicht ausgedrückt.

1. $[O_1, O_2, U\ \mathbb{C}\mathbb{V}] = [O_1, U, O_2\ \mathbb{B}\mathbb{V}] = [O_2, O_1, U\ \mathbb{C}\mathbb{V}] = [O_2, U, O_1\ \mathbb{B}\mathbb{V}] = [U, O_1, O_2\ \mathbb{V}\mathbb{D}] = [U, O_2, O_1\ \mathbb{V}\mathbb{D}]$[5]. Wenn bei diesen Verkettungen die beiden Oberglieder vertauscht werden ergibt sich wieder eine eindeutige Verkettung. Der Ausdruck „$[(p\rightarrow q),(q \rightarrow r),(p \rightarrow r)\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$" ist genauer und vollständiger als der Ausdruck „$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$".
2. $[O_1, O_2, U\ \mathbb{E}\mathbb{V}] = [O_1, U, O_2\ \mathbb{E}\mathbb{V}] = [O_2, O_1, U\ \mathbb{E}\mathbb{V}] = [O_2, U, O_1\ \mathbb{B}\mathbb{D}] = [U, O_1, O_2\ \mathbb{C}\mathbb{D}] = [U, O_2, O_1\ \mathbb{B}\mathbb{D}]$. Bei diesen Verkettungen ergibt sich beim Vertauschen der beiden Oberglieder, beim Vertauschen des Unterglieds mit dem zweiten Oberglied, nicht aber beim Vertauschen des Untergliedes mit dem ersten Oberglied wieder eine eindeutige Verkettung. Das Verkettungsgesetz $\uparrow\mathbb{C}\mathbb{A}$ wird am exaktesten durch den Ausdruck „$[(p \succ\!\prec q), (q\rightarrow r), (p\vee r)\ \mathbb{E}\mathbb{V}]$" dargelegt.
3. $[O_1, O_2, U\ \mathbb{E}\mathbb{D}] = [O_1, U, O_2\ \mathbb{E}\mathbb{D}] = [O_2, O_1, U\ \mathbb{E}\mathbb{D}] = [O_2, U, O_1\ \mathbb{E}\mathbb{D}] = [U, O_1, O_2\ \mathbb{E}\mathbb{D}] = [U, O_2, O_1\ \mathbb{E}\mathbb{D}]$. Die Vertauschung der beiden Oberglieder und die Vertauschung des Untergliedes mit einem der Oberglieder führt wieder auf eine eindeutige Verkettung; es liegt ein vollständig symmetrischer Funktor vor. Das Verkettungsgesetz 70 lautet vollständig: $[(p \succ\!\prec q), (q \succ\!\prec r), (p\leftrightarrow r)\ \mathbb{E}\mathbb{D}]$
4. $[O_1, O_2, U\ \mathbb{C}\mathbb{D}] = [O_1, U, O_2\ \mathbb{B}\mathbb{D}] = [O_2, O_1, U\ \mathbb{E}\mathbb{V}] = [O_2, U, O_1\ \mathbb{E}\mathbb{V}] = [U, O_1, O_2\ \mathbb{B}\mathbb{D}] = [U, O_2, O_1\ \mathbb{C}\mathbb{D}]$. Hier führen die Vertauschung der beiden Oberglieder und die Vertauschung des Untergliedes mit dem ersten Oberglied auf eine eindeutige Verkettung.

3.3 Logische Obversions- und Konversionsgesetze

Gilt von zwei logischen Relationen, dass die Mengen $IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$ und $\complement(IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda})$ nichtleer, die Mengen $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ und $IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ aber leer sind, dann sind Δ und Λ äquivalent. Diese Äquivalenz besagt, dass jede logische Form identisch ist, d.h. wohlunterschieden von jeder anderen logischen Form. Wenn zwei für dieselben Sachverhalts-/Ereignisklassen geltenden logischen Relationen auch nur eine einzige Vorkommenskombination unterschiedlich bestimmen, sind sie nicht-identisch. Jede logische Form gilt genau dann, wenn sie gilt: $\Gamma(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \Gamma(p_1, \ldots, p_n)$ und gleichbedeutend $\Gamma(p_1, \ldots, p_n) \succ\!\prec \sim\Gamma(p_1, \ldots, p_n)$.

3.3.1 Die Äquivalenzbeziehungen der Obversionsgesetze

Irgendein Sachverhalt/Ereignis p liegt genau dann vor, wenn p nicht nicht vorliegt; deshalb ist durch einen Funktor, der zwischen n Sachverhalts-/Ereignisklassen besteht, auch derjenige Funktor schon festgelegt, der genau dann zwischen diesen Ereignissen besteht, wenn eines, mehrere oder alle diese Sachverhalts-/Ereignisklassen „negiert" werden. Dies bedeutet, dass beispielsweise durch den Ausdruck „$p\rightarrow q$" auch eineindeutig der Funktor bestimmt ist, der genau dann zwischen p und $\sim q$, oder zwischen $\sim p$ und q oder zwischen $\sim p$ und $\sim q$ besteht, wenn $p\rightarrow q$ gilt. Es gibt ein einfaches Verfahren, um solche Äquivalenzbeziehungen zwischen beliebigen n-stelligen Relationen aufzuspüren.

Für die zweistelligen logischen Relationen habe ich – willkürlich – für die vier möglichen Vorkommenskombinationen folgende normale Reihenfolge festgelegt: Vorkommenskombination I: $p\frown q$; Vorkommenskombination II: $p\frown\sim q$; Vorkommenskombination III: $\sim p\frown q$; Vorkommenskombination IV: $\sim p\frown\sim q$. Wenn ich nun in einer Beziehung zwischen p und q eine oder beide Sachverhalts-/Ereignisklassen, etwa p negiere, sind in der Darstellung der Vorkommenskombinationen p mit $\sim p$, und $\sim p$ mit p zu vertauschen; das Entsprechende gilt für q, wenn q negiert wird.

Wir gehen z.B. aus von der Beziehung $p \to \sim q$, in welcher q zu $\sim q$ verändert ist; auch die Implikation $p \to \sim q$ hat die Normalmatrix (1011), nur ist jetzt nach Vertauschung von q und $\sim q$ die „normale Reihenfolge" der Vorkommenskombinationen verändert: Vorkommenskombination I ist $p \frown \sim q$ (Vorkommenskombination II in der normalen Anordnung), Vorkommenskombination II ist jetzt $p \frown q$ (Vorkommenskombination I in der normalen Anordnung), Vorkommenskombination III ist jetzt $\sim p \frown \sim q$ (Vorkommenskombination IV in der normalen Anordnung), und Vorkommenskombination IV ist jetzt $\sim p \frown q$ (Vorkommenskombination IV in der normalen Anordnung). Wenn ich nun wissen möchte, welcher Funktor genau dann zwischen p und q besteht, wenn $p \to \sim q$ gilt, muss ich nur die veränderte Anordnung der Vorkommenskombinationen mitsamt ihrer jeweiligen Bestimmung als realmöglich oder nichtrealmöglich in die normale Reihenfolge bringen, also in die Reihenfolge nrm($p \frown q$), rm($p \frown \sim q$), rm($\sim q \frown p$) und rm($\sim p \frown \sim q$); ich muss also die nichtnormale Anordnung (1011) für den Funktor $p \to \sim q$ in die normale Anordnung (0111) für den Funktor von (p,q) verändern und erhalte so die Beziehung $p \uparrow q$, welche äquivalent ist mit $p \to \sim q$; es ergibt sich somit das ereignislogische Äquivalenzgesetz – in Anlehnung an die traditionelle Logik kann von einem „Obversionsgesetz" gesprochen werden[6] –: Für alle p und q: $(p \to \sim q) \leftrightarrow (p \uparrow q)$.

In der folgenden Tabelle sind diese Operationen für alle möglichen Obversionsgesetze zweistelliger ereignislogischer Relationen dargelegt.

Tabelle 2: Die äquivalenten Negationen der zweistelligen logischen Relationen

normale Anordnung bei $p - q$		(2) $\sim p - q$	(3) $p - \sim q$	(4) $\sim p - \sim q$
$p \frown q$	I	III	II	IV
$p \frown \sim q$	II	IV	I	III
$\sim p \frown q$	III	I	IV	II
$\sim p \frown \sim q$	IV	II	III	I

Um denjenigen Funktor von (p, q) zu finden, der genau dann gilt, wenn ein bestimmter Funktor für $\sim p \frown \sim q$ – zum Beispiel für $\sim p \vee \sim q$ – gilt, muss ich in der Normalmatrix des Funktors von ($\sim p$,$\sim q$) – im Beispiel: (1110) – den Vorkommenskombination I mit IV, II mit III, III mit II und IV mit I vertauschen, wie es in der 4.Spalte der Tabelle angegeben ist; ich erhalte dann die Normalmatrix des Funktors der zwischen p und q besteht, wenn von jenem Funktor zwischen $\sim p$ und $\sim q$ ausgegangen wird – im Beispiel die Matrix (0111). Es gilt also das Gesetz: Für alle p und q: $(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow (p \uparrow q)$.

Um zu einem Funktor von ($\sim p$, q) – Beispiel $\sim p \leftarrow q$ – den Funktor zu finden, der für (p, q) gilt, muss ich in der Normalmatrix des Funktors von ($\sim p$, q) – im Beispiel: (1101) – den Vorkommenskombination I mit III, II mit IV, III mit I und IV mit II vertauschen, wie in der 2. Spalte der Tabelle angegeben; ich erhalte dann die Normalmatrix des Funktors der zwischen p und q besteht, wenn von jenem Funktor zwischen $\sim p$ und q ausgegangen wird – im Beispiel die Matrix (0111). Es gilt so das Gesetz: Für alle p und q: $(\sim p \leftarrow q) \leftrightarrow (p \uparrow q)$. Mit der Tabelle lassen sich zu jeder beliebigen zweistelligen logischen Relation drei äquivalente Beziehungen auffinden: äquivalent sind etwa die logischen Totalformen $p \uparrow q$, $\sim p \leftarrow q$, $p \to \sim q$ und $\sim p \vee \sim q$ oder die Totalformen $p \leftrightarrow q$, $\sim p >\!< q$, $p >\!< \sim q$ und $\sim p \leftrightarrow \sim q$.

Entsprechendes gilt für die einstelligen Funktoren, die logischen Modalitäten: Ist Mod(p) irgendeine einstellige Modalität, so werden durch Mod($\sim p$) die beiden Vorkommenskombinationen vertauscht; gilt also Mod($\sim p$), dann erhalte ich die Modalität, die bei Mod($\sim p$) für p gilt, wenn ich die Matrix von Mod($\sim p$) mit ihrer jeweiligen Bestimmtheit als rm oder nrm vertausche. Gilt $\mathcal{N}(\sim p)$, gilt (10)($\sim p$) und daher (01)(p), d.i. $\mathcal{U}$(p); gilt (01)($\sim p$), dann gilt (10)(p); gilt (11)($\sim p$), dann auch (11)(p). Es gibt die folgenden Äquivalenzen: Für alle p: $\mathcal{N}(\sim p) \leftrightarrow \mathcal{U}(p)$, $\mathcal{U}(\sim p) \leftrightarrow \mathcal{N}(p)$, $\mathcal{K}(\sim p) \leftrightarrow \mathcal{K}(p)$, $\mathcal{P}(\sim p) \leftrightarrow \mathcal{C}(p)$, $\mathcal{C}(\sim p) \leftrightarrow \mathcal{P}(p)$, $\mathcal{A}(\sim p) \leftrightarrow \mathcal{A}(p)$.

Unter Zuhilfenahme dieser Äquivalenzgesetze für einstellige Funktoren lassen sich die Obversionsgesetze für die zweistelligen logischen Relationen auch durch eine Transformation der Modalitätenmatrix bestimmen. Die Beziehung p∨q besitzt die Modalitätenmatrix ($\mathcal{KN}$); die beiden Positionen bezeichnen die Vorkommensfallgesetze α und β, die eine zweistellige logische Totalform jeweils ebenso wie die Vorkommensfallgesetze γ und δ eindeutig festlegen. Will ich bei p∨q den äquivalenten Funktor von (p, ∼q) bestimmen, muss ich in der Modalitätenmatrix von p ∨ q Mod(q) durch das äquivalente Mod(∼q) ersetzen und erhalte ($\mathcal{KU}$) – die Modalitätenmatrix des Funktors $\mathbb{B}$; es gilt so bei p∨q auch p ← ∼q und umgekehrt. Gilt p∨q und ich will die äquivalente Beziehung von (∼p, q) entscheiden, so wird q zuerst für ∼p und dann für p modalisiert; ich muss so die Komponenten der Matrix ($\mathcal{KN}$) nur vertauschen und ich erhalte ($\mathcal{NK}$), die Matrix von $\mathbb{C}$; es gilt so für alle p und q: (p∨q) ↔ (∼p → q). Um bei p∨q schließlich den Funktor von (∼p,∼q) zu bestimmen, muss ich beide Operationen hintereinander ausführen: Vertauschung der Komponenten ($\mathcal{NK}$) und Ersetzung von Mod(q) durch Mod(∼q), also ($\mathcal{UK}$), und ich erhalte für beliebige p und q das Äquivalenzgesetz: (p∨q) ↔ (∼p↑∼q).

Auch für die dreistelligen logischen Relationen lassen sich die Bedingungen der Obversion auf die entsprechende Weise erkennen; um beispielsweise die Relation aufzufinden, die für (∼p, q, r) genau dann gilt, wenn eine bestimmte Relation für (p, q, r) gilt, muss in der Normalmatrix der Relation von (p, q, r) jeder Vorkommenskombination bei dem p bzw. ∼p vorkommt, durch jene Vorkommenskombination ersetzt werden, bei dem ∼p bzw. p vorkommt, während sonst alles gleich ist; es muss I mit V, II mit VI, III mit VII und IV mit VIII vertauscht werden. Soll bestimmt werden, welche dreistellige logische Relation für (p,∼q,∼r) genau dann gilt, wenn für (p, q, r) eine ganz bestimmte logische Relation gilt, dann muss in der Normalmatrix der Relation von (p, q, r) jede Vorkommenskombination, in dem q (bzw. ∼q) vorkommt, und wo r (bzw. ∼r) vorkommt, mit der Vorkommenskombination vertauscht werden, wo ∼q (bzw. q) und wo ∼r (bzw. ∼r) vorkommt; Vorkommenskombination I (p⌢q⌢r) wird mit Vorkommenskombination IV (p⌢∼q⌢∼r), Vorkommenskombination II (p⌢q⌢∼r) wird mit Vorkommenskombination III (p⌢∼q⌢r), Vorkommenskombination III (p⌢∼q⌢r) wird mit Vorkommenskombination II (p⌢q⌢∼r), Vorkommenskombination IV (p⌢∼q⌢∼r) wird mit Vorkommenskombination I (p⌢q⌢r), Vorkommenskombination V (∼p⌢q⌢r) wird mit Vorkommenskombination VIII (∼p⌢∼q⌢∼r), Vorkommenskombination VI (∼p⌢q⌢∼r) wird mit Vorkommenskombination VII (∼p⌢∼q⌢r)m Vorkommenskombination VII (∼p⌢∼q⌢r) wird mit Vorkommenskombination VI (∼p⌢q⌢∼r), und Vorkommenskombination VIII (∼p⌢∼q⌢∼r) wird schließlich mit Vorkommenskombination V (∼p⌢q⌢r) vertauscht. In der folgenden Tabelle sind die Vertauschungen für alle möglichen Negationen angeführt.

Tabelle 3: Die äquivalenten Negationen der dreistelligen logischen Relationen

normale Anordnung bei p⌢q⌢r		(2) ∼p⌢q⌢r	(3) p⌢∼q⌢r	(4) p⌢q⌢∼r	(5) ∼p⌢∼q⌢r	(6) ∼p⌢q⌢∼r	(7) p⌢∼q⌢∼r	(8) ∼p⌢∼q⌢∼r
p⌢q⌢r	I	V	III	II	VII	VI	IV	VIII
p⌢q⌢∼r	II	VI	IV	I	VIII	V	III	VII
p⌢∼q⌢r	III	VII	I	IV	V	VIII	II	VI
p⌢∼q⌢∼r	IV	VIII	II	III	VI	VII	I	V
∼p⌢q⌢r	V	I	VI	VI	III	II	VIII	IV
∼p⌢q⌢∼r	VI	II	V	V	IV	I	VII	III
∼p⌢∼q⌢r	VII	III	VIII	VIII	I	IV	VI	II
∼p⌢∼q⌢∼r	VIII	IV	VII	VII	II	III	V	I

Aus dieser Tabelle sind für jede dreistellige logische Relation 7 verschiedene Obversionsgesetze ablesbar. Äquivalent sind etwa folgende Beziehungen: [p,q, r $\mathbb{AX}$], [∼p,q, r $\mathbb{XA}$], [p,∼q, r $\mathbb{CM}$], [p,q,∼r $\mathbb{BM}$], [∼p,∼q, r $\mathbb{LC}$], [∼p,q,∼r $\mathbb{MB}$], [p,∼q,∼r $\mathbb{DK}$], [∼p,∼q,∼r $\mathbb{KL}$]. Für jede beliebige n-stellige logische Relation lassen sich mit dem skizzierten Verfahren in entsprechender Weise alle 2^n Obversionsgesetze auffinden.

Dieses Vorgehen kann auf logische Relationen beliebiger Stelligkeit ausgeweitet werden. Auch für logische Partialrelation kann das Verfahren angewandt werden: gilt beispielsweise $\Delta(p,q) \leftrightarrow \Delta'(\sim p,q)$ und $\Lambda(p,q) \leftrightarrow \Lambda'(\sim p,q)$, genau dann gilt $\Delta \Cup \Lambda(p,q) \leftrightarrow \Delta'(\sim p,q) \Cup \Lambda'(\sim p,q)$.

3.3.2 Die Äquivalenzbeziehungen der Konversionsgesetze

Durch jede zweistellige Relation ist eindeutig eine *konverse Relation* festgelegt; welche zweistellige logische Relation zwischen q und p besteht, falls eine bestimmte zweistellige logische Relation zwischen p und q gegeben ist, lässt sich wiederum durch ein allgemeines Verfahren feststellen. Werden in einer zweistelligen logischen Relation von p und q die beiden Relata vertauscht, so führt dies zu einer Veränderung der normalen Anordnung der Vorkommenskombinationen: an die erste Stelle rückt $q\frown p$, an die zweite Stelle rückt $\sim q\frown p$, an die dritte Stelle $q\frown\sim p$ und an die vierte Stelle $\sim q\frown\sim p$. In einem zweiten Schritt muss diese nicht-normale Anordnung in die normale Reihenfolge verändert werden, wobei q vor p steht: $q\frown p$, $q\frown\sim p$, $\sim q\frown p$ und $\sim q\frown\sim p$. Um so von einer zweistelligen Relation zwischen p und q zu ihrer konversen Relation zwischen q und p zu gelangen, muss ich in der Normalmatrix der Relation von p und q nur die Vorkommenskombinationen II und III vertauschen[7]. Ich erhalte dann zu jeder zweistelligen ereignislogischen Relation ihre Konverse:

$(p \top q) \leftrightarrow (q \top p)$ $\quad$ $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftarrow p)$ $\quad$ $(p \rceil q) \leftrightarrow (q \lceil p)$
$[(10\bullet 1)(p,q) \leftrightarrow (1\bullet 01)(q,p)$ $\quad$ usw.

Von allen Obversionen lassen sich die Konversen bilden, und es ergeben sich so für jede beliebige zweistellige Relation 7 äquivalente Beziehungen; gilt etwa $p\uparrow q$, genau dann gelten auch $p\vee\sim q$, $\sim p\leftarrow q$, $\sim p\rightarrow\sim q$, $q\uparrow p$, $q\rightarrow\sim p$, $\sim q\vee p$, und $\sim q\leftarrow\sim p$.

Um die Konversen einer zweistelligen ereignislogischen Relation zu bestimmen, kann ich auch in der Modalitätenmatrix das Vorkommensfallgesetz α mit γ, und das Vorkommensfallgesetz β durch δ ersetzen; zuerst wird dann p bezüglich q und dann q bezüglich p modalisiert. Der Funktor $p\rceil q$ hat die Modalitätenmatrix $(\mathcal{OKUU})$, der äquivalente Funktor von (q,p) hat dann die Matrix $(\mathcal{UUOK})$, es gilt so für alle p und q: $(p\rceil q) \leftrightarrow (q\lceil p)$.

Für drei Sachverhalts-/Ereignisklassen (p,q,r) gibt es nicht nur eine, sondern genau 5 Konversen, und zwar für jede Permutation der Elemente von (p,q,r). Durch eine dreistellige Relation von (p,q,r) sind die dreistelligen Relationen von (p,r,q), (q,p,r), (r,q,p), usw. eindeutig festgelegt. Um diese konversen Äquivalenzen zu bestimmen, kann man auf dieselbe Weise vorgehen wie bei den zweistelligen logischen Relationen; Permutation der Anordnung der drei Ereignisse, dann Herstellung der normalen Anordnung der Vorkommenskombinationen für diese neue Anordnung. Diese Operationen sind in der folgenden Tabelle für alle möglichen Permutationen von (p,q,r) dargelegt.

Tabelle 4: Die äquivalenten Inversionen der dreistelligen logischen Relationen

normale Reihenfolge bei $p\frown q\frown r$		(2) $p\frown r\frown q$	(3) $q\frown p\frown r$	(4) $q\frown r\frown p$	(5) $r\frown p\frown q$	(6) $r\frown q\frown p$
$p\frown q\frown r$	I	I	I	I	I	I
$p\frown q\frown\sim r$	II	III	II	V	III	V
$p\frown\sim q\frown r$	III	II	V	II	V	III
$p\frown\sim q\frown\sim r$	IV	IV	VI	VI	VII	VII
$\sim p\frown q\frown r$	V	V	III	III	II	II
$\sim p\frown q\frown\sim r$	VI	VII	IV	VII	IV	VI
$\sim p\frown\sim q\frown r$	VII	VI	VII	IV	VI	IV
$\sim p\frown\sim q\frown\sim r$	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII

Um etwa von der Relation (1110 0001) von (p,q,r) zur äquivalenten Relation von (r,q,p) zu gelangen, muss ich in der ersten Normalmatrix das erste Zeichen 1 bzw. 0 an seiner Stelle belassen, das 5. Zeichen an die zweite Stelle rücken, das dritte Zeichen an seiner Stelle belassen, das 7. Zeichen an die 4. Stelle, das 2. Zeichen an die 5., das 4. Zeichen an die 6., und das 4. Zeichen an die 7. Stelle bringen, das 8. Zeichen bleibt an seiner Stelle; ich erhalte so die Normalmatrix des Funktors von (r,q,p), die durch $[p,q,r\ \mathbb{AX}]$ festgelegt ist. Bei der Bestimmung der anderen Konversen geht man entsprechend vor. Äquivalent sind dann z.B. die folgenden Beziehungen:

$[p,q,r\ \mathbb{AX}]$, $[p,r,q\ \mathbb{AX}]$, $[q,p,r\ \mathbb{IE}]$, $[q,r,p\ \mathbb{HE}]$, $[r,p,q\ \mathbb{IE}]$ und $[r,q,p\ \mathbb{HE}]$ und die Beziehungen $[p,q,r\ \mathbb{DA}]$, $[p,r,q\ \mathbb{DA}]$, $[q,p,r\ \mathbb{DA}]$, $[q,r,p\ \mathbb{DA}]$, $[r,p,q\ \mathbb{DA}]$ und $[r,q,p\ \mathbb{DA}]$.

Die Konversenbildung kann wiederum mit der Bildung der Obversionen kombiniert werden. Für alle n-stelligen logischen Relationen ($n \geqslant 2$) lassen sich die entsprechenden Verfahren zur Bestimmung aller $n!$ Konversen und aller 2^n Obversionen eindeutig entscheiden (es sind immer ganz bestimmte Permutationen der Normalmatrix des Ausgangsfunktors). Für jede n-stellige Relation gibt es so $n! \cdot 2^n$ eindeutig entscheidbare äquivalente Beziehungen.

Das Verfahren lässt sich auf logische Partialrelationen übertragen. Gilt beispielsweise $\Delta(p,q) \leftrightarrow \Delta^*(q,p)$ und $\Lambda(p,q) \leftrightarrow \Lambda^*(q,p)$, genau dann gilt $\Delta \Cup \Lambda(p,q) \leftrightarrow \Delta^* \Cup \Lambda^*(q,p)$.

3.4 Die Schemata des Schließens

Unser Wissen muss uns immer über unterschiedlichste *einzelne* Dinge und Vorgänge orientieren, denn die objektive Wirklichkeit, mit welcher es alles realitätsbezogene Denken zu tun hat, ist ein gesetzmäßiger Zusammenhang von Einzelnem. Damit das in den jeweiligen Situationen vorliegende Einzelne erkannt werden kann, muss es seiner allgemeinen Art und Gesetzmäßigkeit nach erfasst werden. Diese Bezugsetzung des Einzelnen auf das Allgemeine hin, diese Operation der Subsumtion eines einzelnen oder besonderen Falles unter ein allgemeines Gesetz und die Übertragung der allgemeinen Gesetzmäßigkeit auf den einzelnen oder besonderen Fall ist das *Schließen*.

Das Implikationsgesetz „Wenn ein Stück Zucker ins Wasser geworfen wird, löst es sich auf", macht eine zeitübergreifende Gesetzesaussage über jeden beliebigen Fall, da Zucker in Wasser geworfen wird. Der Sachverhalts-/Ereignisklasse „ein Stück Zucker wird ins Wasser geworfen" kann dann der einzelne Fall subsumiert werden, dass ich jetzt dieses Stück Zucker ins Wasser werfe; ist diese Subsumtion korrekt und das betreffende Gesetz gültig, also die beiden Prämissen wahr, dann ergibt sich aus der Übertragung der Gesetzes auf den angesprochenen Einzelfall, dass dieses Stück Zucker hier sich notwendigerweise auflöst. Wir haben zwei Sätze (die Prämissen), aus denen ein dritter Satz (der Schlusssatz oder die Konklusion) folgt: aus einer Gesetzesprämisse und aus einer Subsumtionsprämisse folgt, *wenn sie beide wahr sind*, der Schlusssatz „Dieses Stück Zucker löst sich auf"[8].

Solche schließenden Anwendungen sind für jedes (bedingungslogische) Gesetz möglich; für jede bedingungslogische Form können wir deshalb alle möglichen Schemata ihrer Anwendung – Schlussgesetze oder Schlussregeln – rekonstruieren. Diese Schlussschemata sind spezielle *logische* Implikationsgesetze: Für die bedingungslogische Form $p \rightarrow q$ lautet ein solches implikatives Schlussschema beispielsweise: **Wenn** das Vorliegen eines Ereignisses bestimmter Art p das Vorliegen eines anderen Ereignisses bestimmter Art q impliziert, und wenn in einem Einzelfall ein Ereignis der ersten Art p* vorliegt, **dann** liegt auch in diesem Einzelfall notwendig ein Ereignis der zweiten Art q* vor.

Es gibt für jeden Modalisierungsfall einer *jeden* logischen Relation ein entsprechendes Schlussschema: es kann also nicht nur auf das notwendige, es kann auch auf das unmögliche und das mögliche Vorliegen von Sachverhalten/Ereignissen geschlossen werden Die Darstellung dieser Schlussschemata dieser Schlussschemata muss unbedingt den Unterschied zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen (von denen die Bezugsgesetze handeln) und den Einzelereignissen (welche von den Subsumtionsprämissen konstatiert werden) berücksichtigen; wenn dieser Unterschied ignoriert wird, kommt es unvermeidlich zu Verwechslungen unterschiedlicher logischer Zusammenhängen.

Es muss also strikt zwischen

1. den bedingungslogischen Gesetzen,
2. den diesen entsprechenden Schlussschemata
3. und den Schlüssen nach diesen Schlussschemata

unterschieden werden. Die Implikation beispielsweise ist eine bedingungslogische Relation (Gesetzesbeziehung) zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen; sie wird in aller Regel mithilfe der Partikel *Wenn* zum Ausdruck gebracht; ein Schluss hingegen ist eine Relation zwischen Sätzen; ein Schlussschema ist wiederum eine spezielle Implikation zwischen speziellen logischen Sachverhalten.

Ein Gesetz wie $p \rightarrow q$ gilt immer für alle Dinge (Ereignis-Bezugsysteme) von bestimmter Art und diesem Gesetz kann ich den einzelnen Fall subsumieren, dass ein einer der beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen p oder q angehörendes Ereignis aktuell vorliegt oder nicht vorliegt. Den einzelnen, aktuellen und an eine Raum- und Zeitstelle gebundenen Fall, dass ein Ereignis p vorliegt bzw. nicht vorliegt, bezeichne ich mit „p*“ bzw. mit „~p*“. Gilt die Implikation $p \rightarrow q$ und ist p* gegeben, so weiß ich aufgrund des Modalisierungsfalles α der logischen Form $\mathbb{C}$, dass im gegebenen aktuellen Fall das Eintreten eines Ereignisses q* notwendig ist: $\mathcal{N}$(q*). Gilt $p \rightarrow q$ und ist ~p* aktuell gegeben, so weiß ich aufgrund des Modalisierungsfalles β der logischen Form $\mathbb{C}$, dass ein Auftreten von q* möglich ist: $\mathcal{K}$(q*). Entsprechend folgt bei $p \rightarrow q$ und q*: $\mathcal{K}$(p*). Bei $p \rightarrow q$ und ~q* folgt $\mathcal{U}$(p*).

Jeder Schluss ist eine solche Anwendung von allgemeinen bedingungslogischen Gesetzen auf aktuell vorliegende einzelne Ereignisse gemäß eines zum bedingungslogischen Gesetz gehörenden Schlussschemas; jeder Schluss ist damit eine bestimmte Relation zwischen einer *Gesetzesprämisse*, dem bedingungslogischen Gesetz selbst als dem *Bezugsgesetz* des Schlusses, einer feststellenden *Subsumtionsprämisse*, die das aktuelle Vorliegen eines oder mehrerer der Ereignisse konstatiert, von denen das Bezugsgesetz in allgemeiner Weise handelt[9], und der *Konklusion*, die das Ergebnis der Übertragung der allgemeinen Gesetzmäßigkeit auf den subsumierten Einzel- oder Besonderfall ist.

Aus genau jedem Modalisierungsfall, aus dem sich eine n-stellige logische Totalform zusammensetzt, lässt sich ein Schlussschema gewinnen, sofern eine Vorkommenskombinationgesetz nicht durch *O* bestimmt ist. Entsprechend den vier Modalisierungsfällen von zweistelligen logischen Relationen unterscheide ich bei zweistelligen logischen Relationen die Schlussschemata α, β, γ und δ. Das Schlussschema α mit einer Gesetzesprämisse $p \rightarrow q$ bezeichne ich mit dem Ausdruck „$\mathbb{C}/\alpha$“, das Schlussschema β mit der Gesetzesprämisse $p \rtimes q$ bezeichne ich mit dem Ausdruck „$\mathbb{J}/\beta$“, usw. Hier einige Beispiele solcher allgemeiner Schemata von Vorkommensfallschlüssen:

Schlussschema	$\mathbb{C}/\alpha$	$\mathbb{A}/\alpha$	$\mathbb{D}/\beta$	$\mathbb{A}/\gamma$	$\mathbb{J}/\gamma$	$\mathbb{C}/\delta$	$\mathbb{D}/\delta$
Gesetzesprämisse	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \uparrow q$	$p \vee q$	$p \rtimes q$	$p \rightarrow q$	$p \uparrow q$
Subsumtionsprämisse	p*	p*	~p*	q*	q*	~q*	~q*
Konklusion	$\mathcal{N}$(q*)	$\mathcal{K}$(q*)	$\mathcal{K}$(q*)	$\mathcal{K}$(p*)	$\mathcal{U}$(p*)	$\mathcal{U}$(p*)	$\mathcal{K}$(p*)

Solche Schemata der Anwendung allgemeiner bedingungslogischer Gesetze auf einen einzelnen Fall bestehen natürlich auch für logische Relationen, die keine Totalformen sind; es gilt etwa:

Schlussschema	**(•110)/α**	**(•110)/β**	**(11•0)/γ**	**(•110)/δ**
Gesetzesprämisse	(•110)(p,q)	(•110)(p,q)	(11•0)(p,q)	(•110)(p,q)
Subsumtionsprämisse	p*	~p*	q*	~q*
Konklusion	~$\mathcal{N}$(q*) ≡ $\mathcal{C}$(q*)	$\mathcal{N}$(q*)	~$\mathcal{U}$(p*) ≡ $\mathcal{P}$(p*)	$\mathcal{N}$(p*)

Auch für drei- und mehrstellige Relationen gibt es derartige Vorkommensfallschlüsse; sie können direkt aus den Modalitätenmatrizen abgelesen werden. Für die Gesetzesprämisse [p, q, r $\mathbb{CX}$] gibt es etwa folgende Schlussschemata:

Gesetzesprämisse	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$[10]	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$
Subsumtionsprämisse	q^*	r^*	$\sim r^*$	p^*	$\sim p^*$
Konklusion	$\mathcal{N}(q^*)$, $\mathcal{N}(r^*)$	$\mathcal{N}(p^*)$, $\mathcal{K}(q^*)$	$\mathcal{U}(q^*)$, $\mathcal{K}(p^*)$	$\mathcal{K}(q^*)$, $\mathcal{K}(r^*)$	$\mathcal{U}(q^*)$, $\mathcal{U}(r^*)$

oder

Gesetzesprämisse	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$	$[p,q,r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$
Subsumtionsprämisse	p^*, q^*	$p^*, \sim q^*$	$\sim p^*, \sim q^*$	p^*, r^*	$\sim q^*, r^*$
Konklusion	$\mathcal{N}(r^*)$	$\mathcal{K}(r^*)$	$\mathcal{U}(r^*)$	$\mathcal{K}(q^*)$	$\mathcal{N}(p^*)$

usw.

Es gibt infinit viele logische Relationen, die sich aus verschiedenen Modalisierungsfällen entsprechend infinit viele Schlussschemata.

3.4.1. Logische Gesetze – Schlussschemata – Schlüsse

Jeder Schluss ist eine Beziehung zwischen Sätzen, die folgende Struktur aufweist: einer Gesetzesaussage, der *Gesetzesprämisse* (P_G) oder dem *Bezugsgesetz* des Schlusses wird in einer geeigneten Feststellungsaussage, der *Subsumtionsprämisse* (P_S), ein bestimmter einzelner oder besonderer Fall subsumiert, und auf diesen Einzel- oder Besonderfall wird in der *Konklusion* (K), dem *Schlusssatz* die Gesetzmäßigkeit übertragen; diese Subsumtion unter das Gesetz wird stets nach einem bestimmten *Schlussschema*, einem speziellen implikativen logischen Gesetz SS_G vorgenommen, das die Bedeutung jener logischen Form expliziert, der die von P_G behauptete Gesetzmäßigkeit angehört. Die Gesetzesprämisse und Subsumtionsprämisse kann jeweils auch aus mehreren in der Regel durch Konjunktion verbundenen Gesetzesaussagen bzw. Feststellungen bestehen. Die allgemeine Form der Folgerungs- oder Schlussrelation ist vierstellig und lautet: ***Aus*** P_G ***und*** P_S ***folgt gemäß*** SS_G ***notwendig*** **(**$\mathcal{N}$**)** ***die Konklusion*** *K*. Die Quelle der *Schlussnotwendigkeit*[11], d.h. die zwingende Geltung (Unmöglichkeit der Nichtgeltung) der Konklusion bei Wahrheit der beiden Prämissen, ist dabei das implikative Schlussschema. Die Schlussnotwendigkeit (d.h. die apodiktische Geltung der Konklusion) besteht nicht darin, dass auf das notwendige Vorliegen eines Ereignisses geschlossen wird, denn es gibt ja auch ein Schließen auf die Möglichkeit (etwa nach dem Schlussschema $\mathbb{C}/\beta$ oder $\mathbb{A}/\alpha$). Es wird auch deutlich, dass die Folgerungsrelation (im Gegensatz zur Implikation) nicht verkettbar, also nicht transitiv ist, denn eine Aussage über Einzelnes oder Besonderes, die Konklusion eines Schlusses, kann ja nicht zugleich Gesetzesprämisse und Subsumtionsprämisse eines Schlusses sein.

Während ein *Schluss* eine derart strukturierte Relation von Aussagen ist, ist ein *Gesetz* eine bedingungslogische Beziehung zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen, und ein *logisches Gesetz* ist eine bedingungslogische Beziehung zwischen logischen Sachverhaltsklassen (in der Regel zwischen logischen Formen). Aus der unzureichenden Unterscheidung von Aussagen und Sachverhalts-/Ereignisklassen resultieren deshalb bereits in der traditionellen, vorlogistischen Logik unvermeidlich umfassende Verwechslungen von Gesetzen, logischen Gesetzen, Schlüssen und Schlussschemata.

Konkrete, gegenständliche[12] Implikationsgesetze:

- Wenn ein durch einen Metallstab Strom geleitet wird, erwärmt er sich.
- Wenn sich ein Metallstab erwärmt, dehnt er sich aus.

Diese Implikationen sind Relationen, die zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen bestehen: die Ausdrücke „Durch irgendein Stück Draht wird Strom geleitet“, „Ein Stück Draht erwärmt sich“, „Ein Stück Draht dehnt sich aus“ sind keine Sätze, die Aussagen ausdrücken, sondern Sachverhaltsausdrücke, die Ereignisse bestimmter Art benennen und weder wahr noch falsch sind.

Logisches Gesetz ℂℂℂ:

- $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $[(Sx \rightarrow Mx) \wedge (Mx \rightarrow Px)] \rightarrow (Sx \rightarrow Px)$[13]

Hier liegt eine Relation zwischen logischen Sachverhaltsklassen vor; die Ausdrücke „$p \rightarrow q$" „$q \rightarrow r$" sind keine Aussagen, sondern benennen die logischen Sachverhalte, dass zwischen irgendeiner ersten Sachverhalts-/Ereignisklasse p und einer zweiten Sachverhalts-/Ereignisklasse q, zwischen dieser zweiten Sachverhalts-/Ereignisklasse q und einer dritten Sachverhalts-/Ereignisklasse r die Beziehung der Implikation besteht.

Schlussschema: ℂ/α:

$p \rightarrow q$
p^*
——
$\mathcal{N}(q^*)$

Auch hier liegt ein logisches Gesetz als eine Beziehung von logischen Sachverhaltsklassen vor, den Sachverhalten, dass zwischen irgendwelchen Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q die Beziehung der Implikation gilt, dass ein einzelner/s Sachverhalt/Ereignis p*, das der Sachverhalts-/Ereignisklasse p angehört, das notwendig ein der Sachverhalts-/Ereignisklasse q angehörender/s Sachverhalt/Ereignis vorliegt.

Diese drei Sachverhalten wird eine bedingungslogische Gesetzesrelation zugesprochen, das Schlussschema ℂ/α ist kein Schluss, sondern eine logische Gesetzesaussagen. Mit Schlüssen haben wir es erst dann zu tun, wenn solchen Gesetzen geeignete Einzelfälle subsumiert werden. Ist die Gesetzesprämisse gegenständlich, dann haben wir **„konkrete", gegenständliche Schlüsse**, beispielsweise:

1)

Aus der Gesetzesprämisse:	Wenn ein durch einen Metallstab Strom geleitet wird, erwärmt er sich
und der Subsumtionsprämisse:	Durch dieses Stück Draht wird hier und jetzt Strom geleitet
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas ℂ/α[14]:	Notwendigerweise ($\mathcal{N}$) erwärmt sich dieses Stück Draht.

2)

Aus der Gesetzesprämisse:	Wenn ein durch ein Stück Draht Strom geleitet wird, erwärmt es sich.
und der Subsumtionsprämisse:	Dieses Stück Draht erwärmt sich
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas ℂ/γ:	Möglicherweise ($\mathcal{K}$) wird durch dieses Stück Draht Strom geleitet.

3)

Aus der Gesetzesprämisse:	Wenn ein durch ein Stück Draht Strom geleitet wird, erwärmt es sich.
und der Subsumtionsprämisse:	Dieses Stück Draht erwärmt sich nicht
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas ℂ/δ:	Unmöglich ($\mathcal{U}$) wird durch dieses Stück Draht Strom geleitet.

Ist die Gesetzesprämisse ein logisches Gesetz, können wir von einem **logischen Schluss** sprechen, z.B. :

1)

Aus der logischen Gesetzesprämisse:	$[(Sx \rightarrow Mx) \wedge (Mx \rightarrow Px)] \rightarrow (Sx \rightarrow Px)$
und der Subsumtionsprämisse:	Mit den Gesetzen *Alle Antilopen sind Säugetiere* und *Alle Säugetiere sind Wirbeltiere* liegen logische Beziehungen der Art $(Sx \rightarrow Mx)$ und $(Mx \rightarrow Px)$ vor

folgt notwendig gemäß des Schlussschemas $\mathbb{C}/\alpha$:	Notwendig ($\mathcal{N}$) gilt das Gesetz *Alle Antilopen sind Wirbeltiere* – ein Gesetz der Form $Sx \rightarrow Px$

2)

Aus der logischen Gesetzesprämisse:	$[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
und der Subsumtionsprämisse:	Mit den Gesetz *Wenn ein Mensch Lungenentzündung hat, hat er Fieber* liegt eine bedingungslogische Gesetzesbeziehung der Form $p \rightarrow q$ vor
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas $\mathbb{C}/\alpha$:	Notwendig ($\mathcal{N}$) gilt das Gesetz *Wenn ein Mensch kein Fieber hat, hat er keine Lungenentzündung* – ein Gesetz der Form $\sim q \rightarrow \sim p$

3.4.2. Schließen in der traditionellen Logik

In der traditionellen (vorlogistischen) Logik werden die logischen Gesetze, Schlussschemata und Schlüsse nicht strikt und eindeutig voneinander abgegrenzt; es konnte deshalb kein exakter Begriff des Schließens entwickelt werden. Logische Gesetze werden vielfach als Schlüsse missdeutet; so werden insbesondere Obversions-, Konversions- und Kontrapositions*gesetze* als „*unmittelbare Schlüsse*“ verkannt; bestimmte logische Verkettungs*gesetze* werden als „mittelbare *Schlüsse*“ missdeutet. Auch Schlussschemata, die etwa als *Modus ponendo ponens*, *Modus tollendo ponens*, usw. oder als diverse „*Dilemmata*“ mehr oder weniger korrekt dargestellt werden, gelten als „mittelbare Schlüsse“. Diese Verwechslungen resultieren vor allem daraus, dass logische Sachverhaltsausdrücke wie $SaP \equiv (Sx \rightarrow Px)$, die eine bestimmte logische Form benennen, als Sätze, d.h. als Ausdrücke wahrheitswertdefiniter Urteile (Aussagen) missverstanden werden.

3.4.2.1. Verwechslung von Schlüssen mit logischen Gesetzen

Die Unterscheidung „unmittelbarer“ und „mittelbarer Schlüsse“ wurde in der Logik des 17. Jahrhunderts entwickelt und insbesondere durch **KANT** propagiert[15]. Ein „unmittelbarer Schluss“ soll dabei ein Schluss von einer einzigen Prämisse auf die Konklusion sein[16]. Die Behauptung angeblicher „unmittelbarer Schlüsse“, welche der von mir vertretenen These, dass *jeder* Schluss neben einer Gesetzesprämisse stets auch eine Subsumtionsprämisse aufweist, widerspricht, ist falsch – die „unmittelbaren Schlüsse“ erweisen sich durchweg als elementare logische Gesetze. Es handelt sich dabei insbesondere um die elementaren logischen Gesetze, die im so genannten „**logischen Quadrat**“ dargestellt sind (logische Beziehungen der Subalternation, der Kontradiktion, der Konträrietät, der Subkonträrietät); das „logische Quadrat“ stellt keine Schlüsse dar, sondern die logischen Beziehungen, die zwischen den vier logischen Relationen $SaP \equiv (Sx \rightarrow Px)$, $SeP \equiv (Sx \uparrow Px)$, $SiP \equiv (1 \bullet \bullet 1)(Sx, Px)$ und $SoP \equiv (\bullet 1 \bullet 1)(Sx, Px)$, deren logische Beziehungen und Verkettungen den Gegenstand der traditionellen assertorischen Syllogistik bilden[17].

Die Ausdrücke „$SaP \rightarrow SiP$“, „$SeP \rightarrow SoP$“ bezeichnen ebenso wenig Schlüsse[18], wie die Ausdrücke „$SeP \uparrow SaP$“ und „$SeP \succ\!\prec SiP$“[19], oder der Ausdruck des Kontrapositionsgesetzes $(SaP \leftrightarrow \sim Pa \sim S)$[20] und der Ausdruck eines Konversionsgesetzes wie $(SeP) \leftrightarrow (PeS)$; die Ausdrücke „SaP“, „SeP“ usw. bezeichnen ja keine Urteile, sondern logische Sachverhalte bestimmter Art, die nicht durch die Folgerungsrelation verbunden sind, sondern durch logische Relationen. Diese logischen Gesetze können freilich Bezugsgesetz eines Schlusses sein, z.B.:

Aus der logischen Gesetzesprämisse	$SaP \succ\!\prec SoP$
und der Subsumtionsprämisse	Das wahre Gesetzesurteil „Einige Griechen sind keine Philosophen“ hat die logische Form SoP
folgt nach den Schlussschema $\mathbb{J}/\gamma$	Es ist unmöglich, dass das Gesetzesurteil „alle Griechen sind Philosophen“ wahr ist

Diese Schlüsse weisen wie alle Schlüsse zumindest zwei Prämissen auf – eine Gesetzesprämisse (der angebliche unmittelbare „Schluss“) und eine Subsumtionsprämisse.

Vielfach werden die eindeutigen Verkettungen der Syllogismusrelationen SaP, SeP, SiP und SoP als „mittelbare“ *Schlüsse* missdeutet, etwa das logische Verkettungsgesetz: $(SaM)\wedge(MaP) \rightarrow (SaP)$ – der „syllogistische Modus“ *Barbara*; hier solle aus den beiden „Prämissen“ (SaM) und (MaP) die „Konklusion “ (SaP) folgen; die die Ausdrücke „SaM“, „MaP“, „SaP“ und „SaM $\wedge$ MaP“ bezeichnen jedoch keine Urteile, sondern logische Sachverhalte. Diese syllogistischen Verkettungsgesetze können wiederum Gesetzesprämisse eines logischen Schlusses sein. Aus dem syllogistischen Verkettungsgesetz $(SaM)\wedge(MaP) \rightarrow (SaP)$ und den Subsumtionsprämissen *Alle Antilopen sind Säugetiere* und *Alle Säugetiere sind Wirbeltiere* folgt nach den Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$, dass notwendig gilt: *Alle Antilopen sind Wirbeltiere*[21].

3.4.2.2. Verwechslung von Schlüssen und Schlussschemata

Als „mittelbare Schlüsse“ werden neben den syllogistischen Modi, die jedoch Verkettungsgesetze, d.h. spezielle logische Gesetze und keine Schlüsse sind, auch der „hypothetische Syllogismen“ wie der so genannte „modus (ponendo) ponens“ und der „modus (tollendo) tollens“, „disjunktive Syllogismen“ und verschiedene Arten von so genannten „Dilemmata“ aufgeführt. Auch hier haben wir es nicht mit Schlüssen zu tun, sondern in der Regel mit Schlussschemata; diese werden generell inkorrekt dargestellt: das für jeden Schluss wesentliche Verhältnis zwischen dem Allgemeinen (dem Bezugsgesetz) und dem Besonderen/Einzelnen (der Subsumtionsprämisse) erscheint nicht in der Darstellung der Schlussschemata.

Der *Modus ponendo ponens* wird beispielsweise durch den Ausdruck „Wenn A, dann B, nun A; also B“ oder einen entsprechenden Ausdruck dargestellt[22]. Der Ausdruck „Wenn A, dann B“ ist in der traditionellen Logik durchweg zweideutig; mit diesem Ausdruck wird gleichermaßen die logische Beziehung der Implikation bezeichnet wie auch das so genannte problematische Konditional, dessen Struktur ich im nächsten Kapitel darstellen werde. Falls mit „Wenn A, dann B“ die Implikation gemeint ist, sind A und B Bezeichnungen beliebiger, auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogene Sachverhalts-/Ereignisklassen; der Teilausdruck „nun A“ ergibt im diesem Falle nur dann einen Sinn, wenn das Vorliegen eines *einzelnen* Sachverhalts/Ereignisses, das zur Sachverhalts-/Ereignisklasse A gehört; das „also B“ kann nur bedeuten, dass ein zur Sachverhalts-/Ereignisklasse B gehörender/s Einzelsachverhalt/-ereignis vorliegt. Wir haben dann das Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$: wenn p, dann q, nun p*; also q*; der Unterschied von der Sachverhalts-/Ereignisklasse p bzw. q und den einzelnen Sachverhalt/Ereignis p* bzw. q* muss einen expliziten Ausdruck erhalten. Ebenso bezeichnet, falls mit „Wenn A, dann B“ die Implikation gemeint ist, der „modus (tollendo) tollens“ „Wenn A, dann B; nun nicht B, also nicht A“ das Schlussschema $\mathbb{C}/\delta$, wobei wiederum der Unterschied der Sachverhalts-/Ereignisklassen mit den ihnen zu subsumierenden Einzelsachverhalten/Einzelereignissen kenntlich gemacht werden müsste.

Dass als *modus ponens/tollens* oft die Schlussschemata $\mathbb{C}/\alpha$ und $\mathbb{C}/\delta$ gemeint sind, geht eindeutig aus den Verbeispielungen dieser Schlussschemata hervor. **Kondakow** führt für den *modus ponens* die Beispiele „Wenn man ein Geweht abschießt, knallt es.“ {allgemeine Gesetzesprämisse} „Ein Geweht wurde abgeschossen.“ {Subsumtionsprämisse, die ein Einzelereignis betrifft} „Also: es hat geknallt.“ {Konklusion, die ein Einzelereignis betrifft} (**Kondakow**, Wörterbuch der Logik, S. 354). Beispiel eines *modus tollens* ($\mathbb{C}/\delta$) ist: „Wenn ein Flugzeug mit mehr als 1288 km/h fliegt, hat es die Schallmauer durchbrochen“ {Gesetzesprämisse}. „Dieses Flugzeug hat die Schallmauer nicht durchbrochen.“ {feststellende Subsumtionsprämisse} Also: „Dieses Flugzeug fliegt nicht mehr als 1288 km/h.“[23]

Für die so genannten „disjunktiven Syllogismen“ gilt dasselbe. Disjunktive „Syllogismen/Schlüsse“ sollen durch die Ausdrücke „p oder q, nun nicht p, also q“, „p oder q, nun nicht q, also p“ (*modi tollendo ponens*) bzw. bei ausschließendem *entweder-oder* „Entweder p oder q, nun p, also nicht q“, „Entweder p oder q, nun q, also nicht p“ (*modi ponendo tollens*), und „Entweder p oder q, nun nicht p, also q“, „Entweder p oder q, nun nicht q, also p“ (*modi tollendo ponens*) zum Ausdruck gebracht werden[24]. Bezeichnen die Teilausdrücke „(Entweder) p oder q“ die bedingungslogischen Totalformen $p\vee q$ bzw. $p \succ\!\prec q$, dann können die Teilausdrücke „nun (nicht) p“ bzw. „nun (nicht) q“ nur das aktuelle (Nicht-)Vorliegen von Einzelereignissen p* und q* konstatieren; wir haben es nicht mit Schlüssen, sondern mit den Schlussschemata $\mathbb{A}/\beta$, $\mathbb{A}/\delta$ bzw. $\uparrow/\alpha$, $\uparrow/\beta$, $\uparrow/\gamma$ und $\uparrow/\delta$ zu tun. Dass diese Schemata gemeint sind, zeigt das Beispiel **Kodakow**s für einen Schluss nach dem Schlussschema $\uparrow/\delta$: „Gesellschaften sind entweder Klassengesellschaften oder klassenlose Gesellschaften“ (Gesetzesprämisse); „diese Gesellschaft ist keine klassenlose Gesellschaft“ (Subsumtionsprämisse), also: „diese Gesellschaft ist eine Klassengesellschaft“[25].

Auch die Strukturen, die in der traditionellen Logik unter dem Namen *Dilemma* dargelegt werden, können nur dann richtig erfasst werden, wenn strikt zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen und den unter diese zu subsumierenden Einzelereignissen unterschieden wird. Ein so genanntes „*einfaches konstruktives Dilemma*“ wird folgendermaßen formuliert: „Wenn p, so r. Wenn q, so r. p oder q. Folglich r.“[26] Unter der Voraussetzung, dass „Wenn p, so r“ und „Wenn q, so r“ Implikationen bedeuten, hängt die Bedeutung des gesamten Ausdrucks davon ab, ob der Teilausdruck „p oder q“ die Geltung einer bedingungslogischen $\mathbb{A}$-Beziehung zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q behauptet, oder die Feststellung, dass in einem gegebenen Einzelfall von den Einzelereignissen p* und q* zumindest eines vorliegt. In der kondakowschen Darstellung (eigentlich in allen Darstellungen dieser Zusammenhänge in der traditionellen wie „modernen“ Logik) wird die Beziehung zwischen dem Einzelnen/Besonderen und dem Allgemeinen unterschlagen; diese Beziehung ist aber wesentlich, denn auf ihr beruht die Notwendigkeit, die jedem Schließen eignet. Bedeuten „p oder q“, dass von den Einzelsachverhalten/-ereignissen im gegebenen Falle zumindest eines vorliegt, haben wir es mit folgendem Schlussschema zu tun:

Gesetzesprämissen:	$p \rightarrow r$; $q \rightarrow r$
Subsumtionsprämisse:	von p* und q* liegt mindestens eines vor
Konklusion:	$\mathcal{N}(r^*)$

Die Gültigkeit des Schlussschemas ergibt sich aus der Gültigkeit von $\mathbb{C}/\alpha$. Die Formen $p \rightarrow r$ und $q \rightarrow r$ müssen verträglich sein[27].

Wenn jedoch der Teilausdruck „A oder B“ im Ausdruck „Wenn A, so C. Wenn B, so C. A oder B. Folglich C“ die Geltung der logischen $\mathbb{A}$-Beziehung zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklasse*n* A und B behauptet, resultiert ein Widerspruch, denn die drei Relationen $p \rightarrow r$; $q \rightarrow r$ und $p \vee q$ sind unverträglich; die logischen Formen $p \rightarrow r$ und $q \rightarrow r$ legen die Normalmatrix der Relation von (p, q, r) in der folgenden Weise fest:

bei $p \rightarrow r$ gilt:	bei $q \rightarrow r$ gilt:
1. rm $(p \frown r)$, also rm$(p \frown q \frown r)$ $\vee$ rm$(p \frown \sim q \frown r)$	5. rm $(q \frown r)$, also rm$(p \frown q \frown r)$ $\vee$ rm$(\sim p \frown q \frown r)$
2. nrm$(p \frown \sim r)$, also nrm$(p \frown q \frown \sim r)$ & $\vee$nrm$(p \frown \sim q \sim r)$	6. nrm$(q \frown \sim r)$, also nrm$(p \frown q \frown \sim r)$ & nrm$(\sim p \frown q \frown \sim r)$
3. rm$(\sim p \frown r)$, also rm$(\sim p \frown q \frown r)$ $\vee$ rm$(\sim p \frown \sim q \frown r)$	7. rm$(\sim q \frown r)$, also rm$(p \frown \sim q \frown r)$ $\vee$ rm$(\sim p \sim q \frown r)$;
4. rm$(\sim p \frown \sim r)$, also rm$(\sim p \frown q \frown \sim r)$ $\vee$ rm$(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$	8. rm$(\sim q \frown \sim r)$, also rm$(p \frown \sim q \frown \sim r)$ $\vee$ rm$(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$; **VIII=1**

Weil bei Geltung von $p \rightarrow r$ und $q \rightarrow r$ bestimmt ist, dass rm$(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$ gilt, gilt auch rm$(\sim p \frown \sim q)$, und deshalb kann zugleich nicht auch die Alternation $p \vee q$ gelten; für die Beziehung von (p, q) ergeben sich nur die Möglichkeiten: $p \top q$, $p \uparrow q$, $p \rightarrow q$, und $p \leftarrow q$. Das „einfache konstruktive Dilemma“ „Wenn p, dann r; wenn q dann r; (entweder) p oder q“ ist nicht korrekt, wenn der Ausdruck „p oder q“ eine bedingungslogische Alternationsbeziehung bezeichnet; was nun tatsächlich gemeint ist, geht aus den üblichen Darstellungen nicht hervor – diese Darstellung sind deshalb durchweg irreführend. Der Ausdruck „p oder q“ kann nur bedeuten, dass in einem Einzelfalle von den Einzelereignissen p* und q* zumindest eines vorliegt. Als Konklusion ergibt sich dann, dass notwendigerweise r* vorliegt.

Der Ausdruck „Wenn A, so B; wenn C, so D; A oder C: folglich B oder D“ soll das *zusammengesetzte konstruktive Dilemma* ausdrücken[28]. Aus dem Wortlaut geht gar nicht hervor, ob das Verkettungsgesetz

$$\text{Für alle } p, q, r, s\text{: } [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$$

oder das Schlussschema:

Gesetzesprämissen:	$p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$
Subsumtionsprämisse:	von p^* und r^* zumindest eines
Konklusion:	$\mathcal{N}$(von q^* und s^* zumindest eines)

gemeint ist.

1) Überprüfen wir, ob das Verkettungsgesetz „*Für alle* p, q, r, s: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$" gültig ist: Wie ist die logische Relation von (p, q, r, s)[29] durch die logischen Totalformen $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)$ festgelegt und sind diese drei Formen überhaupt verträglich? Wenn dies der Fall ist, gilt dann bei $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)$ notwendig auch $(q \vee s)$?

bei $(p \rightarrow q)$ gilt:	bei $r \rightarrow s$ gilt:	bei $p \vee r$ gilt:
1. $rm(p \frown q)$, also: $rm(I \vee II \vee III \vee IV)$	5. $rm(r \frown s)$, also $rm(I \vee V \vee IX \vee XIII))$	9. $rm(p \frown r)$, also $rm(I \vee II \vee V \vee VI)$
2. $nrm(p \frown {\sim} q)$, also $nrm(V \& VI \& VII \& VIII))$	6. $nrm(r \frown {\sim} s)$, also $nrm(II \& VI \& X \& XIV)$	10. $rm(p \frown {\sim} r)$, also $rm(III \vee IV \vee VII \vee VIII)$
3. $rm({\sim} p \frown q)$, also $rm(IX \vee X \vee XI \vee XII))$	7. $rm({\sim} r \frown s)$, also $rm(III \vee VII \vee XI \vee XV)$	11. $rm({\sim} p \frown r)$, also $rm(IX \vee X \vee XIII \vee XIV)$
4. $rm({\sim} p \frown {\sim} q)$, also $rm(XIII \vee XIV \vee XV \vee XVI)$	8. $rm({\sim} r \frown {\sim} s)$, also $rm(IV \vee VIII \vee XII \vee XVI)$	12. $nrm({\sim} p \frown {\sim} r)$, also $nrm(XI \& XII \& XV \& XVI)$

Die drei Totalformen erweisen sich als verträglich; die 12 Bedingungen legen die Normalmatrix der vierstelligen logischen Totalform von (p, q, r, s) vollständig fest; es gilt das Äquivalenzgesetz :

Für alle p, q, r, s: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \leftrightarrow [p, q, r, s\ \mathbb{COKK}]$.

Aus der Normalmatrix dieser vierstelligen logischen Totalform lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

$p \vee s$; $q \vee r$; $q \vee s$. Es gilt also das logische Verkettungsgesetz:

Für alle p, q, r, s: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow [(p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)]$,

damit auch das Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$

Nicht nur die Schlussschemata $\mathbb{C}/\alpha$ und $\mathbb{C}/\delta$ werden als „hypothetische Syllogismen" angesehen, auch das logische Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ wird „hypothetischer Syllogismus" genannt[30]. Es fehlt in der traditionellen Logik jedoch nicht nur eine klare und durchgehende Unterscheidung von logischen Gesetzen, Schlussschemata und Schlüssen, die unterschiedlichen Sachverhalte werden zusätzlich auch ungenügend von der Struktur der problematischen Konditionale und verwandter Formen abgegrenzt. Eine Untersuchung dieser Formen soll im nächsten Kapitel vorgenommen werden.

Anmerkungen zu Teil I, Kapitel 3

---

1 Dieses Verfahren wurde in seiner vollen Allgemeinheit von Hannes Predan entdeckt.

2 Ist M eine Menge, dann ist $\complement M$ ist das Komplement der Menge M im Bezugsbereich der Menge M. Im vorliegenden Fall ist der Bezugsbereich immer die Gesamtheit *aller* nichtleeren logischen Totalformen von der Stelligkeit $|M_{\Delta} \cup M_{\Lambda}|$. Der Ausdruck „|N|" bezeichnet die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge N.

3 Ein Sonderfall, weil bei $(O_1 \wedge O_2) \rightarrow (U)$ nicht beliebige Sachverhalts-/Ereignisklassen, sondern logische Relationen, d.h. spezielle Sachverhaltsklassen verkettet sind.

4 Da das Zeichen „∨" nach Festlegung eine zweistellige logische Totalform bezeichnet, sei zusätzlich festgesetzt, dass „$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n$" bedeuten soll, dass von den Ereignissen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ zumindest eines vorliegt.

5 Vgl. zu diesen Äquivalenzen den unten stehenden Abschnitt zu den Konversionsgesetzen.

6 Vgl. **A.MENNE**: Obversion, HWP 6, Sp.1089f

7 Denn die Vorkommenskombinationen I ($q \frown p$) und IV ($\sim q \frown \sim p$) der nicht-normalen Anordnung sind identisch mit den Vorkommenskombinationen I ($p \frown q$) und IV ($\sim p \sim \sim q$) der normalen Anordnung, wohingegen die Vorkommenskombinationen II ($q \frown \sim p$) bzw. III ($\sim q \frown p$) der nicht-normalen Anordnung den Vorkommenskombinationen III ($\sim p \frown q$) bzw. II ($p \frown \sim q$) entsprechen.

8 Auch für andere bedingungslogische Gesetzmäßigkeiten gibt es solche Schlüsse: Aus dem $\mathbb{A}$-Gesetz „Ein Auto hat Trommel- oder Scheibenbremsen oder beides“ (Gesetzesprämisse) und der Feststellung „Das Auto von Hans hat keine Trommelbremsen“ (Subsumtionsprämisse) folgt die Aussage „Das Auto von Hans hat (notwendigerweise) Scheibenbremsen“.

Dies sind Beispiele von Schlüssen, die in einer Subsumtion eines *Einzel*falles unter ein Gesetz bestehen; die Subsumtionsprämisse konstatiert das Vorliegen eines Sachverhalts/Ereignisses an einer bestimmten Raum- und Zeitstelle. Es gibt dann noch Schlüsse, die in der Subsumtion von *Besonder*fällen unter ein Gesetz bestehen: die Konklusion besteht dann in einem zeitübergreifenden Gesetz:

Beispiel einer Subsumtion eines Besonderfalles unter ein Gesetz:

Wenn ein Metallstab erhitzt wird, dehnt er sich aus.
Wenn etwas ein Eisenstab ist, dann ist es ein Metallstab
$\therefore$ Wenn ein Eisenstab erhitzt wird, dehnt er sich aus.

9 Die Gültigkeit der Subsumtionsprämisse ergibt sich selbst wieder aus einem *Schluss des Dass*, aus dem hervorgeht, dass ich es im aktuellen Fall genau mit einem Ding oder Zustand derjenigen Art zu tun habe, über die das Bezugsgesetz eine allgemeine Gesetzesaussage macht; die Subsumtionsprämisse resultiert so aus der Subsumtion des gegebenen Vorliegenden unter ein Gesetz, das die Bedingungen dafür angibt, dass Derartiges vorliegt.

10 Gilt [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{X}$], dann gelten ($p \leftarrow q$), ($p \leftarrow r$) und ($q \rightarrow r$).

11 „Jede gültige Schlussregel scheint nicht nur einen gerechtfertigten Übergang von Prämissen zur Conclusio zu erlauben, sondern eine gewisse Notwendigkeit bei sich zu führen: Wenn dies, das und das gilt, dann muss dies oder jenes der Fall sein.“ (**PATZIG**, G.: Schluss, HPG 5, 1253)

12 Das Attribut „gegenständlich“ soll besagen, dass die Sachverhalte/Ereignisse, deren Gesetzmäßigkeit bestimmt wird, der gegenständlichen Lebenswirklichkeit angehören; ihre Kenntnis resultiert aus dem praktischen Umgang mit den Gegenständen der Lebenswelt; es sind keine logischen Sachverhalte, deren Kenntnis in der logisch verallgemeinernden Reflexion von gegenständlichem Wissen gewonnen wird.

13 „Sx“ bezeichnet den logischen Sachverhalt, dass irgendeinem Gegenstand ein Prädikat S zukommt; „$Sx \rightarrow Mx$“ bezeichnet den logischen Sachverhalt (die logische Form), dass wenn einem Gegenstand ein Prädikat S zukommt, ihm ein Prädikat P zukommt, aber nicht umgekehrt; dieser kann auch formuliert werden durch: „Allen Gegenständen, denen ein Prädikat S zukommt, kommt ein Prädikat P zu, aber und umgekehrt“; diese Form wird in der traditionellen Logik durch den Ausdruck „SaP“ ausgedrückt und deshalb haben die Ausdrücke „$[(Sx \rightarrow Mx) \wedge (Mx \rightarrow Px)] \rightarrow (Sx \rightarrow Px)$“ und „$(SaM \wedge MaP) \rightarrow SaP$“ dieselbe Bedeutung; der so genannte Syllogismus (oder „syllogistische Modus“) *Barbara* $(SaM \wedge MaP) \rightarrow SaP$ ist ein logisches, implikatives Verkettungsgesetz und kein Schluss.

14 Die Gesetzesprämisse ist ein Implikationsgesetz, demnach muss das Schlussschema aus einem Modalisierungsmodus der Implikation $\mathbb{C}$ abgeleitet sein.

15 **KANT I./JÄSCHE, G.B.**, Logik, in: Werke Band 5 (Schriften zur Metaphysik und Logik), hrsg. von **W.WEISCHEDEL**, Sonderausgabe, Darmstadt 1983

16 **KANT**/**JÄSCHE**, §§ 43-55; **A.PFÄNDER**, Logik, S. 253ff; **KONDAKOW**, S. 439f

17 Die Gesetze der „Logischen Quadrats“ sind in folgender Relationenmatrix dargestellt:

	SaP ($Sx \rightarrow Px$)	SeP ($Sx \uparrow Px$)	SiP $(1{\bullet}{\bullet}1)(Sx,Px)$	SoP $({\bullet}1{\bullet}1)(Sx,Px)$
SaP ($Sx \rightarrow Px$)	$\mathbb{E}$ Äquivalenz	$\mathbb{D}$ Kontrarietät	$\mathbb{C}$ Subalternation	$\mathbb{J}$ Kontradiktion
SeP ($Sx \uparrow Px$)	$\mathbb{D}$ Kontrarietät	$\mathbb{E}$ Äquivalenz	$\mathbb{J}$ Kontradiktion	$\mathbb{C}$ Subalternation
SiP $(1{\bullet}{\bullet}1)(Sx,Px)$	$\mathbb{B}$ Konverse der Subalternation	$\mathbb{J}$ Kontradiktion	$\mathbb{E}$ Äquivalenz	$\mathbb{A}$ Subkontrarietät
SoP $({\bullet}1{\bullet}1)(Sx,Px)$	$\mathbb{J}$ Kontradiktion	$\mathbb{B}$ Konverse der Subalternation	$\mathbb{A}$ Subkontrarietät	$\mathbb{E}$ Äquivalenz

18 „Der unmittelbare Schluss von a auf i, und der von e auf o ist immer folgerichtig. – Diese beiden gültigen Schlüsse heißen die unmittelbaren Schlüsse der Subalternation.“ (**PFÄNDER**, S. 257)

19 „Der unmittelbare Schluss … von der Wahrheit des allgemein bejahenden Urteils … auf die Falschheit des partikular und des universal verneinenden Urteils ist also immer folgerichtig.“ (**PFÄNDER**, S. 262)

20 „Aus dem *allgemein bejahenden Urteil* ›Alle S sind P‹ folgt unmittelbar das *allgemein verneinende Urteil* ›Alle Gegenstände, die nicht P sind, sind nicht S‹.“ (**PFÄNDER**, S. 278)

21 Die gebräuchliche Darstellung dieses Schlusses

Alle Antilopen sind Säugetiere
Alle Säugetiere sind Wirbeltiere

∴ Alle Antilopen sind Wirbeltiere

ist enthymematisch – die für die Gültigkeit des Schlusses unverzichtbare Gesetzesprämisse ist nicht ausdrücklich aufgeführt. Auch der Ausdruck „Wenn alle Antilopen Säugetiere sind und wenn alle Säugetiere Wirbeltiere sind, dann sind alle Antilopen Wirbeltiere“ wird für eine Darstellung dieses Schlusses gehalten; hier handelt es sich jedoch um einen ganz andersgearteten Zusammenhang – um ein *problematisches Konditional*, auf das ich im nächsten Kapitel näher eingehen werde.

22 „Die klassische Logik lehrt vor allem zwei Schlüsse, in denen hypothetische Urteile mitspielen, den modus ponens und den modus tollens. Der modus ponens lautet: ‚Wenn H, dann K; nun ist H; also ist K.‘ “(**VON FREYTAG-LÖRINGHOFF**, Logik I, S.86) – Als Modus ponens werde ein Argument der folgenden Form bezeichnet: „Wenn p, dann q. p. ∴ {ergo} q“ (**SALMON**, S. 52f)

23 Wörterbuch der Logik, S. 354f

24 **KONDAKOW**, S. 355, **SALMON**, S. 84.

25 **KONDAKOW**, S. 355

26 **KONDAKOW**, S.133; statt p, q, r bei **KONDKOW** A, B, C.

27 Es wird auch die Geltung des folgenden „Dilemmas“ überliefert: (Entweder) p oder nicht-p. Wenn p, dann r. Wenn nicht-p, dann r. Also r. (**SALMON**, S.70; **J.MAU**: Dilemma, in: HWP 2, Sp-247f). Der behauptete Zusammenhang ist jedoch widersprüchlich, denn es kann nicht zugleich gelten $p \rightarrow r$ und $\sim p \rightarrow r$: bei $p \rightarrow r$ gilt: $rm(\sim p \frown \sim r)$, bei $(\sim p \rightarrow r)$, äquivalent mit $(p \vee r)$ gilt hingegen $nrm(\sim p \frown \sim r)$ – das ist ein Widerspruch. Wenn sowohl bei p wie $\sim p$ notwendig r, dann gilt eine scheinbare Dependenz, nämlich die Postpendenz: $p \lfloor r$ jedenfalls r, ob nun p oder $\sim p$.

28 **KONDAKOW**, S. 135; **SALMON**, S.69

29 Für (p,q,r, s) erhalten wir die Vorkommenskombinationen:

I: $p \frown q \frown r \frown s$;	II: $p \frown q \frown r \frown \sim s$;	III: $p \frown q \frown \sim r \frown s$;	IV: $p \frown q \frown \sim r \frown \sim s$;
V: $p \frown \sim q \frown r \frown s$;	VI: $p \frown \sim q \frown r \frown \sim s$	VII: $p \frown \sim q \frown \sim r \frown s$	VIII: $p \frown \sim q \frown \sim r \frown \sim s$;
IX: $\sim p \frown q \frown r \frown s$;	X: $\sim p \frown q \frown r \frown \sim s$;	XI: $\sim p \frown q \frown \sim r \frown s$;	XII: $\sim p \frown q \frown \sim r \frown \sim s$;
XIII: $\sim p \frown \sim q \frown r \frown s$;	XIV: $\sim p \frown \sim q \frown r \frown \sim s$;	XV: $\sim p \frown \sim q \frown \sim r \frown s$;	XVI: $\sim p \frown \sim q \frown \sim r \frown \sim s$.

30 **SALON**, S. 85, **ELFENHANS**, S. , **K.LORENZ**, Schluss, HWP 8, Sp.1305; **G.PATZIG**, Logik, S. 154, **FREYTAG-LÖRINGHOFF**, Logik I, S.87