II, Kapitel 3: Freges Versuch einer „Verallgemeinerung“ des Funktionsbegriffes. Das System der Fregealgebra

3.1. Freges Verständnis der Abbildung

Obwohl **Frege** die Gedankengefüge eindeutig definiert hat, missdeutet er sie dann, indem er sie im Widerspruch zu ihrer Definition als bedingungslogische Verhältnisse ausgibt; die Folge dieser Missdeutungen ist ein verwirrender Synkretismus von Fregegesetzen, Gesetzen des SFG und von logischen Gesetzen; mit dem aus dieser Missdeutung resultierenden Widersinn, mit der dogmatischen Leugnung oder Verharmlosung dieser Paradoxa und mit den vergeblichen Versuchen die Folgen der Missdeutung auszuräumen, haben wir uns im letzten Kapitel befasst. **Frege** verwechselt die Gedankengefüge jedoch nicht nur mit den logischen Relationen, er hält die Gedankengefüge, die von ihm als (tautologische und informationsverschleiernde) *Prädikate* von Aussagen konstruiert worden sind, *zugleich* für *Abbildungen* oder *Funktionen*.

Frege hat die Gedankengefüge als „Wahrheits*funktionen*“ bestimmt; die Rede von „Wahrheitsfunktion“ besagt hier nichts anderes, als dass die Wahrheit der Gedankengefüge ausschließlich von den vorgegebenen Wahrheitswerten der Aussagen *abhängt*, denn die Gedankengefüge sind *Prädikate*[1], die diese vorausgesetzten Wahrheitswerte entweder nur tautologisch oder informationsverschleiernd wiederholen. Prädikate sind allgemeine begriffliche Bestimmungen, die Gegenständen bestimmter Art zugeschrieben werden, und die diesen Gegenständen eine Bestimmtheit zuweisen; wir haben ein Verhältnis von Allgemeinem (Prädikat, Begriff) und Einzelnem (Gegenstand, Prädikand); durch die Operation der Prädikation werden die prädizierten Gegenstände zugleich einer Klasse gleichartiger Gegenstände eingeordnet. Gedankengefüge sind Prädikate von vorgegebenen (den prädizierten) Aussagen – Aussagen über die vorgegebenen, stets vorausgesetzten Wahrheitswerte der prädizierten Aussagen. Die Bestimmungen „Wahrheitsfunktion“, „wahrheitsfunktional“ und „Wahrheitsfunktionalität“, wie ich sie bislang zur Kennzeichnung der Gedankengefüge gebraucht habe, dienen alleine dem Ausdruck der Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Gedankengefüge-Aussagen von den vorgegebenen Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen[2]; sie bringen keineswegs zum Ausdruck, dass die Gedankengefüge echte Funktionen oder Abbildungen im Sinne der modernen allgemeinen Algebra sind, nämlich spezielle Relationen, bei welchen alle Gegenstände, die Elemente einer bestimmten Menge sind, jeweils durch eine Zuordnungsvorschrift eindeutig auf ein Element einer anderen oder derselben Menge abgebildet wird; deshalb markiere ich die Wörter *Wahrheitsfunktion* und *wahrheitsfunktional* stets durch Anführungszeichen.

Frege ist überzeugt, dass er im Zuge einer „Verallgemeinerung“ des Begriffs der mathematischen Funktion/Abbildung nachgewiesen hat, dass jedes Prädikat *unmittelbar* eine Funktion darstellt; dass die Gedankengefüge-Prädikate zugleich Funktionen sind, steht für ihn außer Frage. Auch später scheint **Frege**s Deutung der Gedankengefüge als Funktionen/Abbildungen nie problematisiert worden zu sein. **Frege** hält seine Identifizierung von Prädikation (Begriff) und Abbildung (Funktion) für eine bedeutende Errungenschaft logischer Theoriebildung; die Berechtigung dieser Identifizierung muss jedoch zuerst einmal unvoreingenommen geprüft werden. Können die Gedankengefüge wirklich ohne weiteres als „Wahrheitsfunktionen“ im Sinne *echter* Abbildungen begriffen werden? Tatsächlich führt die Auffassung der „Wahrheitsfunktionen“ als *echter* Abbildungen zu einem System, das sich *nach Form und Inhalt* vom System der Gedankengefüge – trotz einer bestimmten Isomorphie – grundlegend unterscheidet. Ich werde jetzt versuchen, die Konstruktionsprinzipien und Gesetzmäßigkeiten, auf denen dieses System echter „Wahrheitsfunktionen“ beruht, dazulegen, und dann die logischen Deutungen dieses Systems prüfen. Die Vorstellungen, die **Frege** über die Struktur der Funktionen im allgemeinen, der „Wahrheitsfunktionen“ im besonderen vorträgt, können alleine im Lichte des präzisen Begriffs der Abbildung, wie ihn die moderne Strukturalgebra vorgibt, bewertet werden. Jede *Abbildung* oder *Funktion*[3] ist danach als *spezielle* zweistellige Relation gefasst, wobei der Begriff der zweistelligen Relationen seinerseits auf der Grundlage des Begriffs des kartesischen Produktes von zwei Mengen bestimmt ist. Anders als **Frege** – zum Zwecke der Immunisierung seiner verwaschenen Abbildungs-Konzeption – postuliert (WF 89f [665]; EMN 290), ist eine präzise Definition des Begriffs der Abbildung/Funktion nicht nur möglich, sondern auch unverzichtbar.

Für beliebige wohlbestimmte Mengen M und N heißt die Menge aller geordneten Paare (m, n), die sich mit den Elementen von m aus M und n aus N bilden lassen, ***kartesisches Produkt*** *von M und N*; es wird beschrieben durch den Ausdruck: „$M \times N = \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}$“[4]. Für „$M \times M$“ wird auch „$M^2$“ geschrieben.

A und B seien Mengen; r = (A,B,R), mit $R \subseteq A \times B$, heißt ***zweistellige Relation*** r zwischen $x \in A$ und $y \in B$. R heißt der *Graph* der Relation r. D und Z seien Mengen; die zweistellige Relation $f = (D,Z,F)$, mit F als Graph der Relation f, heißt genau dann ***Abbildung*** *von D nach Z* – „f: D ➡ Z“ – , wenn gilt: *für jedes* $d \in D$ gibt es *genau ein* $z \in Z$ mit $(d, z) \in F$. D heißt *Definitionsmenge*, Z heißt *Zielmenge*; die Festlegung, die bestimmt, welches Element der Zielmenge in eindeutiger Weise jeweils jedem Element der Definitionsmenge zugeordnet wird, heißt *Zuordnungsvorschrift*. Für $(d, z) \in F$ schreibt man auch $f(d) = z$; d heißt „*Urbild*“, $f(d)$ heißt „*Bild* von d bezüglich f“. Die Menge aller Bilder einer Abbildung heißt *Wertemenge. Eine exakte und vollständige Beschreibung einer Abbildung liegt nur dann vor, wenn Definitionsmenge, Zielmenge und durch die Zuordnungsvorschrift der Graph der Abbildung eindeutig angegeben sind; nur wenn alle drei Komponenten einer Abbildung präzise, nachvollziehbar und überprüfbar bestimmt sind, ist man berechtigt, von einer Abbildung (Funktion) zu reden.*

Unter den Abbildungen gibt es spezielle Abbildungen, sog. ***algebraische Verknüpfungen*** oder ***algebraische Operationen***. Die Mengen zusammen mit den in ihnen festgelegten algebraischen Verknüpfungen heißen ***algebraische Strukturen***. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ und M seien Mengen. Unter einer *n-stelligen algebraischen Verknüpfung* versteht man eine Abbildung **V** des kartesischen Produktes $M_1 \times M_2 \times M_3 \times \ldots \times M_n$ in M; jedem n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in M_i$ wird dadurch eindeutig ein Element $\mathbf{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ zugeordnet. Werden Elemente aus $M_1 \times M_2$ in M abgebildet, spricht man von einer *binären Verknüpfung* oder *binären Operation*. Gilt $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, spricht man von einer *inneren Verknüpfung*.

Im Lichte dieser einfachen, nichtintuitiven und exakten Bestimmungen erweisen sich **FREGE**s Vorstellungen über Funktionen, insbesondere seine Darstellungen der Begriffe als „Funktionen“ als verworren und unrichtig. Es zeigt sich, dass das Systems der Gedankengefüge trotz einer bestimmten „Isomorphie“ nicht als eine bestimmte algebraische Struktur echter Funktionen/Abbildungen gedeutet werden kann. **FREGE** gibt also seinen Gedankengefügen nicht nur eine unzulässige nachträgliche logische Deutung, er fasst die Gedankengefüge darüber hinaus in zweideutig-widersprüchlicher Weise auf: einmal als Prädikatoren, dann als algebraische Verknüpfungen.

In **FREGE**s Verständnis der arithmetischen Funktionen wird die von der eben angeführten korrekten Definition geforderte untrennbare Einheit von Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift/Graph, die *erst zusammen* eine Abbildung ausmachen, ausdrücklich bestritten. Das „Wesen der Funktion“ besteht nach **FREGE** darin, dass sie *als Funktion* „ungesättigt“ ist, und erst noch durch die *Argumente*, d.h. durch die Elemente der Definitionsmenge „gesättigt“ oder vervollständigt werden muss. Die „übliche Darstellung“ einer Funktion wie „x^2+3x“[5] erschwere die Einsicht in das „Wesen der Funktion“, weil sie die angebliche Ergänzungsbedürftigkeit der Abbildung nicht kenntlich mache. Um aus dem „üblichen“ Funktionsausdruck die „eigentliche Funktion“ in ihrer Ergänzungsbedürftigkeit und „Ungesättigtheit“ zu isolieren, wählt **FREGE** die Darstellung „$(\ )^2 + 3(\ )$“ (WF 87f; auch (FB 21 [6])). Die fregesche Vorstellung des „Ungesättigtseins“ jeder Funktion beinhaltet die dissoziative Verselbständigung der „Funktion“ gegenüber der Definitions- und der Zielmenge: „Es kommt mir darauf an zu zeigen, dass das Argument nicht mit zur Funktion gehört, sondern mit der Funktion zusammen ein vollständiges Ganzes bildet; denn die Funktion für sich allein ist unvollständig, ergänzungsbedürftig oder ungesättigt zu nennen.“ (FB 21f [7]) Ausdrücklich betont **FREGE**, dass die Argumente, d.h. die Elemente der Definitionsmenge, auf keinen Fall als zur „Funktion“ gehörig betrachtet werden dürfen (FB 22 [7f]; ASB 26; GGA I, 5f). Was könnte das „vollständige Ganze“, welche die Argumente und die Funktion als seine Teile umfasst, sein, von dem **FREGE** spricht? Dieses Ganze kann nur die Funktion selbst sein; nur weil **FREGE** diese Funktion als spezielle Relation gegenüber ihren Relata verselbständigt, wird das Ganze bei ihm zu seinem Teil. Eine zweistellige Relation (Abbildung) wie „y ist das Quadrat von x“ kann nie von den Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ abgespalten werden, zwischen denen diese Relation besteht; keine Relation kann unabhängig von ihren Relata definiert werden; die Metapher des Ungesättigten behauptet gerade Möglichkeit einer solchen Abspaltung der Relation von ihren Relata.

Bei **FREGE** treten Definitionsmenge, Zielmenge und Abbildung (Funktion) auseinander; die „ungesättigte“, ergänzungsbedürftige „Funktion“ wird seiner Meinung nach durch das selbständige, gesättigte Argument erst noch zu einem ebenfalls selbständigen, „gesättigten“ Funktionswert ergänzt. Es ist aber unmöglich, irgendeine Abbildung ohne ausdrücklichen und expliziten Bezug auf Definitionsmenge *und* Zielmenge zu beschreiben; es lässt sich keine Zuordnungsvorschrift formulieren, ohne dass diese Zuordnung von vorneherein auf eine ganz bestimmte Definitions- und Zielmenge bezogen wäre. **FREGE** bestreitet jedoch ausdrücklich, dass eine Abbildung nur korrekt bestimmt sein kann, wenn sie auf eine wohlbestimmte Definitionsmenge bezogen ist; für ihn ist „die Abgrenzung der Bereiche für die Frage nach dem Wesen der Funktion unwesentlich“ (WF 86 [661]). Diese Behauptung basiert auf seiner recht schiefen Ansicht über die Allgemeinheit von Logik und Mathematik; für **FREGE** sind diese Disziplinen in dem Sinne die „allgemeinsten“ Wissenschaften, als sie nicht, wie andere Wissenschaften, begrenzte Bereiche von Erscheinungen untersuchen, so wie etwa die Allgemeinheit der Biologie insofern eingeschränkt ist, als sie von allen realmöglichen Erscheinungen nur die lebenden Systeme untersucht. Die Aussagen von Logik und Mathematik sollen sich nach **FREGE** auf *alle Dinge* erstrecken. Da ihre Gesetze Anspruch auf „uneingeschränkte Geltung“ hätten, dürfe nicht verlangt werden, „eine Mannigfaltigkeit sorgsam prüfend vorher abzugrenzen, innerhalb derer wir uns dann bewegen dürfen.“ (SVAL 97) „Nur das Allgemeinste, was für alle Gebiete des Denkens Geltung hat, anzugehen, weisen wir der Logik als Aufgabe zu.“ (Log II, 38; auch FTA 103 [95]) Die Funktionen erhielten erst dann wahrhafte logisch-mathematische Allgemeinheit, wenn der universelle Bereich die Definitionsmenge einer jeden mathematischen Abbildung und jeder beliebige Gegenstand so ein mögliches Argument einer jeden (logisch-mathematischen) Funktion sei.

Eine mathematische Funktion Φ(ξ), so **FREGE**, solle immer eine Bedeutung gewinnen, durch welchen Eigennamen „ξ“ auch immer ersetzt werde. „Sonst würde ich Φ(ξ) nicht Funktion nennen. Danach bedeutete dann ‚$x \cdot (x - 1) = x^2 - x$‘ das Wahre, wenigstens, wenn die Bezeichnungen der Multiplikation, Subtraktion und Quadrierung auch für Gegenstände, die nicht Zahlen sind, so definiert wären, dass die Gleichung allgemein gälte.“ (GGA I, 11) **FREGE**s Forderung, „die Funktionen so zu erklären, dass sie für jedes Argument einen Wert erhalten“, verlangt eine „Definition“ der mathematischen Verknüpfungen, die es zulässt, dass auch die Sonne ins Quadrat gesetzt werden kann (BR 230 [374f;]; EL 81), oder dass die Sonne zum Summand einer Summe wird (FB 30f), oder dass man entsprechend die siebente Wurzel aus Napoleon ziehen kann, usw.

FREGEs Auffassung, die logisch-mathematische Allgemeinheit bestünde darin, dass diese Wissenschaften nur solche Aussagen treffen könnten, die für jeden beliebigen Gegenstand richtig sind (es wären dann nur absolut gehaltlose und nichtssagende Aussagen möglich), ist falsch; die Universalität des mathematischen Abbildungs-/Funktionsbegriffes besteht keineswegs darin, dass die einzelnen mathematischen Funktionen Zusammenhänge beschreiben würden, die stets alle nur denkbaren Gegenstände einbezögen und direkt beurteilten, und dass deshalb der universelle Bereich die Definitionsmenge einer jeden mathematischen Funktion sein müsste; der Begriff der Funktion bestimmt vielmehr alle notwendigen Bedingungen, die gegeben sein müssen, wenn zwischen *beliebigen abgegrenzten Mengen* mit geeigneten Elementen eine bestimmte Abbildungsrelation bestehen soll. Es wird dabei nicht, wie **FREGE** befürchtet, eine Beschränkung auf einen ganz bestimmten Bereich von Gegenständen vorgenommen, sondern der universelle Abbildungsbegriff spezifiziert die Normen, denen *beliebige* abgegrenzte Bereiche von Gegenständen genügen müssen, wenn zurecht zwischen ihren Elementen eine bestimmte funktionale Abhängigkeit behauptet werden soll. Der Begriff der Abbildung ist universell insofern, als er in beliebigen Bereichen der Wirklichkeit Anwendung finden kann (sofern die Gegenstände dieses Bereichs gewissen wohlbestimmten Bedingungen etwa der Zählbarkeit, der Messbarkeit usw. genügen), und in allen nur möglichen Sphären der Wirklichkeit zum Gewinnen objektiver Erkenntnisse beiträgt.

Auch den Graphen einer Abbildung – bei **FREGE** *Wertverlauf* –, der doch unmittelbar die Verbindung von Definitions-, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift, und damit die Abbildung selbst zum Ausdruck bringt, verselbständigt **FREGE** gegenüber der „Funktion“. So meint er, der Graph oder Wertverlauf einer Funktion müsse gegenüber der „Funktion“ eine eigene Darstellung erhalten; er bezeichnet den Wertverlauf (Graphen) der Funktion $y = x^2 - 4x$ durch den Ausdruck „$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$“. Dies ist jedoch eine völlig überflüssige Neuerung, denn jede exakte Darstellung einer Abbildung ist notwendig zugleich eine exakte Bestimmung des Graphen, weil der Graph die unmittelbare Einheit von Definitions-, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift ist.

In **FREGE**s Konzeption der Abbildung/Funktion wird die Struktur der (arithmetischen) Abbildungen als *notwendige* Zuordnung der Elemente von Definitions- und Zielmenge zerstört; die arithmetischen Funktionen bringen notwendige Zusammenhänge zwischen Größen zum Ausdruck, sie sind wie die ereignislogisch/bedingungslogischen Relationen mögliche gesetzmäßige Zusammenhänge; eine Funktion erstreckt sich in ihrer Geltung auf *alle* Elemente der Definitionsmenge, denen sie durch eine allgemeine Rechenvorschrift *genau ein* Element der Zielmenge zuordnet. **FREGE**s Vorstellung der „Ungesättigtheit“ aber zerstört gerade diesen Beziehungscharakter. Eine an sich „ungesättigte“ Funktion wird nach **FREGE** durch einen selbständigen Gegenstand „gesättigt“, aus der „Sättigung“ resultiert der Funktionswert als wiederum selbständiger Gegenstand[6] – und der Sinn einer Funktion besteht nach **FREGE** nicht darin, gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen den Elementen der Definitionsund Zielmenge zum Ausdruck zu bringen, sondern darin, eine Zahl, nämlich den Funktionswert zu *benennen*: „Was bedeutet nun eine solche Verbindung aus einem Funktionszeichen und einem Zahlzeichen, wie ‚sin 1'; ‚≡1', ‚*l* 1'? Jedes Mal eine Zahl. So erhalten wir Zahlzeichen, die aus ungleichartigen Teilen zusammengesetzt sind, indem der ungesättigte durch den anderen ergänzt wird." (WF 88 [664]) Die Funktion ist für **FREGE** also ein unfertiger Zahlname; die Frage wäre dann allerdings, warum wir eine Zahl umständlicherweise so bezeichnen sollen, dass wir eine „gesättigte" Zahl eine „ungesättigte" Funktion zu dieser wiederum „gesättigten" Zahl ergänzen, da wir jede Zahl auch direkt bezeichnen können – als umständliche Zahlbezeichnung wäre der arithmetische Funktionsbegriff bestimmt überflüssig! Die Funktionsausdruck „$f(x) = ≡x$" ist jedoch keine Bezeichnung *einer* Zahl, sondern bezeichnet eine gesetzmäßige *Beziehung* zwischen *zwei* Zahlen: für *jede* reelle Zahl kann genau eine Zahl konstruiert werden, mit der sie in der Relation „… ist Quadratwurzel aus …" steht; das ist ja wohl etwas ganz anderes als ein Zahlname. Der Begriff der linearen Funktion der Form $f(x) = a \cdot x + b$ gibt uns nicht die Möglichkeit, auf umständliche Weisen Zahlen zu benennen, sondern versetzt uns in die Lage, die generellen Eigenschaften aller nur möglichen Strukturen gesetzmäßiger linearer Abhängigkeit zu bestimmen. Gerade die entscheidende Leistung der Theorie der Funktionen, nämlich alle möglichen Strukturen gesetzmäßiger Abhängigkeiten bestimmter Art rein theoretisch, ohne jede Stützung auf empirisch-faktische Zusammenhänge, in normativer Vollständigkeit und Exaktheit zu beschreiben, wird durch **FREGE**s Dissoziation der Funktionen von ihren spezifischen Argumenten und Funktionswerten unbegreiflich; die Verselbständigung der Funktionen zerstört sie als mögliche Strukturen gesetzmäßiger Abhängigkeiten – sie karikiert den Begriff der Funktion.

Auf der Basis der eben skizzierten unhaltbaren Vorstellungen über die Operation der Abbildung/Funktion versucht **FREGE**, den Funktionsbegriff einer „Verallgemeinerung" zu unterziehen, die, wie er hofft, der Erweiterung der Zahlbereiche an Bedeutung nicht nachsteht. Bislang seien es allein die „Rechnungsarten" gewesen, die zur Bildung einer Funktion beigetragen hätten; **FREGE** will die Verallgemeinerungen weiterführen, indem er nicht bloß Verknüpfungsoperationen wie Addition, Multiplikation usw., sondern auch andere Relationen zwischen Zahlen zur Bildung von Funktionen heranziehen will. „Zunächst nehme ich zu den Zeichen +, - usw., die zur Bildung eines Funktionsausdrucks dienen, noch hinzu Zeichen wie =, >, <, so dass ich z.B. von der Funktion $x^2 = 1$ sprechen kann, wo x wie früher das Argument vertritt." So ergebe sich

x ➡ $\mathrm{f}(x) = (x^2 = 1)$, *z*.B.

1 ➡ $\mathrm{f}(1) = (1^2 = 1)$,
2 ➡ $\mathrm{f}(2) = (2^2 = 1)$, usw. (FB 26 [12f])

Wie ist diese „Verallgemeinerung" zu bewerten? Zunächst ist $x^2 = 1$ keine Funktionsgleichung wie etwa $f(x) = x^2$, sondern eine *Bestimmungsgleichung*. Einer solchen entspricht die Aufgabe, die Menge all jener Zahlen aufzufinden, die den in der Bestimmungsgleichung angegebenen Bedingungen genügen; in **FREGE**s Beispiel besteht diese Bedingung darin, dass die gesuchte(n) Zahl(en) ins Quadrat erhoben, 1 ergeben soll(en); es müssen also die Elemente der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ bestimmt werden; das ist die Menge $\{1, -1\}$. Eine Bestimmungsgleichung ist ein arithmetischer Sachverhalt ganz anderer Art als eine Funktionsgleichung. Weder der Ausdruck „$x^2 = 1$" noch der „$\mathrm{f}(x) = (x^2 = 1)$" bezeichnet eine Abbildung; denn diese Ausdrücke legen *in keiner Weise* klar und verständlich fest, durch welche Zuordnungsvorschrift *jedes* Element eines Zahlenbereiches auf welche Elemente welcher Zielmenge abzubilden ist; aus den Ausdrücken geht weder die Definitionsmenge, noch die Zielmenge, noch eine Zuordnungsvorschrift hervor.

FREGE *meint* etwas ganz anderes, als er *sagt*; er spricht zwar von der „Funktion $x^2 = 1$", aber der Ausdruck „$x^2 = 1^2$" stellt nur einen *Teil* der Formulierung der Zuordnungsvorschrift der von **FREGE** gemeinten, sehr speziellen *charakteristischen Abbildung* $\mathfrak{C}$ dar. **FREGE** hat im Sinn, dass *z*.B. die Gleichsetzung $(-1)^2 = 1$ wahr und die Gleichsetzung $2^2 = 1$ falsch ist. „Ich sage nun: ‚der Wert unserer Funktion ist ein Wahrheitswert' und unterscheide den Wahrheitswert des Wahren von dem des Falschen… Hiernach bedeutet *z*.B. ‚$2^2 = 4$' das Wahre."[7] (FB 26 [13]) **FREGE** hat also eine sehr spezielle charakteristische Abbildung $\mathfrak{C}$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in die Menge der beiden Wahrheitswerte $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}, \mathcal{F}\}$ im Sinn. Diese *gemeinte* Abbildung ist durch den Ausdruck „$x^2 = 1$" *allein* noch nicht beschrieben; die Abbildung kann präzise durch den Ausdruck „für alle $x \in \mathbb{R}$: x ➡ $\mathfrak{C}(x) = \mathfrak{w}(x^2 = 1)$" bezeichnet werden, wobei „$\mathfrak{w}(A)$" den Wahrheitswert einer Aussage A bezeichnet. Wir haben es dann nicht mit einer arithmetischen Funktion zu tun, bei der Definitions- und Zielmenge Zahlbereiche sind, sondern mit einer charakteristischen Abbildung der reellen Zahlen in die Menge der beiden Wahrheitswerte $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}, \mathcal{F}\}$. Hätte **FREGE** diese spezielle Abbildung korrekt und vollständig erfasst und formuliert, hätte er nie durch die synkretistische Identifikation der beiden unterschiedlichen Operationen der Prädikation und der Abbildung soviel Verwirrung stiften können.

Für Zahlen sind beliebig viele nicht rein arithmetische Abbildungen definierbar; die Möglichkeit, die Elemente eines Zahlenbereichs exakt auf alle nur möglichen wohlbestimmten Mengen abzubilden, sofern Zuordnungsvorschrift und Zielmenge eindeutig bestimmt sind, ist mit der Bestimmtheit der Zahlen und dem oben dargelegten Begriff der Abbildung selbst gegeben. Ich kann etwa die Menge der natürlichen Zahlen in die Dreiermenge {♣,♥,♠} abbilden mit der Zuordnungsvorschrift: $\mathfrak{f}(n) = ♣$, genau dann, wenn n gerade ist, und $\mathfrak{f}(n) = ♥$, genau dann, wenn n ungerade und eine Primzahl ist, $\mathfrak{f}(n) = ♠$, genau dann wenn n ungerade und keine Primzahl ist. Für die Bildung derartiger Abbildungen sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt, es muss nur, der Definition der Abbildungsoperation entsprechend, Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift eindeutig und für alle Elemente der Definitionsmenge entscheidbar festgesetzt sein. Mit einer „Verallgemeinerung" des Abbildungsbegriffs haben solche Spielchen nichts zu tun.

Was **FREGE** als eine „Verallgemeinerung" des Funktionsbegriffes im Sinne einer Gleichsetzung von Begriff und Funktion ansieht, ist in Wirklichkeit ein ganz spezieller Typ von Abbildung, nämlich eine *charakteristische Abbildung* $\mathfrak{C}$*;* ist M eine nichtleere, wohlbestimmte Menge, dann versteht man unter einer charakteristischen Abbildung $\mathfrak{C}$ auf M eine Abbildung $\mathfrak{C}$: M ➡ {0,1} von M in die Zweiermenge {0,1}, wobei die Ziffern 0 und 1 keine Zahlen, sondern zwei komplementäre Werte, etwa auch $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$ bezeichnen. Zu jeder *Bestimmungsgleichung* in $\mathbb{R}$ gibt es eine solche charakteristische Abbildung $\mathfrak{C}$: $\mathbb{R}$ ➡ $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$. Da jeder arithmetische Prädikator wie „… ist das vierfache Quadrat von 7 weniger 31", „… ist die Hälfte der Quadratwurzel aus 1", usw. in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation festlegt, und da auch jede zweistellige arithmetische Relation in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – etwa >, <, „… ist um 5 kleiner als …", usw. – eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ darstellt, gibt es für jedes derartige Prädikat und für jede derartige Relation die folgende charakteristische Funktion: jedes Element aus $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{R}^n$, das den definierten Bedingungen entspricht wird auf $\mathcal{W}$, alle restlichen Elemente werden auf $\mathcal{F}$ abgebildet. Es lässt sich dann beispielsweise die charakteristische Abbildung [$\mathfrak{C}$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ➡ $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$] festlegen:

> für alle (x,y) aus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ gelte:
> (x,y) ➡ $\mathfrak{C}(x,y) = \mathcal{W}$, genau dann, wenn $x>y$;
> (x,y) ➡ $\mathfrak{C}(x,y) = \mathcal{F}$, genau dann, wenn $x \leq y$.

Der Ausdruck „$x > y$" bezeichnet selbst weder eine Abbildung, wie **FREGE** meint, noch die Zuordnungsvorschrift einer Abbildung, sondern ist *Bestandteil der Zuordnungsvorschrift*. Wenn **FREGE** arithmetische Bestimmungsgleichungen wie $x > 1$ oder $(x + 1)^2 = 2(x + 1)$ für Funktionen ausgibt (FB 28), ist dies keine Verallgemeinerung, sondern die synkretistische Konfusion verschiedenartiger arithmetischer Sachverhalte.

3.2. Begriffe als „Funktionen"

Weil immer, wenn einem beliebigen Gegenstand x irgendeine bestimmte prädikative Bestimmung P zugesprochen wird, eine entweder wahre oder falsche Aussage resultiert, ist für **FREGE** jeder Begriff eine Funktion; diese Auffassung hält er für „eine Erweiterung {des Abbildungsbegriffes}…, nämlich hinsichtlich dessen, was als Argument auftreten kann. Es sind nicht bloß mehr Zahlen zugelassen, sondern Gegenstände überhaupt… Als Funktionswerte sind … die beiden Wahrheitswerte eingeführt." (FB 29 [17]) Diese Gleichsetzung von Prädikation und Abbildung verwischt wichtige Unterschiede zwischen beiden Operationen; schreibe ich einem Gegenstand ein Prädikat zu, bestimme ich diesen Gegenstand näher: in einer Prädikation ordne ich also niemals ein einzelnes Element aus einer wohlbestimmten Definitionsmenge einem einzelnen Element aus einer wohlbestimmten Zielmenge zu, wie dies bei einer Abbildung geschieht.

Zu jeder eindeutig entscheidbaren Prädikation kann eine *charakteristische Funktion* $\mathfrak{C}$ gebildet werden; dann ist jedoch die Prädikation P(x) bzw. ~P(x) nicht selbst die Funktion, wie **FREGE** unterstellt, sondern nur Teil der Zuordnungsvorschrift dieser charakteristischen Funktion: Es sei x ein beliebiger Gegenstand, P irgendein nichtleeres Prädikat; es gibt dann die folgende charakteristische Funktion $\mathfrak{C}$ von der „Menge aller Gegenstände" in die zweielementige Menge $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$:

$x \Rightarrow \mathfrak{C}(x) = \mathcal{W}$, genau dann, wenn $P(x)$,
$x \Rightarrow \mathfrak{C}(x) = \mathcal{F}$, genau dann, wenn $\sim P(x)$.

Dass für jedes wohlbestimmte Prädikat eine charakteristische Funktion gebildet werden kann, hat seinen Grund im PNW, das nur solche Prädikate zulässt, für die es hinsichtlich eines jeden Gegenstandes entscheidbar ist, ob das Prädikat ihm zukommt oder nicht. Einen Erkenntniswert, der über diese durch das PNW erforderte Wohlbestimmtheit hinausginge, haben diese charakteristischen Funktionen nicht. Es kommt bei der Prädikation von P nur darauf an, ob das Prädikat einem Gegenstand zukommt oder nicht – die Zuordnung des Gegenstandes auf einen Wahrheitswert ist davon abhängig und selbst ohne Belang.

Weil **FREGE** den Begriff mit der charakteristischen Funktion, die mit seiner Hilfe gebildet werden kann, gleichsetzt, konfundiert er auch den Umfang eines Begriffes (die Menge der Gegenstände, denen der Begriff zukommt) mit dem Graphen der entsprechenden charakteristischen Funktion. Die Bestimmungsgleichung $x^2 = 1$ hat die Lösungsmenge $\{1,-1\}$; diese Menge nennt **FREGE** zu Recht den „Umfang des Begriffs ‚Quadratwurzel aus 1'". Nun hat diese *Bestimmungs*gleichung dieselbe Lösungsmenge wie die *Bestimmungs*gleichung $(x+1)^2 = 2 \cdot (x+1)$, und **FREGE** sagt, diese beiden „Funktionen" $x^2 = 1$ und $(x+1)^2 = 2 \cdot (x+1)$ hätten denselben *Wertverlauf*. „In der Logik nennt man dies Gleichheit des Umfanges der Begriffe. Wir können demnach als Begriffsumfang den Wertverlauf einer Funktion bezeichnen, deren Wert für jedes Argument ein Wahrheitswert ist." (FB 28 [16]) „Bei solchen Funktionen, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist, kann man demnach statt ‚Wertverlauf der Funktion' sagen ‚Umfang des Begriffs'". (GGA I, 8) **FREGE** verwechselt hier die Zweiermenge $\{1,-1\}$ (den Begriffsumfang des Begriffs ‚Quadratwurzel aus 1') mit dem Graphen der entsprechenden charakteristischen Funktion, der eine infinite Menge von Paaren ist, nämlich: $\{ \ldots, (-2,\mathcal{F}), (-1,\mathcal{W}), (0,\mathcal{F}), (1,\mathcal{W}), (2,\mathcal{F}), \ldots\}$ – alle Zahlen außer 1 und -1 werden auf $\mathcal{F}$ abgebildet. **FREGE**s Bestimmung des „Wertverlaufs" einer Funktion ist unklar und mehrdeutig; weil er den Unterschied zwischen den Bestimmungs- und Funktionsgleichungen ignoriert, verwechselt er den Begriff des Begriffsumfangs (die Menge der Gegenstände, denen der betreffende Begriff zukommt, bzw. die Menge der Lösungen einer Bestimmungsgleichung) mit dem Begriff des Graphen (die Menge der Paare von Urbildern und zugehörigen Bildern[8]) und obendrein noch mit dem Begriff der Wertemenge (die Menge der Bilder)[9]. **FREGE** initiiert einen unsinnigen Streit darüber, ob nun die „Funktion" oder der „Wertverlauf" logische Priorität besitzt. Alle durch **FREGE** geschaffenen Unklarheiten lösen sich auf, wenn die Funktion/Abbildung korrekt als Einheit von Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift verstanden wird.

Es ist die Verworrenheit der fregeschen Vorstellung von Abbildung selbst, die allen diesen Verwechslungen zu Grunde liegt[10]. **FREGE**s Dissoziation von Definitionsmenge, Zuordnungsvorschrift und Zielmenge verhindert eine klare Unterscheidung der speziellen charakteristischen Funktionen, die sich auf der Basis von Bestimmungsgleichungen, aber auch von Prädikationen bilden lassen, von diesen Bestimmungsgleichungen und Prädikationen selber. **FREGE** erkennt nicht den Unterschied zwischen den arithmetischen Verknüpfungen, die spezielle Abbildungen sind (binäre Operationen), und den arithmetischen Relationen, die *keine* Abbildungen sind, mit deren Hilfe sich aber, wie mit jedem wohlbestimmten n-stelligen Prädikat, charakteristische Abbildungen definieren lassen. Die falsche Gleichsetzung von Begriffen und Abbildungen führt dann auch dazu, dass die Gedankengefüge, die doch Prädikate von Aussagen sind, *zugleich* unmittelbar als Abbildungen, als Funktionen angesehen werden.

3.3. Die Konstruktion der Fregealgebra. Fregeverknüpfungen und Substitutionsgesetze

Die charakteristischen Funktionen bilden Gegenstände in die Menge der „Wahrheitswerte", genauer in eine Menge *irgendwelcher* komplementären Werte ab. Die Menge $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$ ist in der Regel Zielmenge der charakteristischen Funktionen – sie kann aber wie jede andere wohlbestimmte Menge auch Definitionsmenge einer Abbildung sein. Wenn $\mathfrak{W}$ zugleich auch Definitionsmenge ist, wird die Menge $\mathfrak{W}$ auf sich selber abgebildet. „Wir haben die Wahrheitswerte bisher nur als Funktionswerte, nicht als Argumente betrachtet… {Es} muss eine Funktion auch dann einen Wert erhalten, wenn als Argument ein Wahrheitswert genommen wird." (FB 31 [20]) Aufgrund der Endlichkeit von $\mathfrak{W}$ lassen sich für beliebige natürliche Zahlen *n* und *m* jeweils alle überhaupt möglichen Abbildungen der Form $\mathfrak{W}^n \Rightarrow \mathfrak{W}^m$ konstruieren. **FREGE** hat ein System von Abbildungen der Werte aus $\mathfrak{W}$ und aus $\mathfrak{W}^2$ in $\mathfrak{W}$ konstruiert – das System der Abbildungen $\{\mu \mid \mu: \mathfrak{W} \Rightarrow \mathfrak{W}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathfrak{W}^2 \Rightarrow \mathfrak{W}\}$[11], das er für identisch mit dem SFG hält. Dieses System der Abbildungen von Wahrheitswerten auf Wahrheitswerte ist jedoch nicht mit dem SFG identisch.

Die Gedankengefüge-Prädikate selbst sind keine Abbildungen; wie für alle anderen wohlbestimmten Prädikate gibt es jedoch zu jedem Gedankengefüge eine charakteristische Funktion. Ergibt sich, wenn einem vorgegebenen Paar wertdefiniter Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zugeschrieben wird, ein wahrer bzw. ein falscher Satz, dann wird dieses Aussagenpaar durch die charakteristische Funktion auf den Wert „das Wahre" bzw. auf „das Falsche" abgebildet. Wenn diese charakteristischen Abbildungen auch jeweils auf der Grundlage von Gedankengefügen gebildet werden, die sich allein auf die Wahrheitswerte der betreffenden Aussagen beziehen, ist ihre Definitionsmenge nicht die Zweiermenge $\mathfrak{W}$ der beiden Wahrheitswerte, sondern die infinite Menge der wertdefiniten Aussagen $\mathfrak{A}$. Für das Gedankengefüge $\mathfrak{C}$ kann die folgende charakteristische Funktion festgelegt werden ($\mathfrak{A}$ ist die Menge der wahrheitswertdefiniten Aussagen, A, B sind beliebige wahrheitswertdefinite Aussagen):

Definitionsmenge ist die infinite, anzahlmäßig unbestimmbare Menge $\mathfrak{A}$, Zielmenge ist die Zweiermenge $\mathfrak{W}$; die Zuordnungsvorschrift der Abbildung $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{W}$ lautet

$(A,B) \rightarrow \mathfrak{C}(A,B) = \mathcal{W}$, gdw $A \Rightarrow B$,
$(A,B) \rightarrow \mathfrak{C}(A,B) = \mathcal{F}$, gdw $\neg(A \Rightarrow B)$

Die Gedankengefüge-Prädikate sind hier *Teil* der Zuordnungsvorschrift. Auch das System dieser charakteristischen Funktionen ist nicht identisch mit dem SFG.

Frege legt die folgende monadische „Wahrheitsfunktion" Φ_T dar: $\Phi_T(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ und $\Phi_T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$; jeder der beiden Wahrheitswerte wird auf sich selbst abgebildet (FB 31). Definitionsmenge *dieser* Abbildung ist nicht die Menge der wertdefiniten Aussagen, denn es kann beispielsweise nicht gelten: $\Phi_T(1+3 = 4) = \mathcal{W}$; die von **Frege** definierte Abbildung Φ_T kann nicht die Aussage „1+3=4", sondern nur den Wahrheitswert $\mathfrak{w}(1+3 = 4)$ dieser Aussage als Argument haben, und es muss heißen „$\Phi_T[\mathfrak{w}(1+3 = 4)] = \mathcal{W}$"; dies jedoch bedeutet nichts anderes als $\Phi_T(\mathcal{W})=\mathcal{W}$; Definitionsmenge ist nicht die infinite Menge der wertdefiniten Aussagen, sondern die zweielementige Menge $\mathfrak{W}$. Das System der Wahrheitsfunktionen $\{\mu \mid \mu: \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{W}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathfrak{W}^2 \rightarrow \mathfrak{W}\}$ ist weder mit dem SFG, noch mit der Menge der charakteristischen Funktionen auf der Basis der Gedankengefüge identisch; dass **Frege** die Verschiedenheit dieser drei Systeme übersieht, verdankt sich der Oberflächlichkeit seiner Vorstellungen von der Struktur der Abbildungsoperation.

Aus folgenden Gründen ist die Identifikation von SFG und SFA falsch:

Ein Gedankengefüge beurteilt direkt *Aussagen*, wenn diese Beurteilung auch noch so gehaltlos und überflüssig ist; im Ausdruck „$(1>5) \Rightarrow (2 \cdot 2 = 4)$" wird von zwei Aussagen ausgesagt, dass jedenfalls nicht die erste Aussage wahr und die zweite falsch ist; bezogen auf zwei Wahrheitswerte würde die Aussage sinnlos, denn es können ja nicht die Prädikate *wahr* und *falsch* selbst als wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Für das System von Abbildungen $\{\mu \mid \mu: \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{W}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathfrak{W}^2 \rightarrow \mathfrak{W}\}$ besteht im Gegensatz zum SFG kein konstitutiver Zusammenhang mit Aussagen und Urteilen mehr; es spielt für die Konstruktion dieser Abbildungen keine Rolle, aus welchen konkreten Elementen man sich die grundlegende Zweiermenge $\mathfrak{W}$ gebildet denkt; wesentlich für diese Konstruktion sind alleine die Komplementarität der beiden Werte, der Begriff der Abbildung selbst sowie die kombinatorischen Gesetzmäßigkeiten, die der Bildung aller nur möglichen Abbildungen von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}^2$ in $\mathfrak{W}$ zu Grunde liegen. Ohne jede Rücksicht darauf, aus welchen zwei Werten sich die Grundmenge $\mathfrak{W}$ zusammensetzt, lassen sich alle Elemente der Definitionsmenge $\mathfrak{W}^2$ rein kombinatorisch ermitteln, ebenso alle möglichen verschiedenen 16 Weisen, die Elemente von $\mathfrak{W}^2$ auf $\mathfrak{W}$ abzubilden. Wenn **Frege** eine Abbildung der Form $\mathfrak{W}^2 \rightarrow \mathfrak{W}$ festlegt und etwa für beliebige Paare (x,y) aus $\mathfrak{W}^2$ bestimmt, der Funktionswert sei „dann das Falsche, wenn als *y*-Argument das Wahre und zugleich als *x*-Argument ein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; in allen anderen Fällen sei der Wert dieser Funktion das Wahre" (FB 37 [28]), dann nimmt die von ihm so festgesetzte Zuordnungsvorschrift nicht auf Aussagen und ihre Wahrheitswerte Bezug – im Gegensatz zur Konstruktion der Gedankengefüge, die sich immer auf die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen beziehen müssen. Bei der Konstruktion dieser Abbildungen ist jeder Bezug zu Aussagen und ihren Wahrheitswerten völlig irrelevant; ob die beiden Komplementärwerte als wahr und falsch, als weiblich und männlich, als gut und böse, oder als was auch immer „interpretiert" werden, ist für die Festlegung der Abbildungen unerheblich;

das System der entsprechenden Abbildungen wird nicht dadurch zu keiner Theorie der Geschlechterbeziehungen, wenn ich die Grundmenge {männlich, weiblich} nehme, sie wird keine Theorie der Moral, wenn ich die Werte {gut, böse} nehme; und *das System dieser Abbildungen wird auch nicht zu einer Logik oder Erkenntnistheorie, wenn ich die Werte {wahr, falsch} nehme*. Die Abbildungen geben über die Bedeutung und den Zusammenhang dieser komplementären Werte keinerlei Aufschluss.

Der falschen Identifikation des SFG mit einem System algebraischer Verknüpfungen von „Wahrheitswerten" entspricht die falsche synkretistische Identifikation von „Aussagevariablen" und „Wahrheitswertvariablen". Werden in Ausdrücken des SFG die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen („Aussagevariablen") durch die Bezeichnungen konkreter, wahrheitswertdefiniter Aussagen ersetzt, ergeben sich wahrheitswertdefinite Gedankengefügeprädikationen dieser wahrheitswertdefiniten (prädizierten) Aussagen. Wird im Ausdruck „$A \Rightarrow B$" die „Aussagevariable" A durch die Aussagenbezeichnung „$2 < 7$" und die „Aussagevariable" B durch die Aussagenbezeichnung „Frege war Mecklenburger" ersetzt, resultiert die wahrheitswertdefinite Gedankengefügeaussage „Es ist falsch, dass ›$2 < 7$‹ wahr und ›Frege war Mecklenburger‹ falsch ist"; wäre das Gedankengefüge eine Fregeverknüpfung müssten die Aussagevariablen A und B durch Wahrheitswerte ersetzbar sein; der Ausdruck $A \Rightarrow B$ würde etwa in den *sinnlosen* Ausdruck „$\mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{F}$" transformiert, der *nach der Definition von* $\boldsymbol{C}$ die Bedeutung hätte „es ist falsch, dass $\mathcal{W}$ wahr und zugleich $\mathcal{F}$ falsch ist". Ein Wahrheitswert kann aber nicht wahr oder falsch sein, denn ein Wahrheitswert ist ein Prädikat und keine Aussage. Wenn Gedankengefüge auch vorgegebene Aussagen alleine nach ihren Wahrheitswerten beurteilen, können sie dennoch nie Prädikate von Wahrheitswerten selbst sein. Nur Aussagen können wahr und falsch sein – dieses Prinzip ist eine der wesentlichen Präsuppositionen der fregeschen Konstruktion der Gedankengefüge, die **FREGE** aber bisweilen selber einfach vergisst.

Um **FREGE**s falsche Meinung, das System dieser Abbildungen habe einen konstitutiven Zusammenhang mit den Begriffen *wahr* und *falsch*, zurückzuweisen und um die daraus resultierende irreführende Verwechslung dieses Systems mit einem System binärer algebraischer Verknüpfungen auszuschließen, wähle ich für die Menge dieser zwei Komplementärwerte eine angemessenere neutrale Bezeichnung; die Menge $\mathcal{A}$ hat die zwei komplementären Werte a_1 und a_2 als Elemente: $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$. Die Menge der Abbildungen $\{\mu \mid \mu\colon \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\} \cup \{\delta \mid \delta\colon \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}\}$ nenne ich *System der Fregealgebra* (abgekürzt: SFA). Die einzelnen Abbildungen nenne ich *Fregeverknüpfungen*. Die 16 möglichen Abbildungen der Form $\mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ und ihre Bezeichnungen sind in der untenstehenden Tabelle dargestellt; es sind innere binäre algebraische Verknüpfungen; zur Darstellung dieser Verknüpfungen benutze ich die Zeichen der Gedankengefüge, mit denen **FREGE** die jeweiligen Fregeverknüpfungen verwechselt, die aber doppelt unterstrichen sind; die Fregeverknüpfungen selbst bezeichne ich durch „Φ_V", „Φ_A", „Φ_B", „Φ_C", usw.

Tabelle 1: Die binären fregealgebraischen Verknüpfungen (Fregeverknüpfungen)

$\Phi_{\mathbf{V}}$	$\Phi_{\mathbf{A}}$	$\Phi_{\mathbf{B}}$	$\Phi_{\mathbf{C}}$
$a_1 \underline{\underline{\triangledown}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\triangledown}}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\triangledown}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\triangledown}}\, a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\veebar}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\veebar}}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\veebar}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\veebar}}\, a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\Leftarrow}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\Leftarrow}}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Leftarrow}}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Leftarrow}}\, a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Rightarrow}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Rightarrow}}\, a_2 = a_1$
$\Phi_{\mathbf{D}}$	$\Phi_{\mathbf{E}}$	$\Phi_{\mathbf{F}}$	$\Phi_{\mathbf{G}}$
$a_1 \underline{\underline{\Uparrow}}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\Uparrow}}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Uparrow}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Uparrow}}\, a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\, a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\nwarrow}}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\nwarrow}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\nwarrow}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\nwarrow}}\, a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\equiv}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\equiv}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\equiv}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\equiv}\, a_2 = a_1$
$\Phi_{\mathbf{H}}$	$\Phi_{\mathbf{I}}$	$\Phi_{\mathbf{J}}$	$\Phi_{\mathbf{K}}$
$a_1 \underline{\underline{\searrow}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\searrow}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\searrow}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\searrow}}\, a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\swarrow}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\swarrow}}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\swarrow}}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\swarrow}}\, a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\bowtie}}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\bowtie}}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\bowtie}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\bowtie}} a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\&}}\, a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\&}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\&}}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\&}}\, a_2 = a_2$
$\Phi_{\mathbf{L}}$	$\Phi_{\mathbf{M}}$	$\Phi_{\mathbf{X}}$	$\Phi_{\mathbf{O}}$
$a_1 \underline{\underline{\models}}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\models}}\, a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\models}}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\models}}\, a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\dashv}}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\dashv}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\dashv}}\, a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\dashv}}\, a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\Downarrow}}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\Downarrow}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Downarrow}}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Downarrow}}\, a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\triangle}}\, a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\triangle}}\, a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\triangle}}\, a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\triangle}}\, a_2 = a_2$

Zu den 16 binären Fregeverknüpfungen kommt die monäre Abbildung Φ_N, definiert durch $\Phi_N(a_1) = a_2$ und $\Phi_N(a_2) = a_1$; für $\Phi_N(x)$ schreibe ich auch „$-x$“. Ob eine Fregeverknüpfung ein Komplementärwertpaar aus $\mathcal{A}^2$ auf a_1 oder auf a_2 (bzw. auf $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{F}$) abbildet, betrifft die „Wahrheit“ (besser Richtigkeit, Korrektheit) oder „Falschheit“ (Nichtkorrektheit) dieser Verknüpfung überhaupt nicht; für jede dieser Abbildungen ist nur zu fordern, dass sie für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ eindeutig ein Bild bestimmt. Während alle 16 binären Fregeverknüpfungen für jedes Element aus $\mathcal{A}^2$ in korrekter Weise erklärt sind, können die Gedankengefüge außer **V** nicht jeder Kombination von wertdefiniten Aussagen wahrhaft zugeschrieben werden. Die Aussage „$(2 \cdot 2 = 5) \veebar (1 > 3)$“ ist falsch und deshalb unzulässig[12], die Verknüpfung $(a_2 \underline{\underline{\veebar}}\, a_2 = a_2)$ ist hingegen korrekt und zulässig. Die Aussage „$(2 \geqslant 1) \Rightarrow (1 \geqslant 2)$“ ist falsch und deshalb inkorrekt, während die fregealgebraische Operation $(a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}}\ a_2 = a_2)$ korrekt ist; falsch und inkorrekt, weil der Festlegung von Φ_C widersprechend, wäre nur die Verknüpfung $(a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}}\, a_2 = a_1)$. Eine Fregeverknüpfung mit dem Bild a_1 darf nicht als wahr, und eine Verknüpfung mit dem Bild a_2 darf nicht als falsch angesehen werden, denn wenn für eine solche Abbildung das Bild a_2 festgelegt ist, wird diese Abbildung dadurch ja nicht falsch[13]. Dies belegt, dass es im SFA, anders als im SFG, nicht mehr um „wahr“ oder „falsch“ geht und dass das System der Fregealgebra sich grundlegend vom SFG unterscheidet. Mit diesem Unterschied hängt zusammen, dass wohl zwischen Gedankengefügen, nicht aber zwischen Fregeverknüpfungen bedingungslogische Zusammenhänge bestehen können. Zwischen den Gedankengefügen (A&B) und (A⇒B) besteht die Beziehung der Implikation: (A&B) → (A⇒B) – kommt irgendwelchen zwei Aussagen A und B das Gedankengefüge **K** zu, dann auch das Gedankengefüge **C**. Algebraische Verknüpfungen sind anders als Gedankengefüge keine Prädikate, die sich dadurch unterscheiden, dass sie Gegenständen in unterschiedlicher Weise zukommen und nicht zukommen; ich kann von den beiden fregealgebraischen Verknüpfungen $(x \underline{\underline{\&}}\, y)$ und $(x \underline{\underline{\Rightarrow}}\, y)$ nicht sagen, wem die erste Verknüpfung zukommt, dem kommt auch die zweite Verknüpfung zu. Der Ausdruck „Für alle x,y aus $\mathcal{A}$ gilt: $(x \underline{\underline{\&}}\, y) \rightarrow (x \underline{\underline{\Rightarrow}}\, y)$“ ist im Gegensatz zum Ausdruck „Für alle Aussagen A und B: (A&B) → (A⇒B)“ sinnlos. Zwischen Fregeverknüpfungen besteht sowenig ein bedingungslogischer Zusammenhang wie etwa zwischen den arithmetischen Zahlenverknüpfungen $a+b$ und $a \cdot b$; auch dies belegt, das SFA ein völlig anderes System ist als das SFG.

Das SFA ist ein simples algebraisches System, in welchem man nach Herzenslust herumrechnen kann; es lassen sich Verknüpfungsausdrücke beliebiger Komplexität bilden – alle Gesetzmäßigkeiten sind durch die in der obigen Tabelle 1 dargelegten Definitionen der Verknüpfungen begründet; um irgendeinen Ausdruck, irgendein Gesetz des SFA zu begründen, muss auf diese Festlegungen Bezug genommen werden. Das SFG enthält alle möglichen Untersysteme (z.B. Boolesche Algebren), man kann für alle diese Verknüpfungen die spezifischen Eigenschaften prüfen (Kommutativität), die Eigenschaften ihrer Kombination (Assoziativität, Distributivität) – das alles ist elementare, einfachste Algebra. Der algebraische Charakter dieses System bedeutet freilich noch nicht, dass es sich um ein System logischer Formen handelt – dass wir es hier mit einer „mathematischen Logik“ zu tun hätten. Für uns ist dieses System nur deshalb von Belang, weil es unzulässigerweise mit dem SFG konfundiert wird, und wie dieses eine irreführende logische Deutung erhält. Diese logische Deutung des SFA nährt die Illusion, dass jedes beliebige logische Gesetz durch simples fregealgebraisches Rechnen entschieden werden kann. Wir müssen also ganz genau die Beziehungen (die Morphismen) untersuchen, die zwischen dem im ersten Teil dargestellten System logischer Formen, dem SFG und dem SFA bestehen (oder auch nicht) – drei wohlunterschiedene Systeme, die in der Logistik heillos und mit den fatalsten Folgen verquickt werden. Zuerst müssen wir uns einen Überblick über den tatsächlichen Charakter und die Gesetzmäßigkeiten des SFA verschaffen.

Das SFA kann aus dem Begriff der Abbildung und der Menge $\mathcal{A}$ vollständig entwickelt werden und ist in seinen *wesentlichen* Grundzügen *vollständig* in obiger Tabelle 1 dargestellt. Es kann in diesem System gerechnet werden; die Abbildungen sind ja innere binäre Verknüpfungen, die ohne Begrenzung mit einander verbunden werden können, etwa in folgender Weise[14]:

$$\begin{aligned}(a_1 \underline{\Rightarrow} a_2) \underline{\veebar} ((a_2 \underline{\Uparrow} a_1) \underline{\Leftarrow} a_2) &= a_2 \underline{\veebar} (a_1 \underline{\Leftarrow} a_2)\\ &= a_2 \underline{\veebar} a_1\\ &= a_1\end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Fregeverknüpfungen (wie der algebraischen Verknüpfungen überhaupt) ist diese unbeschränkte Verknüpfbarkeit; werden in Bezug auf zwei beliebige Werte x und y aus $\mathcal{A}$ irgendwelche Verknüpfungen kombiniert, ist die *komplexe Verknüpfung* immer ergebnisgleich einer der 16 *elementaren Verknüpfungen*: $((x \underline{\Uparrow} y) \underline{\veebar} x) \underline{\Rightarrow} ((y \underline{\barwedge} x) \underline{\Leftarrow} (x \underline{\Leftrightarrow} y))$ ist eine komplexe Verknüpfung von x und y aus $\mathcal{A}$, und diese komplexe Verknüpfung ist ergebnisgleich der elementaren Verknüpfung $x \underline{\veebar} y$. Es gilt das *Substitutionsgesetz*:

Für alle $x, y \in \mathcal{A}$: $((x \underline{\Uparrow} y) \underline{\veebar} x) \underline{\Rightarrow} ((y \underline{\barwedge} x) \underline{\Leftarrow} (x \underline{\Leftrightarrow} y)) = x \underline{\veebar} y$ Für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ führt die linke *komplexe* Verknüpfung für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ jeweils auf dasselbe Ergebnis wie die rechte *elementare* Verknüpfung Φ_A. Ich nenne ein derartiges „Rechengesetz“ eine „*Φ_A-Substitution*“. Entsprechend ist eine komplexe Verknüpfung von x und y, die ergebnisgleich ist der Verknüpfung x $\underline{\Rightarrow}$ y eine Φ_C-Substitution. Diese Gesetze der Substituierbarkeit von verschiedenen ergebnisgleichen Verknüpfungen sind die fundamentalen Gesetze der Fregealgebra; ein solches „Rechengesetz“ ist etwa: $(x \underline{\dashv} y) \underline{\veebar} (x \underline{\unlhd} y) = (x \underline{\Uparrow} y) \underline{\Rightarrow} (x \underline{\bowtie} y)$. Diese Substitutionsgesetze können nur durch den Bezug auf die exakte Definitionen und Abgrenzungen der Abbildungen, wie sie sich aus der Konstruktion des Systems ergeben und in obiger Tabelle 1 dargestellt sind, gerechtfertigt werden; ihre Gültigkeit lässt sich leicht mithilfe dieser Tabelle überprüfen[15].

Es ist möglich, beliebig viele komplexe fregealgebraische Verknüpfungen zu bilden und dann auszurechnen, welche elementare Verknüpfung sie jeweils substituieren. Dies führt zu keinem tieferen Verständnis der Substitutionsgesetze. Sinnvoller ist es, verschiedene Arten solcher Substitutionen zu unterscheiden, und ihre unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten zu bestimmen. Alle diese unbegrenzt vielen Substitutionen der elementaren Fregeverknüpfungen scheiden sich in zwei grundlegende Arten; man könnte von den *unechten oder partiellen* und den *echten oder vollständigen* Substitutionen reden; dieser Unterschied spielt für den speziellen Gebrauch, der in der „modernen Logik“ vom SFA gemacht wird, eine wichtige Rolle; denn es sind bestimmte unechte Substitutionen von Fregeverknüpfungen, die missdeutet und zu „logischen Gesetzen“ mystifiziert werden.

> In der Verknüpfung $x \underline{\Uparrow} y$ sind die Werte x und y von einander unabhängig in dem Sinne, dass x jeden Wert aus $\mathcal{A}$ annehmen kann, unabhängig davon, welchen Wert y annimmt; dasselbe gilt für y in Bezug auf x. Anders ist es bei der Verknüpfung $x \underline{\Uparrow} x$; hier sind die beiden verknüpften Werte von einander abhängig, denn das Beliebig-Element-Zeichen x steht auf beiden Seiten der Verknüpfung Φ_D und kann immer nur denselben Wert annehmen. Es wird im Ausdruck „$x \underline{\Uparrow} x$“ nur entweder das Paar (a_1,a_1) oder das Paar (a_2,a_2) durch Φ_D in $\mathcal{A}$ abgebildet, nicht aber die Urbilder (a_1,a_2) und (a_2,a_1). Weil die Substitution $x \underline{\Uparrow} x$ nicht alle Paare aus $\mathcal{A}^2$ verknüpft, ist sie eine *unechte Substitution von* $\Phi_N(x)$. Ebenso ist die komplexe Verknüpfung $(x \underline{\Leftarrow} y) \underline{\Rightarrow} x$ eine unechte Substitution der elementaren Verknüpfung $(x \underline{\veebar} y)$, weil die Hauptverknüpfung Φ_C[16] nur drei der vier Elemente aus $\mathcal{A}^2$ verknüpft; es fehlt das Element (a_2,a_1)[17]. Im Ausdruck „(x $\underline{\Leftarrow}$ y) $\underline{\Rightarrow}$ x“ sind

die Werte, die Φ_C verknüpft, nicht unabhängig von einander, da das Zeichen „*x*“ links *und* rechts von „$\underline{\underline{\Rightarrow}}$“ steht.

b) Die komplexe Verknüpfung $-x \underline{\underline{\veebar}} y$ ist eine *echte Substitution* von $x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$, weil die Hauptverknüpfung Φ_A alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ verknüpft; im Ausdruck „$-x \underline{\underline{\veebar}} y$“ sind die Werte, die die Hauptverknüpfung Φ_A verknüpft, unabhängig von einander. Wird in einer beliebigen elementaren fregealgebraischen Verknüpfung zumindest eine Seite der Abbildung Φ_N unterzogen, wobei die ganze Verknüpfung selber noch der Abbildung Φ_N unterworfen sein kann, entstehen nur echte Substitutionen von der Form der so genannten De-Morganschen Gesetze. Für jede binäre fregealgebraische Verknüpfung gibt es genau 7 derartige De-Morgan-Substitutionen; es gilt etwa für alle $x,y \in \mathcal{A}$:

$$x \underline{\underline{\veebar}} y = -x \underline{\underline{\Rightarrow}} y = x \underline{\underline{\Leftarrow}} -y = -x \underline{\underline{\Uparrow}} -y = -(x \underline{\underline{\Downarrow}} y) = -(-x \underline{\underline{\models}} y) = -(x \underline{\underline{\dashv}} -y) = -(-x \underline{\underline{\&}} -y);$$

$$x \underline{\underline{\Leftrightarrow}} y = -x \underline{\underline{\bowtie}} y = x \underline{\underline{\bowtie}} -y = -x \underline{\underline{\Leftrightarrow}} -y = -(x \underline{\underline{\bowtie}} y) = -(-x \underline{\underline{\Leftrightarrow}} y) = -(x \underline{\underline{\Leftrightarrow}} -y) = -(-x \underline{\underline{\bowtie}} -y) \text{ usw.}$$

3.4. Die Mystifikation der Fregealgebra als „Kalkül des logischen Schließens“

3.4.1. Der generelle Aufbau eines Kalküls; Kalkül und „axiomatische“ Darstellung

Die logischen Ansprüche, die mit dem SFA verbunden werden:

Auf der Grundlage und im Rahmen der Fregealgebra werden verschiedene Versionen eines „Aussagenkalküls“ entwickelt, die ein kalkülmäßig-rechnerisches „logisches Schließen“ ermöglichen sollen. Es sind drei verschiedene Zielsetzungen, die den Aufbau dieser angeblichen Aussagenkalküle leiten: die Idee einer kalkülmäßig-algorithmischen Lösung von Problemen, die Idee der „Formalisierung“, die Idee der „Axiomatisierung“. Wie schon im Zusammenhang des SFG müssen wir zwei Problembereiche trennen. Das SFA ist ein wohldefiniertes, vollständiges algebraisches System, als solches für die kalkülmäßige Darstellung geeignet; diese Darstellung muss natürlich dem speziellen Charakter des SFA gerecht werden. Wir müssen erstens prüfen, ob dieses System der Fregealgebra im Rahmen der „modernen Logik“ sachgerecht dargestellt wird. Zum zweiten haben wir dann die logischen Deutungen und Prätentionen zu bewerten, die an diese „Kalküle“ geknüpft sind.

Ein Kalkül ist noch nicht unbedingt ein theoretisches, axiomatisches System; ein Kalkül soll es ermöglichen, strikt regelgeleitet bestimmte Problem zu lösen, z.B. die n-te Wurzel einer Zahl bestimmen, die Multiplikation oder Division beliebiger Zahlen durchführen, die Werte bestimmter Funktionen ausrechnen, usw. Wenn ein solches Vorgehen schließlich so „mechanisch“ wird, dass es *scheinbar* nur noch in der regelgeleiteten Manipulation von Symbolen besteht und keine aufmerksame Berücksichtigung der Bedeutung dieser Symbole mehr erfordert, spricht man von einem „formalisierten Kalkül“, einem System der Umformung der Ausdrücke nach rein „formalen“, d.h. *angeblich* rein ausdrucksbezogenen Regeln.

Die „Aussagenkalküle“ aber sollen mehr leisten, nämlich die axiomatische Deduktion eines theoretischen Zusammenhangs. In einem „Aussagenkalkül“ soll nicht nur ein „rechnendes logisches Schließen“ möglich sein, die Gesetze der Logik selbst sollen kalkülmäßig deduziert und ihre Gültigkeit durch diese Herleitung gerechtfertigt werden. Beide Zielsetzungen sind nicht notwendig verbunden, *zumindest* in vielen Fällen sind diese Zielstellungen unverträglich (was die Vertreter des fregeschen Logikentwurfs nicht weiter zu stören scheint); denn ein kalkülmäßig aufgebauter arithmetischer Algorithmus kann beispielsweise nicht zugleich die Darlegung der Gesetze der Arithmetik sein, sondern er setzt diese Gesetze voraus und macht von ihnen nur einen spezifischen Gebrauch. Die von den Logistikern gemachte Voraussetzung, dass ein „Kalkül“ einerseits ein „schlussfolgerndes Rechnen“ in Bezug auf alle möglichen Inhalte ermöglichen (BRL 30) und dabei zugleich die logischen Gesetze erschließen kann, die dieses Rechnen voraussetzen muss, ist fragwürdiger als gemeinhin angenommen wird. Soll das „logische Schließen“ seine eigenen Gesetze deduzieren? Kann die Arbeit im Rahmen eines Kalküls die Gesetze entfalten, auf denen er selbst beruht, und die er nutzt? Kann der Gegenstandsbereich, dessen Gesetze in einem Kalkül entfaltet werden, dieser Kalkül selbst sein? Zunächst will ich untersuchen, was diese „Aussagenkalküle“ effektiv leisten, und welche Gesetze tatsächlich deduziert werden. Kennzeichnen die „Axiome“ und „Theoreme“ dieser Kalküle das System der Frageverknüpfungen, und ist dieses System tatsächlich ein System logischer Formen?

Für den Aufbau der verschiedenen „logischen Kalküle“ hat sich das folgende allgemeine Schema eingebürgert; der Aufbau geschieht auf zwei wohlunterschiedenen Ebenen: einmal der Ebene der Bildung der zulässigen Ausdrücke des Systems; hier werden aus den Grundtermen (den im „Alphabet“ aufgeführten „Atomarausdrücken“) mithilfe exakt definierter *Bildungsregeln* die im System zulässigen Ausdrücke hergestellt; die Regeln lassen eine eindeutige Entscheidung zu, ob irgendein Ausdruck korrekt gebildet ist oder nicht, ob er damit ein zulässiger Ausdruck des Systems ist oder nicht. Es gibt zweitens die Ebene jener ausgezeichneten Ausdrücke des Systems, die als „Sätze“ oder „Gesetze“ gelten; diese zerfallen in die im System vorausgesetzten „Axiome“, und in die aus diesen „Axiomen“ nach ganz bestimmten Regeln hergeleiteten „Theoreme“. Wenn wir uns an den axiomatisch aufgebauten Theorien von **EUKLID**, **PEANO** oder **NEWTON** orientieren, dann müssten diese „Axiome“ und „Theoreme“ eigentlich die Gesetze des im axiomatischen System behandelten Gegenstandsbereiches sein, in den „logischen Kalkülen“ müssten die grundlegenden Strukturmerkmale der Frageverknüpfungen und die Gesetze, denen diese unterliegen, entwickelt werden.

3.4.1.1. Die Ausdrucksebene der „Aussagenkalküle“

Da der Aufbau von „Aussagenkalkülen“ das System *aller* nur möglichen Frageverknüpfungen, zur Grundlage hat, kann es nur das SFA sein, das eine kalkülmäßige, axiomatische Darlegung erfährt, und die Eigenschaften dieser speziellen Frageverknüpfungen legen damit von Anfang an alle Erfordernisse fest, denen die Ausdruckskomponente des Kalküls genügen muss. Es steht fest, welche Grundzeichen benötigt werden, was diese Grundzeichen ausdrücken, und was durch die geregelte „syntaktische“ Aneinanderreihung dieser Grundzeichen bezeichnet wird; unverrückbar vorgegeben ist, was ausgedrückt werden muss – eben das SFA; Spielraum gibt es nur in der Frage, mit welchen Zeichen dies geschehen soll. Alle nur möglichen Frageverknüpfungen beliebiger Komplexität und ihre Gesetze müssen darstellbar sein, ebenso die Regeln und die Schemata der Herleitung oder Deduktion dieser Gesetze. Benötigt werden Zeichen für die Komplementärwerte selbst (*z*.B. die Zeichen „a_1“ und „a_2“), dann Beliebig-Element-Zeichen für diese beiden Werte (*z*.B. „x“, „y“,…), dann die Zeichen für die Frageverknüpfungen (*z*.B. „$\underline{\underline{\nabla}}$“, „$\underline{\underline{\veebar}}$“, „$\underline{\underline{\Leftarrow}}$“,…) selbst. Damit lassen sich konkrete Verknüpfungen der Komplementärwerte wie $a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2$, und allgemeine elementare oder komplexe Verknüpfungsausdrücke wie $x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$ oder $(x \underline{\underline{\Rightarrow}} y) \underline{\underline{\bowtie}} (x \underline{\underline{\Downarrow}} y)$ darstellen oder auch Verknüpfungen eines konkreten mit einem beliebigen Komplementärwert wie *z*.B. $x \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2$. Die Bildungsregeln müssen die klare und eindeutige Darstellung beliebiger Verkettungen dieser Verknüpfungen ermöglichen. Es muss Bezeichnungen der Reihenfolge der Durchführung von aneinander gereihten Verknüpfungen geben, z.B. Klammerzeichen oder Äquivalente der Klammern; die Verknüpfung $(a_2 \underline{\underline{\&}} a_1) \underline{\underline{\Rightarrow}} a_1$ und die Verknüpfung $a_2 \underline{\underline{\&}} (a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_1)$ haben ja ein unterschiedliches Ergebnis. Genau dieselben Erfordernisse gelten für die Bezeichnung arithmetischer Verknüpfungen; es muss Zeichen für jede konkrete Zahl, Beliebig-Element-Zeichen für Zahlen „a“, „b“. usw., Bezeichnungen der arithmetischen Verknüpfungen „+“, „-“ usw. und ihrer Reihenfolge, geben[18]. Im Gegensatz zu den Ausdrucksregeln der geläufigen arithmetischen Zeichensysteme schleichen sich in den „Aussagenkalkülen“ schon auf der Ausdrucksebene Nachlässigkeiten ein. Es werden meistens nicht alle Frageverknüpfungen ausdrücklich durch ein eigenes Zeichen repräsentiert; es wird v.a. auf das in einem derartigen System algebraischer Operationen unverzichtbare Gleichheitszeichen verzichtet, mit dem die Zuordnung von Urbild und Bild bezeichnet wird; weiterhin werden die verschiedenen Terme und Ausdrücke des „Kalküls“ entweder völlig unspezifisch oder gar irreführend charakterisiert.

Das SFA weist genau 16 binäre Frageverknüpfungen auf; jede beliebige komplexe Verknüpfung zweier Werte ist genau einer dieser 16 elementaren Frageverknüpfungen ergebnisgleich. Diese grundlegende und für den Aufbau der Kalküle konstitutive Eigenschaft des SFA kann offen nur gerechtfertigt werden, wenn für jede der 16 möglichen binären Frageverknüpfungen ein eigenes Zeichen zur Verfügung steht. In den „Aussagenkalkülen“ werden nicht für alle elementaren Frageverknüpfungen eigene Zeichen festgelegt; einige Frageverknüpfungen werden mithilfe anderer Frageverknüpfungen dargestellt; eine elementare Frageverknüpfung wie *z*.B. $x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$ kann durch eine komplexe (d.h. mehr als eine Frageverknüpfung aufweisende) Frageverknüpfung wie *z*.B. durch $-x \underline{\underline{\veebar}} y$ oder $-(x \underline{\underline{\&}} -y)$ ersetzt werden, und deshalb kann man zur Bezeichnung aller Frageverknüpfungen nur wenige, oder gar nur eine Frageverknüpfung (entweder Φ_D oder Φ_X) heranziehen. Auch wenn hier bestimmte elementare Frageverknüpfungen nur als komplexe Verknüpfungen darstellbar sind, setzt dieses Vorgehen implizit die Gesamtheit aller Fregeverknüpfungen voraus. Es werden hierbei bei der Festsetzung der zulässigen Ausdrücke des „Kalküls“ – auf der Ausdrucksebene – bereits unbewiesen vorausgesetzte Substitutionsgesetze genutzt: nur weil etwa das Gesetze gilt: $(\forall x,y \in \mathcal{A})\ (x \underline{\underline{\Uparrow}}\ y) = (-x \underline{\underline{\veebar}} -y)$, kann jeder Ausdruck mit „$\underline{\underline{\Uparrow}}$“ durch einen Ausdruck mit „–“ und „$\underline{\underline{\veebar}}$“ ersetzt werden. Damit werden keineswegs die nicht explizit bezeichneten Grundverknüpfungen *entbehrlich*[19], eine elementare Verknüpfung wird vielmehr stets durch eine komplexe Verknüpfung ausgedrückt; diese Substituierbarkeit setzt alle 16 Fregeverknüpfungen voraus. Jedenfalls belegt der Verzicht auf eine Bezeichnung aller Fregeverknüpfungen, dass diese „Kalküle“ das System der Fregeverknüpfungen nicht aus seinen Grundbestimmungen systematisch und vollständig herleiten, sondern schon auf der Ebene der Festlegung der zulässigen Ausdrücke nur einen bestimmten, willkürlichen und selektiven *Gebrauch* von den operativen Möglichkeiten und unbewiesen vorausgesetzten Gesetzmäßigkeiten des SFA machen; die Kalküle bestimmen so nicht das SFA, sondern setzen es in seiner Gesamtheit immer schon voraus.

Jede algebraische Verknüpfung führt auf ein Ergebnis, und dieses Ergebnis muss immer eindeutig bezeichnet werden können; in aller Regel benutzt man hier das Gleichheitszeichen „=“. Ohne das Gleichheitszeichens lassen sich konkrete Verknüpfungen wie $2+3 = 5$, Bestimmungsgleichungen wie $x+3 = 5$ oder allgemeine Rechengesetze wie $(\mathrm{a}+\mathrm{b} = \mathrm{b}+\mathrm{a})$ überhaupt nicht darstellen. Auch die Darstellung der Fregealgebra ist ohne das Gleichheitszeichen unmöglich; nur mit seiner Hilfe können die elementaren Fregeverknüpfungen definiert und ihre spezifischen Unterschiede dargestellt werden: der Unterschied der Verknüpfungen Φ_E und Φ_C liegt beispielsweise im unterschiedlichen Resultat der Verknüpfung von a_2 und a_1; $a_2 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\ a_1 = a_2$, aber $a_2 \underline{\underline{\Rrightarrow}}\ a_1 = a_1$. Nur mithilfe des Gleichheitszeichens lässt sich eine fregealgebraische Bestimmungsgleichung wie $a_1 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\ x = a_2$ oder ein Substitutionsgesetz wie $x \underline{\underline{\Uparrow}}\ y = -x \underline{\underline{\veebar}} -y$ darlegen. Ohne Gleichheitszeichen können weder algebraische Verknüpfungen, noch die Gesetze, denen solche Verknüpfungen unterliegen, dargestellt werden. Umso erstaunlicher ist es, dass die „Aussagenkalküle“ unter den Grundzeichen das Gleichheitszeichen, das doch für die Darstellung eines jeden algebraischen Systems unerlässlich ist, nicht enthalten. Dieser Verzicht auf das Gleichheitszeichen hängt zusammen mit der seltsamen Vorstellung von den Gesetzen dieses algebraischen Systems.

Die Ungenauigkeit, mit der das ganze System und seine Ausdrücke dargestellt und erläutert wird, bereitet die Missdeutung vor, der das System dann unterzogen wird – weder Form noch Inhalt des Systems werden *in ihrer unverfälschten Eigenart* dargelegt. Die Erläuterung der verschiedenen Zeichen und Ausdrücke der „Aussagenkalküle“ bleibt stets sehr ungenau und unspezifisch; wo, genau betrachtet, alleine beliebige oder konkrete Komplementärwerte oder bestimmte Fregeverknüpfungen bezeichnet werden, wird ganz unbestimmt und unspezifisch von „Variablen“ und „Konstanten“, von „Ausdrücken“ und „Formeln“ geredet; die Klammern, die ausschließlich die Reihenfolge bezeichnen, in der algebraische Verknüpfungen durchzuführen sind, werden vage oder irreführend als „Hilfszeichen“ oder „Interpunktionszeichen“ angesprochen[20]. Auch das Fehlen des Gleichheitszeichens trägt zur Camouflage des tatsächlichen Charakters der Kalküle bei. Diese absichtlich vage Erläuterung ist sachlich nicht begründet, denn kein operatives System kann dargelegt werden, ohne dass seine Formen und Inhalte eindeutig bestimmt werden; dies gilt auch für das System der Fregeverknüpfungen und die mithilfe dieses Systems errichteten „Aussagenkalküle“. Die Vagheit soll suggerieren, dass die Ausdrücke des „Kalküls“, deren fregealgebraische Bedeutung bereits exakt und unabänderlich feststeht, noch allen möglichen anderen, v.a. logischen „Interpretationen“ offen stünden.

3.4.1.2. Die Ebene der „Gesetze“ der „Aussagenkalküle“

Die „Aussagenkalküle“ setzen die Gesetzmäßigkeiten des SFA voraus und nutzen sie. Zugleich geben sie diesen Gesetzen des SFA ein bizarres Gepräge, denn als „Axiome“ und „Theoreme“ des „Kalküls“ gelten den Logistikern keineswegs die grundlegenden Konstruktionsprinzipien, Eigenschaften und Gesetze der Fregeverknüpfungen, sondern die verschiedenen Substitutionen der elementaren Verknüpfung Φ_V. Im Gegensatz zu allen anderen elementaren und komplexen Fregeverknüpfungen, die als entweder „erfüllbar“ oder „unerfüllbar“ charakterisiert werden, sollen die Φ_V-Substitutionen „allgemeingültig“ sein und Gesetzescharakter besitzen, der den anderen Substitutionsgesetzen abgesprochen wird. Dies ist ein grotesker, unzulässiger Missbrauch der für algebraische Systeme wichtigen Begriffe der Allgemeingültigkeit, Nichterfüllbarkeit und Erfüllbarkeit. Im SFA gibt es, wie in der Arithmetik, einerseits Bestimmungs- und andererseits Gesetzesgleichungen. Es gibt etwa die fregealgebraische Bestimmungsgleichung $(x \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\ a_2) \underline{\underline{\veebar}} (x \underline{\underline{\barwedge}}\ a_2) = a_1$. Die Lösungsmenge dieser Bestimmungsgleichung ist $\{a_2\}$, denn nur für den Wert $x = a_2$ ergibt die links vom Gleichheitszeichen stehende Verknüpfung den Wert a_1; wenn die Lösungsmenge nicht leer ist, sagt man, die Bestimmungsgleichung sei *erfüllbar*. Hingegen ist die Bestimmungsgleichung $(x \underline{\underline{\&}}\, a_2) \underline{\underline{\veebar}} (x \underline{\underline{\&}}\, a_2) = a_1$ sowohl für $x = a_1$ als auch für $x = a_2$ *nicht erfüllbar*. Auch in der Arithmetik und in jedem anderen System algebraischer Verknüpfungen gibt es erfüllbare und nichterfüllbare Bestimmungsgleichungen. Nur von Bestimmungsgleichungen kann gesagt werden, sie seien erfüllbar bzw. nicht erfüllbar (sie haben eine Lösungsmenge oder nicht).

Die gültigen Substitutionsgesetze („Rechengesetze") eines algebraischen Systems sind hingegen *allgemeingültig* – sie gelten für *alle* Elemente der Definitionsmenge; in der Fregealgebra gilt für alle (x,y) aus $\mathcal{A}^2$ *z*.B. $(x \underline{\underline{\Uparrow}}\, y) \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\bowtie}}\, y) = x \underline{\underline{\veebar}}\, y$; für *jeden* Wert aus $\mathcal{A}^2$ ergibt die linke und rechte Verknüpfung dasselbe Ergebnis. In der Arithmetik gilt für alle Paare von reellen Zahlen (a, b) etwa, dass die Verknüpfung $(a+b)^2$ dasselbe Ergebnis hat wie die Verknüpfung $a^2+2ab+b^2$. Solche allgemeingültigen Gesetzesgleichungen können nur mithilfe des Gleichheitszeichens dargestellt werden, da es ja *verschiedene* Verknüpfungen sind, die für alle nur möglichen n-Tupel von Elementen nachweisbar auf *dasselbe* Resultat führen. Diese Allgemeingültigkeit von Gleichungen algebraischer Verknüpfungen bezieht sich immer auf zwei verschiedene (oder gleiche[21]) algebraische Verknüpfungen. Nur solchen Substitutionsgesetzen kann Allgemeingültigkeit zugesprochen werden. Während also die Bestimmungsgleichungen entweder erfüllbar sind oder nicht, sind die Gesetzesgleichungen algebraischer Systeme allgemeingültig. Hingegen kann weder arithmetischen Verknüpfungen – *z*.B. der Verknüpfung $a \cdot b$ oder $(a+b)^2$ oder $a^{1/b}$ – noch den fregealgebraischen Verknüpfungen, *z*.B. $(x \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\veebar}}\, y)$, sinnvoll einerseits Nichterfüllbarkeit, Erfüllbarkeit oder andererseits Allgemeingültigkeit zugesprochen werden. Eine solche Verknüpfungs-Abbildung ordnet *jedem* Urbild ein eindeutig bestimmtes Bild zu; den Verknüpfungen kommen die Bestimmungen der Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit[22], niemals aber die Bestimmungen der Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit und Nichterfüllbarkeit zu; diese Tatsache wird in den „Aussagenkalkülen" ignoriert, was den Begriffen der (Nicht-)Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit eine ganz neue, absonderliche Bedeutung verleiht: es werden jene Fregeverknüpfungen, die für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ den Wert a_1 zum Ergebnis haben (die Fregeverknüpfung Φ_V und die Φ_V-Substitutionen), als „allgemeingültige Ausdrücke", die Verknüpfungen, die alle Werte aus $\mathcal{A}^2$ auf a_2 abbilden werden als „nichterfüllbare", und die übrigen Verknüpfungen als „erfüllbare Ausdrücke" bestimmt. Diese Auffassung von Allgemeingültigkeit/Erfüllbarkeit/Nichterfüllbarkeit soll aus einer zulässigen Übertragung des Verständnisses der Allgemeingültigkeit einer arithmetischen Gesetzesgleichung resultieren[23]. Der Ausdruck einer Verknüpfung ist nie Ausdruck einer Gesetzesgleichung, eine Verknüpfung kann nie wie eine Gesetzesgleichung allgemeingültig sein.

Dieser Missbrauch des Begriffs der Allgemeingültigkeit resultiert daraus, dass die Deutung der beiden komplementären Werte als „das Wahre" und „das Falsche" zu einer absurden Interpretation der Fregeverknüpfungen führt. Weil die Fregeverknüpfungen ihre Argumente entweder auf den Wert *wahr* oder den Wert *falsch* abbilden, sollen die Verknüpfungen selbst, je nach ihrem Bild (Funktionswert), wahr oder falsch sein! Das ist die Konfusion einer Abbildungsverknüpfung mit dem Bild dieser Verknüpfung! Da Φ_V und die Φ_V-Substitutionen als Verknüpfungsergebnis immer „das Wahre" hätten, seien sie immer, d.h. für alle möglichen Argumente „wahr", und deshalb „allgemeingültig"[24]. Die Deutung der *korrekten* Fregeverknüpfungen als entweder wahre oder falsche Aussagen ist unzulässig; die Verknüpfung $\mathcal{F} \underline{\underline{\veebar}} \mathcal{F} = \mathcal{F}$ bzw. $a_2 \underline{\underline{\veebar}}\, a_2 = a_2$ ist nicht falsch, sondern richtig, so korrekt wie etwa 2 + 3 = 5, denn sie entspricht der Definition von Φ_A genau so, wie die arithmetische Verknüpfung 2 + 3 = 5 der Definition der Addition entspricht. Falsch wäre nur, wenn, entgegen der Definition von Φ_A, behauptet würde $a_2 \underline{\underline{\veebar}}\, a_2 = a_1$ bzw. $\mathcal{F} \underline{\underline{\veebar}} \mathcal{F} = \mathcal{W}$. Die Richtigkeit einer Abbildung hängt nie von ihrem Bild ab, sondern alleine davon, ob dem Urbild das von der Zuordnungsvorschrift bestimmte Bild zugeordnet wird.

Von den fregealgebraischen Substitutionsgesetzen lässt sich, anders als von den bloßen Verknüpfungsausdrücken, die Allgemeingültigkeit der Geltung behaupten. $x \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\veebar}}\, y)$ ist ein bloßer Verknüpfungsausdruck, $x \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\veebar}}\, y) = x \underline{\underline{\nabla}}\, y$ hingegen ist der Ausdruck einer allgemeingültigen Gesetzesgleichung[25]. Nicht nur für jede komplexe Φ_V-Substitution, für jede andere komplexe Substitution einer elementaren Fregeverknüpfung gibt es eine solche allgemeingültige Gesetzesgleichung; wie jede Φ_V-Gleichung ist jedes andere Substitutionsgesetz wie $(x \underline{\underline{\Rightarrow}}\, y) \underline{\underline{\Rightarrow}}\, y = x \underline{\underline{\veebar}}\, y$ oder $(x \underline{\underline{\Rightarrow}}\, y) \underline{\underline{\ddagger}} (x \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\, y) = a_2$ allgemeingültig. Allgemeingültigkeit bedeutet also nicht, dass jedes Element aus $\mathcal{A}^2$ auf a_1 abgebildet wird, sondern dass *jedes* Element aus $\mathcal{A}^2$ von beiden Verknüpfungen, die jeweils auf einer Seite einer Gesetzesgleichung stehen, auf dasselbe Element aus $\mathcal{A}$ abgebildet wird. Würde im Rahmen der „Aussagenkalküle" das Gleichheitszeichen benutzt, so würde diese Falschdeutung des Begriffs der Allgemeingültigkeit in den „Aussagenkalkülen" schnell sichtbar. Die grundlegenden Gesetze des SFA, die Gleichungsgesetze, lassen sich ohne die Beziehung der Ergebnisgleichheit verschiedener Verknüpfungen (bezeichnet durch „=") nicht darlegen. Das Gleichheitszeichen ist für jedes algebraische System unverzichtbar, und kann nicht durch irgendeine Verknüpfung eines besonderen algebraischen Systems ersetzt werden. Genau dies aber unterstellen die Logistiker. Die Ergebnisgleichheit ist ein Spezialfall der bedingungslogischen $\mathbb{E}$-Relation: genau dann, wenn eine bestimmte erste Verknüpfung von bestimmten Werten auf ein bestimmtes Ergebnis führt, führt eine zweite Verknüpfung für dieselben Werte auf dasselbe Ergebnis. Um zu suggerieren, die in den Substitutionsgleichungen vorliegenden Beziehungen der Ergebnisgleichheit zwischen Fregeverknüpfungen sei selbst wieder eine Fregeverknüpfung, wird unterstellt, das Gleichheitszeichen zur Bezeichnung der Gesetzesgleichung könne durch das Zeichen für die Fegeverknüpfung Φ_E vertauscht werden. Aus der Bezeichnung einer *Gesetzesgleichung* wie „$-(-x \underline{\underline{\&}} - y) = (x \underline{\underline{\veebar}} y)$“ wird dann die Bezeichnung einer zu Φ_V ergebnisgleichen *Verknüpfung*, im Beispiel „$-(-x \underline{\underline{\&}} -y) \underline{\underline{\Leftrightarrow}} (x \underline{\underline{\veebar}} y)$“. Die Substitutionsgleichung „$-(-x \underline{\underline{\&}} -y) = (x \underline{\underline{\veebar}} y)$“ ist ein völlig anderer Sachverhalt als die Fregeverknüpfung „$-(-x \underline{\underline{\&}} -y) \underline{\underline{\Leftrightarrow}} (x \underline{\underline{\veebar}} y)$“. Dieser Verschiedenheit steht nicht entgegen, dass aus jedem fregealgebraischen Substitutionsgesetz eine solche Φ_V-Substitution durch die Ersetzung von „=“ durch „Φ_E“ hergestellt werden kann. Wegen der Ergebnisgleichheit von zwei verschiedenen fregealgebraischen Verknüpfungen, die im Substitutionsgesetz mit Hilfe des Gleichheitszeichens formuliert wird, wird durch die an die Stelle von „=“ gesetzte Verknüpfung Φ_E entweder nur (a_1, a_1), oder nur (a_2, a_2) abgebildet; da beide Paare durch Φ_E (aber auch durch Φ_B, Φ_C und Φ_V!) auf a_1 abgebildet werden, ergibt sich eine zu Φ_V ergebnisgleiche komplexe fregealgebraische Verknüpfung. Bei einer solchen Ersetzung von „=“ durch „$\underline{\underline{\Leftrightarrow}}$“ ändert sich jedoch die Bedeutung des Ausdrucks. Das Gleichheitszeichen gehört zum konstitutiven Bestand eines jeden algebraischen Systems, es kann nicht durch irgendeine Verknüpfung des jeweiligen algebraischen Systems ersetzt werden.

Wir können festhalten: im Rahmen der auf der Grundlage des SFA konstruierten „Aussagenkalküle“ werden Ausdrücke bloßer Verknüpfungen als allgemeingültig oder erfüllbar/nicht erfüllbar charakterisiert; dies ist falsch, denn eine Verknüpfung wie $x \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\veebar}} y)$ oder $x \underline{\underline{\veebar}} (x \underline{\underline{\Downarrow}} y)$ ist wie eine arithmetische Verknüpfung $(a+b)$ oder $a \cdot (a+b)$ weder allgemeingültig, noch erfüllbar, noch nicht erfüllbar: sie ordnet, wie es der Definition der Abbildung entspricht, jedem Wert $(x,y) \in \mathcal{A}^2$ eindeutig einen bestimmten Funktionswert aus der Zielmenge $\mathcal{A}$ zu. Der Begriff der Erfüllbarkeit ist auf Bestimmungsgleichungen beschränkt; wie in der Menge $\mathbb{R}$ die arithmetische Bestimmungsgleichung $x^2 = 1$ erfüllbar, die Bestimmungsgleichung $x^2 = -1$ nicht-erfüllbar ist, so ist in der Menge $\mathcal{A}^2$ die Bestimmungsgleichung $x \underline{\underline{\veebar}} (x \underline{\underline{\Downarrow}} a_1)$ erfüllbar (für $x = a_2$) und die Bestimmungsgleichung $x \underline{\underline{\Downarrow}} a_1$ unerfüllbar. Allgemeingültigkeit kann nur Gesetzes*gleichungen* zugesprochen werden; so sind die Substitutionsgleichungen $x \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\veebar}} y) = x \underline{\underline{\triangledown}} y$ und $x \underline{\underline{\veebar}} (x \underline{\underline{\Downarrow}} y) = x \underline{\underline{\Leftarrow}} y$ gleichermaßen allgemeingültig: für *jeden* Wert aus $\mathcal{A}^2$ ergibt sich für die links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Verknüpfungen dasselbe Resultat; es spielt dabei überhaupt keine Rolle, auf welchem Wert ein Wertepaar aus $\mathcal{A}^2$ von beiden Verknüpfungen abgebildet wird. Es ist deshalb eine Entstellung der algebraischen Begriffe der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit, wenn eine Verknüpfung, die alle Werte der Definitionsmenge auf nur einen („ausgezeichneten“) Wert der Zielmenge abbildet, als allgemeingültig, eine Verknüpfung, die nur einige bzw. keine Werte der Definitionsmenge auf diesen „ausgezeichneten“ Wert abbildet als erfüllbar bzw. nicht erfüllbar bezeichnet wird.

3.4.1.3. Die Ebene der Herleitungen

In den „Aussagenkalkülen“ werden aus vorgegebenen Φ_V-Substitutionen (den sog. „Axiomen“) mithilfe von Umformungsregeln andere (abgeleitete) Φ_V-Substitutionen (die sog. „Theoreme“) hergestellt.

1. Die erste dieser Umformungsregeln, die **Einsetzungsregel**, besteht darin, dass Beliebig-Element-Zeichen für Komplementärwerte $x,y,\ldots$ an allen Stellen ihres Vorkommens durch allgemeine fregealgebraische Verknüpfungsausdrücke ersetzt werden; diese Regel soll, wie die anderen Umformungsregeln der „Aussagenkalküle“, ein universales „Schema des logischen Schließens“ sein, ist jedoch nichts weiter als ein spezielles *fregealgebraisches* Implikationsgesetz: Wenn in einer komplexen fregealgebraischen Φ_V-Substitution $\Phi(x,y,\ldots,z)$ irgendeines der Beliebig-Element-Zeichen für Komplementärwerte an allen Stellen seines Vorkommens durch den Ausdruck einer fregealgebraischen Verknüpfung ersetzt wird, dann resultiert aus dieser Ersetzung wiederum eine Φ_V-Substitution. Erst wenn dieses Implikationsgesetz auf einen geeigneten Ausdruck angewendet wird, findet ein (fregealgebraisches) Schließen statt, und zwar gemäß dem universellen logischen (nicht fregealgebraischen) Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$.

2. Auch die sog. **Ersetzungsregel** ist ein rein fregealgebraisches (und kein logisches) Implikationsgesetz: wenn im Ausdruck einer komplexen Fregeverknüpfung ein Teilausdruck, der eine bestimmte Fregeverknüpfung be-

zeichnet, durch den Ausdruck einer ergebnisgleichen Verknüpfung ersetzt wird, so bezeichnet der resultierende Gesamtausdruck eine Verknüpfung, die ergebnisgleich ist zu jener, die durch den ursprünglichen Gesamtausdruck bezeichnet wird. Diese Regel setzt die Geltung der fregealgebraischen Substitutionsgesetze voraus, die im Kalkül und mit den Mitteln des Kalküls gar nicht beweisbar sind.

3. Die sog. **Abtrennungsregel** besagt folgendes: sind „Φ_1“ und „Φ_2“ Bezeichnungen von beliebigen Fregeverknüpfungen, und ist die Fregeverknüpfung Φ_1 eine Φ_V-Substitution und ist $\Phi_1 \supseteqq \Phi_2$ eine Φ_V-Substitution, dann ist auch die Fregeverknüpfung Φ_2 eine Φ_V-Substitution.

Diese drei Umformungsregeln sind Implikationsgesetze im Sinne der logischen Relation $\mathbb{C}$[26]; im „Kalkül“ wird in der Herleitungsregeln auf bedingungslogische Relationen Bezug genommen, für die der Kalkül gar keine Ausdrucksmöglichkeiten zur Verfügung stellt; auch die für die Formulierung dieser Regeln unverzichtbare Bezeichnung beliebiger Fregeverknüpfungen ist durch das „Lexikon“ und die Bildungsregeln nicht möglich. Die „Aussagenkalküle“ beruhen auf Gesetzen, die im Kalkül weder begründet, noch bezeichnet werden können. Die Auffassung, die Φ_V-Substitutionen, die als Ausgangsformeln für die regelgeleiteten Umformungen genommen werden (die „Axiome“ der „Aussagenkalküle“), seien tatsächlich grundlegende Gesetzmäßigkeiten (d.h. Axiome im echten Sinne), aus denen der gesetzmäßige Charakter der SFA im Ganzen hergeleitet werden kann, ist abwegig.

Weder die Φ_V-Substitutionen[27], noch die Umformungsregeln, noch die schließende Anwendungen der Umformungsregeln zur Herleitung von Φ_V-Substitutionen aus vorgegebenen Φ_V-Substitutionen dürfen als die allgemeinen Schemata des logischen Schließens ausgegeben werden; erstere sind spezielle algebraische Verknüpfungen, die als Bild nur den Wert a_I haben; die Umformungsregeln sind *spezielle* Implikationsgesetze, deren Geltung auf den speziellen Eigenschaften von Fregeverknüpfungen beruht; die Anwendung der Umformungsregeln ist ein spezielles fregealgebraisches Schließen nach dem allgemeinen Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$, welches im Rahmen der Logik und nicht im Rahmen der Fregealgebra untersucht wird.

3.4.2. Der „Aussagenkalkül“ als spezieller Gebrauch des SFA

Wir erkennen nun, was die „Aussagenkalküle“ tatsächlich und effektiv leisten. Es liegt ein besonderer, willkürlicher und kognitiv bedeutungsloser Gebrauch des SFA mit unhaltbaren logischen Ansprüchen vor: aus vorgegebenen Ausdrücken von Φ_V-Substitutionen werden durch regelgeleitete Umformungen Ausdrücke anderer Φ_V-Substitutionen hergestellt, ohne dass dieses zu Grunde liegende System und seine Gesetze, die in den „Kalkülen“ benutzt werden, selbst in ihrem spezifischen Charakter dargelegt und gerechtfertigt würden. Zugleich wird dieser spezielle Gebrauch der Fregealgebra einer logischen Deutung unterzogen, für die keine sachliche Berechtigung besteht. Es werden in diesen „Kalkülen“ Φ_V-Substitutionen (zumindest eine) vorausgesetzt, auf diese werden dann bestimmte Umformungsoperationen angewendet, woraus dann alle nur möglichen Φ_V-Substitutionen resultieren. Die vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen werden als unbewiesene „Axiome“, die hergeleiteten Φ_V-Substitutionen werden als durch die Herleitung bewiesene „Theoreme“ ausgegeben; die den Herleitungen zu Grunde liegenden Umformungsregeln sollen „allgemein-logische Schlussregeln“ sein. Das Ganze, dieser spezielle Gebrauch der Fregealgebra zur Herstellung von Φ_V-Substitutionen, trägt dann den Titel eines „axiomatischen Aufbaus der Aussagenlogik“. In den Kalkülen werden nicht alle elementaren Fregeverknüpfungen explizit dargestellt, sondern durch Substitutionen ersetzt; die „Aussagenkalküle“ unterscheiden sich darin, und in der Auswahl der vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen (der „Axiome“); ansonsten dienen sie alle der Herstellung aller möglichen Φ_V-Substitutionen aus (möglichst) wenigen vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen.

Ein derartiges „axiomatisches System“ hat mit den echten axiomatischen Theorien von **EUKLID**, **PEANO**, **NEWTON** nicht mehr als den Namen gemeinsam; denn während diese axiomatischen Darstellungen die Gegenstände und Beziehungen der Theorie eines bestimmten Gegenstandsbereiches darlegen und deduktiv entfalten, kennzeichnen die als „Axiome“ vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen keineswegs den grundlegenden Charakter des darzulegenden Systems, sondern sind nur spezielle, abgeleitete Verknüpfungen, die das komplette System der Fregealgebra und seine Gesetze schon voraussetzen. Die Herstellung von Φ_V-Substitutionen ist ein theoretisch uninteressantes Spiel, dem keine echte theoretische Problematik zu Grunde liegt; dieses Spiel ließe sich auf der Grundlage der vorausgesetzten Fregealgebra endlos variieren: die Forderung, aus vorgegebenen Φ_V-Substitutionen beliebige andere Φ_V-Substitutionen abzuleiten, ist eine willkürliche Auswahl aus sehr vielen Möglichkeiten, die durch das zu Grunde liegende SFA geboten werden; es könnte ja mit demselben Recht gefordert werden, dass mit wohldefinierten Umformungsregeln aus vorausgesetzten Φ_C- Substitutionen alle nur möglichen Φ_A-Substitutionen hergeleitet werden sollen, usw. usf.

3.4.3. Die „Metalogik" als Rechtfertigung der Kalküle

In den „Aussagenkalkülen" kann weder bewiesen werden, dass die vorausgesetzten „Axiome" tatsächlich Φ_V-Substitutionen sind, noch kann gezeigt werden, dass in beliebigen Fällen der korrekten Anwendung der Umformungsregeln tatsächlich nur Φ_V-Substitutionen resultieren, und dass im System jede mögliche Φ_V-Substitution herstellbar ist. Diese mit dem Gebrauch des System verknüpften Ansprüche müssen gerechtfertigt werden, und dies kann nur durch den Bezug auf den grundlegenden *tatsächlichen*, und daher von jeder logischen Missdeutung frei gehaltenen Charakter des Systems der Fregeverknüpfungen geschehen. Der Nachweis, dass das Kalkülspiel so, wie gefordert, funktioniert, kann nicht im „Kalkül" selbst geschehen, sondern wird einer sog. „Metalogik" (oder einem „Metakalkül") anheim gestellt. Die Notwendigkeit dieser „Metalogik" ist das implizite Eingeständnis, dass die angebliche „axiomatische Darstellung" der Fregealgebra keine deduktive Entwicklung dieses Systems aus seinen grundlegenden und konstitutiven Bestimmungen ist[28]. Denn erst dieser „Metalogik" wird als Aufgabe zugewiesen, was schon bei der axiomatischen Darlegung eines solchen Systems geleistet werden müsste; schon beim Aufbau der Kalküle könnte und müsste gesagt werden, dass der Kalkül im vorgegebenen Rahmen der Fregealgebra der Herstellung von Φ_V-Substitutionen dient, und es wäre zu zeigen, ob und weshalb die Regeln des Kalküls eine solche Herstellung erlauben. Die Trennung von „Kalkül" und „Metakalkül" ist gekünstelt; denn was da eigentlich gemacht wird, auf welche Gesetzmäßigkeiten man sich stützt, ließe sich schon von Anfang an sagen; diese Trennung von blindem Kalkül und seiner nachträglichen Rechtfertigung in einem „Meta-Kalkül" scheint wiederum v.a. der Vertuschung des tatsächlichen (logisch irrelevanten) Charakters der Kalküle zu dienen.

Im „Metakalkül" muss nachgewiesen werden, 1. dass die vorausgesetzten „Axiome" tatsächlich Φ_V-Substitutionen sind; 2. dass die Umformungsregeln, die vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen nur so verändern, dass ihr Charakter als Φ_V-Substitution erhalten bleibt (diese Aufgabe wird als *Nachweis der „Widerspruchsfreiheit" des Kalküls* mystifiziert); 3. dass alle beliebigen Φ_V-Substitutionen herstellbar sind (*Nachweis der „Vollständigkeit" des Kalküls*); und schließlich 4. dass nicht mehr Φ_V-Substitutionen als „Axiome" vorausgesetzt werden, als zur Herstellung jeder beliebigen Φ_V-Substitution notwendig sind (dies soll der *Nachweis der „Unabhängigkeit" der „Axiome" des Kalküls* sein). Diese Nachweise sind nur möglich, wenn jetzt explizit auf den wahren Charakter des Systems der Fregealgebra und auf die tatsächliche Leistung der „Aussagenkalküle" eingegangen wird, und auf jede logische Falschinterpretation der Fregeverknüpfungen und Φ_V-Substitutionen verzichtet wird.

In den „metalogischen" Erörterungen wird stets eingestanden, dass man es im SFA nicht mit Aussagen, sondern mit Komplementärwerten zu tun hat. Es wird zugegeben, dass es für die zweielementige Grundmenge $\mathcal{A}$ ganz unerheblich ist, ob man ihre Elemente als „wahr" und „falsch" oder ganz anders „interpretiert"; von Bedeutung ist alleine, dass die beiden Werte komplementär sind[29]. Da jetzt auf die willkürliche Deutung der Komplementärwerte als „wahr" und „falsch" verzichtet wird, können jene Verknüpfungen, die stets einen der beiden Werte zum Ergebnis haben, nicht mehr als „immer wahre Aussagen" bzw. „immer falsche Aussagen" mystifiziert werden[30]. Mit Selbstverständlichkeit wird in der „metalogischen" Argumentation das Gleichheitszeichen benutzt[31].

Von Fregeverknüpfungen, die „wahr" oder „falsch" sind, wird jedenfalls nicht mehr geredet. Das Fehleinschätzung, in den „Aussagenkalkülen" würden logische Probleme behandelt, stützt sich aber entscheidend auf die Auffassung, die Fregeverknüpfungen seien wesentlich mit der Problematik von wahr und falsch verbunden; da bei der Rechtfertigung von Kohärenz und Stimmigkeit der „Aussagenkalküle" und beim Nachweis der Gründe ihres Funktionierens im „Metakalkül" auf die „logische Deutung" der Komplementärwerte als ‚wahr' und ‚falsch' und auf die „Deutung" der Fregeverknüpfungen als „Wahrheitsfunktionen" verzichtet werden muss, spielt für die Kalküle die logische Problematik von Wahrheit und Falschheit von vorneherein keine Rolle – die logische Deutung der „Kalküle" verfälscht im Nachhinein den tatsächlichen Charakter der Fregealgebra. Wenn bei der Rechtfertigung der Stimmigkeit eines logisch sein sollenden Systems davon abgesehen werden kann, dass es ein logisches System ist, dann kann dieses System von vorneherein kein logisches System sein.

Dass irgendeine vorausgesetzte Fregeverknüpfung eine Φ_V-Substitution ist, ist nicht von vorneherein klar; es kann nicht als „Axiom" vorausgesetzt werden, sondern es wird stets erst nachgewiesen, indem man die Fregeverknüpfungen alle voraussetzt und einfach nachrechnet, ob diese „Axiome" tatsächlich für alle möglichen Werte den Wert a_1 ergeben. Da sich darüber hinaus für *jede* beliebige Fregeverknüpfung mühelos nachrechnen lässt, was für eine Substitution sie darstellt, sind die „Aussagenkalküle" als Entscheidungsverfahren, dass irgendeine Verknüpfung eine Φ_V-Substitution ist, im Grunde völlig überflüssig[32].

Dass die Umformungsregeln den Φ_V-Charakter der Ausgangsformeln erhalten, kann nur durch den Verweis auf die Eigenschaften der beteiligten fregealgebraischen Verknüpfungen gezeigt werden; die „Abtrennungsregel" gründet *z*.B. in folgender Eigenschaft von Φ_C: $(\forall x \in \mathcal{A})\ [(a_1 \supseteqq x) = a_1] \leftrightarrow [x = a_1]$. Der Nachweis, dass die korrekte Anwendung der Umformungsregeln auf gegebene Φ_V-Substitutionen stets wieder auf Φ_V-Substitutionen führt, soll ein „Beweis der Widerspruchsfreiheit" sein. Ein solcher Beweis zeigt jedoch nicht, dass das zu Grunde gelegte SFA kohärent und ohne Widerspruch ist, sondern er setzt das SFA schon als widerspruchsfrei voraus. Es wird auch nicht gezeigt, dass irgendeine Fregeverknüpfung als solche nicht widersprüchlich wäre. Als „widersprüchlich" erscheint vielmehr der Umstand, dass mit den Umformungsregeln aus Φ_V-Substitutionen auch andere Fregeverknüpfungen als gefordert hergeleitet werden könnten; was als „Widerspruch" ausgegeben wird, ist demnach abhängig vom speziellen Spielchen, das mit dem SFA angestellt wird. Wenn ich ein analoges Spiel so definiere, dass aus zu Grunde gelegten Φ_V-Substitutionen nur Φ_O-Substitutionen hergestellt werden sollen, würde sich die Bedingung der „Widerspruchsfreiheit" ändern, die einzig darin besteht, dass die Umformungsregeln das auch wirklich leisten, was von ihnen – jeweils ganz willkürlich – verlangt wird. Es bedeutet nicht, dass eine komplexe Verknüpfung, die nicht ergebnisgleich mit Φ_V ist, an sich selber im Widerspruch stünde zu einer Φ_V-Substitution; unabhängig vom Kalkül sind es einfach verschiedene Verknüpfungen, jeweils ergebnisäquivalent zu unterschiedlichen elementaren fregealgebraischen Operationen. Die Fregeverknüpfung Φ_V kann etwa zur Fregeverknüpfung Φ_O oder Φ_B sowenig im Widerspruch stehen wie die Addition zur Multiplikation im Widerspruch steht. Die Frage, ob durch die vorausgesetzten Umformungsregelns sich aus Φ_V-Substitutionen tatsächlich nur Φ_V-Substitutionen herstellen lassen, hat mit der Frage der Widerspruchsfreiheit des vorausgesetzten SFA selbst gar nichts zu tun.

Die „metalogischen" Erörterungen zeigen zwar, dass das Kalkülspiel der Herleitung von Φ_V-Substitutionen funktioniert, aber auch der „Metakalkül" rechtfertigt nicht das zu Grunde liegende SFA, sondern setzt es ebenso wie der Kalkül voraus, jetzt freilich mit weniger irreführenden Deutungen verbunden. Um die grundlegenden Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Fregealgebra zu rechtfertigen, muss die Kohärenz und die Vollständigkeit der Konstruktion des Systems von Abbildungen: $\{\mu \mid \mu: \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathcal{A}^2 \Rightarrow \mathcal{A}\}$ gerechtfertigt werden. Diese Konstruktion beruht auf der Wohlbestimmtheit der Grundmenge $\mathcal{A}$, der Komplementarität ihrer beiden Elemente und auf dem allgemeinen und normativen Begriff der Abbildung, von dem die Konstruktion der Verknüpfungen ausgeht. Diese Konstruktion führt zur präzisen, endgültigen und vollständigen Definition der verschiedenen überhaupt möglichen fregealgebraischen Operationen, auf der alle Gesetze des SFA (und die sie ermöglichenden „Kalkül"-Spielchen) beruhen. Erst im Anschluss an diese Konstruktion lassen sich die komplexen fregealgebraischen Verknüpfungen und die Substitutionsgesetze gewinnen. Und erst auf dieser Grundlage kann der „Aussagenkalkül" als ein sehr spezieller und willkürlicher Gebrauch dieses operativen Systems mit nachträglicher logischer Missdeutung entwickelt werden.

3.5. Fregealgebra, Schaltalgebra und bedingungslogische Formen

Dass die Schaltalgebra, eine Fregealgebra, in der Computertechnologie und für die Analyse von elementaren Vorgängen im Zentralnervensystem eine wichtige Rolle spielt, wird oft als Beleg genommen, dass die Fregealgebra eine Theorie logischer Formen ist. Die Schaltalgebra wird als eine „Anwendung" der „Aussagenlogik" oder des „Aussagenkalküls" ausgegeben[33]. Die Schaltalgebra ist Fregealgebra, und sie wird völlig unabhängig von der Missdeutung der SFA als „Aussagenlogik" oder „Aussagenkalkül" entwickelt. Ohne irreführende „Deutung" werden die beiden Grundelemente, die Komplementärwerte bestimmt, ebenso alle möglichen unitären und binären Abbildungen, die auf der Basis der zweielementigen Grundmenge konstruierbar sind. Das Gleichheitszeichen wird benützt, es werden exakt die verschiedenen Substitutionsgesetze bestimmt, und niemand konfundiert wie im „Aussagenkalkül" Verknüpfungen mit Gleichungen und Bestimmungsgleichungen mit Gesetzesgleichungen. Niemand kommt auf die abstruse Vorstellung, alle jene Verknüpfungen, die für alle möglichen Werte auf einen der beiden Werte führen, seien die Gesetze der Schaltalgebra.

Die schaltalgebraischen Verknüpfungen dürfen freilich auch nicht mit den logischen Formen als solchen identifiziert werden; jede derartige Schaltung ist ein bestimmter, *spezieller* dynamischer bedingungslogischer Zusammenhang. Wir haben es bei binären elektrischen oder elektronischen Schaltungen mit drei echten und dynamischen Ereignisklassen zu tun, mit den Ereignissen, dass 1. beim ersten Eingang (Kontaktstelle 1) Strom fließt (Ereignisklasse $\mathfrak{x}$), dass 2. beim zweiten Eingang (Kontaktstelle 2) Strom fließt (Ereignisklasse $\mathfrak{y}$) und dass 3. beim Ausgang Strom fließt (Ereignisklasse $\mathfrak{z}$). Bei der „ODER-Schaltung“ (Φ_A) liegt das Ereignis, dass bei beim Ausgang kein Strom fließt, nur dann vor, wenn weder bei Kontaktstelle 1, noch bei Kontaktstelle 2 Strom fließt; in allen anderen Fällen fließt am Ausgang Strom. Zwischen den drei Ereignissen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ liegt also die folgende dreistellige logische Totalrelation vor: $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \mathbb{H}\mathbb{E}] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{A}\mathbb{X}]$.

Jeder *binären* schaltalgebraischen Verknüpfung entspricht ein solcher *dreistelliger* logischer Zusammenhang; für die „UND-Schaltung“ erhalten wir den dreistelligen Funktor $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \mathbb{E}\equiv] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{K}\mathbb{D}]$, für die „NAND-Schaltung“ $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \mathbb{J}\mathbb{H}] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{D}\mathbb{K}]$, für die „NOR-Schaltung“ $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \equiv\mathbb{J}] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{X}\mathbb{A}]$, usw. Da für jede mögliche Kombination der Zustände der Eingänge der Zustand des Ausgangs eindeutig determiniert ist (Abbildungen stellen ja aufgrund der Rechtseindeutigkeit notwendige bedingungslogische Zusammenhänge dar), ist von den Vorkommenskombinationspaaren (I,II), (III,IV), (V,VI) und (VII,VIII) der entsprechenden logischen Totalrelation von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ jeweils eine Vorkommenskombination realmöglich (ein Einsfall) und eine Vorkommenskombination nichtrealmöglich (ein Nullfall); in der Modalitätenmatrix kommen nur die Modalitäten $\mathcal{N}$ und $\mathcal{U}$ vor. Es gibt genau 16 solche *drei*stelligen Funktoren – so viele wie *bi*näre schaltalgebraische Verknüpfungen. Jedenfalls ist ersichtlich, dass die schaltalgebraischen Verknüpfungen nicht den logischen Formen gleichgesetzt werden dürfen, da jede schaltalgebraische n-stellige Verknüpfung einen *speziellen* (n+1)-stelligen bedingungslogischen Zusammenhang darstellt; es gibt jeweils viel mehr n-stellige logische Totalformen als n-stellige Schaltungen. Die Φ_A-Verknüpfung entspricht nicht der logischen Alternative $\mathbb{A}$; es gibt überhaupt keine Schaltung, die der zweistelligen logischen Relation der Alternative $\mathbb{A}$ entsprechen kann. Es sind nämlich die unitären Schaltungen, die zweistellige Funktorzusammenhänge darstellen. Die „NICHT-Schaltung“ – am Eingang ($\mathfrak{x}$) fließt Strom genau dann, wenn am Ausgang ($\mathfrak{z}$) kein Strom fließt und umgekehrt – entspricht dem Funktorzusammenhang $(\mathfrak{x} \rtimes\!\!\!\ltimes \mathfrak{z})$. Die drei anderen unitären Schaltungen – am Ausgang nur kein Strom: $(\mathfrak{x} \ulcorner \mathfrak{z})$; am Ausgang nur Strom: $(\mathfrak{x} \llcorner \mathfrak{z})$; Ausgangszustand gleich Eingangszustand: $(\mathfrak{x} \leftrightarrow \mathfrak{z})$ – sind technisch ganz uninteressant[34]. Die den Schaltungen entsprechenden bedingungslogischen Verhältnisse sind spezielle technisch-physikalische Gesetzeszusammenhänge zwischen den speziellen elektrischen Ereignissen Spannung und keine Spannung an bestimmten Positionen. Auch die große Bedeutung der Fregealgebra (Schaltalgebra) in der Computertechnik kann also nicht die Ansicht stützen, die Fregealgebra (oder der „Aussagenkalkül“) sei in irgendeiner Weise ein System von logischen Formen.

3.6. Unterschiede und Entsprechungen von SFA, SFG und Logik

3.6.1. Die große Konfusion: SFG und SFA und ihre logischen Missdeutungen

Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen unterscheiden sich nach Form und Inhalt tiefgreifend; umso erstaunlicher ist es, dass in der logistischen Literatur zwischen diesen Konzepten keinerlei Differenzierung angetroffen wird. In ein und denselben Abhandlungen werden die Junktoren nebeneinander als Gedankengefüge, dann wieder als Fregeverknüpfungen gekennzeichnet und durch dieselben Ausdrücke dargestellt. Bestimmte gebräuchliche Kennzeichnungen der Junktoren passen jedoch nur auf Gedankengefüge, andere nur auf Fregeverknüpfungen. Immer wenn im Zusammenhang mit der Bestimmung von Junktoren von Aussagen gesprochen wird, kann nur von Gedankengefügen, nicht aber von Fregeverknüpfungen die Rede sein. Die Charakterisierung der „Junktoren“ als Beziehungen oder „Verknüpfungen“ von Aussagen, die ihrerseits in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der „Teilaussagen“ wahr oder falsch sind, passt nur für Gedankengefüge; diese Bestimmung legt fest, dass ein Gedankengefüge eine Aussage über die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen ist. Dieser Sachverhalt wird ungenau oder gar irreführend dargestellt, wenn man sagt, eine Gedankengefügeaussage bilde aus einfachen Aussagen neue komplexere und zusammengesetzte Aussagen oder verbänden sie zu solchen; sehr gebräuchlich ist die Kennzeichnung der Gedankengefüge als „Aussageverknüpfungen“[35]. Von **A. Menne** erfahren wir, dass Junktoren „Aussagen umformen … zu einer neuen Aussage.“[36] Eine Gedankengefüge ist jedoch nicht mehr „aussagenbildend“ wie irgendein beliebiges anderes Prädikat, das einem geeigneten Prädikanden zugesprochen wird; diese Operation der Prädikation ist nicht treffend charakterisiert, wenn man die Metapher bemüht, dass aus einfachen Elementen ein komplexeres zusammengefügt wird (wie man etwa aus Ziegeln eine Mauer, aus Baumstämmen ein Floß zusammenbaut oder sich aus Atomen ein Molekül zusammensetzt)[37]. Gedankengefüge sind keine Verknüpfungen im algebraischen Sinne; Fregeverknüpfungen sind zwar algebraische Verknüpfungen, jedoch keine Verknüpfungen von Aussagen. Von einer Umformung von Aussagen kann weder bei Gedankengefügen noch bei Fregeverknüpfungen gesprochen werden. In einer Prädikation wird den Prädikanden ein Prädikat zugesprochen, in einer Gedankengefügeaussage wird vorgegebenen Aussagen ein Gedankengefügeprädikat zugesprochen – der Prädikand wird in einer Prädikation nicht „umgeformt". Würde man diesen Prädikat-Charakter der Gedankengefüge stärker beachten anstatt diese irreführenden Analogien zu bemühen, wäre die Verwechslung der Gedankengefüge mit Fregeverknüpfungen nicht möglich.

Immer wenn in Analogie zur Arithmetik/Algebra von Verknüpfungen oder echten Funktionen die Rede ist, zielt dies auf Fregeverknüpfungen. Wenn mit „Wahrheitsfunktion" nicht gemeint ist, dass die Wahrheit einer Aussage von den Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen in dem Sinne abhängig ist, dass er diese vorausgesetzten Wahrheitswerte mehr oder weniger vollständig wiederkäut, sondern dass Wahrheitswerte auf einen Wahrheitswert abgebildet werden, kommen nur Fregeverknüpfungen in Frage. Dieser Übergang von der Betrachtung der Gedankengefüge zur Betrachtung von Fregeverknüpfungen, der den Logistikern allerdings nicht bewusst wird, wird dann vollzogen, wenn anstatt von Aussagen nur mehr von Wahrheitswerten die Rede ist. Die Tatsache, dass es im Rahmen des Systems der Gedankengefüge nur auf die Wahrheitswerte der vorausgesetzten Aussagen ankommt, verleitet zur Annahme, anstatt mit den vorgegebenen Wahrheitswerten von Aussagen könne man sich ebenso gut unmittelbar nur mit Wahrheitswerten befassen – wenn so die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen unter der Hand einfach zu Beliebig-Element-Zeichen für Wahrheits- bzw. Komplementärwerte werden. **Frege** vollzieht den Übergang von den Gedankengefügen zu den Fregeverknüpfungen, wenn er plötzlich darauf besteht, dass jeder Aussagesatz nicht einen Gedanken oder einen „beurteilbaren Inhalt", sondern eigentlich nur einen Wahrheitswert benenne. Wenn dann gesagt wird, es würden Wahrheitswerte auf Wahrheitswerte abgebildet, haben wir es nicht mehr mit Gedankengefügen, sondern mit Fregeverknüpfungen zu tun. Wenn **Frege** etwa über den Ausdruck „$y \Rightarrow x$" schreibt, „Der Wert der Funktion $y \Rightarrow x$ sei dann das Falsche, wenn als *y*-Argument das Wahre und zugleich als *x*-Argument ein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; in allen anderen Fällen sei der Wert dieser Funktion das Wahre" (FB 37 [28]), dann spricht er, ohne es zu merken, nicht mehr vom Gedankengefüge $y \Rightarrow x$ (mit den *Aussage*variablen x,y), sondern von der Fregeverknüpfung $y \underline{\underline{\Rightarrow}} x$ (mit den „*Wahrheitswert*"-Variablen" x und y). Nachdem **Menne** die Junktoren zuerst als Gedankengefügeprädikatoren bestimmt hat, bestimmt er sie als Fregeverknüpfungen, ohne dass ihm der Bruch in der Argumentation gewahr wird; ein Junktor (Gedankengefüge) ist plötzlich eine Funktion, die „als Argumente Wahrheitswerte hat und daraus einen Wahrheitswert bildet."[38] Diese Charakterisierung passt nur auf die Fregeverknüpfung $\mathfrak{W}^n \Rightarrow \mathfrak{W}$. Bei **Hilbert/Bernays** ist der (unbemerkte) Sprung vom SFG zum SFA sehr deutlich: nachdem zuerst A&B als Gedankengefüge bestimmt wurden (A&B ist genau dann wahr, wenn beide *Aussagen* A und B wahr sind), heißt es dann: „Wir können demnach die Konjunktion auffassen als eine Funktion zweier Argumente A, B, deren jedes die Werte ‚wahr', ‚falsch' annehmen kann und welche jedem Wertsystem der Argumente wiederum einen der beiden Werte ‚wahr', ‚falsch' als Funktionswert zuordnet."[39]

Von Fregeverknüpfung ist immer dann die Rede, wenn die Junktoren analog zu den arithmetischen Verknüpfungen wie Addition und Multiplikation bestimmt werden: „Junktoren sind Funktionszeichen, wie in der Arithmetik z.*B*. + und – (diese bilden dort aus zwei Zahlen eine weitere Zahl)…"[40] **Perelman, Chaim** führt die Junktoren einfach als algebraische Verknüpfungen ein; die Junktorenzeichen „analog den Operationszeichen der Algebra fungieren (wie ‚+', ‚-', ‚=')."[41] **Largeault** fasst die Junktoren analog zu den arithmetischen und mengenalgebraischen Verknüpfungen: „L'implication est une opération logique exactement comme l'addition et la multiplication des entiers sont des opérations arithmétiques. $p \underline{\underline{\Rightarrow}} q$ n'est pas un jugement sur *p* et *q*: pas plus que 3×2 n'est un jugement sur 2 et 3 mais un nombre, ou pas plus que l'intersection de deux classes n'est un jugement, mais une classe."[42] Fregeverknüpfungen sind im Gegensatz zu Gedankengefügen in der Tat keine Urteile über Aussagen.

Da die Fregeverknüpfungen nicht explizit von den Gedankengefügen unterschieden sind, bleibt ihr Verständnis diffus: ein wesentliches Kennzeichen der Gedankengefüge, nämlich die Abhängigkeit ihrer Wahrheit und Falschheit von den Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen, wird unzulässigerweise auf die Fregeverknüpfungen übertragen: eine Fregeverknüpfungen soll wie eine Gedankengefügeaussage falsch sein können – der Funktionswert der Fregeverknüpfungen wird mit ihrem Wahrheitswert konfundiert; eine Fregeverknüpfung ist jedoch immer wahr/korrekt, wenn sie die festgesetzte Verknüpfung vornimmt. Der Wahrheitswert einer Fregeverknüpfung kann vom Funktionswert verschieden sein: Die Verknüpfung ($\mathcal{W} \supseteq \mathcal{F} = \mathcal{F}$) ist nicht falsch wie der Funktionswert, sondern richtig (weil der Definition der Verknüpfung Φ_C genügend).

3.6.2. Gedankengefüge, Fregeverknüpfungen und logische Formen

Obwohl sich logische Relationen, Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen nach Form und Inhalt jeweils grundlegend unterscheiden, resultiert, wenn im Ausdruck des Fregegesetzes $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen durch Beliebig-Element-Zeichen für Ereignisklassen, das Bestreitens-Zeichen $\neg$ durch das Negationszeichen $\sim$, das Zeichen für **C** „$\Rightarrow$“ durch das Zeichen „$\rightarrow$“ für $\mathbb{C}$ ersetzt werden, der Ausdruck des logischen Kontrapositionsgesetzes „$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$“. Ersetze ich im ersten Ausdruck nur das zweite **C**-Zeichen durch „$\rightarrow$“, erhalte ich den Ausdruck „$(A \Rightarrow B) \rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$“, der ein Gesetz des SFG darstellt. Ersetze ich die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen durch Beliebig-Element-Zeichen für Komplementärwerte, das Zeichen „$\neg$“ durch das Zeichen „$-$“ der Φ_N-Abbildung, das Zeichen „$\Rightarrow$“ durch das Zeichen „$\supseteq$“ für die Fregeverknüpfung Φ_C, erhalte ich den Ausdruck der Fregeverknüpfung „$(x \supseteq y) \supseteq (-y \supseteq -x)$“. Trotz der Verschiedenheit (Nichtidentität) der drei Systeme bestehen offenbar bestimmte Zusammenhänge. Es werden ja auf dieselbe kombinatorische Weise in der Logik, im System der Gedankengefüge und in der Fregealgebra Vorkommenskombinationen, bzw. Wahrheitswertprädikate oder Paare von Komplementärwerten konstruiert; diese Elemente werden jeweils einer dichotomen Bewertung unterzogen; die Vorkommenskombinationen werden als realmöglich bzw. als nicht-realmöglich bestimmt, die Wahrheitswertprädikate werden ausgeschlossen oder sie werden nicht ausdrücklich ausgeschlossen, die Paare der Komplementärwerte werden entweder auf a_1 oder auf a_2 abgebildet. Dieser Parallelität entsprechen bestimmte operative Übereinstimmungen, die ich jetzt untersuchen möchte.

Ich werde dabei von „**bedingungslogischer Isomorphie**“ und von „**bedingungslogischer Homomorphie**“ sprechen. Ist ein System S_1 durch die Ereignisklassen $E_1, E_2, \ldots$, ein anderes System S_2 durch die Ereignisklassen $E'_1, E'_2, \ldots$ charakterisiert, und können diese Ereignisklassen einander bijektiv zugeordnet werden – $E_1 \Leftrightarrow E'_1$, $E_2 \Leftrightarrow E'_2$, usw. –, bezeichnen „Ω_1“, „Ω_2“,… irgendwelche bedingungslogischen Totalformen, dann spreche ich von einer „bedingungslogischen Homomorphie“, wenn mit $\Omega_1(E_1,E_2)$ immer auch $\Omega_1(E'_1,E'_2)$ gilt, aber nicht umgekehrt; es gibt dann eine *injektive* Abbildung der bedingungslogischen Gesetze von S_1 auf die Gesetze von S_2. Eine *bedingungslogische Isomorphie* besteht genau dann, wenn bei $\Omega_1(E_1,E_2)$ immer auch $\Omega_1(E'_1,E'_2)$ gilt und umgekehrt; es gibt dann eine *bijektive* Abbildung der bedingungslogischen Gesetze von S_1 auf die bedingungslogischen Gesetze von S_2.

3.6.2.1. Die Beziehungen zwischen SFG- und SFA-Gesetzen und zwischen Fregegesetzen und Φ_V-Substitutionen.

Zuerst will ich die Zusammenhänge zwischen den Elementen und Gesetze des SFG und des SFA untersuchen. Um diese Zusammenhänge übersichtlich darstellen zu können, setze ich einige Bezeichnungen fest: „Ω_1“, „Ω_2“,… seien Beliebig-Element-Zeichen für zweistellige logische Totalformen, „p“, „q“,… seien Beliebig-Element-Zeichen für Ereignisklassen, die auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogen sind; „A“, „B“,… sollen beliebige wertdefinite Aussagen, „Γ_1“, „Γ_2“,… beliebige zweistellige Gedankengefüge bezeichnen; „x“, „y“,… seien Zeichen für beliebige Komplementärwerte aus der Menge $\mathcal{A} = \{a_1, a_2]$ und „Φ_1“,“Φ_2“,… seien Zeichen für beliebige zweistellige Fregeverknüpfungen. Der Pfeil $\Leftrightarrow$ soll eine bijektive Abbildung bezeichnen.

Ein zweistelliges **Gedankengefüge** kennzeichnet ein Paar von Aussagen und spricht ihnen jedes der vier Wahrheitswertprädikate jeweils entweder ausdrücklich ab oder nicht ausdrücklich ab; eine **Fregeverknüpfung** bildet alle zu $\mathcal{A}^2$ gehörenden Wertepaare jeweils entweder auf a_1 oder auf a_2 ab. Jedem der vier Wahrheitswertprädikate WP_1 bis WP_4 kann in folgender Weise genau eines der vier Wertepaare aus $\mathcal{A}^2$ bijektiv zugeordnet werden:

	Wahrheitswertprädikat		Komplementärwertpaar
WP_1:	*… ist wahr und … ist wahr*	⇔	(a_1,a_1)
WP_2:	*… ist wahr und … ist falsch*	⇔	(a_1,a_2)
WP_3:	*… ist falsch und … ist wahr*	⇔	(a_2,a_1)
WP_4:	*… ist falsch und … ist falsch*	⇔	(a_2,a_2)

Unter allen 16! möglichen bijektiven Zuordnungen der Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen sei eine ***Bijektion*** $\boldsymbol{\beta_A}$ in folgender Weise definiert: Ein Gedankengefüge Γ_1(A,B) sei einer Fregeverknüpfung Φ_1(x,y) genau dann durch β_A bijektiv zugeordnet, wenn die Fregeverknüpfung Φ_1 alle diejenigen Wertepaare auf a_1 abbildet, deren entsprechende Wahrheitswertprädikate das Gedankengefüge Γ_1 nicht ausdrücklich ausschließt. Es ergeben sich die folgenden eineindeutigen Zuordnungen: **V** ⇔ Φ_V, **A** ⇔ Φ_A, **B** ⇔ Φ_B, **C** ⇔ Φ_C, usw.; es gilt β_A(**A**) = Φ_A und $\beta_A(\Phi_A)$ = **A**, usw.

Diese eineindeutige Zuordnung β_A ist mit folgender *bedingungslogischer Isomorphie* verbunden: wenn – unter der Voraussetzung $\beta_A(\Gamma_1) = \Phi_1$ und $\beta_A(\Gamma_2) = \Phi_2$ – zwischen dem Sachverhalt Γ_1(A,B), dass zwei Aussagen (A,B) ein Gedankengefüge Γ_1 zukommt, und dem Sachverhalt Γ_2(A,B), dass eben diesen Aussagen zugleich ein Gedankengefüge Γ_2 zukommt, eine bestimmte logische Totalrelation Ω_1 besteht, genau dann besteht zwischen dem Sachverhalt $\Phi_1(x,y) = a_1$, dass die entsprechende Fregeverknüpfung Φ_1 das entsprechende Wertepaar auf a_1 abbildet, und dem Sachverhalt $\Phi_2(x,y) = a_1$, dass die entsprechende Fregeverknüpfung Φ_2 dieses Wertepaar auf a_1 abbildet, dieselbe Totalform Ω_1. Dass irgendeine Fregeverknüpfung Φ_i ein Komplementärwertpaar auf den Komplementärwert a_1 abbildet, ist ebenso ein allgemeiner, realmöglicher Sachverhalt (eine Sachverhaltsklasse) wie der Umstand, dass irgendein Gedankengefüge Γ_i zwei Aussagen A und B zukommt. Die unter der Bedingung der Bijektion β_A für alle Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen geltende bedingungslogische Isomorphie ist durch das folgende $\mathbb{E}$-Gesetz festgelegt:

$$\Omega_1[\Gamma_1(A,B), \Gamma_2(A,B)] \leftrightarrow \Omega_1[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1)], \text{ falls } \beta_A(\Gamma_1) = \Phi_1 \text{ und } \beta_A(\Gamma_2) = \Phi_2.$$

Ich führe einige Beispiele einer solchen bedingungslogischen Isomorphie an:

Es besteht beispielsweise der folgende bedingungslogische Zusammenhänge zwischen den Fregeverknüpfungen Φ_A und Φ_X: $(x \underline{\triangledown} y = a_1) \succ\!\prec (x \underline{\underline{\Downarrow}} y = a_1)$ – genau dann, wenn ein Komplementärwertpaar durch die Verknüpfung Φ_A auf a_1 abgebildet wird, wird eben dieses Komplementärwertpaar durch Φ_X nicht auf a_1 abgebildet. Diese Beziehung ist bedingungslogisch isomorph der Beziehung $(A \triangledown B) \succ\!\prec (A \Downarrow B)$ – genau dann, wenn einem Aussagenpaar das Gedankengefüge **A** zukommt, kommt diesem Aussagenpaar das Gedankengefüge **X** nicht zu.

Zwischen den Fregeverknüpfungen Φ_B und Φ_C besteht der Zusammenhang $(x \underline{\underline{\Leftarrow}} y = a_1) \vee (x \underline{\underline{\Rightarrow}} y = a_1)$ – ein Komplementärwertpaar wird entweder von Φ_B oder von Φ_C oder von beiden Verknüpfungen auf a_1 abgebildet. Bedingungslogisch isomorph dazu ist das Gesetz des SFG: $(A \Leftarrow B) \vee (A \Rightarrow B)$ – einem Aussagenpaar kommt entweder das Gedankengefüge **B** oder **C** oder beide Gedankengefüge zu.

Dem Gesetz des SFG „Wenn das Gedankengefüge **K** zwei Aussagen A und B zukommt, dann kommt eben diesen beiden Aussagen das Gedankengefüge **E** zu“ ist das SFA-Gesetz isomorph: Wenn ein Paar aus $\mathcal{A}^2$ durch die Fregeverknüpfung Φ_K auf a_1 abgebildet wird, dann wird eben dieses Paar aus $\mathcal{A}^2$ auch durch die Verknüpfung Φ_E auf a_1 abgebildet.

Da im Ausdruck eines solchen bedingungslogischen Gesetzes des SFA die Bezeichnung einer bedingungslogischen Totalform vorkommt, kann ein solches Gesetz weder im Rahmen des SFA noch im Rahmen des SFG dargestellt und entschieden werden.

Zwischen den *Gesetzen des SFG* und den *Fregegesetzen* einerseits, und zwischen den *Gesetzen des SFA* der Form $\Omega_1[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1)]$ und den Φ_V*-Substitutionen* andererseits bestehen jeweils bedingungslogische Homomorphiebeziehungen. Wird im Ausdruck eines begriffsschriftlich nicht darstellbaren Gesetzes des SFG der Ausdruck der bedingungslogischen Totalform durch den Ausdruck des entsprechenden Gedankengefüges ersetzt, das de Totalform durch die **Bijektion** $\boldsymbol{\beta_B}$ zugeordnet wird, resultiert der Ausdruck eines begriffsschriftlich darstellbaren Fregegesetzes. Diese Zuordnung β_B von bedingungslogischen Totalformen und Gedankengefügen basiert auf der folgenden Zuordnung der Wahrheitsprädikate der Gedankengefüge und der Vorkommenskombinationen der ereignislogischen Totalformen:

Vorkommenskombination I:	$p \frown q$	$\Leftrightarrow$	$WP1$: $\mathcal{W}(A)$ & $\mathcal{W}(B)$
Vorkommenskombination II:	$p \frown \sim q$	$\Leftrightarrow$	$WP2$: $\mathcal{W}(A)$ & $\mathcal{F}(B)$
Vorkommenskombination III:	$\sim p \frown q$	$\Leftrightarrow$	$WP3$: $\mathcal{F}(A)$ & $\mathcal{W}(B)$
Vorkommenskombination IV:	$\sim p \frown \sim q$	$\Leftrightarrow$	$WP4$: $\mathcal{F}(A)$ & $\mathcal{F}(B)$

Wenn wir den Sachverhalt, dass eine Totalform eine Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt, eineindeutig dem Sachverhalt zuordnen, dass ein Gedankengefüge das entsprechende Wahrheitswertprädikat nicht ausdrücklich ausschließt, gibt es unter den 16! bijektiven Abbildungen von Totalformen und Gedankengefügen die *Bijektion* β_B: wenn die Totalform Ω_1 einen bestimmte Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt, genau dann soll das entsprechende Gedankengefüge Γ_1 nicht ausdrücklich ausschließen, dass das entsprechende Wahrheitswertprädikat einem Aussagenpaar zukommt. Jedem Gedankengefüge ist damit genau einer der zweistelligen Funktoren bijektiv zugeordnet. Diese Bijektion kommt in meinen Bezeichnungen unmittelbar zur Darstellung: $\mathbb{V} \Leftrightarrow$ **V**, $\mathbb{A} \Leftrightarrow$ **A**, $\mathbb{B} \Leftrightarrow$ **B**, usw.; $\beta_B(\mathbb{A})$ = **A**; β_B(**A**) = $\mathbb{A}$, usw. Weil es zwischen den Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen eine bijektive Abbildung gibt, gilt aufgrund der Transitivität bijektiver Abbildungen, auch zwischen Funktoren und Fregeverknüpfungen die folgende ***Bijektion*** $\boldsymbol{\beta_C}$: $\beta_C[\Omega_1(p,q)] = \beta_A\{\beta_B[\Omega_1(p,q)]\} = \beta_A[\Gamma_1(A,B)] = \Phi_1(x,y)$, also etwa $\beta_C(\mathbb{A}) = \Phi_A$ und $\beta_C(\Phi_A) = \mathbb{A}$.

Wir erhalten die folgenden Zuordnungen zwischen SEL, SFG und SFA

β_C

β_B β_A

Logik	SFG	SFA
$\mathbb{V}$	**V**	Φ_V
$\mathbb{A}$	**A**	Φ_A
$\mathbb{B}$	**B**	Φ_B
$\mathbb{C}$	**C**	Φ_C
$\mathbb{D}$	**D**	Φ_D
$\mathbb{E}$	**E**	Φ_E
$\mathbb{F}$	**F**	Φ_F
$\equiv$	**G**	Φ_G
$\mathbb{H}$	**H**	Φ_H
$\mathbb{I}$	**I**	Φ_I
$\mathbb{J}$	**J**	Φ_J
$\mathbb{K}$	**K**	Φ_K
$\mathbb{L}$	**L**	Φ_L
$\mathbb{M}$	**M**	Φ_M
$\mathbb{X}$	**X**	Φ_X
$\mathbb{O}$	**O**	Φ_O

Für jedes *Gesetz des SFG* ist durch das folgende Implikationsgesetz auf der Grundlage der Bijektion $\boldsymbol{\beta_B}$ ein *Fregegesetz* bestimmt:

$$\Omega_3[\Gamma_1(A,B),\Gamma_2(A,B)] \rightarrow \Gamma_3[\Gamma_1(A,B),\Gamma_2(A,B)], \text{ mit } \Gamma_3 = \beta_B(\Omega_3).$$

Es handelt sich hier um ein Implikations-, nicht um ein Äquivalenzgesetz; dies bedeutet, dass durch die definierten Substitutionen wohl aus jedem Gesetz des SFG ein Fregegesetz, nicht aber aus jedem Fregegesetz ein Gesetz des SFG gewonnen werden kann. Das Fregegesetz stellt nämlich eine Abschwächung des Gehalts des entsprechenden Gesetzes des SFG dar. Das Gesetz des SFG (A&B) → (A⇒B) bestimmt gemäß der Definition von ℂ vier Fälle:

> es ist realmöglich, dass (A&B) und (A⇒B) zugleich wahr sind.
> es ist nicht-realmöglich, dass (A&B) wahr und (A⇒B) falsch ist.
> es ist realmöglich, dass (A&B) falsch ist, während (A⇒B) wahr ist.
> es ist realmöglich, dass weder (A&B) noch (A⇒B) wahr sind.

Das Fregegesetz (A&B) ⇒ (A⇒B) schwächt die Aussage des SFG-Gesetzes (A&B) → (A⇒B) ab; es behauptet, entsprechend **FREGE**s Definition von **C**, nur noch, dass es nicht möglich ist, dass (A&B) wahr und zugleich (A⇒B) nicht wahr ist (Nichtrealmöglichkeit der Vorkommenskombination II). In gleicher Weise schwächt das Fregegesetz (A⩒B) ⋈ (A ⇓ B) den Gehalt des Gesetzes des SFG (A⩒B) ≻≺(A ⇓ B) ab; während letzteres ausdrücklich behauptet, dass es realmöglich ist, dass beide Gedankengefüge **A** und **X** jeweils alleine einem Aussagenpaar zukommen, und dass es nicht-realmöglich ist, dass beide oder keines der Gedankengefüge einem Aussagenpaar zukommen, behauptet das Fregegesetz viel weniger, nämlich nur, dass beide Gedankengefüge nicht zugleich wahr und nicht zugleich falsch sein können.

Diese Abschwächung des Aussagegehaltes eines Gesetzes des SFG durch die Vertauschung der Bezeichnung der Totalform durch die Bezeichnung des β_B-entsprechenden Gedankengefüges beruht darauf, dass für ein Aussagenpaar (A,B), dem ein Gedankengefüge Γ_1 zukommt, für welches $\beta_B(\Gamma_1) = \Omega_1$ gilt, auch jedes Gedankengefüge zugesprochen werden kann, das *zumindest* diejenigen Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich ausschließt, die auch Γ_1 nicht ausschließt, während einem Paar von Ereignisklassen (p, q), dem die Totalform Ω_1 zukommt, nicht auch eine Totalform zukommen kann, der eine bei Ω_1 nicht-realmögliche Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt. Kommt zwei Aussagen A und B z.B. das Gedankengefüge **J** zu, dann steht fest, dass A und B jedenfalls nicht denselben Wahrheitswert haben; **J** kann zwei Aussagen zukommen, wenn ihnen auch **V** zukommt (zumindest ein Wahrheitswertprädikat trifft zu), oder wenn ihnen **D** zukommt (nicht beide Aussagen sind wahr), oder wenn ihnen **A** zukommt (es sind nicht beide Aussagen falsch) – **J**, **D**, **A** und **V** schließen *zumindest* diejenigen Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich aus, die auch **J** nicht ausschließt). Besteht zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q die logische Beziehung 𝕁, können dagegen nicht zugleich auch die logischen Beziehungen 𝕍, 𝔸 und 𝔻 zutreffen. Deshalb ergibt sich aus einem Gesetz des SFG nicht nur bei einer Ersetzung der Totalform Ω_1 durch das entsprechende Gedankengefüge Γ_1 = ß$_B(\Omega_1)$ ein gültiges Fregegesetz, sondern auch bei einer Ersetzung der Totalform durch alle diejenigen Gedankengefüge, die *mindestens* die von Γ_1 nicht ausdrücklich ausgeschlossenen Fälle nicht ausdrücklich ausschließen.

Jedem Gesetz des SFG entspricht auf der Grundlage der oben dargelegten Bijektionen also ein Fregegesetz, nicht jedem Fregegesetz aber entspricht ein Gesetz des SFG; zwischen den Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen besteht eine injektive Abbildung. Aus der Richtigkeit eines Fregegesetzes kann nicht auf die Richtigkeit eines durch die definierten Substitutionen gewonnenen Gesetzes des SFG geschlossen werden. Aus (A ⊧ B) ≻≺ (A ⇒ B) lässt sich durch Vertauschung von Zeichen zwar das Fregegesetz (A ⊧ B) ⋈ (A ⇒ B) gewinnen, aus dem Fregegesetz (A⊧B) ⥣ (A⇒B) aber ergäbe sich durch β_B-Vertauschen das falsche Gesetz des SFG (A⊧B) ∣ (A⇒B). Das SFG beruht auf den Gesetzen des SFG; diese Gesetze des SFG können weder im Rahmen des SFG, noch im Rahmen des SFA durch fregealgebraisches Ausrechnen auf der Basis der Isomorphie von SFG und SFA entschieden werden. **FREGE**s System hängt damit völlig in der Luft: nur vom System der bedingungslogischen Formen her, das **FREGE** freilich nicht kennt, können die Gesetzmäßigkeiten von **FREGE**s System erkannt und bewiesen werden.

Auch aus jedem bedingungslogischen Gesetz des SFA von der Form $\Omega_1[\Phi_1(x, y) = a_1, \Phi_2(x, y) = a_1)]$ lässt sich, entsprechend dem Verhältnis von Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen und aufbauend auf der Bijektion β_C, eine Φ_V-Substitution durch einfaches Vertauschen von Zeichen herstellen. Auch zwischen den bedingungslogischen Verhältnissen der Fregeverknüpfungen und den Φ_V-Substitutionen gibt es auf der Grundlage der Bijektion ß$_C$ folgenden generellen gesetzmäßigen *implikativen* Zusammenhang:

$$\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1] \rightarrow \Phi_3[\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)] = a_1, \text{ mit } \beta_C[\Omega_3(p,q)] = \Phi_3(x,y).$$

Der Grund für diese Gesetzmäßigkeit entspricht dem Grund für den Zusammenhang der Gesetze des SFG mit den Fregegesetzen. Die Totalform ℂ bestimmt, dass die zweite Vorkommenskombination nicht realmöglich ist, und in diesem Sinne besagt das ℂ-Gesetz ($x \mathbin{\underline{\&}} y = a_1$) → ($x \mathbin{\underline{\Rightarrow}} y = a_1$), dass jedes Wertepaar, das von Φ_K auf a_1

abgebildet wird, auch von Φ_C auf a_1 abgebildet wird; werden die beiden Fregeverknüpfungen ($x \underline{\underline{\&}} y$) und ($x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y$) selbst durch die β_C-entsprechende Fregeverknüpfung verknüpft, so können dabei alle Wertepaare außer (a_1,a_2) verknüpft werden, denn diese Möglichkeit wird durch dieses Gesetz des SFA ausgeschlossen (es gibt kein Komplementärwertpaar, das durch $x \underline{\underline{\&}} y$ auf a_1, durch $x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y$ aber auf a_2 abgebildet wird). Da die der Totalform $\mathbb{C}$ entsprechende Fregeverknüpfung $\Phi_C = \beta_C(\mathbb{C})$ nur das Paar (a_1,a_2) nicht auf a_1 abbildet, wird das Gesetz $(x \underline{\underline{\&}} y = a_1) \rightarrow (x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y = a_1)$ zur Φ_V-Substitution $[(x \underline{\underline{\&}} y) \underline{\underline{\Rrightarrow}} (x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y) = a_1$. Eine Φ_V-Substitution ergibt sich auch dann, wenn die Fregeverknüpfung, die an die Stelle der Totalform gesetzt wird, *zumindest* die Fälle, die die der Totalform entsprechende Fregeverknüpfung auf a_1 abbildet, auch auf a_1 abbildet; wir erhalten ausgehend von $(x \underline{\underline{\&}} y = a_1) \rightarrow (x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y = a_1)$ auch die Φ_V-Substitutionen $[(x \underline{\underline{\&}} y) \underline{\underline{\Rrightarrow}} (x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y)] = a_1$[43].

Aus dem bedingungslogischen Gesetz $(x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y = a_1) \succ\!\prec (x \underline{\models} y = a_1)$, welches besagt, dass jedes Wertepaar (*x*,*y*) von Φ_C und Φ_L jeweils auf einen unterschiedlichen Komplementärwert abgebildet wird, kann durch Vertauschung des $\mathbb{J}$-Zeichens „$\succ\!\prec$" durch das Φ_J-Zeichen „$\underline{\bowtie}$" die Φ_V-Substitution $[(x \underline{\underline{\Rrightarrow}} y) \underline{\bowtie} (x \underline{\dashv} y)] = a_1$ gewonnen werden, denn links und rechts von der Hauptverknüpfung Φ_J stehen nie dieselben Werte, (a_1, a_1) und (a_2, a_2); Φ_J verknüpft nur (a_1,a_2) und (a_2,a_1) zu a_1. Eine Φ_V-Substitution ergibt sich auch in allen Fällen, wo die Hauptverknüpfung zumindest diese beiden Wertepaare auf a_1 abbildet.

Wir können diese Zusammenhänge allgemeiner bestimmen: Gilt ein Gesetz $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1]$, dann bedeutet die Tatsache, dass die Totalrelation Ω_3 eine bestimmte Vorkommenskombination als nicht-realmöglich bestimmt, dass bei der Verknüpfung von $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ diejenigen Komplementärwertpaare wegfallen, die den bei Ω_3 nicht-realmöglichen Vorkommenskombinationen entsprechen. Da die der Totalform Ω_3 entsprechende Fregeverknüpfung Φ_3 alle bei der Verknüpfung von $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ vorkommenden Wertepaare auf a_1 abbildet, resultiert aus der Verknüpfung dieser beiden Fregeverknüpfungen $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ durch die Fregeverknüpfung Φ_3=ß$_C(\Omega_3)$ eine Φ_V-Substitution. Es ergibt sich eine Φ_V-Substitution für alle Fregeverknüpfungen, die mindestens die Fälle auf a_1 abbilden, die auch Φ_3 auf a_1 abbildet.

Da es sich beim Gesetz $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1] \rightarrow \Phi_3[\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)] = a_1$, mit ß$_C[\Omega_3(p,q)] = \Phi_3(x,y)$ um eine Implikations-, nicht um eine Äquivalenzbeziehung handelt, kann durch bloße Zeichenvertauschung zwar aus jedem derartigen bedingungslogischen SFA-Gesetz eine Φ_V-Substitution, aber nicht aus jeder Φ_V-Substitution eine solche bedingungslogische Gesetzbeziehung von Fregeverknüpfungen hergestellt werden. Dies zeigt, dass es zwischen den Gedankengefügen und den entsprechenden Fregeverknüpfungen einerseits sowie zwischen den Fregegesetzen und den entsprechenden Φ_V-Substitutionen andererseits *eineindeutige* Entsprechungen gibt; es gibt auf der Grundlage der Bijektion β_A eine bijektive Abbildung der Fregegesetze auf die Φ_V-Substitutionen, die durch das $\mathbb{E}$-Gesetz definiert ist:

Für $\beta_A(\Gamma_1) = \Phi_1$, $\beta_A(\Gamma_2) = \Phi_2$ und $\beta_A(\Gamma_3) = \Phi_3$ gilt: $\Gamma_1[\Gamma_2(A,B),\Gamma_3(A,B)] \leftrightarrow \Phi_1[\Phi_2(x,y),\Phi_3(x,y)] = a_1$.

Dieser bedingungslogische Isomorphismus hat sicherlich entscheidend dazu beigetragen, dass der fundamentale Unterschied von Gedankengefügen als Prädikaten und Fregeverknüpfungen als Abbildungen im Rahmen der modernen Logik nie bedacht, wohl auch kaum zur Kenntnis genommen worden ist[44].

Aus jedem Fregegesetz lässt sich eine Φ_V-Substitution gewinnen und umgekehrt. Zwischen den Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen sowie zwischen den Gesetze des SFA von der Form $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1]$ und den Φ_V-Substitutionen gibt es jeweils hingegen nur eine einseitige Zuordnung gibt (einen bedingungslogischen Homomorphismus). Es gibt deshalb auch einen bedingungslogischen Homomorphismus zwischen der Gesetzen des SFG und den Φ_V-Substitutionen, oder zwischen den bedingungslogischen Gesetzen des SFA von der Form $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1]$ und den Fregegesetzen. Diese Zusammenhänge belegen, dass die Strukturunterschiede zwischen den logischen Totalformen und den Gedankengefügen bzw. der Fregeverknüpfungen viel erheblicher sind als die Strukturunterschiede zwischen den Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen. Von entscheidender Bedeutung ist, dass mit den Mitteln von SFG und SFA (Nachweis von Fregegesetzen und Φ_V-Substitutionen) die *logischen* Beziehungen, die im SFA oder SFG bestehen, nicht nachgewiesen werden können.

3.6.3. Die Nicht-Isomorphie zwischen logischen Gesetzen und den SFA/SFG-Gesetzen

Ich habe bislang nachgewiesen, dass eine bedingungslogische Isomorphie zwischen den Gesetzen des SFG und den Gesetzen des SFA besteht; zwischen den Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen gibt es hingegen nur

Homomorphie, ebenso zwischen Gesetzen des SFA und den Φ_V-Substitutionen; zwischen den Fregegesetzen und den Φ_V-Substitutionen hingegen besteht wiederum bedingungslogische Isomorphie: aus jedem Fregegesetz kann unmittelbar eine Φ_V-Substitution und umgekehrt gewonnen werden. Jetzt müssen wir uns der entscheidenden Frage zuwenden: Welche strukturellen Entsprechungen bestehen zwischen den logischen Formen, die ich im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellt habe, und den Gedankengefügen/Fregeverknüpfungen? Im Rahmen der üblichen logischen Missdeutung von SFG und SFA wird – ohne jeden Beweis, ja ohne jedes Bewusstsein darüber, dass hier überhaupt Rechtfertigungsbedarf besteht – eine Isomorphiebeziehung (wenn nicht gar Identität) unterstellt.

Wir haben die eineindeutige Zuordnung β_B von Gedankengefügen und bedingungslogischen Totalformen definiert; würde diese eineindeutige Zuordnung mit einer *bedingungslogischen Isomorphie*, wie sie zwischen Gesetzen des SFG und des SFA von der Form $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_I, \Phi_2(x,y) = a_I]$ besteht, einhergehen, ließe sich jedes logische Gesetz durch bloßes Vertauschung von Zeichen aus Fregegesetzen oder Φ_V-Substitutionen gewinnen, wie auch umgekehrt aus jedem logischen Gesetz ein entsprechendes Gesetz des SFG oder SFA; es müsste anerkannt werden, dass in **FREGE**s System jedes beliebige logische Gesetz herleitbar ist. Unmittelbar würde aus dem Fregegesetz (A&B) $\Rightarrow$ (A$\Rightarrow$B) nicht nur die Φ_V-Substitution $(x \underline{\&} y = a_I) \underline{\Rightarrow} (x \underline{\Rightarrow} y = a_I)$, sondern auch das Gesetz des SFG (A&B) $\rightarrow$ (A$\Rightarrow$B), ein Gesetz des SFA $(x \underline{\&} y = a_I) \rightarrow (x \underline{\Rightarrow} y = a_I)$ *und* ein logisches Gesetz „$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$“[45] folgen. Der Ansatz **FREGE**s wäre in der Tat genial gewesen, denn durch ein simples, mechanisches fregealgebraisches Rechnen, oder durch die nicht weniger simple Entscheidung von Fregegesetzen könnte jedes logische Gesetz gewonnen und entschieden werden. Gibt es also eine eineindeutige Entsprechung zwischen den Bedingungen dafür, dass ein Funktor Ω_1 zwei Ereignisklassen zukommt, und den Bedingungen, dass das entsprechende Gedankengefüge $\beta_B(\Omega_1) = \Gamma_1$ zwei Aussagen zukommt? Gibt es eine bijektive Abbildung der logischen Gesetze auf die Gesetze des SFG bzw. SFA? Dies ist nicht der Fall.

Bestünde diese Isomorphie, dann müsste sich daraus, dass die Bedingungen dafür, dass zwischen zwei Gedankengefügen eine bestimmte logische Relation, bzw. zwischen den Sachverhalten, dass zwei Fregeverknüpfungen ein Komplementärwertpaar auf a_I abbilden, eben diese logische Relation besteht[46], ergeben, dass auch die Bedingungen dafür dass zwischen den β_C-entsprechenden logischen Formen ebenfalls diese logische Relation besteht. Wir müssen demnach die strukturellen Bedingungen dafür vergleichen, dass zwischen Gedankengefügen, Fregeverknüpfungen und logischen Formen eine logische Beziehung besteht.

Ein bedingungslogisches *Gesetz des SFG* macht darüber eine Aussage, ob es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass einem Aussagenpaar, dem ein Gedankengefüge Γ_1 zukommt, auch ein Gedankengefüge Γ_2 zukommt. Ein bedingungslogisches *Gesetz des SFA* macht darüber eine Aussage, ob es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass ein Wertepaar $(x,y) \in \mathcal{A}^2$, das von der Fregeverknüpfung Φ_1 auf a_I abgebildet wird, auch von der Fregeverknüpfung Φ_2 auf a_I abgebildet wird. Ein logisches Gesetz macht darüber eine Aussage, ob es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass einem Paar von (auf ein Ereignis-Bezugssystem bestimmter Art bezogenes) Sachverhalts-/Ereignisklassen, dem die Totalform Ω_1 zukommt, auch die Totalform Ω_2 zukommt. Wir haben zu prüfen, wie jeweils in SFG, SFA und SEL nachgewiesen wird, ob eine bestimmte bedingungslogische Beziehung vorliegt, wie also jeweils die Realmöglichkeit jedes der vier Vorkommenskombinationen überprüft wird.

Vorkommenskombination I:

Gedankengefüge: Unter welchen Bedingungen gilt $\Gamma_1(A,B) \frown \Gamma_2(A,B)$? Zwei Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 können einem Aussagenpaar (A,B) genau dann zugleich zukommen, wenn es ***zumindest ein*** Wahrheitswertprädikat gibt, das von beiden Gedankengefügen nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird; denn Γ_1 und Γ_2 kommen zwei Aussagen genau dann zu, wenn diese einem Wahrheitswertprädikat zugehören, das von beiden Gedankengefügen nicht ausgeschlossen wird.

Fregeverknüpfungen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Phi_1(x,y) = a_I \frown \Phi_2(x,y) = a_I$? Zwei Fregeverknüpfungen Φ_1 und Φ_2 können ein Wertepaar (x,y) zugleich auf a_I abbilden, wenn es ***zumindest ein*** Wertepaar (x,y) gibt, das von Φ_1 und von Φ_2 auf a_I abgebildet wird.

Logische Totalrelationen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Omega_1(p,q) \frown \Omega_2(p,q)$? Zwei logische Totalrelationen Ω_1 und Ω_2 können einem Paar von Ereignisklassen (p,q) genau dann zugleich zukommen, wenn es ***keine einzige*** Vorkommenskombination von (p,q) gibt, der von Ω_1 und Ω_2 unterschiedlich bestimmt wird. Es ist demnach unmöglich, dass zwei verschiedene Totalformen einem Paar von Ereignisklassen zugleich zukommen.

Für Gedankengefüge und die Fregeverknüpfungen entsprechen sich diese Bedingungen: können zwei Gedankengefüge zugleich zwei Aussagen zukommen, genau dann ist es auch möglich, dass die beiden β_A-entsprechenden Fregeverknüpfungen die entsprechenden Wertepaare auf a_1 abbilden. Die Bedingung dafür, dass zwei Totalformen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen zukommen, sind davon verschieden; für zwei Gedankengefüge und zwei Fregeverknüpfungen genügt es, wenn es wenigstens ein Wahrheitswertprädikat bzw. ein Wertepaar gibt, das von beiden Gedankengefügen nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird, bzw. das von beiden Fregeverknüpfungen auf a_1 abgebildet wird. Jedem Aussagenpaar kommen deshalb genau 8 verschiedene Gedankengefüge zugleich zu, und jedes β_A-entsprechende Wertepaar wird durch die acht β_A-entsprechenden Fregeverknüpfungen auf a_1 abgebildet. Jedem Paar von Sachverhalts-/Ereignisklassen kommt jedoch nur eine einzige Totalform zu, für alle (p,q) ist $\Omega_1(p,q) \frown \Omega_2(p,q)$ mit $\Omega_1 \neq \Omega_2$ unmöglich.

Vorkommenskombinationen II und III:

Gedankengefüge: Unter welchen Bedingungen gilt $\Gamma_1(A,B) \frown \neg\Gamma_2(A,B)$? Dass einem Aussagenpaar (A,B) wohl ein Gedankengefüge Γ_1, nicht aber ein Gedankengefüge Γ_2 zukommt, ist genau dann realmöglich, wenn es *zumindest ein* Wahrheitswertprädikat gibt, das von Γ_2, nicht aber von Γ_1, ausdrücklich ausgeschlossen wird.

Fregeverknüpfungen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Phi_1(x,y) = a_1 \frown \Phi_2(x,y) = a_2$? Es ist genau dann realmöglich, wenn es *zumindest ein* Wertepaar (x,y) gibt, das von der Fregeverknüpfung Φ_1, nicht aber von der Fregeverknüpfung Φ_2 auf a_1 abgebildet wird.

Logische Funktorrelationen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Omega_1(p,q) \frown {\sim}\Omega_2(p,q)$? Dass zwei Ereignisklassen ein Funktor Ω_1, nicht aber ein Funktor Ω_2 zukommt, ist genau dann realmöglich, wenn es *zumindest eine Vorkommenskombination* gibt, der von Ω_1 anders bestimmt wird als von Ω_2.

Sind diese Bedingungen für zwei Gedankengefüge gegeben, dann immer auch für die β_A-entsprechenden Fregeverknüpfungen, und umgekehrt. Für die Totalformen liegen die Verhältnisse wieder anders, denn für jedes Paar von Ereignisklassen gilt, dass falls ihm eine bestimmte Totalform zukommt, ihm *jede* andere Totalform nicht zukommen kann; $\Omega_1(p,q) \frown {\sim}\Omega_2(p,q)$ ist für beliebige verschiedene Totalformen realmöglich. Kommt einem Paar von Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zu, dann ist dadurch noch nicht jedes andere Gedankengefüge ausgeschlossen; kommt hingegen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p,q die Totalform $\mathbb{K}$ zu, dann kommt ihnen $\mathbb{C}$ unmöglich zu, kommt einem Aussagenpaar (A,B) **K** zu, dann ist **C** nicht ausgeschlossen, sondern kommt A und B notwendig zu.

Vorkommenskombination IV:

SFG: Unter welchen Bedingungen gilt $\neg\Gamma_1(A,B) \frown \neg\Gamma_2(A,B)$? Zwei Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 können zwei Aussagen genau dann nicht zukommen, wenn *zumindest ein* Wahrheitswertprädikat von beiden Gedankengefügen ausdrücklich ausgeschlossen wird.

SFA: Unter welchen Bedingungen gilt $\Phi_1(x,y) = a_2 \frown \Phi_2(x,y) = a_2$? $\Phi_1(x,y) = a_1 \frown \Phi_2(x,y) = a_2$ ist genau dann der Fall, wenn es *zumindest ein* Wertepaar (x,y) gibt, das sowohl von Φ_1 wie von Φ_1 auf a_2 abgebildet wird.

SEL: Unter welchen Bedingungen gilt ${\sim}\Omega_1(p,q) \frown {\sim}\Omega_2(p,q)$? Zwei Ereignisklassen kann genau dann weder die Totalform Ω_1 noch die Totalform Ω_2 zukommen, wenn es zumindest eine Totalform gibt, der eine Vorkommenskombination anders als Ω_1 und Ω_2 bestimmt (wenn es zumindest drei Totalformen gibt). Diese Bedingung ist wiederum von allen Paaren verschiedener Totalformen erfüllt. Zwischen zwei beliebigen Totalformen besteht so immer nur die Beziehung der Exklusion $\mathbb{D}$, während zwischen verschiedenen Paaren von Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen alle möglichen logischen Totalrelationen bestehen können.

Es gibt zwar eine Bijektion β_B aus der Menge der Gedankengefüge in die Menge der Totalformen, aber zwischen den sich β_B-entsprechenden Totalformen und Gedankengefügen bestehen jeweils unterschiedliche logische Beziehungen. Während zwischen Gedankengefügen alle möglichen logischen Beziehungen bestehen können[47], stehen alle möglichen Paare von logischen Totalformengleicher Stelligkeit in der Beziehung der Exklusion $\mathbb{D}$. Der Grund für diese Verschiedenheit liegt darin, dass die Bedingungen dafür, dass ein Funktor zwei Ereignisklassen zukommt, wesentlich komplexer sind als die Bedingungen dafür, dass zwei Aussagen ein Gedankengefüge zukommt, oder dafür, dass ein Wertepaar von einer Fregeverknüpfung auf a_1 abgebildet wird. Jedem Aussagenpaar (A,B) kommt aufgrund der Wahrheitswertdefinitheit genau eines und nur eines der Wahrheitswertprädikate zu; dass bekannt ist, welchem Wahrheitswertprädikat die Aussagen zugehören, genügt für die Entscheidung, ob den Aussagen eines der Gedankengefüge zukommt oder nicht. Kommt einem Aussagenpaar ein bestimmtes Wahrheitswertprädikat zu, dann kommt ihm jedes der 8 Gedankengefüge zu, die dieses Wahrheitswertprädikat nicht ausdrücklich ausschließen. Dabei enthalten die Gedankengefüge keinerlei Information über einen etwaigen logischen und gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den beiden Aussagen; die Wahrheit und Falschheit aller Aussagen, denen Gedankengefüge zukommen, ist logisch independent. In gleicher Weise liegt von jedem der Wertepaare aus $\mathcal{A}^2$ fest, ob es von einer bestimmten Fregeverknüpfung auf a_1 abgebildet wird oder nicht. Auch jedes der Wertepaare wird von genau 8 Fregeverknüpfungen auf a_1 abgebildet; keine dieser Abbildungen kennzeichnet den gesetzmäßigen Zusammenhang der Komplementärwerte a_1 und a_2.

Während es also genügt, von zwei Aussagen zu wissen, welches Wahrheitswertprädikat ihnen eindeutig aufgrund der Wahrheitswertdefinitheit zukommt, um entscheiden zu können, ob den Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zukommt, und während es genügt, zu wissen, welches der vier Wertepaare vorliegt, um zu entscheiden, ob es von einer bestimmten Fregeverknüpfung auf a_1 abgebildet wird, steht für ein Paar von Ereignisklassen (p,q) noch nicht fest, ob eine bestimmte logische Totalform ihm zukommt oder nicht, wenn einer der vier Vorkommenskombinationen als realmöglich oder nicht-realmöglich erkannt ist. Um die logische Beziehung zwischen zwei Ereignisklassen zu kennen, müssen *alle* vier Vorkommenskombinationen bestimmt sein, denn der gesetzmäßige Zusammenhang relativer Modalisierung zweier Ereignisklassen ergibt sich erst aus der Gesamtheit der vier Vorkommenskombinationen. Anders als die vier Wahrheitswertprädikate, die disjunkt und von einander unabhängig sind, bilden die vier Vorkommenskombinationen einen untrennbaren Zusammenhang; die Vorkommenskombinationen (Vorkommens(wert)kombinationen) bestimmen nur alle zusammen das gesetzmäßige Verhältnis der Ereignisklassen.

Zwischen die Totalformen und den Gedankengefügen gibt es weder eine bedingungslogische Isomorphie wie sie zwischen den Gedankengefügen und den Fregeverknüpfungen noch eine bedingungslogische Homomorphie. Deshalb ergeben sich, wenn in Ausdrücken von Fregegesetzen die Zeichen der Gedankengefüge durch Zeichen von Funktoren, die Zeichen von Aussagen, durch Zeichen von Ereignisklassen ersetzt werden, nicht die Ausdrücke logischer Gesetze; während „$(A \& B) \rightarrow (A \Rightarrow B)$“ oder „$A \rightarrow (B \Rightarrow A)$“ gültige Gesetze des SFG und „$(A \& B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ oder „$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$“ gültige Fregegesetze bezeichnen, bezeichnen die Ausdrücke „$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$“ und „$p \rightarrow (q \rightarrow p)$“ keine gültigen logischen Gesetze. Umgekehrt bezeichnet der Ausdruck „$(p \wedge q) \uparrow (p \rightarrow q)$“ ein gültiges ereignislogisches Gesetz, während „$(A\&B) \Uparrow (A \Rightarrow B)$“ kein Fregegesetz darstellt. Schließlich gibt es Ausdrücke ereignislogischer Gesetze wie „$p \succ\!\prec \sim p$“, „$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$“, „$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$“, aus welchen sich bei Ersetzung der Zeichen von beliebigen Ereignisklassen und Funktoren durch Zeichen für beliebige Aussagen und die entsprechenden Gedankengefüge Ausdrücke gültiger Fregegesetze ergeben, „$A \bowtie \sim A$“, „$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$“, „$[(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$“.

Als Ergebnis muss festgehalten werden: weder das SFG noch das SFA (beide Systeme werden als „Aussagenlogik“ synkretistisch vermengt und missdeutet) befasst sich mit logischen Formen und Gesetzen. Weder die Gedankengefüge, noch die Fregeverknüpfungen stellen logischen Formen dar. Wenn **Frege** sein System der Gedankengefüge jedoch zur so genannten *Prädikatenlogik* erweitert, gelingt es ihm mithilfe der Gedankengefüge eindeutig bestimmte logische Relationen darzustellen. Diese logischen Relationen, ihren Zusammenhang mit dem vollständigen System logischer Formen und dem SFG/SFA möchte ich im nächsten Kapitel näher untersuchen.

Anmerkungen zu Teil II, Kapitel 3

---

1 In die Leerstellen des Gedankengefügeausdrucks „Es ist falsch, das … wahr und … falsch ist“, können nur Aussagen eingesetzt werden; dann erhalten wir eine Aussage über diese eingesetzten Aussagen. Gedankengefüge sind also Prädikate von Aussagen.

2 Die Gedankengefügeaussagen als Aussagen über die vorgegebenen Wahrheitswerte dieser Aussagen hängen von den Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen in derselben Weise ab, wie beispielsweise ein Farburteil von der tatsächlichen Farbe des beurteilten Gegenstandes abhängt.

3 Ich gebrauche die Wörter „Abbildung“ und „Funktion“ synonym.

4 „$\{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$“ ist zu lesen als: „die Menge aller diejenigen Paare (m, n), für die gilt, dass m Element aus der Menge M und n Element aus der Menge N ist“.

5 Aus einer korrekten Darstellung einer Abbildung muss präzise und eindeutig Definitions-, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift hervorgehen. Die von **FREGE** als „üblich“ bezeichnete Darstellung einer Abbildung wie „$2 \cdot x^3 + x$“ ist unvollständig; vollständig lautet sie: „ Für alle x aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$: $x \Rightarrow f(x) = 2 \cdot x^3 + x$“; erst dieser Ausdruck gibt Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift, damit auch den Graph der Abbildung, in eindeutiger Weise an. Was **FREGE** als Darstellung solcher Abbildungen ausgibt, ist schon eine abkürzende Schreibweise, die sich nur jene erlauben sollten, die über die Struktur von Abbildungen Bescheid wissen.

6 Es „wird eine Funktion durch eine Zahl zu einer Zahl ergänzt.“ (WF 90 [665])

7 Der Ausdruck ‚$2^2 = 4$‘ bedeutet (benennt) nicht das Wahre, sondern er besagt, dass 2 zum Quadrat erhoben 4 ergibt, und diese Behauptung ist allerdings wahr; ein wahres Urteil *bedeutet* nicht das Wahre, sondern es ist wahr, d.h. er bedeutet (denotiert) einen Sachverhalt, der eine Tatsache ist, z.B. dass 2 im Quadrat 4 ergibt. Der Ausdruck ‚$2^2 = 4$‘ ist keineswegs synonym mit dem Ausdruck ‚wahr‘, wie **FREGE** unterstellt.

8 An folgender Stelle versteht **FREGE** unter „Wertverlauf“ zweifellos den Graphen: „Ich gebrauche die Worte ‚die Funktion $\Phi(\xi)$ hat denselben Wertverlauf wie die Funktion $\Psi(\xi)$‘ allgemein als gleichbedeutend mit den Worten , die Funktionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Wert.“ (GGA I, 7) **FREGE** bezeichnet die durch die parabolische Kurve einer Funktion dargestellte Menge von Zahlenpaaren als „Wertverlauf“ (also den Graphen) (vgl. FB 23 [8f]; GGA I, §5) Wenn **FREGE** dann meint, die Funktionen [f(x) =] x(x – 4) und [f(x) =] $x^2 – 4x$ hätten denselben „Wertverlauf“ (FB 23 [9]), so kann er eigentlich auch nur die Graphen der beiden Funktionen meinen: diese sind in der Tat identisch; die Gleichheit der Wertemenge verbürgt ja noch nicht die Gleichheit der Graphen. An anderer Stelle bestreitet **FREGE** jedoch die Identität von „Wertverlauf“ und Graph einer Funktion: „Wir können nicht allgemein die Worte ‚Die Funktion $\Phi(\xi)$ hat denselben Wertverlauf wie die Funktion $\Psi(\xi)$‘ als gleichbedeutend mit den Worten ‚die Funktionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Wert gebrauchen.“ (GGA II, 257)

Mit dieser Gleichheit von *Funktionen* verwechselt **FREGE** dann die Gleichheit von *Bestimmungsgleichungen* – und bestimmt dann im Widerspruch zur Gleichsetzung von Graph und Wertverlauf den Wertverlauf als Begriffsumfang (d.i. die Lösungsmenge der Bestimmungsgleichung). Die „Funktionen“ – es handelt sich in Wirklichkeit um Bestimmungsgleichungen – $x^2 = 1$ und $(x+1)^2 = 2(x+1)$ hätten denselben Wertverlauf: „In der Logik nennt man dies Gleichheit des Umfang der Begriffe.“ (FB 28 [16]) „Der Umfang ist eben der Wertverlauf.“ (**FREGE** an **RUSSELL**, 3.8.1902, Briefe S. 73) Was immer man verwechseln kann, **FREGE** lässt die Chance nicht ungenutzt.

9 Vgl. **H. KASCHMIEDER**, Beurteilbarer Inhalt und Gedanke in der Philosophie Gottlob Freges, S. 65-68.

10 Das Fehlen einer klaren Bestimmung der Operation der Abbildung/Funktion bei **FREGE** versucht **F.V.KUTSCHERA** dadurch zu bemänteln, dass der Begriff der Abbildung/Funktion als „Grundbegriff“ gar nicht definierbar sei (Gottlob Frege, Eine Einführung in sein Werk, S. 89); auch **FREGE** bedient sich ständig dieser Ausrede, um die Ungenauigkeit seiner grundlegenden Vorstellungen zu entschuldigen; er deklariert seine konfusen und widersprüchlichen Vorstellungen von „Funktion“ und von „Wertverlauf“ zu „undefinierbaren Grundbegriffen“ und entzieht sie so jeder Kritik. „Durch eine Definition ist nicht anzugeben, was eine Funktion ist, weil es sich hier um etwas Einfaches und Unzerlegbares handelt… An die Stelle einer Definition muss eine Erläuterung treten, die freilich auf ein entgegenkommendes Verständnis rechnen muss.“ (LM 142; auch EMN 290; WF 89f [665]) Die Operation der Abbildung ist weder undefinierbar, noch „einfach“ und „unzerlegbar“; die moderne Strukturalgebra hat den Begriff der Abbildung exakt definiert; das *genus proximum* ist dabei der im Rahmen der Mengentheorie definierte Begriff der Relation.

FREGEs Vorstellung von „Wertverlauf“ ist mehrdeutig und widersprüchlich; anstatt sich um eine klare definitorische Abgrenzung zu bemühen, begnügt er sich mit der Festsetzung einer „Bezeichnungsweise für den Wertverlauf einer Funktion“ (FB 24 [10]); die Manier, die *begriffliche* Klärung von Sachverhalten durch die Festsetzung von „exakten“ Symbolen für unreflektierte, intuitive Vorstellungen von diesen Sachverhalten zu ersetzen, ist charakteristisch für die Bewegung der „modernen Logik“.

11 „μ“ bezeichnet eine beliebige monadische, „δ“ eine beliebige dyadische Abbildung von Wahrheitswerten auf Wahrheitswerte.

12 Ein falscher Satz „darf …nicht mit behauptender Kraft ausgesprochen werden.“ (Vern, 59 [148])

13 **HARTFRIED KASCHMIEDER** kommt in seiner Untersuchung der fregeschen Urteilstheorie auf diesen Zusammenhang zu sprechen – freilich ohne dass er sich den Unterschied zwischen Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen klar macht. Nachdem die „Junktoren“ zunächst als Gedankengefüge bestimmt sind (Aussagen über die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen) meint er, die Beliebig-Element-Zeichen der Aussagen könnten durch Wahrheitswerte belegt werden. „Im junktorenlogischen Ausdruck können die Satzparameter, die Buchstaben, mit wahr oder falsch belegt werden. Für jede Belegung der Parameter wird der Ausdruck auf genau einen Wahrheitswert abgebildet. Die Notation von **FREGE** gestattet dies nicht. Junktorenlogisch falsche Aussagen sind für Frege unmögliche Aussagen.“ (Beurteilbarer Inhalt und Gedanke in der Philosophie Gottlob Freges, S. 12) Wenn alle möglichen Wahrheitswertkombinationen auf einen Wahrheitswert abgebildet werden, dann haben wir es mit Fregeverknüpfungen zu tun: wird eine solche Kombination durch eine Fregeverknüpfung auf den Wahrheitswert $\mathcal{F}$ abgebildet (z.B. $a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2 = a_2$), dann stellt dies in der Tat eine korrekte Abbildung dar – während es falsch und unzulässig ist, von einer wahren Aussage A und einer falschen Aussage B zu behaupten $A \Rightarrow B$.

14 Die Klammern bezeichnen in der üblichen Weise die Reihenfolge der Verknüpfungen.

15 Diese fregealgebraischen Substitutionsgesetze sind von derselben Art wie etwa das Rechengesetz: für alle $a,b \in \mathbb{R}$: $(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)$; die *verschiedenen Verknüpfungen* führen für alle Zahlenpaare auf *dasselbe Ergebnis*.

16 In den komplexen Verknüpfungen sind immer mehr als eine Verknüpfung mit einander verbunden, und diese Verknüpfungen müssen in einer ganz bestimmten Reihenfolge vorgenommen werden; diese Reihenfolge wird durch die Klammern bezeichnet: die Hauptverknüpfung ist diejenige Verknüpfung, die am Schluss vorzunehmen ist.

17 Für $x = a_2$ ergibt der Teilausdruck „$x \underline{\underline{\Leftarrow}} y$“ sowohl für $y = a_1$ wie für $y = a_2$ den Wert a_1; daher wird das Wertepaar (a_2, a_1) durch die Hauptverknüpfung $\underline{\underline{\Rightarrow}}$ gar nicht verknüpft.

18 Mit diesen Regeln zur Bezeichnung arithmetischer Verknüpfungen und Gesetze werden wir z.T. schon in der Grundschule vertraut gemacht. Es ist eine gekünstelte, gespreizte Übertreibung und eigentlich nicht nachvollziehbar, wenn in der „modernen Logik“ das inhaltlich äußerst spezielle und beschränkte, simple Regelwerk zur Bezeichnung fregealgebraischer Verknüpfungen als eine den „natürlichen Sprachen“ alternativ entgegengesetzte „künstliche Sprache“ ausgegeben wird; die Zeichensysteme für bestimmte algebraische Verknüpfungen sind spezielle und begrenzte Bereicherungen der natürlichen Sprache (insbesondere auch der Schriftsprache), Erweiterungen, wie sie ständig mit jedem Erkenntnisfortschritt notwendig werden, und die nur im Rahmen einer (richtigen) Sprache festgelegt werden können; solche spezialisierten Zeichensysteme dürfen nie mit einer Sprache wie dem Englischen oder Deutschen auf eine Ebene gestellt werden – die Rede von Sprache verlöre jeden vernünftigen Sinn.

19 **HILBERT/ACKERMANN** sprechen von einer „Entbehrlichkeit von Grundverknüpfungen“ (Grundzüge der theoretischen Logik, S.11); die Grundverknüpfungen sind keineswegs entbehrlich, würde auf die verschiedenen Fegeverknüpfungen selbst verzichtet, könnten die Kalküle gar nicht aufgebaut werden. Bestimmte Grundverknüpfungen werden nur durch andere komplexe Verknüpfungen vertreten.

20 Wie wenig auf die Bedeutung der Ausdrücke geachtet wird, und wie sehr die Logistiker auf die Ausdrucksebene zentriert sind, zeigt sich z.B. darin, dass ein Bezeichnungssystem, das die Reihenfolge der Fregeverknüpfungen nicht durch Klammern, sondern auf andere Weise ausdrückt, als „klammerfreie Symbolik“ ausgegeben wird. „Im System von **ŁUKASIEWICZ** benötigt man keine Klammern.“ (**BOCHEŃSKI/MENNE**, Abriss der Logistik, S. 24) „Die Klammern sind überhaupt überflüssig, wenn wir die Funktoren {Fregeverknüpfungen} stets vor die Argumente setzen und nach den Funktoren ihre aufeinanderfolgenden Argumente schreiben.“ (**L.BORKOWSKI**, Logik, S. 44) Die Bezeichnung der Reihenfolge der Verknüpfungen ist nie überflüssig – von völlig untergeordneter Bedeutung ist, wie diese Reihenfolge dargestellt wird, durch Klammern oder wie bei **ŁUKASIEWICZ** durch die Reihenfolge der Verknüpfungsbezeichnungen, oder wie auch immer. Die beiden verschiedenen Fregeverknüpfungen $(x \underline{\underline{\Rightarrow}} y) \underline{\underline{\overline{\vee}}}\, z$ und $x \underline{\underline{\Rightarrow}} (y \underline{\underline{\overline{\vee}}}\, z)$ werden in der „klammerfreien polnischen Notation“ durch die Ausdrücke „ACxyz“ und „CxAyz“ bezeichnet, d.h. auch in diesem Bezeichnungssystem wird die Reihenfolge der Verknüpfungen eindeutig ausgedrückt. Bezeichnungen können immer nur im Hinblick auf ihre Bezeichnungsfunktion und ihre Bedeutung beurteilt werden.

21 Gleiche Verknüpfungen haben trivialerweise dasselbe Ergebnis, z.B. $a+b = a+b$; $x \underline{\underline{\Rightarrow}} y = x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$.

22 Linkstotalität ist die Eigenschaft einer Abbildung, jedem Element der Definitionsmenge ein Bild zuzuordnen; Rechtseindeutigkeit ist die Eigenschaft einer Abbildung, jedem Bild genau ein und nur ein Urbild zuzuordnen.

23 **HILBERT/ACKERMANN** meinen, man könne auf die fregealgebraische Verknüpfung $A \underline{\underline{\Rightarrow}} A$, die sowohl a_1 wie a_2 auf a_1 abbildet, den arithmetischen Begriff der *allgemeingültigen Gleichung* übertragen. „In den meisten Fällen wird eine Gleichung in der Mathematik als identische Gleichung aufgefasst, d.h. die angegebene Gleichung soll für alle eingesetzten Zahlen stimmen. Indem wir den Begriff der identischen Gleichung sinngemäß übertragen, kommen wir zum Begriff des ‚allgemeingültigen Ausdrucks‘.“ (Grundzüge der theoretischen Logik, S. 9. „$A \underline{\underline{\Rightarrow}} A$“ ist nicht Ausdruck einer Gleichung (es müsste dann heißen: „$A \underline{\underline{\Rightarrow}} A = a_1$“ oder „$A \underline{\underline{\Rightarrow}} A = A \underline{\underline{\overline{\vee}}}\, A$“), sondern der Ausdruck einer Verknüpfung; der Verknüpfungsausdruck kann sowenig allgemeingültig wie etwa der arithmetische Ausdruck „a : a“ (im Gegensatz zum Ausdruck „a : a = 1“).

24 „Ein Ausdruck soll nun allgemeingültig heißen, wenn jede daraus durch Einsetzung entstehende Aussagenverbindung richtig ist.“ (**HILBERT/ACKERMANN**, S.10)

25 Um auszudrücken, dass die Verknüpfung $x \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\overline{\vee}}}\, y)$ jeden Wert aus $\mathcal{A}^2$ auf a_1 abbildet, schreibe ich auch „$x \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\overline{\vee}}}\, y) = a_1$“.

26 Die Abtrennungsregel kann formuliert werden: für beliebige Fegeverknüpfungen Φ_1 und Φ_2 gilt: $[(\Phi_1 = a_1) \& (\Phi_1 \Rrightarrow \Phi_2 = a_1)] \rightarrow (\Phi_2 = a_1)$. Für sich betrachtet, ist es einerseits realmöglich, dass $[(\Phi_1 = a_1) \& (\Phi_1 \Rrightarrow \Phi_2 = a_1)]$ gilt, wie es auch realmöglich ist, dass $(\Phi_2 = a_1)$ gilt; es lässt sich zeigen, dass wenn das erstere der Fall ist, notwendig auch das zweite der Fall ist, ohne dass das Umgekehrte zutreffen würde; wir haben es so mit einer *speziellen* Implikation im Sinne der im ersten Teil dieser Arbeit dargestellten Bedingungslogik zu tun – weder mit einem Gedankengefüge noch gar mit einer Frege-verknüpfung. Diese implikative Regel kann mit dem „Alphabet“ der „Aussagenkalküle“ gar nicht dargestellt werden.

27 „Wir erkennen hier die Bedeutung, welche den identisch wahren Ausdrücken“ – das sind die Φ_V-Substitutionen – „für das Schließen im Bereich der Aussagenlogik zukommt; sie liefern uns die Schemata der Schlussfolgerungen; die Prinzipien des logischen Schließens werden durch sie in Formeln dargestellt.“ (**HILBERT**/**BERNAYS**: Die Grundlagen der Mathematik I, Berlin 1968, 2.Aufl., S. 61)

28 In der axiomatischen Darlegung der Arithmetik werden nie die Rechenregeln blind vorausgesetzt, sondern erst entwickelt und begründet (nicht etwa in einer „Meta-Arithmetik“). Ebenso werden in der axiomatischen Entfaltung der Geometrie aus den grundlegenden Beziehungen und Sachverhalten die geometrischen Gesetzmäßigkeiten erst entwickelt (nicht etwa in einer „Meta-Geometrie“).

29 Die „Begriffe Wahrheit und Falschheit ... beinhalten offenkundig eine Bezugnahme auf etwas außerhalb des formalen Kalküls.“ (**NAGEL**/**NEWMAN**, Der Gödelsche Beweis, S. 106) **HILBERT** und **BERNAYS** reden im Rahmen der „metalogischen“ Rechtfertigung des speziellen Gebrauchs, den ein „Aussagenkalkül“ von der Fegealgebra macht, nicht mehr irreführend von „wahr“ und „falsch“, sondern unter Verzicht auf jede irreführende „Interpretation“ einfach und neutral von zwei komplementären Werten α und β. „Dass die Werte der Wahrheitsfunktionen und ihrer Argumente gerade ‚wahr‘ und ‚falsch‘ sind, darauf kommt es hier nicht an, sondern vielmehr nur darauf, dass wir es mit gewissen zweiwertigen Funktionen zu tun haben, deren Argumente ebenfalls nur derselben zwei Werte – sie mögen α, β genannt werden – fähig sind.“ (**HILBERT**/**BERNAYS**: Die Grundlagen der Mathematik I, S. 71).

30 „Dass ein Ausdruck identisch wahr ist, besagt hiernach, dass er auf Grund der gegebenen Definitionen stets den Wert a liefert.“ (**HILBERT**/**BERNAYS**: Die Grundlagen der Mathematik I, S. 72) Auch **NAGEL**/**NEWMAN**, Der Gödelsche Beweis, S.107. Dieses Eingeständnis beseitigt freilich nicht den dem Begriff der Abbildung widersprechenden Widersinn, dass eine Abbildung nur dann „wahr“ sein soll, wenn sie einen ganz bestimmten Funktionswert hat, dass eine korrekte Abbildung jedoch „falsch“ sein soll, wenn sie einen anderen Funktionswert hat, obwohl diese Abbildungen den jeweiligen Zuordnungsvorschriften entsprechen. Es wäre derselbe Unsinn, wenn jemand behaupten würde, nur jene Summen $a + b$ seien „wahr“, deren Betrag eine Primzahl usw. ist.

31 **HILBERT**/**BERNAYS** erläutern die Fegeverknüpfung „$\Rrightarrow$“ (von ihnen durch das Zeichen $\rightarrow$ dargestellt) mit Hilfe des Gleichheitszeichens: „Wir können diese Definitionen auch in der Form von Gleichungen geben, nämlich die Definition von „$\Rrightarrow$“ durch die Gleichungen:

$\alpha \Rrightarrow \alpha = \alpha$
$\beta \Rrightarrow \beta = \alpha$
$\beta \Rrightarrow \alpha = \alpha$
$\alpha \Rrightarrow \beta = \beta$.“ (ebd. S. 71)

Davon, dass die korrekte Verknüpfung $\alpha \Rrightarrow \alpha = \alpha$ „wahr“ und die nicht weniger korrekte Verknüpfung $\alpha \Rrightarrow \beta = \beta$ „falsch“ sei, ist in dieser *jetzt* sachgemäßen Darlegung der Fegeverknüpfung Φ_C keine Rede mehr.

32 **HILBERT**/**ACKERMANNN** räumen ein, dass das Ableiten im Kalkül eigentlich überflüssig ist, wenn man entscheiden will, ob eine komplexe Fegeverknüpfung eine Φ_V-Substitution ist. Die „Axiomatik“ spiele bei der Gewinnung aller nur möglicher Φ_V-Substitutionen keine unverzichtbare Rolle, „da wir ihrer zur Lieferung von allgemeingültigen Ausdrücken nicht bedürfen, weil wir ja z.B. nach der Bewertungsmethode“ – d.h. durch einfaches Ausrechnen des Ergebnisses für alle nur möglichen Kombinationen von a_1 und a_2 unter Zugrundelegung der Verknüpfungstabellen – „von jedem Ausdruck feststellen können, ob er allgemeingültig ist oder nicht.“ (Grundzüge der theoretischen Logik, S.25) Das „axiomatische“ Herleiten von Φ_V-Substitutionen ist nicht nur überflüssig, sondern auch bedeutend umständlicher als das einfache Ausrechnen; es sei „die Herleitung eines bestimmten Ausdrucks, von dem wir etwa nach der Bewertungsmethode wissen, dass er allgemeingültig ist, oft schwierig und erst nach vielem Hin- und Herprobieren zu finden.“ (ebd; vgl. auch **NAGEL**/**NEWMAN**: Der Gödelsche Beweis, Wien/München 1964, S.198)

33 „Gewisse Zweige der mathematischen Logik {eignen sich} für die Analyse und Konstruktion elektrischer Schaltungen besonders gut.“ (**KLEINKNECHT**/**WÜST**, Lehrbuch der Aussagenlogik, Bd. 1, S. 135) – In der Schalalgebra, so **KONDAKOW**, würden „unter Benutzung von Methoden der Aussagenlogik … *kombinatorische Schaltungen* untersucht“ (Wörterbuch der Logik, S. 433) – „Die Schaltalgebra lässt sich als ‚operationale Variante‘ der Aussagenlogik bezeichnen.“ (**KLIEMANN**/**MÜLLER**, Logik und Mathematik für Sozialwissenschaftler I, S. 32)

34 Die Logistiker meinen, die Φ_V-Substitutionen seien logische Gesetze bzw. die Schemata des Schließens; würde die Bedeutung der Schaltalgebra für die Konstruktion von „Elektronengehirnen“ tatsächlich auf der Möglichkeit einer solchen logischen „Deutung“ des SFA und seiner Gesetze beruhen, dann müssten gerade die den Φ_V-Substitutionen (den „logischen Gesetze“) entsprechenden Schaltungen eine Schlüsselrolle spielen; es wären die Schaltungen, bei denen am Ausgang immer, was auch an den Eingängen geschieht, Strom fließt: auf solche Schaltungen kann man natürlich ganz verzichten. Schon dies macht deutlich, dass die große Bedeutung der Schaltalgebra in der Informationstechnologie die logische Missdeutung des SFA nicht stützt.

35 „Junktoren“ sind „zusammengesetzte Aussagen, deren Wahrheitswert nur von den Wahrheitswerten der einfachen Aussagen, aus denen sie aufgebaut sind, abhängt und nicht von deren Inhalt.“ (**Kondakow**, S. 55 Vgl. **Wessel**, Logik, S. 89; **Salmon**, Logik, S. 73; **Menne**, Einführung in die Logik, S. 33)

36 Einführung in die Logik, S. 33

37 Eine unpassende Analogie stellt **G. Patzig** her: „Zunächst führen wir die Zeichen *p*, *q*, *r* , *s* , *t*… ein, die irgendwelche Aussagen vertreten sollen, also Sätze, die wahr oder falsch sein können. Aus diesen Elementen bilden wir nun (z.B. durch Verknüpfung zweier oder mehrerer von ihnen) neue Aussagen, die aus den Elementen ähnlich wie Moleküle aus Atomen zusammengesetzt sind.“ (Logik, in: Fischer-Lex Philosophie, S.150)

38 Einführung in die Logik, S. 33

39 Grundlagen der Mathematik I, S. 45

40 **P. Lorenzen**, Formale Logik, S. 45

41 Logik und Argumentation, S. 7

42 Logique et philosophie chez Frege, S. 114

43 Dass bei $(x \mathrel{\underline{\underline{\&}}} y = a_1) \rightarrow (x \mathrel{\underline{\underline{\Rightarrow}}} y = a_1)$ das Substitutionsgesetz $[(x \mathrel{\underline{\underline{\&}}} y) \mathrel{\underline{\underline{\Rightarrow}}} (x \mathrel{\underline{\underline{\Rightarrow}}} y)] = a_1$ gilt, entspricht der Abschwächung des Funktorgesetzes (A&B) → (A⇒B) zum Fregegesetz (A&B) ⇒ (A⇒B). Da (A&B) → (A⇒B) gilt, kann dem Paar von Gedankengefügen ((A&B),(A⇒B)) nie das Wahrheitswertprädikat WP_2 zukommen; dem Paar können so alle Gedankengefüge zugesprochen werden, die zumindest die restlichen Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich ausschließen.

44 Ein anderer Grund mag darin bestehen, dass bisweilen die Isomorphie operativer Systeme (als bestimmte Art der Gleichheit verschiedener operativer Systeme) nicht von der Identität eines operativen Systems (der Sichselbstgleichheit eines operativen System und die Wohlunterschiedenheit des System von jedem (isomorphen oder nicht-isomorphen) unterschieden wird.

45 Ein solches „logisches Gesetz“ wird bei **Bocheński**/**Menne** (Grundriss der Logistik, S. 45) Gesetz der „implikativen Abschwächung der Konjunktion“ genannt. Während die Bedeutung des Fregegesetzes (A&B) ⇒ (A⇒B) klar und offensichtlich gültig ist (Es trifft nicht zu, dass von zwei Aussagen A und B einerseits beide wahr sind, und zugleich A wahr und B falsch ist), gilt dies für die Behauptung „(p∧q) → (p → q)“ – Wenn die beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q zusammen vorliegen müssen, dann impliziert p q“ sicherlich nicht. Dass das Gedankengefüge **C** eine (informationsverschleiernde) Abschwächung von **K** ist, liegt auf der Hand, die logische Beziehung der Implikation ist aber sicherlich keine „Abschwächung“ des „notwendigen Zusammen-Vorliegens“.

46 Zwischen diesen Gesetzen des SFG und SFA besteht, wie eben nachgewiesen, bedingungslogische Isomorphie.

47 Vgl. Endnote **Fehler! Textmarke nicht definiert.**, S. **Fehler! Textmarke nicht definiert.**