II, Kapitel 4: Die Prädikatenlogistik

4.1. Die Konzeption der Erweiterung einer elementaren „Aussagenlogik“ zur „Prädikatenlogik“. Freges Trennung von logischer Beziehung und Allgemeinheit

Ich habe bisher das System der fregeschen Gedankengefüge (SFG), seine Missdeutung als ein System logischer Formen und seine Verwechslung mit dem System binärer Fregeverknüpfungen (SFA) dargestellt. Der fregesche Logikentwurf umfasst jedoch nicht nur die Gedankengefüge (bzw. Fregeverknüpfungen), **FREGE** hat vielmehr das SFG zu einer so genannten *Prädikatenlogik* erweitert. Seiner Meinung nach erlaubt erst diese Erweiterung die Darlegung der logischen Zusammenhänge in all ihren Aspekten, ergänze sie doch die Gedankengefüge um den Aspekt der Allgemeinheit. Schon weil die Gedankengefüge sich auf die Wahrheitswerte *einzelner* Aussagen beziehen (abgesehen von der konstitutiven Zusammenhanglosigkeit dieser Aussagen), bringen die Gedankengefüge keine Gesetzeszusammenhänge zum Ausdruck. Die logischen Formen, wie ich sie im ersten Teil dieser Arbeit entwickelt habe, sind stets von vornherein auf allgemeine Relata bezogen, denn sie bestehen als Strukturen bedingungslogischer Gesetzeszusammenhänge zwischen Sachverhalts-/Ereignis*klassen*.

FREGE ist sich darüber klar, dass die Gedankengefüge keine Gesetze[1] darlegen, da ihnen der für Gesetze wesentliche Aspekt der Allgemeinheit abgeht; so schreibt er über das Gedankengefüge **C**: „Die von mir behandelten hypothetischen Gedankengefüge gehören nicht zu den Gesetzen, weil ihnen die Allgemeinheit fehlt, durch die sich die Gesetze von den Einzeltatsachen unterscheiden… In der Tat ist der Unterschied zwischen Gesetzen und Einzeltatsachen ein tief einschneidender.“ (LA 166) Über den „Bedingungsstrich“, das Zeichen „⇒“, heißt es: „Die ursächliche Verknüpfung, die in dem Worte ‚wenn‘ liegt, wird jedoch durch unsere Zeichen nicht ausgedrückt… Denn diese Verknüpfung ist etwas Allgemeines, dieses aber kommt hier noch nicht zum Ausdrucke.“ (BS 6)

FREGEs Logikentwurf basiert ganz wesentlich auf dieser *ursprünglichen Trennung von logischer Form und Allgemeinheit*; **FREGE** geht ohne nähere Begründung davon aus, dass die umgangssprachlichen Wenn-dann-Gesetzesaussagen komplexe Gebilde sind, in denen für das gewöhnliche Bewusstsein noch ungeschieden sei, was durch die Analyse des Logikers erst noch getrennt und für sich bestimmt werden müsse. Die Vorstellung, die Wenn-dann-Gesetzesaussagen seien in ihre „elementaren Bestandteile“ zu zerlegen, fußt auf **FREGE**s methodischer Einstellung des *logischen Atomismus;* er meint, bei der Untersuchung des Logischen stoße man, ähnlich wie bei einer chemischen Analyse, auf einfachste „Urbestandteile“, auf „Logischeinfaches“, das dann nicht mehr weiter zerlegt und auch nicht mehr definiert werden könne: „Das Logische, was wir erhalten, wird sich im allgemeinen als zusammengesetzt erweisen, wir müssen es zerlegen, denn hier wie überall gelangt man zur vollen Einsicht nur durch das Vordringen bis auf das Einfachste.“ (Log I, 6) **FREGE** meint, mit den (von ihm als logischen Formen missverstandenen) Gedankengefügen einerseits und der Allgemeinheit andererseits lägen solche einfachsten „Urbestandteile“ des Logischen vor; beides geschieden zu haben, rechnet er seinen Verdiensten zu (EL 75). „Bei mir ist die Bezeichnung der Allgemeinheit ganz unabhängig von der Form des hypothetischen Satzes und die Bedeutung des Bedingungsstriches wird ganz unabhängig von der Allgemeinheit erklärt, was auch methodisch das Richtige ist.“ (Def 165[2], 167; BP 229, 231)

FREGE zufolge waren die Vorbehalte gegen seinen eigenartigen Gebrauch des umgangssprachlichen „Wenn-dann“ verfrüht, da man schon vom Gedankengefüge **C** erwartet habe, was angeblich erst nach der später wieder vollzogenen Verbindung des Gefüges **C** mit der Allgemeinheit geleistet werden könne. „Die genauere Betrachtung der Allgemeinheit muss es erst annehmbar machen.“ (EL 77) Diese Wiederverbindung erlaube die vollständige Darlegung der logischen Folge-Beziehung (Implikation); aus „beiden zusammen muss sich dann von selbst ergeben, was eine Deduktion besagt.“ (BP 229) Über das Gedankengefüge A ⇒ B heißt es: „Ein eigentliches hypothetisches Urteil entsteht … erst, wenn A und B einen gemeinsamen unbestimmten Bestandteil haben, durch den die Sache Allgemeinheit gewinnt.“ (BLF 59) **FREGE** glaubt, bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge ließen sich zwar nicht alleine mithilfe der Gedankengefüge, aber doch *nur* unter ihrer Zugrundelegung bestimmen und mitteilen. Von den Gedankengefügen *ausgehend* sei der „Übergang zu dem zu suchen, was in der Physik, in der Mathematik und in der Logik Gesetz genannt wird.“ (LA 166)

4.2. Freges Darlegung der Prädikation: Begriff und Gegenstand

4.2.1. Darlegung der Prädikation: Feststellung und Gesetz, Übergang zur logischen Verallgemeinerung.

In der „Prädikatenlogik“[3] tritt das Verhältnis von einzelnem Gegenstand und allgemeinem Begriff/Prädikat ins Zentrum der Betrachtung. Das Verhältnis von Begriff und Gegenstand ist das Grundverhältnis der Logik und muss in der theoretischen Logik in all seinen wesentlichen Aspekten entfaltet werden. Welcher Art die Dinge/ Gegenstände sind, welche Eigenschaften, sie haben, welche Zustände sie durchlaufen, und was mit diesen prädikativen Bestimmungen notwendig, möglicherweise oder unmöglich verbunden ist, können wir nur im Lichte allgemeiner Begriffe erkennen. Um einen einzelnen Gegenstand $\mathfrak{a}$ einem bestimmten Begriff $\mathfrak{P}$ subsumieren zu können, um also die Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \equiv$ „Dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ kommt das Prädikat $\mathfrak{P}$ zu“ treffen zu können, müssen wir die allgemeinen Bedingungen für das Vorliegen der Sachverhalts-/Ereignis*klasse* $\mathfrak{P}$(x) kennen, d.h. die Bedingungen, die in allen Fällen gegeben sein müssen, wenn das Prädikat $\mathfrak{P}$ *irgendeinem* beliebigen Gegenstand x zukommt; ein solcher gesetzmäßiger Bedingungszusammenhang ist ein logisches Beziehungsgefüge, eine logische Form, die einen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{P}$(x) und anderen Sachverhalts-/Ereignisklassen $\mathfrak{Q}$(x), $\mathfrak{R}$(x), …, $\mathfrak{S}$(x) herstellt. Diesem Gesetz subsumieren wir den Gegenstand $\mathfrak{a}$ in seiner situativen Beschaffenheit und erschließen dadurch die Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$: es sind im gegebenen Fall für den Gegenstand $\mathfrak{a}$ die Bedingungen gegeben, die es gestatten zu urteilen, dass dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat $\mathfrak{P}$ zukommt. Das Verhältnis $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ als Verhältnis eines konkreten Begriff und eines konkreten Gegenstandes verweist unmittelbar auf die Sachverhalts-/Ereignis*klasse* $\mathfrak{P}$(x) und die bedingungslogischen Zusammenhänge, in denen diese Sachverhalts-/Ereignisklasse steht. Die einfache Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ resultiert aus einem Schluss, dessen Grundlage eine die Sachverhalts-/Ereignisklasse $\mathfrak{P}$(x) betreffende bedingungslogische Form darstellt.

Erst in der theoretischen Logik wird versucht, alle überhaupt möglichen Formen dieser Art als solche unabhängig von ihrem jeweiligen besonderen gegenständlichen Inhalt rein, abschließend und vollständig zu bestimmen; während das logisch unreflektierte Denken in der Umgangssprache Mittel zum Ausdruck konkreter Gegenstände, konkreter Prädikate sowie beliebiger Gegenstände besitzt, um konkrete Sachverhalts-/Ereignisklassen und konkrete bedingungslogische Gesetze ausdrücken zu können, wird es erst auf dem Niveau der logischen Analyse unumgänglich, Ausdrücke zur Bezeichnung beliebiger Prädikate zu prägen; es können dies die Buchstaben P, Q, R, … oder P_1, P_2, P_3, … sein. Denn erst auf dem Niveau der theoretischen Logik kann untersucht und explizit dargestellt werden, welchen Bedingungen *beliebige* Prädikatoren P(x) und Q(x) genügen müssen, damit zwischen ihnen etwa die Beziehung der Implikation besteht oder nicht besteht. Auch die Geltung der logischen Gesetze erstreckt sich auf beliebige Prädikate; z.B. wird von beliebigen Prädikaten P und Q mit ihren jeweils dazu gehörenden Bezugsbereichen ausgesagt, dass falls zwischen ihnen die Beziehung der Implikation besteht, es unmöglich ist, dass zwischen ihnen die Beziehung der Exklusion besteht – in unseren Zeichen: Für alle P, Q: $[P(x) \rightarrow Q(x)] \uparrow [P(x) \uparrow Q(x)]$. Es ist gerade dieser Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate, der den Übergang vom logisch unreflektierten Denken zur spezifisch logischen Verallgemeinerung markiert und ein Charakteristikum der theoretischen Logik darstellt. Daraus erhellt, dass die Begriffe als solche und ihr Zusammenhang, d.h. die Struktur der begrifflichen Denkens, den Gegenstand der Logik bildet.

4.2.2. Freges Operation des „Gedankenzerfällens“

FREGE hat einerseits versucht, die logischen Formen als Gedankengefüge ganz unabhängig von Allgemeinem und der Betrachtung konkreter und beliebiger Prädikationen $\mathfrak{P}$(x) und P(x) zu bestimmen; andererseits meint er, Allgemeinheit ließe sich ohne jede Berücksichtigung logischer Relationen alleine aus der Prädikation $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ entwickeln. Erst *im Nachhinein* solle diese Allgemeinheit wieder mit den Gedankengefügen als den angeblichen logischen Formen verbunden werden. Dieses Programm verrät ein charakteristisches Unverständnis der grundlegenden und konstitutiven Sachverhalte der Logik: der Gegenstände, der Begriffe und ihrer Verhältnisse.

Die logischen Formen haben sich uns als Beziehungen zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen erwiesen; eine solche umfasst jeden beliebigen Fall, dass *irgendeinem* Gegenstand (oder einem n-Tupel von Gegenständen) aus dem universellen oder einem begrenzten Bereich ein Prädikat (beliebiger Stelligkeit) zukommt. Auch **FREGE** nennt die „Unterscheidung von Einzelnem und Begriff“ (Briefe XXX/1, 118), die Subsumtion irgendeines Gegenstandes x unter einen Begriff P – ausgedrückt durch „P(x)“ – die „logische Grundbeziehung“ (ASB 25). Wenn er sich hier auch wieder der grundlegenden Einsicht anschließt, die am Anfang von Philosophie und Logik gestanden hat, stellt dies doch einen tiefen argumentativen Bruch gegenüber seiner Theorie der Gedankengefüge und der korrespondierenden „Psychologie des Gedankenfassens“[4] dar.

In **FREGE**s Theorie des Gedankenfassens werden fertige wahrheitswertdefinite Gedanken vorausgesetzt; es kommt nur darauf an, ob ein solcher Gedanke wahr oder falsch ist; jeder Unterschied der Form, jede Beziehungsstruktur der Gedanken wird ausdrücklich als „logisch irrelevant“ vernachlässigt; die Aspekte von Inhalt und Form werden global und ungeschieden als „begrifflicher Inhalt“ gefasst. Das Urteil wird als unzerlegbares „Logischeinfaches“ missverstanden; dass jedes Urteil eine ganz bestimmte logische Form besitzt[5], eine logische Zusammensetzung (Synthesis) darstellt, wird als für die Logik ohne Bedeutung abgetan, wenn nicht gar bestritten, weil die Form nicht schon den Wahrheitswert determiniere: Versuche man etwa das Urteil, das „seinem Wesen nach nicht definierbar“ sei, zu definieren, hänge „man sich leicht an Nebensachen und bringt die Untersuchung gleich anfangs auf ein falsches Gleis. Und so ist es wohl manchen ergangen, die erklären wollten, was das Urteil sei, indem sie auf die Zusammengesetztheit verfielen.“ (Vern 63 [150f]) Im Rahmen der „Prädikatenlogik“ rückt **FREGE** von der falschen, SFG-bezogenen These der Unteilbarkeit, Unzerlegbarkeit und Beziehungslosigkeit der Aussagen/Urteile/Gedanken ab, und vertritt eine dazu in Widerspruch stehende Position: er erklärt die *Beziehung* von Gegenstand und Begriff, eine *logische Form* bestimmter Urteile also, zur „logischen Grundbeziehung“; das Urteil (zumindest das Feststellungsurteil) wird als Subsumtions*beziehung* von Gegenstand und Begriff gefasst.

Was teilt uns **FREGE** über diese „logische Grundbeziehung“, über den spezifischen Unterschied von Gegenstand und Begriff und ihren Zusammenhang mit? Um in einem Satz eindeutig den Ausdruck eines Gegenstandes vom Ausdruck eines Begriffs/Prädikats unterscheiden zu können, schlägt **FREGE** vor, von der einfachen Prädikation eines einstelligen Prädikats auszugehen, etwa vom Feststellungssatz „Hans ist ein Mensch“ – abgekürzt $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$. Durch eine spezielle auf den Ausdruck der Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ ausgeübte „Zerfällungsoperation“ erhalte man die „Gedankenteile“ Gegenstand $\mathfrak{a}$ und Begriff (Prädikat) $\mathfrak{P}(\ )$; die Bezeichnung des Gegenstandes, der Eigenname $\mathfrak{a}$ könne durch andere Eigennamen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, usw. ersetzt werden[6]; jeder Eigenname vervollständige den „unselbstständigen“ Prädikator $\mathfrak{P}(\ )$ zu einem entweder wahren oder falschen Satz – die leere Klammer „( )“ soll die „Unselbständigkeit“ und „Ergänzungsbedürftigkeit“ des Begriffs $\mathfrak{P}$ andeuten. Diese „Gedankenzerlegung“ führe zu einer strikten Zweiteilung des Gedankens: „Die Teile sind ungleichartig: der eine ungesättigt, der andere gesättigt (abgeschlossen). Man muss dabei solche Gedanken in Betracht ziehen, die von der hergebrachten Logik als *singuläre* Urteile bezeichnet werden. In einem solchen wird von einem Gegenstande etwas ausgesagt. Der Satz, der einen solchen Gedanken ausdrückt, besteht aus einem *Eigennamen* – und dieser entspricht dem *abgeschlossenen* Teile des Gedankens – und einem *prädikativen* Teile, der dem *ungesättigten* Teile des Gedankens entspricht.“ (EL 77; vgl. auch LPM 192). Prädikate seien „ungesättigt“, unselbständig, unabgeschlossen und unvollständig; sie bedürften, damit sich Abgeschlossenes ergebe, der Beziehung auf Gegenstände, die sich **FREGE** als selbstständig, „gesättigt“ und abgeschlossen denkt. Dieser Unterschied hat **FREGE** zufolge als „*absolut*“ zu gelten (BG 67 [193]); die Gegenstände stünden den Begriffen gegenüber und Gegenstand sei alles, was nicht Begriff sei (GGA I, 7; vgl. ASB 27; EL 87; GGA I, 7); jeder sprachliche Ausdruck bezeichne ein für allemal entweder einen Begriff oder einen Gegenstand[7]. **FREGE** ignoriert die ursprüngliche, untrennbare Einheit von Begriff und Gegenstand, sofern er sie als „logischeinfache Urbausteine“ der Logik ausgibt (Briefe VII/2, 28; FB 30). Bei **FREGE** wird aus der Verschiedenheit von Begriff und Gegenstand eine schroffe Entgegensetzung. Begriffe würden ausschließlich prädikativ gebraucht, während ein Eigenname unter keinen Umständen prädiziert werden könne. Eigennamen (bzw. Kennzeichnungen von einzelnen Gegenständen) und Begriffswörter hätten eine ganz unterschiedliche grammatische Verwendung: „Niemals kann ein Gegenstand von etwas ausgesagt werden.“ (Briefe XXVII/2, 28; auch BG 67 [193]; ASB 27f; GLG II, 270; BZ 99f; BG 72 [198])

Kann man **FREGE**s Rückgriff auf die Metapher des „Ungesättigtseins“ bei der Charakterisierung der Begriffe zugute halten, dass er die Einsicht des **ARISTOTELES** erneuert, dass Begriffe nicht gegenüber den Gegenständen verselbständigt und zu irgendwelchen „ideellen“ Quasigegenständen gemacht werden dürfen? Begriffe haben ihr Bestehen nur als Bestimmungen von (unbestimmt vielen) Gegenständen; als die grundlegenden Elemente des Wissens verweisen sie auf die objektive Bestimmtheit von Gegenständen (auf die Bestimmtheit ihrer Art, ihrer bleibenden Eigenschaften und wechselnden Zustände) – einen von diesem Gegenstandsbezug verschiedenen Gehalt besitzen sie nicht. Die Begriffe könnten allerdings nur dann als unselbständig, ergänzungsbedürftig usw. erscheinen, wenn man sie wie **Frege** außerhalb dieser ihrer ursprünglichen Bezogenheit auf Gegenstände betrachten wollte. **Frege**s Rede vom „Ungesättigtsein" setzt voraus, dass der Begriff getrennt von Gegenständen betrachtet wird, wenn er *als Begriff* charakterisiert wird; in seiner Beziehung zu Gegenständen kann ein Begriff nicht „ergänzungsbedürftig" erscheinen – ist er doch von vorneherein auf Gegenstände bezogen, muss nicht erst durch diese ergänzt werden; jedes Prädikat P ist immer schon *Prädikator* P(x), Bestimmung irgendwelcher Gegenstände x. **Frege**s Rede von der *Prädikativität* der Begriffe[8] bringt diese Tatsache viel klarer zum Ausdruck als die irreführende Ungesättigtheitsmetapher[9].

Während **Aristoteles** in seiner Logik und Ontologie von der *ursprünglichen* Einheit von Begriff und Gegenstand ausgeht, dissoziiert **Frege** Begriff und Gegenstand auf eine Weise, die ihr Verhältnis unbegreiflich macht. Er ordnet Gegenstände und Begriffe ganz verschiedenen Wirklichkeitsbereichen zu: „In der Außenwelt, der Gesamtheit des Räumlichen, gibt es keine Begriffe." (GLA 92 [99][10]) Wie kann es dann eine „Sättigungs"-Verbindung zwischen raum-zeitlichen Gegenständen und außerweltlichen Begriffen geben, wie sollte ein realer Gegenstand einem „nicht-realen" Begriff subsumiert werden können[11]? Würden die Begriffe einen eigenen Wirklichkeitsbereich bilden, müssten sie im Widerspruch zu **Frege**s Darlegungen ja wohl selbständig wie die Gegenstände sein und sich selbst genügen.

In seiner *Theorie von Sinn und Bedeutung*$_F$ unterscheidet **Frege** *drei* Arten von Ausdrücken – Eigennamen, Begriffswörter und Sätze, und ordnet jedem dieser Ausdrücke einerseits einen Sinn, andererseits eine Bedeutung$_F$[12] zu; er ist dabei außerstande anzugeben, was einerseits Sinn, andererseits Bedeutung$_F$ der Begriffe ist. Es lässt sich jedoch auch für Begriffswörter der Unterschied von Sinn und Bedeutung$_F$ klar bestimmen. Begriffe gehören der Ebene unseres Wissens an und stellen unser allgemeines Wissen von den Artbestimmungen und von den allgemein bestimmten Eigenschaften und Zuständen von Dingen bestimmter Art und ihrem gesetzmäßigen Zusammenhang dar; dieses Wissen ist der *Sinn*, den wir mit Begriffswörtern verbinden. Über diesen begrifflich bestimmten Sinn beziehen wir uns auf die reale objektive Artbestimmtheit der Dinge und den allgemein-gesetzmäßigen Zusammenhang ihrer Eigenschaften und Zustände – dies ist die Bedeutung$_F$ der Begriffe, denn die Stufe der Bedeutungen$_F$ soll ja die Stufe „des Objektiven" sein (SB 49 [34]). Wie wir von realen Gegenständen wissen und uns mit und durch dieses unser Wissen auf die objektiv-realen, räumlich-zeitlichen Gegenstände beziehen, so wissen wir durch unsere Begriffe von ihrer objektiv-realen allgemeinen Bestimmtheit[13]; dieses begriffliche Wissen erschließt uns die realen Beschaffenheiten und Gesetzmäßigkeiten der Dinge/Gegenstände. Begriff und Gegenstand sind untrennbar, was ihren Sinnaspekt (den Wissensaspekt) und ihre Bedeutung$_F$ (den Wirklichkeitsbezug) betrifft; die *Ausdrücke beider* repräsentieren ein Wissen (ihr Sinn) und den referentiellen Bezug (die Bedeutung$_F$) dieses Wissens in der realen Wirklichkeit.

Die Tatsache, dass sich ein Feststellungsausdruck wie „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$" in eine andere wahrheitswertdefinite Feststellung transformieren lässt, wenn die Gegenstandsbezeichnung (Eigenname, Kennzeichnung) $\mathfrak{a}$ durch andere (geeignete) Gegenstandsbezeichnungen ersetzt werden, so dass wiederum eine wahrheitswertdefinite Feststellung entsteht, hat den Grund darin, dass jeder Begriff anzahlmäßig unbestimmt vielen Gegenständen zukommt. Aus der Möglichkeit dieser Ersetzungsoperation lässt sich weder, wie **Frege** annimmt, eine „Ungesättigtheit" der Begriffe herleiten, noch kann diese Ersetzungsoperation die Grundlage einer eindeutigen Abgrenzung von Begriffen und Gegenständen sein; es kommt nämlich nicht nur jeder Begriff vielen Gegenständen zu, sondern jedem einzelnen Gegenstand kommen auch viele Begriffe zu. Deshalb lässt sich in einem Ausdruck „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$" auch das Begriffswort „$\mathfrak{P}$" durch andere Begriffswörter ersetzen, wobei ebenfalls stets wahrheitswertdefinite Aussagen entstehen: $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$, …Aus diesen Ersetzungsmöglichkeiten ließe sich ebenso und nicht mit weniger Recht die „Ungesättigtheit" der Gegenstände herleiten, wie umgekehrt **Frege** aus den Transformationen $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{c})$, die „Ungesättigtheit" der Begriffe schließt[14]: so wenig sinnvoll von einem Begriff geredet werden kann, der nicht Bestimmung vieler Gegenstände wäre, so wenig ist uns unabhängig von unserem begrifflichen Wissen irgendein Gegenstand gegeben[15]: einen Gegenstand können wir nur erkennen (und dann mit einem Eigennamen versehen), wenn wir ihn in umfassender Weise begrifflich bestimmen; wir müssen seine Identität über die Orts- und Zustandsveränderungen, über unterschiedliche Wahrnehmungsperspektiven hinweg erfassen, seine Artbestimmtheit und seine Besonderheiten, Eigentümlichkeiten und Zustände erkennen – und alle diese Bestimmungen können ausnahmslos nur auf der Basis allgemeiner Begriffe vorgenommen werden; erst diese Einsicht der attischen Philosophie hat eine theoretische Logik ermöglicht. Erst wenn ein Gegenstand zuvor umfassend begrifflich bestimmt ist, ist er in seiner Singularität im Nachhinein durch einen Eigennamen benennbar; **Frege** hingegen stellt die unvernünftige, unerfüllbare Forderung auf, ein Zeichen müsse „*unmittelbar* die Sache" bedeuten (WBB 95 [53]); nur vermittels unseres begrifflich strukturierten (niemals unmittelbaren) Wissens vom realen

Gegenstand, kann eine Bezeichnung dieses Gegenstandes auf diesen verweisen. Losgelöst von seinen begrifflichen Bestimmungen ist jeder Gegenstand demnach nicht weniger „ungesättigt", „unselbstständig", „*ergänzungsbedürftig*" und „unabgeschlossen" als jeder Begriff, der gegenüber den Gegenständen, denen er zukommt, verselbständigt wird. Es ist also ganz sinnlos, Gegenstände und Begriffe aus ihrer untrennbaren Einheit zu lösen, wie dies **FREGE** tut, indem er beide zu „logischeinfachen" Tatbeständen macht (FB 30, [17f]; Briefe 28; BG, 66f [193]; BZ 97f); wenn es in der Logik einen „Urbaustein" gibt, dann ist es die Einheit von Begriff und Gegenstand – und gerade diese Einheit ist in der Logik in all ihrer Komplexität zu entwickeln und darzulegen.

Für **FREGE** sind die „abgeschlossenen" Gegenstände nicht ergänzungsbedürftig, sondern unabhängig von den Begriffen unmittelbar in ihrer „Selbstständigkeit" gegeben; er postuliert eine jeder begrifflichen Bestimmung vorausgehende unmittelbare rein sinnliche Erkenntnis der Gegenstände. „Man sieht ein Ding." (Ged 44 [69], Fn.5)[16] Der Eigenname ist ihm hinreichend für die sprachliche Bezugnahme auf einen Gegenstand – der Eigenname ist aber in Wirklichkeit die ganz begrifflose Bezeichnung: denn um einen Gegenstand eindeutig mit einem Eigennamen benennen zu können, muss dieser Gegenstand *zuvor* in umfassender Weise begrifflich bestimmt sein. **FREGE** rechnet die Eigennamen den grundlegenden *logischen* Zeichen zu; in den Sätzen der Logik, die Gesetze des logischen Bestimmens *beliebiger* Gegenstände ausdrücken, kommen jedoch grundsätzlich keine Eigennamen (nicht einmal konkrete Begriffswörter), sondern nur Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände vor. Wenn, wie **FREGE** behauptet, die Gegenstände selbständig, abgeschlossen und demnach unabhängig von jeder begrifflichen Bestimmung erkennbar wären, warum sollte ein solcher Gegenstand einen „ungesättigten" Begriff „sättigen" – wozu sollte es dann überhaupt Begriffe geben[17]?

Die dissoziative Entgegensetzung von Gegenstand und Begriff verleitet **FREGE** dazu, schließlich *jeden* Sachverhalt, mit dem es die Logik zu tun hat, entweder den Gegenständen oder den Begriffen zuzurechnen: „Gegenstand ist alles, was nicht Funktion ist, dessen Ausdruck also keine leere Stelle mit sich führt." (FB 30 [19]) „Alles, was es gibt ist *Funktion* oder *Gegenstand*."[18]. Durch diesen falschen Dualismus gerät **FREGE** in Verwirrung, wenn er das Problem des Begriffsumfanges und der logischen Klasse aufwirft, weil er fragt, ob die logische Klasse, d.h. der Umfang eines Begriffs den Gegenständen oder den Begriffen zuzurechnen sei. Er meint, er müsse Sachverhalte, die doch das *Verhältnis* von Begriff und Gegenstand oder Gegenstände in ihrem Verhältnis zu Begriffen betreffen, selbst disjunktiv entweder den Begriffen oder den Gegenständen zuordnen.

Jeder gehaltvolle Ousiabegriff ist ein umfassendes Vergleichs- und Bestimmungsschema, durch welches wir eine bestimmte Art von Gegenständen erkennen und von allen andersartigen Gegenständen unterscheiden können; deshalb gehört zu jedem Ousiabegriff eine wohlbestimmte Menge von Gegenständen, denen dieser Begriff zukommt, der *Umfang* oder die *Extension* des Begriffs. Der Umfang eines jeden Ousiabegriffs ist gegen die Umfänge aller anderer Ousiabegriffe eindeutig abgegrenzt, da im Begriff alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass er einem Gegenstand zukommt, zusammengefasst sind. Anzahlmäßig aber bleibt der Umfang eines jeden gehaltvollen Begriffs ganz unbestimmt. Jeder gehaltvolle Begriff ist wohl *umfangsdefinit* – d.h. von jedem beliebigen Gegenstand in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft muss entscheidbar sein, ob er der entsprechenden Klasse angehört oder nicht (ob ihm der Begriff zukommt oder nicht), er kann aber nicht *anzahldefinit* sein. Im Umfang eines Begriffes sind auch die Gegenstände der betreffenden Art miteinbegriffen, die erst in Zukunft existieren werden; schon deshalb ist es unmöglich, dass eine Klasse anzahlmäßig bestimmt ist. Diese prinzipielle Unbestimmtheit der Anzahl einer Klasse beweist, dass es eine rein extensionale Auffassung der logischen Klasse nicht geben kann: die Elemente einer Klasse lassen sich anders als die Elemente von aktuellen, an eine Raum-Zeit-Stelle gebundenen, endlichen Mengen nicht unabhängig von begrifflichen Bestimmungen aufzeigen[19]. Eine Klasse ist immer der *Umfang eines Begriffs*, so wie umgekehrt eine rein intensionale Auffassung nicht durchführbar ist, denn jeder gehaltvolle Begriff ist eine Bestimmung realer Dinge und ihrer Eigenschaften und Zustände; im Begriff der logischen Klasse sind Begriff und Gegenstand, Extension und Intension, notwendig und untrennbar verbunden.

Seiner dualistischen Ontologie folgend, der alles Seiende *entweder* Gegenstand *oder* Begriff ist, fragt **FREGE**, ob ein Begriffsumfang den Gegenständen oder den Begriffen zuzurechnen sei; anstatt zu sehen, dass weder das eine noch das andere zutreffen kann, weil im Begriffsumfang ein zentrales Verhältnis von Gegenständen und Begriff verwirklicht ist, behauptet er bald das eine, bald das Gegenteil: „Begriffsumfänge sind Gegenstände und nicht Begriffe." (ASB 26) – „Ich glaube, dass für ‚Umfang des Begriffs' einfach ‚Begriff' gesagt werden könne." (GLA 76 [80]; auch NSchrWB II, S.111) – an anderer Stelle bezeichnet ihm der Ausdruck „Der Umfang des Begriffes a" einen „scheinbaren Gegenstand" (EMN 288). Entsprechend seiner ursprünglichen Dissoziation von Begriff und Gegenstand ist für **FREGE** der Begriff das eine, der Umfang des Begriffs als die Klasse der Gegenstände, denen der Begriff zukommt, das andere. Hat man den Begriff, kann man sich in einem zweiten Schritt sich nach den Begriffsumfang umsehen (LPM 194; auch 197). **Frege** bestreitet, dass ein Begriff seinen Bestand an den Gegenständen hat, die unter ihn fallen (GGA I, 3). Er leugnet nicht nur, dass der Begriff untrennbar an die Klasse gebunden ist, sondern meint, dass die Klasse selber unabhängig von den Gegenständen sei, die die Glieder dieser Klasse sind. (GGA I, 2) Er dissoziiert nicht nur den Begriff von den Gegenständen, denen er zukommt, sondern auch die Klasse von den sie konstituierenden Gegenständen[20].

Freges dissoziativer Dualismus von Gegenstand und Begriff verhindert auch ein treffendes Verständnis der „Existenz" und der „Es- gibt"- Sätze. Er meint, zunächst sei zu prüfen, ob die „Es-gibt-Sätze" von Begriffen oder Gegenständen handeln, und plädiert für Ersteres. In Wirklichkeit betreffen derartige Sätze den *Zusammenhang* von Begriffen und Gegenständen. „Existenz" ist für **Frege** „Eigenschaft eines Begriffs" (GB 73 [199]) Als Existenzsätze bezeichnet er „Es- gibt"-Sätze der Ausdrucksform „Es gibt ein P", wobei „P" einen Begriff bezeichnen soll[21]. Nur Begriffswörter könnten in die Aussageform „Es gibt etwas, was … ist" eingesetzt werden (GLG II, 271 [373]). „Wie der unbestimmte Artikel erkennen" lasse, behalte der Begriff hier seine prädikative Funktion (BG 75 [200]) – die angebliche Unbestimmtheit des Artikels zeigt ihm die „Ungesättigtheit" an. **Frege** meint, der bestimmte Artikel stehe bei Bezeichnungen von Gegenständen, während die indefiniten Artikel („ein", „irgendein", „alle", „einige", „kein" usw.) zum Begriffswort gehörten. „Sobald ein Wort mit dem unbestimmten Artikel oder im Plural gebraucht wird, ist es ein Begriffswort." (GLA 63f [64])[22] Auch hier unterstellt **Frege**, ein Ausdruck bezeichne *entweder* einen Gegenstand *oder* einen Begriff; ein Ausdruck wie „ein Löwe" bezeichnet jedoch *immer* „irgendeinen Gegenstand, dem der Begriff *Löwe* zukommt"; „alle oder einige P" bedeutet „alle oder einige Gegenstände, denen der Begriff P zukommt". Der Ausdruck „ein Löwe" kann überhaupt keinen Begriff bezeichnen, denn der Satz „*Ein Löwe* ist ein Ousiabegriff" ist sinnlos im Gegensatz zum Satz „Der Begriff *Löwe* ist ein Ousiabegriff", den wiederum **Frege** fälschlicherweise für widersprüchlich hält. „Es gibt mindestens *ein Nashorn*" bedeutet nicht, dass es mindestens einen Begriff *Nashorn* gibt, sondern dass es mindestens einen Gegenstand gibt, dem der Begriff *Nashorn* zukommt. „Existenz" im Sinne der „Es-gibt"-Sätze wird immer von einem Gegenstand in Bezug auf einen Begriff ausgesagt – nie von einem Begriff alleine[23]. Deshalb sagt der Satz „Es gibt ein Nashorn" (genauer: „Es gibt einen Gegenstand, dem der Begriff *Nashorn* zukommt") dasselbe aus wie der Satz „Der Begriff *Nashorn* ist nicht leer"; für **Frege** handelt der erste Satz von einem Begriff, der zweite Satz von einem Gegenstand. Es geht in diesen Existenzsätzen wie in der Beurteilung der Leerheit oder Nichtleerheit von Begriffen weder um einen Gegenstand allein, noch um einen Begriff allein, sondern um den Zusammenhang beider; einen solchen Zusammenhang aber leugnet **Frege**.

4.2.3. Begriffe können Frege zufolge nicht selber zum Gegenstand einer begrifflichen Bestimmung werden

Eine weitere für die Logik abträgliche Folge der fregeschen Dissoziation von Gegenstand und Begriff besteht darin, dass **Frege** sich nur dann für befugt hält, einen Begriff als Begriff anzusehen, wenn dieser Begriff unmittelbar einem Gegenstand prädiziert, dadurch „gesättigt" und „zu einem abgeschlossenen Ganzen vervollständigt" wird. Das alltäglich-gegenständliche Denken kennt gemäß seiner spezifischen Intentionalität im großen Ganzen nur diese direkte prädikative Verwendung von Begriffen, nicht aber die Betrachtung und Beurteilung der Begriffe *als Begriffe* selber. Erst in der theoretischen Logik wird versucht, die logische Struktur des gegenständlich-begrifflichen Denkens selbst kategorial-begrifflich zu bestimmen, und dabei entwickelt die Logik *Begriffe von Begriffen*. In der Logik steht nicht der prädikative Gebrauch von gegenständlichen Begriffen oder *Begriffen 1. Stufe*, wie **Frege** sagt, an, sondern die Begriffe 1. Stufe werden selber zum *nichtdinglichen* Gegenstand einer Analyse, bei der es um die kategoriale Klassifikation der Begriffe, um die Untersuchung der allgemeinen Bedingungen des prädikativen Gebrauchs *beliebiger* Begriffe 1. Stufe geht und um die überhaupt möglichen logischen Beziehungen von Begriffen (die logischen Formen) geht. Die Logik macht so keinen *prädikativen*, sondern einen *thematischen Gebrauch* von den Begriffen 1. Stufe. **Frege** unterscheidet zunächst klar zwischen den gegenstandsbezogenen *Begriffen 1. Stufe* und den *Begriffen 2. Stufe*, die nicht Gegenständen, sondern Begriffen 1. Stufe zukommen. Diese Unterscheidung ist für die Logik konstitutiv; zurecht schreibt **Frege**, dass „eine tiefere Einsicht in die Mathematik und Logik ohne diese Unterscheidung nicht möglich" ist (GLG II, 269 [371]; auch GGA I, XXIV).

Frege verneint jedoch nachdrücklich die Möglichkeit und Notwendigkeit, in der Logik mit Begriffen 1. Stufe auf neue, nämlich thematische Weise umzugehen, wenn er behauptet, ein Begriff höre auf ein „ungesättigter"

Begriff zu sein, wenn er nicht unmittelbar prädiziert, sondern selbst zum Objekt der Bestimmung durch Begriffe 2. Stufe wird. Bei der Untersuchung und Thematisierung der Begriffe werde man wider Willen und „gegen die Natur der Sache“ gezwungen, die Begriffe wie Gegenstände zu betrachten und ihren „ungesättigt“-prädikativen Charakter zu verleugnen. Die Sprache erlaube es nicht, von einem „ungesättigten“ Begriff zu reden, „ohne das Ergänzungsbedürftige in etwas Abgeschlossenes zu verwandeln und eigentlich zu verfälschen.“ (Briefe XXXVI/7, 72; auch ASB 27; LPM 192; LM 147) Zu sagen, „der Begriff ‚Pferd‘ ist kein Begriff“, sei eine „unvermeidbare sprachliche Härte“ (BG 71 [196f]).

FREGEs Ansicht, ein Begriff höre, wenn er selber zum Thema der Untersuchung und Bestimmung wird, auf, ein Begriff, d.h. „ungesättigt“ in dem Sinne zu sein, dass er eine Bestimmung ist, die vielen Gegenständen zukommt, ist nicht nachvollziehbar. Wenn gegenständlichen Begriffen in einer Aussage ein logischer Begriff 2. Stufe zugesprochen wird – etwa in den Sätzen „(Der Begriff) *Pferd* ist ein Ousiabegriff“ und „*Fieberkrank* ist ein Zustandsbegriff“, hören die Begriffe als Prädikanden dieser Feststellungen doch nicht auf, prädikativer Natur zu sein. Im Gegenteil, ein Begriff kann nur dann als Begriff verstanden und durch einen Begriff zweiter Stufe bestimmt werden, wenn er als ein allgemeines Prädikat aufgefasst wird, das *vielen* Gegenständen zukommen kann; es werden durch die logischen Begriffe 2. Stufe ja gerade die Art und Weise und die Gesetzmäßigkeit der Prädikativität dieser Begriffe bestimmt. Die Aussage „Der Begriff *Pferd* ist ein Ousia-Begriff“ bedeutet, dass, wenn immer dieser Begriff 1. Stufe *Pferd* einem Gegenstand zugesprochen wird, dadurch die Art oder Washeit dieses Gegenstandes bestimmt ist. Diese Aussage über einen Begriff verhüllt nicht die Prädikativität des Begriffs, sondern setzt diese Prädikativität vielmehr stets voraus und bestimmt sie näher. Träfe es zu, dass Ausdrücke wie „der Begriff 𝔓“ nicht auf Begriffe, sondern auf Gegenstände *als Nicht-Begriffe* verweisen, so könnte von Begriffen nicht als Begriffen geredet werden, und die Logik als Wissenschaft von den Formen des begrifflichen Denkens wäre gar nicht möglich. Die Sprache besitzt nicht die ihr von **FREGE** angedichtete „verhängnisvolle Eigenschaft, … Eigennamen zu schaffen, denen kein Gegenstand entspricht“, sondern die Sprache ermöglicht es, nicht nur dingliche Gegenstände begrifflich zu bestimmen, sondern diese begrifflichen Bestimmungen selber zum Thema der Untersuchung und Erörterung zu machen; nicht „die Sprache“ macht Begriffe zu Gegenständen, sondern **FREGE**s starres, unflexibles, sich in falschen Dissoziationen verhedderndes Denken.

Auch die logischen Formen sind Begriffe 2. Stufe. Zwischen den gegenständlichen Begriffen *Mensch* und *Lebewesen* besteht die Beziehung der logischen Unterordnung oder Subordination, wie **FREGE** sagt – der Sachverhalt *Mensch*(x) impliziert den Sachverhalt *Lebewesen*(x); *Subordination* ist ein zweistelliger Begriff, der beliebigen Paaren von Begriffen erster Stufe zukommt, sofern diese bestimmte Bedingungen erfüllen[24]. Die Definition einer jeden logischen Relation zwischen Begriffen nimmt notwendig auf die Beziehungen der Begriffe 1. Stufe zu Gegenständen, also auf die Prädikativität („Ungesättigtheit“) der Begriffe 1. Stufe Bezug; so ist die logische Beziehung der Unterordnung eines Begriffs P zu einem Begriff Q (Implikation) dadurch definiert, dass jedem Gegenstand, dem P zukommt, auch Q zukommt, aber nicht umgekehrt. Alle Bestimmungen der aristotelischen Logik, die logischen Formen selbst, die ontologisch/logischen Kategorien wie Ousia und Akzidens, sind Begriffe 2. Stufe.

FREGE allerdings kann die wichtige, für die theoretische Logik konstitutive Unterscheidung von Begriffen 1. und 2. Stufe nicht fruchtbar machen, und als kritisches Instrument zur Prüfung der eigenen Entwürfe zu nutzen. Weder die fregeschen Gedankengefüge noch die Fregeverknüpfungen sind, im Gegensatz zu den echten logischen Formen, Begriffe 2. Stufe. Der Begriff der „Existenz“ ist der einzige Begriff, den **FREGE** explizit als einen Begriff 2. Stufe anführt – dieser aber ist kein Begriff zweiter Stufe, weil er nicht unmittelbar Begriffen 1. Stufe prädiziert wird[25], sondern das Verhältnis von Begriff und Gegenständen thematisiert. **FREGE** umschreibt diesen Unterschied gegenständlicher und logischer Begriffe mit nichts sagenden räumlichen Metaphern: „Die Begriffe 2. Stufe, unter welche Begriffe fallen, sind wesentlich verschieden von den Begriffen 1. Stufe, unter welche Gegenstände fallen.“ (BG 75f [201]) Dem Unterschied werde man gerecht, wenn man sage, „ein Gegenstand falle *unter* einen Begriff 1. Stufe, und ein Begriff falle *in* einen Begriff 2. Stufe.“ (BG 76 [201]). An anderer Stelle spricht er von der *Subsumtion* eines Gegenstandes unter einen Begriff und der *Subordination* eines Begriffs unter einen anderen. Er kann nur verbal eine nicht näher bestimmte Verschiedenheit andeuten. „Begriffe können nicht in denselben Beziehungen stehen wie Gegenstände. Sie in diesen zu denken, wäre nicht falsch, sondern unmöglich.“ Auf keinen Fall dürfe man „die beiden grundverschiedenen Beziehungen des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff und [der] Unterordnung eines Begriffs unter einen Begriff … vermengen.“ (ASB 28) **FREGE** belässt es bei dieser verbalen, nichtbegrifflichen Abgrenzung. Diese Unterschiede bleiben ganz intuitiv – Worte treten, wie so oft im Rahmen der von **FREGE** begründeten Tradition, an die Stelle von begrifflichen Unterscheidungen.

FREGE unterscheidet auch *Beziehungen 1. und 2. Stufe*. Es ist klar, dass Begriffen keine Relationen zugeschrieben werden können, die Gegenständen zukommen; die Logik muss aber untersuchen, wie die Beziehungen (die mehrstelligen Prädikate 1. Stufe), die zwischen Gegenständen bestehen, vermittelt sind durch die logischen Beziehungen zwischen diesen mehrstelligen Prädikaten 1. Stufe selbst. Die zwischen *Gegenständen* möglichen Beziehungen 1. Stufe sind nichts anderes als zwei- oder mehrstellige gegenständliche Prädikate 1. Stufe, etwa „Fritz *ist der Vater von* Paul“. Die zwischen solchen Begriffen bestehenden Beziehungen, nennt **FREGE** „Beziehungen 2. Stufe“; als eine solche Beziehung führt er nur die Unterordnung eines Begriffs unter einen anderen an; aber *alle logischen Relationen* sind solche Beziehungen. So besteht die logische Relation der Implikation ℂ beispielsweise zwischen den beiden Relationen 1. Stufe „x ist Vater von y“ und „x ist blutsverwandt mit y“: „Wenn eine Person x Vater einer Person y ist, dann ist x mit y blutsverwandt“. Diese logischen Beziehungen zwischen Begriffen (Beziehungen 2. Stufe) hängen untrennbar mit den Beziehungen der Begriffe 1. Stufe zu Gegenständen ab; sie sind dadurch determiniert, dass diese Begriff verschiedenen Gegenständen jeweils zusammen zukommen können oder nicht. So nimmt die Beziehung der logischen Unverträglichkeit 𝔻 zweier Begriffe notwendig auf die Beziehung der unverträglichen Begriffe zu *jeweils denselben* Gegenständen Bezug: ein Begriff P ist mit einem Begriff Q genau dann unverträglich, wenn jedem Gegenstand oder jedem n-Tupel von Gegenständen, dem der eine (ein- oder mehrstellige) Begriff zukommt, nicht der andere Begriff zukommt. Ein Begriff P steht genau dann einem anderen Begriff Q in der Beziehung des kontradiktorischen Gegensatzes (𝕁), wenn jedem Gegenstand, dem A zukommt B nicht zukommt, und jedem Gegenstand, dem A nicht zukommt, B zukommt. Dass **FREGE** diesen entscheidenden Zusammenhang nicht verstanden hat, geht insbesondere aus seiner Meinung hervor, leere und nichtleere Begriffe seien *logisch* gleichwertig, und welche logische Beziehung zwischen zwei Begriffen bestehe, sei davon unabhängig, ob diese Begriffe leer oder nichtleer sind.

Auch diese falsche Gleichstellung der gehaltvollen (nichtleeren) und der leeren Begriffe ist eine Konsequenz der fregeschen Dissoziation von Begriff und Gegenstand. Weil logische Beziehungen nur zwischen nichtleeren, gehaltvollen, d.h. wirklichkeitsbezogenen Begriffen bestehen können, ist die Scheidung der leeren und gehaltvollen Begriffe eine unabdingbare *Voraus*setzung für die Erkenntnis und Konstruktion logischer Formen. Nur wenn es Gegenstände gibt, denen bestimmte Begriffe zukommen, besteht zwischen diesen Begriffen eine logische Relation. Da eine solche Relation besagt, dass es notwendig, oder unmöglich oder möglich ist ($\mathcal{K}$), dass *irgendeinem* Gegenstand, dem bestimmte Begriffe zukommen, andere Begriffe zukommen, kann ein leerer Begriff nie Bestandteil eines logischen Zusammenhanges sein. Für beliebige leere Begriffe L und beliebige gehaltvolle Begriffe P gilt nur das Verhältnis L(x) ⌉ P(x), wobei die Pränonpendenz 𝔽 unbedingt ist und die Modalitätenmatrix ($\mathcal{OZUU}$) besitzt: L kommt jedem beliebigen Gegenstand nicht zu, ob diesem Gegenstand irgendein gehaltvoller Begriff P zukommt oder nicht. Ist ein Begriff hingegen Teil einer logischen Struktur, etwa der Ousiabegriff M in der Struktur des syllogistischen Modus *Barbara* [(Sx), (Mx), (Px) 𝕂ℂ], dann ist notwendig vorausgesetzt, dass dieser Begriff M kein leerer Begriff ist. Der Konstruktion der logischen Formen muss deshalb der Ausschluss aller leeren Begriffe vorausgehen.

Für **FREGE** hingegen ist die Unterscheidung der leeren und nichtleeren Begriffe logisch nebensächlich und der Bezug eines Begriffs auf Gegenstände tangiert nicht das Wesen des Begriffs. Es „kann ein Begriffswort logisch durchaus unanfechtbar sein, ohne dass es einen Gegenstand gibt, auf den es sich durch seinen Sinn und seine Bedeutung (den Begriff selbst) beziehe. Diese Beziehung auf einen Gegenstand ist … eine mehr vermittelte und unwesentliche, so dass es wenig passend scheint, die Begriffswörter danach einzuteilen, ob unter den entsprechenden Begriff kein, ein oder mehrere Gegenstände fallen.“ (ASB 34) Logisch untaugliche Begriffe seien „nicht etwa solche, die Widersprechendes vereinen – denn ein Begriff kann sehr wohl leer sein – sondern solche, bei denen die Umgrenzung verschwommen ist.“ (ASB 32) Auch widersprüchliche Begriffe seien wohlabgegrenzt, weil für jeden Gegenstand feststehe, dass ihm der widerspruchsvolle Begriff nicht zukommt (LPM 193f). Dies ist nicht richtig, denn widerspruchsvolle Begriffe sind nur eindeutig von allen gehaltvollen abgegrenzt; *logisch* fallen die leeren Begriffe zusammen und lassen sich nicht akkurat gegeneinander abgrenzen, eben weil sie widerspruchsvoll sind und es deshalb keinen Gegenstand gibt, dem sie zukommen können[26].

Die Vorstellungen **FREGE**s von der Identität der Gegenstände sind aufgrund seines ungenügenden Verständnisses des Verhältnisses von Begriff und Gegenstand sehr oberflächlich, teilweise sogar falsch. Eine Aussage wie „Dieser Tisch ist sich selbst gleich“ sei „vollkommen selbstverständlich“, in Identitätsurteilen würde von den

Gegenständen „ein eigentlicher Inhalt … nicht … ausgesagt.“ (DPE 15) Dass uns zumindest die Identität der vielen Gegenstände unserer alltäglichen Lebenswelt völlig selbstverständlich und unproblematisch erscheint, muss jedoch nicht bedeuten, dass die Erkenntnis der Identität der Gegenstände logisch einfach ist, und unmittelbar, ohne Vermittlung umfassender logischer Synthesen erkannt werden kann. Tatsächlich ist die Identität der Gegenstände nicht trivial, nicht „leere“ Beziehung eines Gegenstandes auf sich, sondern die grundlegendste und fundamentalste *Invariante*, auf die sich unser ganzes rationales Erkennen stützt. Diese Identität bedeutet, dass ein Gegenstand in all den verschiedenartigen Veränderungen, Entwicklungen, denen er unterworfen ist, und in allen verschiedenen Perspektiven, unter denen er uns erscheint, derselbe bleibt[27]. Von Identität und Erhaltung kann nur in Bezug auf Veränderung gesprochen werden. Die Identität der Gegenstände stellt zwar keine nähere Bestimmung eines Gegenstandes dar – sie ist aber Voraussetzung dafür, dass sich überhaupt etwas logisch bestimmen und erkennen lässt.

Die Identität von Gegenständen, das „völlige Zusammenfallen“ (ASB 28), die „völlige Übereinstimmung, Selbigkeit“, (BZ 95; GLA 73 [76]) ist nicht, wie **Frege** behauptet, eine *zweistellige* Relation[28]. **Frege** geht bei seiner Darlegung der Identität eines Gegenstandes von einem Ausdruck „a = b“ aus, und begreift dabei „a“ und „b“ als der Zeichengestalt (und eventuell zusätzlich dem Sinn) nach *verschiedene* Bezeichnungen ein und desselben Gegenstandes (SB 40f, 65). Aber *diese* zweistellige Relation, auf der die Substituierbarkeit von verschiedenen Zeichen beruht, drückt keine Identität von Gegenständen aus, sondern sie besagt, dass *zwei verschiedene* Ausdrücke insofern *gleich* (nicht etwa identisch!) sind, als sie dieselbe Bedeutung_F haben, d.h. denselben identischen Gegenstand in unterschiedlicher Weise bezeichnen. Es handelt sich hier nicht um Identität, sondern um die Beziehung der *Bedeutungsgleichheit* von zwei *verschiedenen* Zeichenkomplexen; diese Bedeutungsgleichheit definiert oder erläutert die Identität nicht, sondern setzt die Identität eines Gegenstandes schon voraus. Sich Identität als zweistellige Relation $R(x, y)$ vorzustellen widerspricht sich, denn eine solche „Identität“ müsste zwischen *zwei*, also zwischen verschiedenen, nicht-identischen Gegenständen bestehen. Identität betrifft auch nicht verschiedene Aspekte oder Erscheinungsweisen ein und desselben Gegenstandes, denn diese Aspekte oder Erscheinungsweisen sind ja nicht-identisch[29].

An anderer Stelle beruft sich **Frege** bei der Erläuterung der Identität von Gegenständen auf **Leibniz**’ *principium identitatis indiscernibilium*: „Wir sagen, ein Gegenstand a sei gleich einem Gegenstand b (im Sinne des völligen Zusammenfallens), wenn a unter jeden Begriff fällt, unter den b fällt, und umgekehrt.“ (ASB 28) Das Identitätsprinzip ist indes auch hier nicht korrekt formuliert, weil von *zwei* Gegenständen a und b gesprochen wird, wo doch nur *ein* Gegenstand gemeint sein kann; richtig müsste es heißen: Wenn $F_1, F_2, \ldots, F_n$ die Gesamtheit der Begriffe ist, die einem Gegenstand a zukommt, dann fällt kein anderer Gegenstand b mit $a \neq b$ ebenfalls unter die Begriffe $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Die Identität als Beziehung eines Gegenstandes auf sich selbst (Sichselbstgleichheit in aller Veränderung) schließt die Beziehung der Wohlunterschiedenheit zu *alle*n anderen Gegenständen ein[30]. Die *Gleichheit* von Gegenständen – verschiedene (nicht-identische) Gegenstände sind hinsichtlich einer begrifflichen Bestimmung gleich – ist etwas ganz anderes als die *Identität* von Gegenständen – ein Gegenstand ist nur sich selbst gleich und dadurch von *allen* anderen, auch den gleichartigen, verschieden. Die Erkenntnis von Identischem setzt aber Gleichheit voraus: das Wissen um die Einzigartigkeit und die unverwechselbare Identität eines Gegenstandes ergibt sich erst aus dem durchgehenden logischen Vergleich der Gegenstände, aufgrund der Kenntnis einer Vielzahl abgestufter Gleichheiten und Unterschiede zwischen den Gegenständen, wobei die Bestimmung einer Verschiedenheit immer eine bestimmte Gleichheit voraussetzt. Wäre alles zu allem und in allem ungleich, wäre eins so unbestimmt wie das andere und nichts könnte erkannt werden. Ohne Bezug auf begrifflich bestimmte Gleichheiten und Unterschiede gibt es kein Wissen von der Identität; umgekehrt kann ohne Identität der Gegenstände ihre Gleichheit nicht erkannt werden. Ein sachgerechtes Verständnis der Identität der Gegenstände gibt es nur auf der von **Frege** außer Acht gelassenen logisch-ontologischen *Einheit* von Gegenstand und Begrifflichkeit.

Dass **Frege** die Identität der Begriffe ausdrücklich bestreitet, ohne sich der absurden Konsequenzen bewusst zu sein, ist eine weitere Folge seiner mangelhaften Analyse des Verhältnisses von Begriffen und Gegenständen. Wenn wir sagen, dass ein Begriff vielen Gegenständen zukommt, ist vorausgesetzt, dass wir in allen diesen Fällen von *ein und demselben* Begriff sprechen – wäre es möglich, dass etwa der Begriff *Mensch*, den wir vielen Gegenständen zuschreiben, nicht identisch, nicht ein und derselbe ist, wäre das Prinzip des Nichtwiderspruchs außer Kraft gesetzt, da das PNW fordert, dass von jedem Begriff eindeutig für *jeden* Gegenstand feststehen muss, ob *dieser eine* Begriff dem Gegenstand zukommt oder nicht; es kann da nicht von mehreren Begriffen die Rede sein. Für **Frege** ist Identität ausschließlich eine *Beziehung 1. Stufe*, die nur zwischen Gegenständen bestehen könne, während zwischen Begriffen nur *Beziehungen 2. Stufe* anzutreffen seien. Aufgrund der „Grundverschiedenheit“ der Begriffe 1. und 2. Stufe könne die Beziehung der Identität nicht auf Begriffe übertragen werden (LPM 198). „Von Identität kann man bei Begriffen eigentlich nicht reden.“ (Briefe XXVIII/2 115; auch Briefe XXVI/8, 73f; LPM 198; ASB 28; 31)

FREGE weigert sich insbesondere deshalb, die Identität der Begriffe zuzugeben, weil bei der Feststellung der Identität eines Begriffs dieser Begriff nicht direkt prädikativ verwendet, sondern selbst zum Prädikanden genommen wird: man rede schon nicht mehr von Begriffen, wenn man behaupte, dass der Begriff Φ und der Begriff Ξ derselbe sei; man habe es mit Gegenständen zu tun, „weil der bestimmte Artikel … auf einen Gegenstand hinweist und die prädikative Natur des Begriffs verleugnet.“ (ASB 31) Man habe daher, so **FREGE**, Begriffe erst in „Gegenstände“, nämlich ihre Begriffsumfänge, zu verwandeln, damit zwischen ihnen Identität bestehen könne (LPM 197f; ASB 30); so könne man – „ohne durch den uneigentlichen Gebrauch des Wortes ‚derselbe‘ zu Fehlern verleitet zu werden“ – behaupten, „was zwei Begriffswörter bedeuten, ist dann und nur dann dasselbe, wenn die dazugehörigen Begriffsumfänge zusammenfallen.“ (ASB 31) Wie bei den Gegenständen verwechselt **FREGE** auch bei Begriffen die Identität als Beziehung auf sich selbst, die zugleich die Abgrenzung gegen alle anderen Begriffe einschließt, mit der zweistelligen Relation der Bedeutungsgleichheit, die zwischen verschiedenen Begriffsbezeichnungen besteht; auch die Bedeutungsgleichheit von Begriffsbezeichnungen erklärt die Identität eines Begriffs nicht, sondern setzt sie voraus. Ebenfalls erklärt die Identität einer Klasse (des Begriffsumfanges) nicht die Identität des Begriffs, weil dieser ja als identischer schon bei der Bildung dieser Klasse vorausgesetzt werden muss; käme nicht allen Gegenständen einer Klasse genau ein und derselbe Begriff zu (und nicht etwa verschiedene Begriffe), wäre gar nicht entscheidbar, dass sie alle demselben Begriffsumfang zugehören. Gerade die durchgehende Abgegrenztheit der Begriffe, die **FREGE** wiederholt fordert (ASB 32; LPM 194), ist ohne die geleugnete Identität der Begriffe illusorisch.

Jeder Begriff ist identisch und damit von jedem anderen Begriff verschieden. Die der Identität korrespondierende durchgehende Wohlunterschiedenheit bedeutet keine Beziehungslosigkeit der Begriffe, sowenig wie die durchgehende Wohlunterschiedenheit und Einzigartigkeit der Gegenstände eine selbstgenügsame Isoliertheit der Gegenstände implizieren und ausschließen könnte, dass Gegenstände nur in einem umfassenden kausalen Zusammenhang mit anderen Gegenständen existieren können.

4.2.4. Freges Verwerfung der Subjekt-Prädikat-Struktur

FREGEs Unverständnis der Begriffe, der Gegenstände und ihrer Beziehung veranlasst ihn schließlich zur Verwerfung der Subjekt/Prädikand-Prädikat-Struktur, von der doch alle Logik ausgehen muss. „Wir werden die bei den Logikern beliebten Ausdrücke ‚Subjekt‘ und ‚Prädikat‘ ganz vermeiden…“ (Nachgelassene Schriften I, Hamburg 1070, S.155) „Man sollte mit Subjekt und Prädikat in der Logik aufräumen.“ (Brief an **HUSSERL**, XIX/3, 42) Diese Verwerfung involviert eine Vernachlässigung der logischen Synthesis, an ihre Stelle rückt die falsche fregesche Konzeption der Funktion/Abbildung. Wenn wir **FREGE** fragen, welchen Zweck die Prädikation, die Bezugsetzung („Subsumtion“) von Gegenstand und Begriff eigentlich erfüllt, erfahren wir, dass da ein „selbstständiger“, „gesättigter“ Gegenstand mit einem unselbstständigen, „ungesättigten“ Begriff verbunden wird, dass dadurch die Gedankenteile aneinander haften, dass der Begriff dadurch „gesättigt“ werde und aus dieser Verbindung wiederum ein selbstständiger „Gegenstand“ resultiere, nämlich ein „Wahrheitswert“[31] – dies ist eine Mystifikation des logischen Bestimmens. In der falschen fregeschen Identifizierung von Funktion/Abbildung und Prädikation verschwindet der logische und epistemische Zweck und Sinn aller Prädikation: jede Prädikation, jedes Urteil bestimmt einen Gegenstand (das Subjekt oder den Prädikanden) näher, es bestimmt seine Artbestimmtheit, seine Eigenschaften, seine Zustände, seine Beziehungen zu anderen Gegenständen, die artbestimmte Gesetzmäßigkeit, der er untersteht; erst indem wir den einzelnen Gegenstand durch allgemeine Begriffe bestimmen, wird er erkannt und umfassend mit anderen Gegenständen verglichen; nur so erhält der Gegenstand für uns seine Selbstständigkeit und Abgeschlossenheit gegenüber anderen Gegenständen.

Die Argumente, die **FREGE**s Verwerfung der logisch fundamentalen Subjekt(Prädikand)-Prädikat-Beziehung stützen sollen, sind durchweg nicht stichhaltig. So behauptet er beispielsweise, es sei prinzipiell nicht eindeutig zu bestimmen, was in einem Urteil Subjekt und was Prädikat sei; als Beleg dient ihm das Verhältnis von Aktiv-Passiv-Sätzen; obwohl der „Inhalt“ in beiden Sätzen derselbe sei, seien Subjekt und Prädikat vertauschbar. „Ein Gedanke mannigfach zerlegt werden kann und … dadurch bald dieses, bald jenes als Subjekt und als Prädikat erscheint. Durch den Gedanken selbst ist noch nicht bestimmt, was als Subjekt aufzufassen ist. Wenn man sagt: ‚das Subjekt dieses Urteils', so bezeichnet man nur dann etwas Bestimmtes, wenn man zugleich auf eine bestimmte Art der Zerlegung hinweist… Die Sprache hat Mittel, bald diesen, bald jenen Teil des Gedankens als Subjekt erscheinen zu lassen. Eins der bekanntesten ist die Unterscheidung der Formen des Aktivs und Passivs." (BG 73f, 199)

Nur Sätze mit transitiven Verben können in die Passivform überführt werden; logisch liegt dann eine zweistellige Relation vor, welche besagt, dass ein Gegenstand oder mehrere Gegenstände a in bestimmter Weise auf einen Gegenstand oder mehrere Gegenstände b einwirken: $\mathsf{R}(a, b)$. Der Passivsatz – b wird von a in bestimmter Weise behandelt – drückt die asymmetrische konverse Relation $\check{\mathsf{R}}(b, a)$ aus. In beiden Sätzen sind Subjekt (Prädikand) und Prädikat wohl unterschiedlich, aber entgegen **FREGE**s Auffassung jeweils eindeutig bestimmbar. Allerdings ist das Subjekt/der Prädikand ein Paar von Gegenständen; im Aktiv- und Passivsatz sind Subjekt/Prädikand und Prädikat jeweils verschieden: im Aktivsatz ist das Subjekt/der Prädikand das Paar (a, b), das Prädikat die zweistellige Relation R; im Passivsatz ist das Subjekt/der Prädikand das Paar (b, a), das Prädikat ist die Relation $\check{\mathsf{R}}$. Dass in beiden Sätzen sich Subjekt und Prädikat zwar unterschiedlich, aber jeweils eindeutig bestimmt sind, widerspricht nicht der Tatsache, dass die denselben Sachverhalt auf unterschiedliche Weise zum Ausdruck bringen – man darf allerdings nicht wie **FREGE** eine solche Bedeutungsgleichheit mit der Identität verwechseln.

„Eine Unterscheidung von Subjekt und Prädikat findet bei meiner Darstellung eines Urteils nicht statt. Um dies zu rechtfertigen, bemerke ich, dass die Inhalte von zwei Urteilen in doppelter Weise verschieden sein können: erstens so, dass die Folgerungen, die aus dem einen in Verbindung mit bestimmten andern gezogen werden können, immer auch aus dem zweiten in Verbindung mit denselben anderen Urteilen folgen; zweitens so, dass dies nicht der Fall ist. Die beiden Sätze: ‚bei Plateae siegten die Griechen über die Perser' und ‚bei Plateae wurden die Perser von den Griechen besiegt' unterscheiden sich in der ersten Weise. Wenn man nun auch eine geringe Verschiedenheit des Sinnes erkennen kann, so ist doch die Übereinstimmung überwiegend. Ich nenne nur denjenigen Teil des Inhaltes, der in beiden *derselbe* ist, den *begrifflichen Inhalt*. Da nur dieser für die Begriffsschrift von Bedeutung ist, so braucht sie keinen Unterschied zwischen Sätzen zu machen, die denselben begrifflichen Inhalt haben." (BS 2)[32] Da die Unterschiedlichkeit von Subjekt und Prädikat in beiden Sätzen die Übereinstimmung des Gehalts (und damit den Wahrheitswert) nicht tangiert, soll die Unterscheidung von Subjekt und Prädikat überhaupt logisch belanglos sein – **FREGE** erklärt damit die grundlegende logische Form – P(a), einem Gegenstand a (Subjekt/Prädikand) kommt das Prädikat P zu – für logisch irrelevant. Auch die Sätze „Es gibt mindestens eine Quadratwurzel aus 4" und „Der Begriff *Quadratwurzel aus 4* ist nicht leer" seien trotz verschiedener Subjekte/Prädikanden inhaltsgleich: der erste Satz habe einen Gegenstand, der zweite einen Begriff zum Subjekt. Die Bedeutung von „Der Begriff X ist nicht leer" ist jedoch gerade durch die Aussage „Es gibt mindestens einen Gegenstand, dem X zukommt" bzw. „der Begriff X kommt mindestens einem Gegenstand zu" definiert; in beiden Fällen ist also der Begriff X der Prädikand: es wird gesagt, dass er nicht leer ist, oder – gleichbedeutend – dass er mindestens einem Gegenstand zukommt; der Begriff, der in einem solchen Satz selbst Prädikand wird, hört nicht auf, Begriff zu sein.

FREGE möchte den Gebrauch der Wörter *Subjekt* und *Prädikat* allenfalls auf die Charakterisierung der „Beziehung des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff (Subsumtion) einschränken." (Brief an **HUSSERL**, XIX/3, 42) Er glaubt wohl, dass in einem Satze „Der Gegenstand $\mathfrak{a}$ ist dem Begriff $\mathfrak{P}$ subsumiert" eindeutig ein Gegenstand Subjekt des Satzes ist[33]. **FREGE** fasst die Prädikation einer Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ als die Subsumtion, als das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff. Wie aber verhält es sich bei Gesetzesaussagen? Wie beurteilt **FREGE** hier das Verhältnis von Subjekt und Prädikat? Was wird in Gesetzesaussagen unter welche Begriffe subsumiert? Auch eine Gesetzesaussage besitzt nur dann einen klaren Sinn, wenn eindeutig bestimmt werden kann, was Prädikand und was Prädikat ist – denn es muss ja klar sein, was wovon ausgesagt wird.

Gesetzesaussagen, über deren Prädikationsstruktur sich **FREGE** äußert, sind zunächst jene Formen, deren Zusammenhang schon **ARISTOTELES** in seiner assertorischen Syllogistik behandelt hat: das allgemeine (oder universelle) und das partikuläre bejahende oder verneinende Urteil: *Alle S/einige S sind P/sind nicht P*. **FREGE** erkennt, „dass die Wörter ‚alle', ‚jeder', ‚kein', ‚einige' vor Begriffswörtern stehen. Wir sprechen in den allgemein und partikulär bejahenden und verneinenden Sätzen Beziehungen zwischen Begriffen aus und deuten die besondere Art dieser Beziehung durch jene Wörter an, die also logisch nicht enger mit dem darauf folgenden Begriffsworte zu verbinden, sondern auf den ganzen Satz zu beziehen sind. Man sieht das leicht bei der Verneinung. Wenn in dem Satze

‚alle Säugetiere sind Landbewohner'

die Wortverbindung ‚alle Säugetiere' das logische Subjekt zum Prädikate *sind Landbewohner* ausdrückte, so müsste man, um das Ganze zu verneinen, das Prädikat verneinen: „sind nicht Landbewohner". Statt dessen ist das ‚nicht' vor ‚alle' zu setzen, woraus folgt, dass ‚alle' logisch zum Prädikate gehört." (BG 72f [198]; auch ASB 28)[34] **FREGE** erfasst an dieser Stelle, dass das universelle Urteil zwei Begriffe in ein bestimmtes Verhältnis setzt. Im Satz „›Alle Menschen sind sterblich‹ … sage {ich} weder etwas von diesem, noch von jenem; sondern ich ordne den Begriff Mensch dem Begriff des Sterblichen unter. In dem Satze ‚Cato ist sterblich' habe ich eine *Subsumtion*, in dem Satze ‚Alle Menschen sind sterblich' habe ich eine *Subordination*. Von einem Begriffe ist hier die Rede, nicht von einem Einzeldinge." (LM 108) **FREGE** öffnet sich sogar der Einsicht, dass nicht nur Sätze wie „Alle S sind P" bzw. „Allen Gegenständen, denen S zukommt, kommt P zu" den Begriff S dem Begriff P unterordnen, sondern dass dies auch im Wenn$_1$-Satz „Wenn etwas S ist (wenn einem Gegenstand der Begriff S zukommt), dann ist es P (dann kommt diesem Gegenstand P zu)" geschieht. In „Über die Grundlagen der Geometrie" lesen wir, dass in einer Aussage wie „wenn eine Zahl a größer als 1, dann ist a größer als 0" „nicht eine Beziehung von Gedanken, sondern die Beziehung der Unterordnung des Begriffs *größer als 1* unter den Begriff *positive Zahl* vor" vorliegt (GLG III-V, 296 [378]; auch ebd. 315 [401]). **FREGE** stellt so die Bedeutungsgleichheit der Sätze folgender Ausdrucksgestalt fest:

- „Alle S sind P" – „Allen Gegenständen, denen S zukommt, kommt P zu"
- **„Wenn etwas S ist, dann ist es P" – „Wenn irgendeinem Gegenstand x das Prädikat S zukommt, dann kommt ihm das Prädikat P zu"**
- „Der Begriff S ist dem Begriff P subordiniert"

Diese Einsichten hätten **FREGE** den Weg zu einer sachgerechten Analyse der logischen Formen eröffnen können. Er hätte sich fragen müssen, unter welchen Bedingungen ein Begriff einem anderen subordiniert ist, und unter welchen Bedingungen dies nicht der Fall ist, welche anderen Verhältnisse neben dieser Unterordnung sich bestimmen lassen. Die Tatsache jedoch, dass in diesen Sätzen nicht von Gegenständen, die Begriffen 1. Stufe subsumiert werden können, sondern selber von solchen Begriffen 1. Stufe die Rede ist, hat ihn tief verunsichert. Er hat zunächst schlicht bestritten, dass in diesen Gesetzesaussagen überhaupt sinnvoll Subjekt/Prädikand und Prädikat unterscheidbar sind. „Die Beziehung der Unterordnung eines Begriffes unter einen Begriff ist so verschieden von jener, dass es nicht erlaubt ist, auch hierbei von Subjekt und Prädikat zu reden." (Brief an **HUSSERL**, XIX/3, 42) „Begriffe können nicht in denselben Beziehungen stehen wie Gegenstände. Sie in diesen zu denken, wäre nicht falsch, sondern unmöglich. Daher bezeichnen die Wörter ‚Beziehung des Subjekts zum Prädikat' zwei ganz verschiedene Beziehungen, je nachdem das Subjekt ein Gegenstand oder selbst ein Begriff ist. Am besten wäre es daher, die Wörter ‚Subjekt' und ‚Prädikat' ganz aus der Logik zu verbannen, da sie immer wieder dazu verführen, die beiden grundverschiedenen Beziehungen des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff und [der] Unterordnung eines Begriffs unter einen Begriff zu vermengen." (ASB 28) Die „Grundverschiedenheit" von gegenständlichen Begriffen 1. Stufe und logischen Begriffen 2. Stufe bedeutet auf keinen Fall, dass Gesetzesaussagen, wie **FREGE** behauptet, keine eindeutig bestimmbare Subjekt/Prädikand – Prädikat-Struktur haben; auch Gesetzesaussagen haben einen Sinn nur dann, wenn wir wissen, worüber (über welchen Prädikanden) genau was (was für ein Prädikat) behauptet wird.

Bei den Gesetzesaussagen verzichtet **FREGE** darauf, seine Zerfällungsoperation anzuwenden: aber auch hier kann der Satz in den Subjektausdruck und den Prädikatsausdruck zerlegt werden; im Satz

„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Mensch** zukommt, kommt der Begriff **sterblich** zu"

kann der Prädikand (das Subjekt), nämlich das Begriffspaar (**Mensch**, **sterblich**) durch jedes andere (kategorial geeignete) Begriffspaar ersetzt werden (die veränderten Teile des Ausdrucks sind im Folgenden fett gedruckt):

„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Grieche** zukommt, kommt der Begriff **Mensch** zu"
„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Säugetier** zukommt, kommt der Begriff **Wirbeltier** zu"
„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Vogel** zukommt, kommt der Begriff **Lurch** zu" usw.

Bei jeder Ersetzung resultiert eine wahre oder falsche Gesetzesaussage. Durch diese Ersetzungsoperation lässt sich dann die logische Relation (Struktur einer Gesetzesaussage)

„Allen Gegenständen, denen der Begriff **S** zukommt, kommt der Begriff **P** zu" gewinnen. Es gibt auch hier die Möglichkeit das Prädikat durch andere geeignete *logische* Prädikate zu ersetzen, den Prädikanden aber unverändert beizubehalten; auch hier resultieren aus den Ersetzungen wiederum wahrheitswertdefinite Gesetzesaussagen:

> „**Allen Gegenständen, denen der Begriff** Mensch **zukommt, kommt der Begriff** sterblich **nicht zu**"
> „**Einigen Gegenständen, denen der Begriff** Mensch **zukommt, kommt der Begriff** sterblich **zu**"
> „**Nicht allen Gegenständen, denen der Begriff** Mensch **zukommt, kommt der Begriff** sterblich **zu**"
> usw.

Die logische Reflexion kann durchaus mit derartigen Ersetzungsoperationen beginnen; im weiteren wären dann die genaue Bedeutung dieser und der mit ihnen synonymen Ausdrücke logischer Formen zu bestimmen (diese entscheidende Frage nach den Bedeutungen kann durch die Durchführung der fregeschen Zerfällungsoperationen natürlich nicht beantwortet werden); schließlich müsste die Analyse der Bedeutungen der so aufgefundenen logischen Relationen auf die konstitutiven Strukturelemente der logischen Formen führen, auf deren Grundlage dann unabhängig von besonderen sprachlichen Ausdruck und den logischen Ausdrucksmöglichkeiten der besonderen Sprachen jede beliebige logische Form konstruiert werden kann. **FREGE** freilich ist diesen Weg nicht gegangen. Anstatt zu untersuchen, wie denn genau sich die Subsumtionsbeziehung von Gegenstand und Begriff von den logischen Beziehungen zwischen Begriffen selbst unterscheiden, hat es **FREGE** bei der nicht näher ausgeführten Versicherung einer fundamentalen Verschiedenheit belassen. „Die Begriffe zweiter Stufe, unter welche Begriffe fallen, sind wesentlich verschieden von den Begriffen erster Stufe, unter welche Gegenstände fallen." (BG 75f [201]). Eine nähere Bestimmung dieser und anderer Begriffsverhältnisse kann **FREGE** nicht geben.

4.2.5. Übergang zu Freges Verständnis der Quantifikation — die Konzeption der „Aussageformen"

FREGE hat nicht nur seine Erkenntnis, dass Gesetzesaussagen Beziehungen zwischen Begriffen betreffen, nicht fruchtbar gemacht, er hat diese Einsichten schließlich wieder fallen lassen, und sogar eine Konzeption der Gesetzesaussagen entworfen, die dieser Einsicht widerspricht. Es ist ihm entgangen, dass seine Bestimmung der Wenn$_1$-Gesetzesaussage als Beziehung von Begriffen nicht zusammenpasst mit seinem willkürlichen SFG-Postulat, wonach die Wenn-Beziehungen und alle anderen logischen Verhältnisse zwischen wahrheitswertdefiniten Aussagen bestehen sollen. Versucht **FREGE** nämlich die logischen Verhältnisse durch seine Gedankengefüge darzustellen, vergisst er, dass er eine Aussage wie „Wenn etwas Mensch ist, ist es sterblich" als (Gesetzes-)Aussage über das Verhältnis von zwei *Begriffen*, denen jeweils kein Wahrheitswert zugesprochen werden kann, nicht aber als Relation wahrheitswertdefiniter *Aussagen* bestimmt hat. Im Irrglauben, die Wenn-Gesetzesbeziehung lasse sich durch das Gedankengefüge 𝕮 ausdrücken, stellt er sogar in Frage, dass Gesetzesaussagen wie „Wenn eine Zahl a größer als 1, dann ist a größer als 0" überhaupt schon sinnvolle Ausdrücke sind; sind doch die Relata „etwas ist ein Mensch" und „es ist sterblich" keine wahrheitswertdefiniten Aussagen, wie für 𝕮-Aussagen zu fordern ist. **FREGE** lässt sich dabei auch durch die Tatsache irre machen, dass die Begriffsbezeichnungen „etwas ist P" – abgekürzt „P(x)" – mit Hilfe von Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände den Begriff auf irgendwelche beliebigen Gegenstände beziehen (die Bezeichnung eines Begriffs oder Prädikats P, die diesen Bezug auf beliebige Gegenstände x betont, also „P(x)" ist unter Hervorhebung des intensionalen Aspektes ein *Prädikator*, unter Betonung des extensionalen Aspektes die Bezeichnung einer *Sachverhalts-/Ereignisklasse*). Hierbei ignoriert **FREGE** aufgrund seiner Dissoziation von Begriff und Gegenstand, dass Begriffe nicht gegenüber den Gegenständen verselbstständigt werden dürfen, sondern immer auf die Gegenstände, denen sie jeweils zukommen, bezogen sind – dieser untrennbare Bezug eines Prädikats P auf Gegenstände wird im Ausdruck „P(x)" mit Hilfe des Beliebig-Element-Zeichens x für Individuen dargestellt[35].

Beliebig-Element-Zeichen sind für **FREGE** jedoch gar keine echten Zeichen, sondern „leere Eigennamen", recht besehen sinn- und bedeutungslos. Ein Beliebig-Element-Zeichen „‚*a*' deutet einen Gegenstand an, hat keine Bedeutung, bezeichnet oder bedeutet nichts." (EL 82f; auch Briefe IX/4, 104; GLG I, 263 [320], Fn.2; GLG I-III; 283 [295]; GLG III-V, 302 [385], Fn.3) „Buchstaben, die einem Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen sollen, … sollen nichts bezeichnen, sondern nur andeuten…" (GLG I-III, 302) Wegen der angeblichen Bedeutungslosigkeit der Beliebig-Element-Zeichen x, y, z,… für Gegenstände, besitzen für **FREGE** dann auch die konkreten Prädikatoren 𝔓(x), die Bezeichnungen für Sachverhalts-/Ereignisklassen (d.h. **Sachverhaltsausdrücke**) keinen rechten Sinn; sie sind ihm „uneigentliche Sätze“, „Schemata von Aussagen“ oder „mögliche Aussagen“. „Wenn ein leerer Eigenname in einem Satze vorkommt, dessen übrige Teile bekannt sind, so dass der Satz einen Sinn bekommt, wenn jenem Eigennamen ein Sinn gegeben wird, so haben wir in diesem Satze, solange der Eigenname noch leer ist, eine mögliche Aussage, aber keinen Gegenstand, von dem etwas ausgesagt wird. So haben wir in dem Satze ‚*x* ist eine Primzahl‘ zwar eine mögliche Aussage; solange aber dem Buchstaben ‚*x*‘ keine Bedeutung gegeben ist, fehlt uns der Gegenstand, von dem etwas ausgesagt wird. Wir können dafür sagen: wir haben einen Begriff, aber noch keinen Gegenstand, der unter ihn subsumiert wird.“ (LM 109f; auch GLG III-V, 297 [379]) „Die einzelnen uneigentlichen Sätze, aus denen das Satzgefüge besteht, sind, aus dem Zusammenhang des Ganzen herausgerissen, unbrauchbar und haben keinen Sinn, wiewohl sie Teile haben mögen, die sinnvoll sind.“ (Briefe IX/4, 105) Der „uneigentliche Bedingungssatz“ „$a > 2$“ habe „vereinzelt noch gar keinen Sinn…, vielmehr ergäbe er „erst zusammen mit dem eigentlichen Folgesatze ‚so ist $a + 1 > 2$‘ ein sinnvolles Ganzes.“ (Briefe IX/4, 106) Begriffsbezeichnungen entbehren für FREGE schließlich gänzlich jedes Sinnes. „Solange die unbestimmt andeutenden Buchstaben nicht durch Eigennamen ersetzt sind, hat die linke Seite“ – in einem Gesetz wie: *Wenn a und b ganze Zahlen sind und (a - b) ein Vielfaches von 7 ist, dann ist a kongruent b beim Modul 7* – „allein keinen Sinn und ebenso wenig die rechte Seite.“ (LM 135)

FREGEs Behauptung, Sachverhaltsausdrücke besäßen weder einen klaren Sinn, noch eine eindeutige Bedeutung, ist falsch, denn wir verbinden mit einem Ausdruck wie „$a > 1$“ durchaus einen klaren und eindeutigen Sinn, wir können den Sinn des Ausdrucks „eine (natürliche) Zahl ist größer als 1“ klar vom Sinn anderer Sachverhaltsausdrücke wie „eine natürliche Zahl ist kleiner als 1“, „das Quadrat einer natürlichen Zahl a ist größer als 1“ usw. unterscheiden. Wir können nicht nur davon reden, dass diese bestimmte Blume rot, dieses bestimmte Kind Scharlach hat, usw., sondern auch davon, dass eine beliebige Blume rot, ein beliebiges Kind Scharlach hat; die präzise gegenseitige Abgrenzung solcher Sachverhalts-/Ereignisklassen, die Kenntnis der Bedingungen dafür, dass irgendein derartiger Fall vorliegt, ist eine notwendige Voraussetzung, um im Einzelfall eine entsprechende Feststellung treffen zu können. Wir können über diese Sachverhalts-/Ereignisklassen Aussagen treffen (z.B. „es ist realmöglich, dass eine ganze Zahl a größer als 1 ist“, „es ist nichtrealmöglich, dass die Quadrierung einer ganzen Zahl a auf eine negative Zahl –b führt“, „wenn eine natürliche Zahl a größer als 1 ist, genau dann 1 kleiner als a“ usw.). Diese Urteile über Sachverhalts-/Ereignisklassen wären unmöglich, hätten die Sachverhaltsausdrücke nicht auch für sich, außerhalb des jeweiligen Zusammenhangs bestimmter Sätze einen klar definierten und eindeutigen Sinn. Würden Prädikatoren/Sachverhaltsausdrücke für sich alleine nichts bezeichnen, müsste das auch im Zusammenhang eines Satzes gelten. FREGE gesteht hier nur den behauptenden, nicht aber den einen Begriff/eine Sachverhalts-/Ereignisklasse benennenden Ausdrücken Sinn zu[36].

Weil nun Gesetzesaussagen *immer* solche allgemeinen Sachverhaltsausdrücke enthalten, gerät FREGE in Zweifel, ob er ihnen überhaupt einen Sinn zubilligen darf. Bald bejaht, bald verneint er es. An einigen Stellen bewertet FREGE Gesetzesaussagen im Gegensatz zu den angeblich sinnlosen Sachverhaltsausdrücken, die Teile dieser Aussagen sind, als sinnvoll: Ein Satz wie „wenn $a > 1$, dann $a > 0$)“ sei eine sinnvolle arithmetische Aussage (GLG III-V, 315 [400])[37]. An anderen Stellen, insbesondere wenn er unzulässigerweise eine implikative Gesetzesbeziehung mit Hilfe des Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ darstellt, behauptet FREGE, die Gesetzesaussage habe noch keinen Sinn; erst wenn der Ausdruck „Wenn etwas Mensch ist, ist es sterblich“ durch Ersetzung der Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände durch die Bezeichnung konkreter Gegenstände etwa zu „Wenn Cato ein Mensch ist, ist er sterblich“ verändert werde, ergebe sich eine wahrheitswertdefinite Aussage (LM 109). Der Satz „Wenn a ein Mensch ist, dann ist a sterblich“ sei nicht mit behauptender Kraft verbunden (LA 170). FREGEs Auffassung wird so in sich widersprüchlich – einerseits erkennt er, dass Gesetzesaussagen Allgemeines betreffen, andererseits spricht er den Gesetzesaussagen, weil diese Allgemeinheit mit Hilfe von angeblich bedeutungslosen Beliebig-Element-Zeichen für Individuen (bei logischen Gesetzen kommen Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate hinzu) den Aussagecharakter ab[38].

Die irrige Auffassung, Gesetzesaussagen seien noch keine richtigen wahrheitswertdefiniten Aussagen, erscheint vom Standpunkt FREGEs vollends zwingend, wenn bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge unzulässigerweise mit Hilfe von Gedankengefügen darstellt werden; ein Ausdruck wie $\mathfrak{Mensch}(x) \Rightarrow \mathfrak{Sterblich}(x)$ hat in der Tat noch keine definierte Bedeutung (denn die empirisch-konkreten Sachverhalts-/Ereignisklassen (oder Prädikatoren) $\mathfrak{Mensch}(x)$ und $\mathfrak{Sterblich}(x)$ sind ja keine wahrheitswertdefiniten Aussagen – der Ausdruck ist gar nicht definiert, weil als Relata des Gedankengefüges keine wahrheitswertdefiniten Aussagen auftreten.

In der „modernen Logik“ nennt man Ausdrücke wie „$\mathfrak{Mensch}(x) \Rightarrow \mathfrak{Sterblich}(x)$“ „***Aussagefunktionen***“ oder „***Aussageformen***“: diese uneigentlichen, „provisorischen“, „nur möglichen“ Aussagen würden erst dann zu sinnvollen, behauptenden und wahrheitswertdefiniten Aussagen, wenn die Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände („Individuenvariablen") durch die Bezeichnungen von Gegenständen (Eigennamen und Kennzeichnungen, so genannte Individuenkonstanten), ersetzt werden; aufgrund dieses angeblichen Angelegtseins der Beliebig-Element-Zeichen („Variablen") auf die Ersetzung durch „Konstanten" werden die Beliebig-Element-Zeichen meistens als „Platzhalter", oder „Stellvertreterzeichen" bezeichnet[39]. Neben solchen Ersetzungen besteht eine zweite Möglichkeit, Aussageformen in wahrheitswertdefinite Aussagen zu überführen, darin, über eine solche Aussageform eine Aussage zu treffen, ob sie bei einigen (zumindest einer), bei allen oder bei keinen *Variablenersetzungen* (Ersetzungen der „Variablen" durch geeignete „Konstanten") zu einer wahren oder falschen Aussage wird. Solche *Erfüllbarkeitsaussagen* über Aussageformen werden mit Hilfe der so genannten *Quantoren* gebildet.

Indem den Zeichen des SFG Bezeichnungen für konkrete und beliebige Prädikate, Bezeichnungen konkreter und beliebiger Individuen, sowie Bezeichnungen von Quantoren hinzugefügt werden, wird das SFG (die „Aussagenlogik") zur sog. „Prädikatenlogik" erweitert. Im Folgenden werde ich darlegen, welche unterschiedlichen Arten von „prädikatenlogischen" Ausdrücken sich im Zuge dieser Erweiterung bilden lassen und was ihre Bedeutung entsprechend den getroffenen Festsetzungen ist; ich werde, ihre Wahrheitsbedingungen erläutern, falls es sich um behauptende Ausdrücke handelt. Wir werden uns mit den oft schwerwiegenden logischen Missdeutungen befassen müssen, denen diese prädikatenlogistischen Ausdrücke, wie schon die Ausdrücke des SFG, unterzogen werden; es ist zu prüfen, ob und in welchem Umfang durch diese Erweiterung Gesichtskreis und Grenzen des SFG, insbesondere die Prinzipien der Zusammenhanglosigkeit und der „Wahrheitsfunktionalität", überschritten werden, ob und in welchem Ausmaß **FREGE** wenigstens im Rahmen des „Prädikatenlogik" logische Formen und Gesetze darstellen kann, und welche Möglichkeiten im Rahmen seines System bestehen, „prädikatenlogische" Gesetze zu rechtfertigen. Eine zentrale Frage wird sein, wie sich **FREGE**s Dissoziation von logischer Beziehung und Allgemeinheit auf seine Bestimmung logischer Gesetzeszusammenhänge auswirkt. Der für die „moderne Logik" charakteristische Synkretismus von logischer Form und logischem Gesetz wird uns beschäftigen. Es ergibt sich, dass die Annahme, man müsse die logischen Relationen zuerst von der Allgemeinheit ablösen, wenn man ihren Gehalt rein und unverfälscht bestimmen will, die fragwürdigste und folgenschwerste der Voraussetzung ist, von denen sich **FREGE** bei seinem Versuch einer Neugestaltung der Logik hat leiten lassen; sie hat ihm die Einsicht in die Struktur der logischen Formen verbaut und die theoretische Logik für viele Jahrzehnte in eine trostlose Sackgasse geführt.

4.3. Ausdrücke des SFG

Zu den begriffsschriftlichen Darstellungsmitteln des SFG gehören Bezeichnungen für Aussagen, Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen („Aussagevariablen") und Bezeichnungen für Gedankengefüge. Wird zwei wahrheitswertdefiniten Aussagen ein Gedankengefüge prädiziert – etwa in den Sätzen „Von den Sätzen ‚$2+2=5$' und ‚$2\cdot 2=4$' sind jedenfalls nicht beide falsch" ≡ „$(2+2=5) \bar{\vee} (2\cdot 2=4)$" – so ist dies eine wahre (wie im Beispiel) oder falsche ***Gedankengefügeaussage***. Mit Hilfe der Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen lassen sich die Gedankengefüge als spezielle allgemeine Prädikate darstellen; „$A \Rightarrow B$" und „$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$" benennen solche prädizierbaren *Gedankengefüge* (ich sage auch ***Gedankengefügeschemata***). Aus den besprochenen Gründen werden diese Ausdrücke von den Logistikern nicht als eindeutig bestimmte Prädikatoren aufgefasst, sondern als Aussageformen mit unbestimmt-provisorischer Bedeutung, die angeblich erst dann eine fest umrissenen Bedeutung erhalten, wenn sie durch Variablenersetzung oder durch ihre Charakterisierung als allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar zu Aussagen werden. Gedankengefügeschemata werden so auf zweierlei Art verwendet – es lässt sich die *prädikative* von der *thematischen Verwendung* unterscheiden.

Zum einen werden die Gedankengefüge-Schemata irgendwelchen vorgegebenen Aussagen zugesprochen; für die Logistiker stellt sich das als „Variablenbeseitigung" oder „Variablenersetzung " dar: die Gedankengefüge-Aussage „$(3\cdot 2 = 5) \Rightarrow (4^2 = 16)$" geht durch Variablenersetzung aus dem Gedankengefüge-Schema „$A \Rightarrow B$" hervor; es resultieren wahrheitswertdefinite tautologische (nicht-informative) oder informationsvermindernde Aussagen; das Gedankengefügeschema ist ein *Prädikat*, das konkreten wahrheitswertdefiniten Aussagen zugesprochen wird. Andererseits können *über* Gedankengefügeschemata Erfüllbarkeitsaussagen getroffen werden, etwa in der Behauptung „Das Gedankengefüge-Schema ›$A \Rightarrow B. \Rightarrow .A \bar{\vee} B$‹ wird für manche Variablenersetzungen wahr" (es wird die „**Erfüllbarkeit**" des Schemas behauptet); oder es wird gesagt, dass ein Schema, z.B. „(A&B)

& (~A&~B)“ für jede Einsetzung falsch wird (es wird die „**Nichterfüllbarkeit**“ des Schemas behauptet); es kann schließlich geurteilt werden, dass ein Schema, etwa „(A&B) ⇒ (A⇒B)“, für jede Einsetzung wahr wird (es wird die „**Allgemeingültigkeit**“ des Schemas behauptet). Die Beurteilung von Gedankengefügeschemata als erfüllbar, nicht erfüllbar oder allgemeingültig, ist eine thematische Verwendung der Prädikator-Schemata, denn das Gedankengefüge-Schema wird *Thema* einer Aussage; solche Erfüllbarkeitsaussagen sind, wie erwähnt, bereits spezielle Quantifikationen in der Menge der Aussagen. Ob ein solches Gedankengefüge-Schema allgemeingültig, erfüllbar ist oder nicht, besagt überhaupt nichts über den Zusammenhang der in dieses Schema eingesetzten Aussagen: das *Prinzip der Zusammenhanglosigkeit* gilt unbeschränkt, d.h. in den Ausdrücken des SFG bleibt jeder logische und andere Zusammenhang unberücksichtigt.

Die Gedankengefüge sind strikt von den zwischen ihnen bestehenden logischen Gesetzesbeziehungen zu unterscheiden; wie zwischen allen anderen wohlbestimmten Prädikaten bestehen zwischen den Gedankengefügen, die selber keine logische Formen sind, eindeutig bestimmbare logische Beziehungen; so sind die beiden Gedankengefüge (A & B) und (A ⇒ B) durch die logische Beziehung der Implikation verbunden. Diese logischen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen habe ich *Gesetze des SFG* genannt; sie können mit den Ausdrucksmitteln der Begriffsschrift nur unvollständig dargestellt werden. Auf Grund seiner Missdeutung des Gedankengefüges $\mathbf{C}$ als logische Implikation $\mathbb{C}$ verwechselt FREGE die *Gesetze des SFG* mit den *Fregegesetzen*, etwa das Gesetz des SFG (A & B) → (A ⇒ B) mit dem Fregegesetz (A & B) ⇒ (A ⇒ B), welches besagt, dass keinem Aussagenpaar (A, B) das Gedankengefüge $\mathbf{K}$ zukommt, das Gedankengefüge $\mathbf{C}$ aber nicht zukommt; ersetzen wir die sekundären Bezeichnung A ⇒ B durch die primäre Bezeichnung ¬(A & ¬B), reduziert sich diese Bedeutung auf die Aussage, dass eine Aussage B nicht zugleich wahr und falsch sein kann – in dieser partiellen Darlegung des PNW besteht der armselige Gehalt *aller* Fregegesetze; dieses dürftige „Resultat“ des SFG ist zugleich die einzige *logische* Voraussetzung der „Aussagenlogik“. Die Logistik kennt verschiedene Verfahren – zum Beispiel das mechanisch-gedankenlose fregealgebraische Ausrechnen –, um die Gültigkeit der unbegrenzt vielen, völlig nichts sagenden Fregegesetze nachzuweisen; diese Tatsache wird vorgestellt als „Lösung des Entscheidungsproblems“ für den „klassischen zweiwertigen Aussagenkalkül“[40].

Die fehlende Unterscheidung der Gesetze des SFG und der Fregegesetze führt zusammen mit der Meinung, die „Aussagevariablen“ enthaltenden Ausdrücke der Gedankengefüge besäßen, weil sie keine Aussagen sind, noch keinen rechten Sinn, zu einer weiteren Verunklarung: die Ausdrücke der Gedankengefüge – etwa „A ⇒ B“ – und die (begriffsschriftlich zu Fregegesetzen abgeschwächten) Ausdrücke der logischen Beziehungen zwischen Gedankengefügen – etwa „(A & B) ⇒ (A ⇒ B)“ – firmieren unterschiedslos als „Aussageformen“, wobei die Gedankengefügeausdrücke erfüllbar (und nicht allgemeingültig), die Fregegesetzausdrücke allgemeingültig sind; nur letztere sollen, weil „aus rein logischen Gründen wahr“ für die Logik von Interesse sein, nicht jedoch die nur erfüllbaren Gedankengefüge[41]. Die Konzeption der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit mystifiziert somit bereits auf dem Felde der „Aussagenlogik“ die Zusammenhänge, da im Konzept der „Aussageformen“ der wesentliche Unterschied zwischen den Gedankengefügen und den logischen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen verwischt wird. Der Konfusion von Gedankengefüge und Gesetz des SFG werden in der Prädikatenlogistik als Verwechslung bzw. Nichtunterscheidung von logischer Form und logischem Gesetz (logische Beziehungen zwischen logischen Formen) wieder begegnen.

Die Erfüllbarkeitsaussagen über SFG-„Aussageformen“ stellen bereits Quantifikationen in genau dem Sinne dar, wie die Quantifikation im Rahmen der Prädikatenlogistik bestimmt wird: Eine *SFG-Aussageform* ist *allgemeingültig*, wenn *jede* Ersetzung aller „Aussagevariablen“ der „Aussageform“ durch Bezeichnungen konkreter wahrheitswertdefiniter Aussagen aus der „Aussageform“ eine wahre Gedankengefügeaussage macht. *Erfüllbar* ist eine SFG-Aussageform, wenn *zumindest eine* derartige Ersetzung auf eine wahre Gedankengefügeaussage führt. Dass die Quantifikation der SFG-Aussageformen allerdings anders als später in der Prädikatenlogistik benannt und bezeichnet wird, nicht mit den Quantoren ∀ und ∃, sondern etwa durch den Behauptungsstrich ⊢, der vor eine solche „Aussageform“ gesetzt wird, oder überhaupt nicht explizit dargestellt wird (wenn von jeder angeführten „Aussageform“ die Allgemeingültigkeit behauptet wird), ändert nichts an der Gleichheit in der Sache[42]. Bei der Erweiterung des SFG zur Prädikatenlogistik ist demnach nicht die Quantifikation tatsächlich neu[43], sondern allein der Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Individuen und von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate.

4.3.1. Prädikatoren — Gedankengefügeprädikate — Quantoren

1. Die Erweiterung des Systems der fregeschen Gedankengefüge zur Prädikatenlogistik weist drei zusammenhängende und sich gegenseitig verstärkende Mängel auf, die zu Missdeutungen der prädikatenlogistischen Ausdrücke führen. Ich werde diese Unzulänglichkeiten bereits jetzt kurz umreißen und sie, falls nötig, später ausführlicher behandeln. Die Probleme, die daraus resultieren, dass die Relata der Gedankengefüge gemäß **FREGE**s Postulat der Aussagenbezogenheit Aussagen sind, in der Prädikatenlogistik jedoch Begriffe (Prädikatoren, Sachverhalts-/Ereignisklassen) durch Gedankengefüge verbunden werden, werden entweder gar nicht zur Kenntnis genommen oder nur oberflächlich abgehandelt. Die Versuche, die Gedankengefüge mit Begriffen (Prädikatoren) kompatibel zu machen, führt zur **Konzeption der Aussageformen**; diese Konzeption verhindert jedoch die klare Unterscheidung der logischen Formen und logischen Gesetze, wodurch es zu einer erheblichen Verzerrung des Gegenstandes der theoretischen Logik kommt.

2. Oft wird versucht, die simplen Entscheidungsprozeduren des SFG – insbesondere die „Methode der Wahrheitstafeln“ – zum Muster auch der Entscheidung der Gültigkeit prädikatenlogistischer Ausdrücke zu machen und auch diese Ausdrücke als „Wahrheitsfunktionen“ aufzufassen und zu entscheiden; dies führt zu einer Entstellung des so genannten *Entscheidungsproblems.* Der Übergang vom SFG (der „Aussagenlogik“) zur Prädikatenlogistik ist schon alleine deshalb mit tiefen Missverständnissen befrachtet, weil ja bereits das SFG mit unsachgemäßen logischen Deutungen bedacht wird. Aus der Tatsache, dass die Wahrheit von Gedankengefügeaussagen nur vom vorgegebenen Wahrheitswert der prädizierten Aussagen abhängt (damit nur indirekt von der Bedeutung dieser Aussagen[44]), wird der falsche Schluss gezogen, bei der Entscheidung der Wahrheit von SFG-Formeln könne man die Bedeutungen dieser vorgegebenen Aussagen unbeachtet lassen. Es wird dann nach einem automatisiert-gedankenlosen Verfahren gesucht, das wie die „aussagenlogischen“ Entscheidungsverfahren die Mühe erspart, systematisch auf die Bedeutung der zu rechtfertigenden Ausdrücke einzugehen[45]. Bei der Bewertung und Rechtfertigung der Wahrheit einer jeden Behauptung kommt es jedoch zunächst ausschließlich auf die Bedeutung an – man muss zuerst einmal wissen, was überhaupt behauptet wird[46]. Aufgrund dieser falschen Dissoziation von Bedeutung und Wahrheitsbedingung logischer (oder angeblich logischer) Ausdrücke glaubt man auf eine sorgfältige Analyse und systematische Typisierung der Bedeutung der prädikatenlogistischen Ausdrücke verzichten zu können, als ob für die Logik die Bedeutung vernachlässigbar sei, wenn man nur den Wahrheitswert einer Formel kenne. Die erste Bedingung für den Aufbau eines Entscheidungsverfahrens für prädikatenlogistische Ausdrücke ist jedoch die genaue Bestimmung der Bedeutung jeder einzelnen prädikatenlogistischen Formel. Ich versuche im Folgenden, die Bedeutungen prädikatenlogistischer Ausdrücke herauszuarbeiten und nach Typen zu klassifizieren.

3. In der Prädikatenlogistik ist schließlich niemals von diesem oder jenem konkreten Prädikat die Rede, sondern nur von beliebigen Prädikaten – in prädikatenlogistischen Ausdrücken kommen generell nur Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate („Prädikatvariablen“) vor, nicht etwa Bezeichnungen konkreter Prädikate. Die Einführung von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate ist das Charakteristikum der theoretischen Logik – sie markiert den Beginn der *theoretischen* Logik als der Wissenschaft von den logischen Zusammenhängen der Begriffe; es geht dabei nicht um diesen oder jenen Begriff, sondern um jeden beliebigen Begriff, d.h. um die Normen und Gesetzmäßigkeiten, denen jeder beliebige Begriff (sei es generell oder unter bestimmten Bedingungen) unterliegt. Dieser oder jener konkrete Begriff ist nur involviert, sofern er Begriff ist. Die Begriffe der theoretischen Logik sind daher samt und sonders Begriffe von Begriffen („Begriffe zweiter Stufe“ wie **FREGE** sagt); die logischen Formen sind spezielle Beziehungen zwischen Begriffen, und die Darlegung logischer Gesetzmäßigkeit involviert daher von Anfang an eine Quantifikation im Bereich der Begriffe, d.h. Aussagen über das, was für alle Begriffe generell oder unter bestimmten Bedingungen gilt.

Dieser die Logik auszeichnende Schritt von der begrifflichen Erkenntnis der gegenständlichen Wirklichkeit, die nur konkrete Prädikate kennt, zur begrifflichen Erkenntnis dieses Erkennens, die sich insbesondere in der Bezugnahme auf beliebige Begriffe, daher im Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Begriffe/Prädikate offenbart, wird in seiner methodischen Bedeutung und in seinen Konsequenzen in der Prädikatenlogistik generell verkannt. Dass es in der Prädikatenlogistik von vornherein alleine um beliebige Prädikate und ihre Gesetzmäßigkeit geht, dass demnach von vornherein in der Menge der Prädikate quantifiziert wird, wird sogar ausdrücklich geleugnet; es wird die Konzeption einer „Stufigkeit“ der Prädikatenlogistik entworfen und unterstellt, die Prädikatenlogistik sei zuerst als „Prädikatenlogistik erster Stufe“ zu entwickeln, in der nur Quantifikationen über Individuenvariablen, nicht aber über Prädikate zulässig sei. Wäre dies richtig, dürften in den Formeln der Prädikatenlogistik keine „Prädikatvariablen“ auftreten, da eine Quantifikation über Individuen nur bezüglich empirisch-konkreter Prädikate möglich ist; das Verallgemeinerungsniveau der theoretischen Logik könnte in einer solchen „Prädikatenlogistik erster Stufe“ erst gar nicht erreicht werden.

Diese kurz umrissenen Unzulänglichkeiten – die Konzeption der Aussageformen, die fehlende oder unzureichende Einsicht in den *nicht*-„wahrheitsfunktionalen“ Charakter vieler prädikatenlogistischen Behauptungen und die Leugnung der Tatsache, dass in der Prädikatenlogistik von vornherein und ausschließlich im Bereich der Prädikate quantifiziert wird – müssen bei der Beurteilung der Erweiterung der „Aussagenlogik“ zur „Prädikatenlogik“ immer in Rechnung gestellt werden.

Zu den Zeichen des SFG treten in der Prädikatenlogistik als Bezeichnungen für beliebige Individuen (Gegenstände) die Buchstaben $x, y, z, \ldots$, als Bezeichnungen beliebiger Prädikate die Buchstaben F, G, …P, Q, …, P_1, P_2, …), sowie als Bezeichnungen für den All- und Existenzquantor die Zeichen $\forall$ und $\exists$. Welche Bedeutungen Ausdrücke, die diese neuen Zeichen enthalten, annehmen, wird dabei von den vorausgesetzten Konzepten des SFG, insbesondere von den Gedankengefügen, mitgeprägt. Hält man sich strikt und ausschließlich an die Bedeutungen, die **FREGE** für alle diese Zeichen eindeutig und unmissverständlich festgelegt hat, lässt sich von *jeder* beliebigen Kombination dieser Zeichen eindeutig entscheiden, ob sie einen sinnvollen Ausdruck darstellt, was jeder sinnvolle Ausdruck bedeutet, ob die sinnvollen Ausdrücke benennend oder behauptend sind, und ob schließlich die behauptenden Ausdrücke wahr oder falsch sind. Ich gehe im Folgenden v.a. den Fragen nach, welche der prädikatenlogistischen Ausdrücke den Gesichtskreis des SFG überschreiten, ob mit den erweiterten Darstellungsmitteln logische Formen oder logische Gesetze, wenn ja, welche, bezeichnet werden können, und ob diese *logischen* Sachverhalte im Rahmen der „modernen Logik“ sachgemäß, d.h. entsprechend den eigenen Festsetzungen aufgefasst werden.

4.3.2. Feststellungen: einem n-Tupel von Gegenständen wird ein n-stelliges Prädikat zugeordnet

In den Formeln der Prädikatenlogistik erscheinen weder Bezeichnungen empirisch-konkreter Prädikate und konkreter Prädikatoren auf wie „*Mensch*“ – „*Mensch*(x)“, „*größer oder gleich*“ – „$n \geq m$“ oder „*Vater*“ – „x ist Vater von y“, usw., noch Bezeichnungen konkreter Individuen oder Gegenstände (Eigenname und Kennzeichnungen) wie *Hans*, *der Vater von Johannes Sebastian Bach* usw.; als abkürzende Bezeichnungen *konkreter* Prädikate/Prädikatoren verwende ich Frakturbuchstaben wie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ usw., als abkürzende Bezeichnungen konkreter Individuen die Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, usw. Es kommen einzig Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate („Prädikatvariablen“) und Beliebig-Element-Zeichen für Individuen („Individuenvariablen“) vor. Da im Anschluss an **FREGE** Beliebig-Element-Zeichen keine oder zumindest keine rechte Bedeutung haben sollen, sie vielmehr für „nur andeutend“ und „mehrdeutig“ gelten und Beliebig-Element-Zeichen enthaltenden Ausdrücken eine präzise Bedeutung erst dann zugebilligt wird, wenn die Beliebig-Element-Zeichen durch entsprechende Bezeichnungen konkreter Prädikate und Individuen *ersetzt* werden, müssen wir zunächst prüfen, welche Arten prädikatenlogistischer Ausdrücke sich für diese konkreten Bezeichnungen in Kombination mit Bezeichnungen für Gedankengefüge und Quantoren bilden lassen.

Mit Hilfe der Ausdrücke „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$“, „$\mathfrak{Q}(\mathfrak{b})$“, usw. schreiben wir konkreten Gegenständen $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ bestimmte begriffliche Prädikate zu: „Mensch(Sokrates)“ in der Bedeutung „Sokrates ist ein Mensch“ oder „Dem Gegenstand/Individuum Sokrates kommt das Prädikat Mensch zu“ usw.; das Prädikat kann eine beliebige Stelligkeit aufweisen; der Ausdruck „$\leq(4,6)$“ hat die Bedeutung „4 ist entweder kleiner oder gleich 6“, der Ausdruck „liegt auf dem Zahlenstrahl zwischen(7, 3, 11)“ hat die Bedeutung „7 liegt auf dem Zahlenstrahl zwischen 3 und 11“, usw. Diese Ausdrücke sind wahrheitswertdefinite Feststellungen und können, wie alle Aussagen, durch Gedankengefüge gekennzeichnet werden, sofern ihre jeweiligen Wahrheitswerte schon bekannt sind. So ist die tautologisch vorgegebenen Wahrheitswerte ausdrückende Gedankengefügeaussage „Mensch(Sokrates) & $\leq(4,6)$“ wahr, die informationsverschleiernde Gedankengefügeaussage „Mensch(Sokrates) $\Rightarrow \leq (4,6)$“ ist wahr, die ebenfalls informationsverschleiernde Gedankengefügeaussage „Mensch(Sokrates) $\bowtie \leq (4,6)$“ ist hingegen falsch. Wir verbleiben noch völlig im Gesichtskreis des SFG mit seinen Prinzipien der Beziehungslosigkeit, der „Wahrheitsfunktionalität“ und Gehaltlosigkeit – jeder logische Zusammenhang bleibt noch außer Betracht.

4.3.3. Konkrete Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren als Aussageformen

Wird die Bezeichnung eines konkreten Prädikat $\mathfrak{P}$ mit Beliebig-Element-Zeichen für Individuen verbunden, erhalten wir Sachverhaltsausdrücke (Bezeichnungen von Sachverhalts-/Ereignisklassen) „$\mathfrak{P}(x)$“, „$\mathfrak{Q}(y)$“ – irgendeinem Gegenstand (des zu $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ gehörenden Bezugsbereichs) kommt $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ zu; die Ausdrücke „$\mathfrak{P}(x)$“ und „$\mathfrak{Q}(y)$“ *benennen* Sachverhalte bestimmter Art (Sachverhalts-/Ereignisklassen); man nennt einen solchen Ausdruck $\mathfrak{P}(x)$ auch *Prädikator*: das konkrete Prädikat $\mathfrak{P}$ in der Zuordnung zu einem *beliebigen* Gegenstand des dazugehörenden Bereichs[47]. Alle derartigen benennenden Ausdrücke haben eine eindeutige Bedeutung und bezeichnen *realmögliche* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „Mensch(x)“ – z.B. „etwas ist ein Mensch“ – oder *nichtrealmögliche* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „Hobbit(x)“ – z.B. „etwas ist ein Hobbit“.

Aufgrund der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge bestimmen die Logistiker solche Ausdrücke für *konkrete* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „Mensch(x) $\Rightarrow$ Lebewesen(x)“ als *Aussageformen*, d.h. als uneigentliche, provisorische, „unbestimmte“ Scheinaussagen, die erst zu wahrheitswertdefiniten und bestimmten Aussagen werden, wenn in den Ausdrücken die Beliebig-Element-Zeichen für Individuen durch Bezeichnungen bestimmter Individuen (Eigennamen oder Kennzeichnungen für Gegenstände) ersetzt werden. Erst nach einer solchen Ersetzung werden durch das Gedankengefüge **C** wahrheitswertdefinite Aussagen verbunden, wie es die Definition der Gedankengefüge erfordert. Aus jeder derartigen „Variablenersetzung“ resultiert eine wahrheitswertdefinite Aussage. „Aussageformen“ wie „$\mathfrak{P}(x)$“ und „$\mathfrak{Q}(y)$“ können so selber als eine Art von „Aussagevariablen“ betrachtet werden. Verbinden wir solche Ausdrücke durch Bezeichnungen von Gedankengefügen, erhalten wir Gedankengefügeschemata, wie „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)$“, „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow (\mathfrak{Q}(y) \Rightarrow \mathfrak{P}(x))$“. Für jedes Gedankengefüge-Schema – beispielsweise $A \Rightarrow B$ – erhalten wir beliebig viele solcher Ausdrücke mit konkreten Prädikatoren an Stelle der „Aussagevariablen“ – etwa „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)$“, „$\mathfrak{R}(x) \Rightarrow \mathfrak{S}(y)$“, usw. „$\mathfrak{P}(x) \models \mathfrak{Q}(x)$“ wird wahr für alle Gegenständen, denen $\mathfrak{P}$ ohne $\mathfrak{Q}$ zukommt; „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$“ wird wahr für alle Gegenstände, denen entweder $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ ohne $\mathfrak{P}$, oder weder $\mathfrak{P}$ noch $\mathfrak{Q}$ zukommen, „$\mathfrak{P}(x) \bowtie \mathfrak{Q}(x)$“ wird wahr für alle Gegenstände, denen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ genau und nur eines zukommt, usw. Solche durch Gedankengefüge verbundenen Prädikatoren nenne ich *Gedankengefügeprädikatoren* – es sind spezielle „Aussageformen“[48].

In diesen Ausdrücken erfahren die für das SFG geltenden Prinzipien der Zusammenhanglosigkeit und der „Wahrheitsfunktionalität“ eine bestimmte Einschränkung. Die Zusammenhanglosigkeit wird eingeschränkt, weil verschiedene Prädikatoren, denen ein Gedankengefüge zugesprochen wird, auf dieselbe Individuenvariable bezogen sind; im Ausdruck „$\mathfrak{P}(x) \oplus \mathfrak{Q}(x)$“ werden beide Prädikatoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ *jeweils* demselben Ereignis-Bezugssystem zugesprochen: zwischen den aus Variablenersetzungen resultierenden Relata der Gedankengefüge-Aussagen „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$“, „$\mathfrak{P}(\mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{Q}(\mathfrak{b})$“, „$\mathfrak{P}(\mathfrak{c}) \oplus \mathfrak{Q}(\mathfrak{c})$“, usw. besteht *jeweils* insofern ein Zusammenhang, als der Gedankengefügeprädikator (bei jeder Variablenersetzung) jeweils ein und demselben Gegenstand zugesprochen wird. Bei solchen *konkreten* Gedankengefügeprädikatoren macht sich deshalb *indirekt* die jeweilige logische Beziehung, die zwischen den betreffenden Prädikatoren besteht, geltend (Einschränkung der „Wahrheitsfunktionalität“). Während sich zwei „Aussagevariablen“ A und B immer durch konkrete Aussagenpaare für alle überhaupt möglichen Wahrheitswertkombinationen ersetzen lassen, ist dies bei konkreten Prädikatoren, zwischen denen eine logische Dependenzbeziehung besteht, nicht der Fall. Für das Prädikatorenpaar (Fisch(x), Vogel(x)) gibt es im universellen Bereich aufgrund der logischen Unverträglichkeit der beiden Begriffe keine Ersetzung der „Individuenvariable“ x, aus der zwei wahre Aussagen resultieren; es ist daher unmöglich, dass man aus dem Gedankengefügeprädikator „Fisch(x) $\Uparrow$ Vogel(x)“ durch Variablenersetzung eine falsche Aussage erhält. In gleicher Weise gibt es wegen der Implikationsbeziehung zwischen den Begriffen *Mörder* und *Verbrecher* für den Gedankengefügeprädikator „Mörder(x) $\Rightarrow$ Verbrecher(x)“ keine Variablenersetzung, die eine falsche Gedankengefügeaussage zum Resultat hat, usw.

Dennoch sind solche Prädikatorengedankengefüge nicht zur Darstellung logischer Zusammenhänge geeignet, denn ein **D**-Gedankengefügeprädikator drückt nicht generell die logische Unverträglichkeit, ein **C**–Gedankengefügeprädikator drückt nicht generell die logische Implikation aus; es lassen sich ja beliebig viele Paare konkreter Prädikatoren finden, für die diese Gedankengefügeprädikatoren bei manchen Ersetzungen der Individuenvariablen wahr werden, ohne dass zwischen den Prädikatoren der betreffende logische Zusammenhang besteht. Die logische Beziehung der Unverträglichkeit lässt sich so wenig wie irgendeine andere logische Beziehung durch einen einfachen Gedankengefügeprädikator ausdrücken; denn wenn beispielsweise die ■-Gedankengefüge-Aussage „katholisch(Frege) $\Uparrow$ Mecklenburger(Frege)“ wahr ist, so steht damit noch lange nicht fest, dass die Prädikate *katholisch* und *Mecklenburger* logisch unverträglich sind; diese Aussage über Frege stellt eine „Wahrheitsfunktion“ dar – ich muss, bevor ich die Gedankengefügeaussage treffe, schon wissen, dass zumindest eine der prädizierten Aussagen „katholisch(Frege)“ und „Mecklenburger(Frege)“ falsch ist. Dass der Gedankengefügeprädikator „Fisch($\mathfrak{a}$) $\Uparrow$ Vogel($\mathfrak{a}$)“ wahr ist, kann ich hingegen aus nicht-„wahrheitsfunktionalen“ Gründen wissen; ohne schon zu wissen, welche der beiden Feststellungen „Fisch($\mathfrak{a}$)“ und „Vogel($\mathfrak{a}$)“ falsch ist, weiß ich aufgrund der logischen Beziehung der beiden Prädikatoren, dass jedenfalls nicht beide wahr sein können; die Behauptung „Fisch($\mathfrak{a}$) $\Uparrow$ Vogel($\mathfrak{a}$)“ $\equiv$ „$\neg$(Fisch($\mathfrak{a}$) & Vogel($\mathfrak{a}$))“ ist damit, weil ihre Wahrheit nicht von der Wahrheit der verbundenen Feststellungen „Fisch($\mathfrak{a}$)“ und „Vogel($\mathfrak{a}$)“ abhängt, keine „Wahrheitsfunktion“ im Sinne des SFG.

Alle Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren können in „allgemeingültige“ SFG-Ausdrücke eingesetzt werden, d.h. sie können in einem Fregegesetz an die Stelle einer Aussagenbezeichnung oder an die Stelle einer „Aussagevariable“ treten, wobei die „Allgemeingültigkeit“ erhalten bleibt. Im Ausdruck des Fregegesetzes $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ lassen sich die „Aussagevariablen“ durch die Bezeichnungen konkreter Prädikatoren ersetzten; es resultieren dann beispielsweise Ausdrücken wie „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow (\mathfrak{Q}(y) \Rightarrow \mathfrak{P}(x))$“ oder „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow (\mathfrak{Q}(x) \Rightarrow \mathfrak{P}(x))$“. Im Ausdruck „$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$“ können die „Aussagevariablen“ auch durch Gedankengefügeprädikatoren beliebiger Komplexität ersetzt werden; wird A durch „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)$“ bzw. „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$“ und B durch „$\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(y)$“ bzw. „$\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x)$“ ersetzt, resultiert der allgemeingültige prädikatenlogistische Ausdruck

„$(\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)) \Rightarrow [(\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(y)) \Rightarrow (\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y))]$“ bzw. der Ausdruck

„$(\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)) \Rightarrow [(\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x)) \Rightarrow (\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x))]$“.

Ausgehend von den unbegrenzt vielen Fregegesetzen lassen sich auf diese Weise beliebig viele solcher *SFG-analogen*, gleichermaßen gehaltlosen wie überflüssigen prädikatenlogistischen Ausdrücke konstruieren; sie alle besagen, dass, welche zulässige Ersetzung für die Beliebig-Element-Zeichen für Individuen auch immer gewählt wird, die resultierende Aussage wahr wird, wobei die Behauptung der „Allgemeingültigkeit“ wie im SFG nicht gesondert herausgestellt wird, jedoch stets implizit gemeint ist. Die stets gleich lautende banale Wahrheit dieser Ausdrücke – keinem Gegenstand kann ein (Gedankengefüge-)Prädikator zugleich zukommen und nicht zukommen – kann mit den Mitteln des SFG (überflüssigerweise) bewiesen werden; die Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren sind einfach wie „Aussagevariablen“ zu behandeln[49]. Allerdings gelten alle diese aus Fregegesetzen gewonnen prädikatenlogistischen Ausdrücke wie schon die Fregegesetze selber als bloße Aussageformen, die implizit stets als „allgemeingültig“ aufgefasst und behauptet werden, und in dieser Weise wahre Aussagen über die Aussageformen sind: sie besagen, dass jede Substitution der „Aussage-“ oder „Individuenvariablen“ in der Aussageform auf eine wahre Aussage führt. Die Quantoren müssen, weil die „moderne Logik“ auf dem Konzept der Gedankengefüge errichtet ist, als solche Aussagen über die möglichen Substitutionen von Beliebig-Element-Zeichen in Aussageformen definiert werden.

4.3.4. Quantifikation als Aussage über die Erfüllbarkeit einer „Aussageform“ – gegenstandsbezogene und substitutionelle Konzeption der Quantifikation

Die Formeln des SFG enthalten keine Bezeichnungen einzelner wahrheitswertdefiniter Aussagen, sondern nur Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen („Aussagevariablen“); sie sind durchweg „Aussageformen“ und stellen Gesetzesaussagen nur insoweit dar, als implizit ihre Allgemeingültigkeit behauptet wird. So ist die SFG-Formel „$\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B]$“ immer als eine Erfüllbarkeitsaussage im Sinne einer Allquantifikation im Bereich der Aussagen gemeint und müsste korrekt und vollständig geschrieben werden: „$\forall A,B\ \{\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B]\}$“ mit der Bedeutung „Alle Aussagen, die durch Ersetzung der ‚Aussagevariablen‘ A und B in der Aussageform ‚$\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B]$‘ entstehen, sind wahr“. Es gibt also bereits im Rahmen des SFG (der „Aussagenlogik“) Quantifikationen.

Auch der aus dieser allgemeingültigen SFG-Formel „$\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B$“ gewonnene prädikatenlogistische Ausdruck „$\neg \mathfrak{P}x \Rightarrow [(\mathfrak{P}x \triangledown \mathfrak{Q}x) \Rightarrow \mathfrak{Q}x]$“ ist eine allgemeingültige Erfüllbarkeitsaussage (eine Allquantifikation der Gegenstände des zu $\mathfrak{P}$und $\mathfrak{Q}$ gehörenden Bezugsbereichs) und wäre vollständig und korrekt darzustellen durch den Ausdruck „$\forall x \{\neg \mathfrak{P}x \Rightarrow [(\mathfrak{P}x \triangledown \mathfrak{Q}x) \Rightarrow \mathfrak{Q}x]\}$“, für den nur die substitutionelle Auffassung der Quantifikation (s.u.) zulässig ist: gemäß den Konzeptionen der „modernen Logik“ liegt keine Aussage über alle Gegenstände des zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gehörenden Bezugsbereichs vor, sondern eine Aussage über alle Aussagen, die durch Ersetzung der Individuenvariablen aus der Aussageform entstehen. *Die Quantifikation geschieht dabei stets im Bereich derjenigen „Variablen“, durch deren Beseitigung (Ersetzung durch entsprechende Konstanten) aus der Aussageform eine wahrheitswertdefinite Aussage gewonnen werden kann*.

Quantifikationen in der Prädikatenlogistik sind nichts anderes als solche Erfüllbarkeitsaussagen über „Aussageformen“, die Quantoren demnach Erfüllbarkeitsprädikate[50] Der „Allquantor“ (oder „Generalisator“, „Universalquantor“) ∀ und der „Existenzquantor“ (auch „Partikularisator“, „Einsquantor“) ∃ bringen im Rahmen der „modernen Logik“ zum Ausdruck, dass alle Aussagen bzw. zumindest eine der Aussagen, die sich aus der dem Quantorausdruck folgenden Aussageform gewinnen lassen, wenn die unmittelbar hinter dem Quantorzeichen stehenden Beliebig-Element-Zeichen in der Aussageform durch entsprechende „Konstanten“ ersetzt werden, wahr sind bzw. wahr ist. So setzt **Frege** als Bedeutung des Ausdrucks „$\forall x\, \Phi(x)$“ fest, „dass jene Funktion {die ‚Aussagefunktion‘ $\Phi(x)$} eine Tatsache {wahr} sei, was man auch als ihr Argument ansehen möge“, und „dass $\Phi(x)$ gelte, was man auch an die Stelle von x setzen möge.“ (BS 19)

Mit Hilfe der Quantoren werden also nicht, wie es dem außerlogistischen Verständnis und Gebrauch der All- und Existenzsätze entspricht und oft auch für die Prädikatenlogistik unterstellt wird, Gesetzesaussagen über *alle* oder über *einige* (im Sinne von *mindestens eines*, d.h. entweder *einige oder alle* oder *einige aber nicht alle*) Individuen/Gegenstände/Sachverhalte jenes Bereichs getroffen, dem die hinter dem jeweiligen Quantor stehenden Beliebig-Element-Zeichen zuzuordnen sind. In einem All- oder Existenzsatz möchten wir normalerweise etwas über die in Rede stehenden Gegenstände/Sachverhalte sagen, nicht aber über die sprachlichen Ausdrücke. Die Formen der Ereignislogik/Bedingungslogik kennen nur den direkten Objektbezug; der Ausdruck einer Implikation „$Px \rightarrow Qx$“ bringt stets zum Ausdruck, dass wenn immer irgendeinem *Gegenstand* x das Prädikat P zukommt, ihm notwendig auch das Prädikat Q zukommt, aber nicht umgekehrt; es geht dabei um den Zusammenhang von Gegenständen und prädikativer Bestimmtheit, nicht um Variablenersetzungen in einer Aussageform. Im Rahmen der Prädikatenlogistik stellen Quantifikationen hingegen Aussagen über die Wahrheit aller oder einiger Aussagen dar, die aus den überhaupt möglichen Variablenersetzungen in einer „Aussageform“ resultieren. „Die Quantifikatoren sind Funktoren, die aus einer Aussageform eine Aussage machen.“[51] „$\forall x\ \Phi x$“ bzw. „$\exists x\ \Phi x$“ ist jetzt nicht zu lesen als „Allen *Gegenständen* bzw. zumindest einem der *Gegenstände* des zugrunde gelegten Bereichs kommt das Prädikat Φ zu“, sondern als „Alle, bzw. einige der Aussagen, die durch die Ersetzung der ‚Variable‘ x in der Aussageform Φx entstehen, sind wahr“, wenn „Φx“ eine beliebige prädikatenlogistische Aussageform bezeichnet. Dieser Unterschied von *gegenstandsbezogener* und *substitutionenbezogener* Redeweise wird oft gar nicht zu Kenntnis genommen, oder beide Auffassungen werden einfach neben- und miteinander vertreten[52].

S. Haack spricht in diesem Zusammenhang von einem „objectional“ und „substitutional approach“: „In fact two styles of interpretation have been offered for the quantifiers. The *objectional interpretation* appeals to the *values* of the variables, the objects over which the variables range:

> ‚∀x Fx‘ is interpreted as ‘For all objects x, in the domain, D, Fx‘ …

The *substitutional approach* appeals, not to the values, but to the *substituends* for the variables, the expressions, that is, that can be substituted for the variables:

> ‚∀x Fx‘ is interpreted as ‚all substitution instances of ‚F …‘ are true‘. …

I think, that the objectional interpretation is generally thought of as standard, the substitutional as a challenger whose credentials stand in need of scrutiny. There are two views about the status of the two styles of interpretation: that they are rivals, only one of which can be ‚right‘; or that they may both have their uses.” … The choice may have important philosophical consequences.”[53] Die Vorentschiedenheit für die substitutionelle Konzeption der Quantifikation hat in der Tat „bedeutende philosophische Konsequenzen”; sie beeinträchtigt nachhaltig das Verständnis des Logischen.

Weil in den prädikatenlogistischen Ausdrücken fregesche Gedankengefüge vorkommen und logische Formen grundsätzlich nur mit Hilfe von Gedankengefügen, die als Relata nur wahrheitswertdefinite Aussagen aufweisen können, dargelegt und dargestellt werden, ist eine gegenstandsbezogene „Interpretation“ der prädikatenlogistischen Quantifikation gar nicht möglich. Nach der gegenstandsbezogenen Auffassung müsste der Ausdruck „$(\forall x)\, \mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x$“ besagen, dass für alle *Gegenstände* x des Bezugsbereichs gilt, dass es unmöglich ist, dass $\mathfrak{F}$

einem Gegenstand x zukommt und diesem Gegenstand x $\mathfrak{G}$ nicht zukommt; es würde dabei um den logischen Zusammenhang zwischen den Sachverhaltsklassen *einem Gegenstand x kommt das Prädikat* $\mathfrak{F}$ *zu* und *diesem Gegenstand x kommt das Prädikat* $\mathfrak{G}$ *zu* gehen. Da das Zeichen „$\Rightarrow$“ jedoch nicht auf das Zukommen von Prädikaten, sondern nur auf die vorgegebene Wahrheit von Aussagen anwendbar ist, ist ein Ausdruck wie „$\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x$“ gar nicht definiert, da „$\mathfrak{F}x$“ und „$\mathfrak{G}x$“ keine Aussagen bezeichnen; erst wenn die „Individuenvariable“ x durch einen Eigennamen $\mathfrak{a}$ ersetzt wird, erhalten wir eine korrekte Gedankengefügeaussage – „$\mathfrak{F}\mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a}$“. Mit der Definition der Gedankengefüge verträglich ist nur die substitutionelle Leseart „Alle Aussagen, die sich aus einer der möglichen zulässigen Substitutionen von x in der ‚Aussageform‘ ‚$\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x$‘ ergeben, sind wahr“ zulässig.

Als Zeichen für einen beliebigen Quantor verwende ich im Folgenden die Zeichen „$\mathfrak{Q}$“, „$\mathfrak{Q}_1$“, „$\mathfrak{Q}_{.2}$“, usw.

4.3.5. Die Prädikatenlogistik und der Gebrauch von „Prädikatvariablen“

In den Formeln der Prädikatenlogistik kommen nur „Prädikatvariable“ vor, also Ausdrücke wie „Px“, „$Px \Rightarrow Qx$“ und „$\neg Px \Rightarrow [(Px \triangledown Qx) \Rightarrow Qx]$“. Entgegen der logistischen Ansicht einer angeblichen Mehrdeutigkeit und Unbestimmtheit der Beliebig-Element-Zeichen bezeichnet der Ausdruck „Px“ den wohlbestimmten allgemeinen *logischen Sachverhalt* (Sachverhaltsklasse), dass irgendein einstelliges Prädikat P irgendeinem Gegenstand des entsprechenden Bezugsbereichs zukommt; diese begrifflich bestimmte Sachverhaltsklasse Px ist wohlabgegrenzt gegenüber anderen logischen Sachverhalten bestimmter Art (etwa vom Sachverhalt, dass einem Gegenstand irgendein Prädikat nicht zukommt, oder dass zwei Gegenständen ein zweistelliges Prädikat zukommt) und der Sachverhalt kann wohlbestimmter Prädikand eines Urteils sein (etwa des Urteils, dass entweder Px oder $\sim$Px zutreffen muss). Die Erkenntnis und Darstellung logischer Formen und Gesetze ist ohne Gebrauch solcher Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate unmöglich. Wegen der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge kann der Ausdruck „$Px \Rightarrow Qx$“ jedoch nicht einfach als *benennende* Bezeichnung des Sachverhalts, dass irgendein Prädikat P einem Gegenstand des betreffenden Bezugsbereichs zukommt, ohne dass ihm ein anderes Prädikat Q zukommt, angesehen werden, denn nicht Sachverhaltsklassen, sondern nur behauptende Aussagen kommen als Relata des Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ in Betracht; in der „modernen Logik“ spielt aus diesem Grunde der für die Logik konstitutive Begriff der Sachverhalts-/Ereignisklasse keine Rolle.

Ausdrücke mit empirisch-konkreten Prädikatoren und Gedankengefügen wie „Mensch(x) $\Rightarrow$ Lebewesen(x)“ werden in der Logistik als Aussageformen betrachtet; nach der Konzeption der Aussageformen können jedoch Ausdrücke, die beliebige Prädikatoren Px, Qx,… durch Gedankengefüge verbinden wie „$Px \Rightarrow Qx$“ oder „$Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“, nicht schon als Aussageformen betrachtet werden. Es müssen über Aussageformen Erfüllbarkeitsaussagen getroffen werden können, d.h. Quantifikationen, die sich auf Beliebig-Element-Zeichen beziehen, die in der Aussageform vorkommen. Aber weder hinsichtlich der „Individuenvariablen“ x noch der „Prädikatvariablen“ P und Q ergeben sich für Ausdrücke wie „$Px \Rightarrow Qx$“ und „$Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ Erfüllbarkeits*aussagen*. Aus den Ausdrücken entsteht vielmehr erst eine **Erfüllbarkeits*aussageform***, wenn den Ausdrücken ein Quantor $\mathfrak{Q}x$ vorangestellt wird: die Aussageform „$\forall x\ (Px \Rightarrow Qx)$ wird für *einige* Ersetzungen der „Prädikatvariablen“ P und Q durch Bezeichnungen empirisch-konkreter Prädikate wahr: diese Erfüllbarkeitsaussage ist eine Existenzquantifikation im Bereich der Prädikate: $\exists P,Q\ [\forall x\ (Px \Rightarrow Qx)]$; die Erfüllbarkeitsaussageform „$\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]$“ $\equiv$ „$\forall x \sim[Px\ \&\ {\sim}Px\ \&\ {\sim}Qx)]$“ wird dagegen für *jede* derartige Ersetzung der „Prädikatvariablen“ eine wahre Erfüllbarkeitsaussage: $\forall P,Q\ \{\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]\}$.

Ausdrücke wie „$Px \Rightarrow Qx$“ oder „$Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ werden also überhaupt erst dann zu sinnvollen Aussage*formen*, wenn sie – zumindest implizit – als im Bereich der Individuen x quantifiziert aufgefasst werden. Alle Ausdrücke der Prädikatenlogistik, zusammengesetzt aus „Prädikatvariablen“, „Individuenvariablen“, Gedankengefügebezeichnungen sind als solche Erfüllbarkeitsaussageformen gemeint. Wird von Erfüllbarkeits*aussageformen* die Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit oder Nichterfüllbarkeit ausgesagt, so ist dies eine Erfüllbarkeits*aussage* über Erfüllbarkeitsaussage*formen* – wir haben eine *zweistufige* Quantifikation: zunächst wird eine Erfüllbarkeitsaussage (Quantifikation) über Formeln wie „$\forall x\, Px$“ getroffen: diese prädikatenlogistische Aussageform wird für jede oder für zumindest eine oder für keine Ersetzung der Prädikatvariable(n) durch empirisch-konkrete Prädikate zu einer wahren Erfüllbarkeitsaussage. Für die Formel „$\forall x\, Px$“ ergibt sich die Erfüllbarkeitsaussage „$\exists P\ (\forall x\, Px)$“ in der Bedeutung „es gibt zumindest ein empirisch-konkretes Prädikat $\mathfrak{F}$, für welches die Aussageform $\forall x\ \mathfrak{F}x$ bei *jeder* Ersetzung der Individuenvariable x zu einer wahren Feststellung wird“ (1. Quantifikation im Bereich der Prädikate)[54]. Jede dieser aus einer Prädikatvariablenersetzung resultierende Erfüllbarkeitsaussage ist ihrerseits eine Erfüllbarkeitsaussage – jetzt aber im Bereich der Individuen/Gegenstände, die zum jeweiligen empirisch-konkreten Prädikat $\mathfrak{F}$ gehören (2. Quantifikation im Bezugsbereich der zum jeweils gewählten empirisch-konkreten Prädikat gehörenden Individuen). Diese zweistufige Quantifikation (Erfüllbarkeitsaussage) zeichnet alle prädikatenlogistischen Formeln aus.

Die Erfüllbarkeitsaussage „$\forall P, Q\ \{\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]\}$“ behauptet die Allgemeingültigkeit der Erfüllbarkeitsaussageform „$\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]$“; alle Formeln der Prädikatenlogistik werden implizit als solcherart allgemeingültig qualifiziert. Dies bedeutet, dass diese Formeln, denen zumindest implizit immer ein die „Prädikatvariablen“ betreffender Quantor voranzustellen ist, ihren Sinn verlieren würden, wenn die Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate durch Bezeichnungen empirisch-konkreter Prädikate ersetzt würden, da die „Prädikatvariablen“ durch den Quantor „gebunden“ sind[55]. Die im Rahmen der „modernen Logik“ vorherrschende Meinung, die Formeln der Prädikatenlogistik erhielten erst dann eine Bedeutung, wenn die „Prädikatvariablen“ nachträglich durch empirisch-konkrete Prädikate ersetzt und dadurch einer „Belegung“ und „Interpretation“ unterzogen würden[56] ist falsch, denn eine solche „Belegung“ und „Interpretation“ würde den Formeln jeden Sinn nehmen – da zu diesem Sinn immer schon die Quantifikation im Bereich der Prädikate gehört.

Korrekt gebildete prädikatenlogistische Formeln, die nur Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate beliebiger Stelligkeit, Beliebig-Element-Zeichen für entsprechende Individuen und Bezeichnungen von Gedankengefügen enthalten sollen durch den Ausdruck $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$ bezeichnet werden. Eine solche Form haben etwa die Ausdrücke $Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$, $[{\sim}F(x) \Downarrow (G(x) \Leftarrow H(x)] \triangledown H(x)$ und $R_1(x,y) \Rightarrow R_2(x,y)$. Solche Ausdrücke sind – anders als „Gedankengefügeprädikatoren“ wie [Mensch(x) $\Rightarrow$ (Vogel(x) $\triangledown$ Mensch(x)] – noch keine Aussageformen; man könnte von *Gedankengefügeprädikator-Schemata* reden. Die Ausdrücke werden zum einen erst dann zu Aussageformen, wenn die „Prädikatvariablen“ durch Bezeichnungen konkreter Prädikate ersetzt werden; da in den prädikatenlogistischen Formeln keine derartigen Prädikate vorkommen, fällt diese Möglichkeit weg. Aus den Gedankengefügeprädikator-Schemata können so nur dadurch Aussageformen, nämlich Erfüllbarkeitsaussageformen, entstehen, wenn dem Ausdruck ein Quantor vorangestellt wird, der die Individuenvariablen „bindet“. Da von den Formeln Allgemeingültigkeit gefordert wird, kommt dafür nur der Allquantor in Frage[57]. Die „Behauptung“ einer derartigen Formel besagt dann, dass diese Erfüllbarkeitsaussageform für jede Ersetzung der Prädikatvariablen zu einer wahren Allgemeingültigkeitaussage wird. Prädikatenlogistische Gedankengefügeprädikator-Schemata sind also in doppelter Weise elliptisch: ein Ausdruck $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$ meint die Erfüllbarkeitsaussageform $\forall(x_1, \ldots, x_n)\ [\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)]$, deren Allgemeingültigkeit behauptet wird: $\forall(P_1,\ldots,P_n)\ \{\forall(x_1, \ldots, x_n)\ [\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)]\}$. Die Formel $Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$ ist zu vervollständigen zu: $\forall(P,Q)\ \{\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]\}$, der Ausdruck $[{\sim}F(x) \Downarrow (G(x) \Leftarrow H(x)] \triangledown H(x)$ ist zu vervollständigen zu: $\forall(F,G,H)\ \{\forall x\ [({\sim}F(x) \Downarrow (G(x) \Leftarrow H(x)) \triangledown H(x)]\}$.

Was die Negation einer prädikatenlogistischen Formel bewirkt, kann nur erkannt werden, wenn der (einfach oder zweifach elliptische Charakter dieser Formeln beachtet wird[58]. Für eine Formel der vollständigen Ausdrucksgestalt $\forall(P_1,\ldots,P_n)\ \{\forall(x_1, \ldots, x_n)\ [\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)]\}$ – abgekürzt dargestellt: $\forall P \ldots \forall x \ldots \mathcal{F}$ – gibt es 3 elementare Negationen und vier Kombinationen dieser elementaren Negationen:

(1) $\sim \forall P \ldots \forall x \ldots \mathcal{F}$
(2) $\forall P \ldots \sim \forall x \ldots \mathcal{F}$
(3) $\forall P \ldots \forall x \ldots \sim \mathcal{F}$

(4) $\sim \forall P \ldots \sim \forall x \ldots \mathcal{F}$
(5) $\sim \forall P \ldots \forall x \ldots \sim \mathcal{F}$
(6) $\forall P \ldots \sim \forall x \ldots \sim \mathcal{F}$
(7) $\sim \forall P \ldots \sim \forall x \ldots \sim \mathcal{F}$

4.3.6. Die Leugnung der Quantifikation im Bereich der Prädikate und die Vorstellung von „Prädikatenlogiken“ unterschiedlicher Stufen

Das übliche Verständnis der Prädikatenlogistik zeigt eine merkwürdige und schwerwiegende Inkonsequenz: es kommen in den Formeln der Prädikatenlogistik nur „Prädikatvariablen“ und grundsätzlich keine Bezeichnungen konkreter Prädikate vor; diese Ausdrücke benennen oder beurteilen demnach beliebige Prädikate und ihrem logischen Zusammenhang, was notwendigerweise auch eine Quantifikation im Bereich der Prädikate involviert. Erst in der Untersuchung von Bestimmungen und Gesetzen, die jedes *beliebige* Prädikat betreffen, konstituiert sich die theoretische Logik. Dass in der Prädikatenlogistik notwendigerweise Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate vorkommen und deshalb auch Quantifikationen im Bereich der Prädikate vorgenommen werden, wird von den Vertretern der „modernen Logik" jedoch durchweg ignoriert, oft sogar ausdrücklich geleugnet; dies verunmöglicht jedes sachgerechte Verständnis der Bedeutungen der prädikatenlogistischen Formeln. Insbesondere vertreten die Logistiker die Meinung, in der „elementaren" Prädikatenlogistik (der so genannten *Prädikatenlogik erster Stufe*) käme eine Quantifikation über Prädikate noch gar nicht vor.

Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate – in der Regel die Buchstaben P, Q, R, … oder F, G, H, … – werden oft wie empirisch-konkrete Prädikate (oder Abkürzungen solcher Prädikate) gefasst. Bereits bei **FREGE** ist unklar, ob der Buchstabe Φ (abkürzend) ein empirisch-konkretes Prädikat oder ein beliebiges Prädikat bezeichnet: Zuerst ist „Φ(A)" für ihn der Ausdruck einer „unbestimmten Funktion des Argumentes A" (BS 18) – als „unbestimmte Funktionen" kennzeichnet er ja unsachgerecht beliebige Prädikationen. Dann aber soll der Ausdruck „∀x Φx" das *Urteil* ausdrücken, „dass jene Funktion {Prädikation} eine Tatsache {wahr} sei, was man auch als ihr Argument ansehen möge" (BS 19); der Ausdruck „Φ(A)" soll also besagen, dass bei jeder Ersetzung der „Individuenvariable" x durch einen geeigneten Eigennamen soll aus der Aussageform Φx eine wahrheitswertdefinite Aussage wird. Das aber ist nur der Fall, wenn „Φ" (abkürzend) ein konkretes, ganz bestimmtes Prädikat bezeichnet; ist „Φ" aber eine „unbestimmte Funktion", dann ist Φ𝖆 (für den Eigenname 𝖆) keine wahrheitswertdefinite Aussage. Nicht aus dem Ausdruck „Φx" ergibt sich durch Ersetzung der „Individuenvariable" eine wahrheitswertdefinite Aussage, sondern erst aus dem *ganzen* Ausdruck „∀x Φx" und zwar durch Ersetzung der „Prädikatvariablen" Φ durch ein empirisch-konkretes Prädikat; es ergibt sich dann aber keine wahrheitswertdefinite Feststellung wie 𝕻(𝖆), sondern eine wahrheitswertdefinite *Erfüllbarkeitsaussagen* wie „∃x [Sterblich(x)]"; in diesem Aussagenausdruck darf die „Individuenvariable" x gar nicht beseitigt werden. Auch **A. MENNE** behandelt „Prädikatvariablen" wie „Prädikatkonstanten", wenn er den Ausdruck „*f* (x)" eine *Aussageform* nennt, aus der man „durch Einsetzung von Konstanten für die Variable {x} … wieder wahre oder falsche Aussagen" erhalte[59]. Tatsächlich aber ist der Ausdruck „*f* (x)" noch keine Aussageform, eine solche erhalten wir aus dem Ausdruck erst, wenn wir die „Prädikatvariable" durch ein konkretes Prädikat ersetzen oder dem Ausdruck einen x-Quantor voranstellen.

Diese Unklarheit über den eigenen Gebrauch „Prädikatvariablen" kennzeichnet die „moderne Logik" bis heute; sie äußert sich etwa in der Ansicht, es sei der Gebrauch von „Individuenvariablen", der die „Prädikatenlogik" charakterisiere. **HILBERT** und **BERNAYS** schreiben: „Wir gelangen … durch die Einführung der Individuenvariablen von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik."[60] In Wirklichkeit ist es allein der Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate, der die (Prädikaten-)Logik auszeichnet. Der Gebrauch von „Prädikatvariablen" im Rahmen der „elementaren" Prädikatenlogistik wird jedoch oft ausdrücklich bestritten. „Die scharfe Abgrenzung der *elementaren Logik* (oder Logik erster Stufe) von der darüber hinausgehenden Logik höherer Stufe ergibt sich dadurch, dass wir *nur* Individuenvariablen zulassen und keine generellen Variablen für Klassen, für Relationen oder für Funktionen (wenn auch natürlich in unserem System viele spezielle Klassen, Relationen und Funktionen Individuen sein können)."[61] Die Leugnung des doch offenkundigen eigenen Gebrauchs von „Prädikatvariablen" zeigt sich vor allem in der Überzeugung, in der Prädikatenlogistik bezögen sich die Quantoren ausschließlich auf Individuenvariablen. „In der klassischen Quantorentheorie beziehen sich die Quantoren ∀ und ∃ nur auf Individuenvariablen."[62] Auch **QUINE** leugnet Gebrauch von und Quantifikation über Prädikatvariablen; er rechnet die Bezeichnungen beliebiger Aussagen oder Prädikate (P, Q…F, G…), wie sie in allen prädikatenlogistischen Ausdrücken vorkommen, nicht zu den echten „Variablen", sondern bezeichnet sie nur als „Schemabuchstaben", sie seien „bloß Platzhalter für Sätze und Termini, die in Schemata benutzt werden, die ihrer äußeren Form nach Sätzen gleichen."; im Gegensatz zu den Individuenvariablen x, y, z,… von denen sich diese „Schemabuchstaben" „in ihrer Funktion wesentlich" unterschieden, könnten diese Schemabuchstaben nicht mit Hilfe von Quantoren in abgeschlossenen Sätzen vorkommen[63] – eine Quantifikation im Bereich der Prädikate wird also ausdrücklich bestritten. Eine solche Quantifikation komme erst in „Prädikatenlogiken höherer Stufe" vor. „In der Prädikatenlogik {erster Stufe} können nur die Individuensymbole unmittelbar hinter einem Quantor erscheinen. Nur diese Symbole dürfen also *quantifiziert* werden. Man kann die Sprache erweitern dadurch, dass man im einfachsten Falle auch die Quantifizierung der Prädikatensymbole zulässt. Damit kommt man zu Sprachen der Prädikatenlogik der zweiten Stufe."[64]

Die Unterscheidung von *Prädikatenlogiken unterschiedlicher und beliebig hoher Stufigkeit* hat keinerlei sachliche Berechtigung. Die Postulierung einer nach oben unbegrenzten Reihe von „Prädikatenlogiken“ zunehmender Stufigkeit ist der Versuch, den Fortgang von Begriffen erster zu solchen zweiter Stufe endlos fortzusetzen. Die Vorstellung, ein solcher Fortgang sei nicht nur möglich, sondern sogar notwendig, stützt sich weniger auf die tatsächliche Bildung von Begriffen einer höheren Stufigkeit als 2 und der Darlegung ihres kognitiven Gehalts und Nutzens, als auf die „mechanisch“-gedankenlose, rein verbale Bildung der (fiktiven) Reihe:

„Prädikatenlogik erster Stufe“	Individuen werden Prädikate erster Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Individuen/Gegenstände, die den jeweiligen Bezugsbereichen der Prädikate erster Stufe angehören
„Prädikatenlogik zweiter Stufe“	Prädikaten erster Stufe werden Prädikate zweiter Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Prädikate erster Stufe
„Prädikatenlogik dritter Stufe“	Prädikaten zweiter Stufe werden Prädikate dritter Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Prädikate zweiter Stufe
…	…	…
„Prädikatenlogik (n+1)-ter Stufe“	Prädikaten n-ter Stufe werden Prädikate (n+1)-ter Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Prädikate n-ter Stufe
	usw.	

Die Rede von Prädikaten dritter, siebzehnter oder siebentausendster Stufe wäre nur dann sinnvoll, wenn derartige Begriffe auch definiert und in ihrem jeweiligen spezifischen Gehalt erläutert und dargelegt werden könnten. Wenn wir in den Schriften von Logistikern nach Begriffen zweiter, dritter, vierter, fünfter, n-ter Stufe suchen, werden wir allerdings enttäuscht. Wohl werden einige Begriffe zweiter Stufe angeführt – die aber oft gar keine Begriffe zweiter Stufe sind[65]. Die Stichhaltigkeit der Vorstellung einer solchen unbegrenzten Reihe können wir nur bewerten, wenn wir eingehend die jeweilige Eigenart der Begriffe erster und zweiter Stufe, ihr Verhältnis und insbesondere die Bedingungen des Übergangs von den ersten zur den zweiten untersuchen. Nur dann kann entschieden werden, ob ein weiterer Fortgang möglich ist.

4.3.6.1. Das vortheoretische gegenständliche Wissen

Eine „Prädikaten*logik* erster Stufe“ kann nicht durch den Gebrauch von *Prädikaten erster Stufe* und durch die *Quantifikation über die Individuen* der zu diesen Begriffen gehörenden Bereiche, charakterisiert werden: diese Kriterien kennzeichnen einzig das jeder theoretischen Logik vorhergehende, gegenstandsbezogene alltägliche, praktisch-rationale Erkennen. Die theoretische Logik, der ja diese „Prädikatenlogik erster Stufe“ zugerechnet werden müsste, schließt den Gebrauch von Prädikaten erster Stufe und die Quantifikation über Gegenstände, d.h. die Aufstellung konkreter, empirischer Gesetze, sogar ausdrücklich aus, denn die theoretische Logik unterscheidet sich hinsichtlich ihrer Intentionalität und Fragestellung grundlegend vom praktisch-gegenständlichen Denken.

Das gegenständlich-praktische Wissen befasst sich mit den einzelnen Gegenständen der Lebenswelt, mit ihrer jeweiligen konkreten begrifflichen Bestimmung, mit ihren bedingungslogischen Gesetzmäßigkeiten und ihrer kausalen Wechselwirkung; nur dadurch ermöglicht es die praktischen, lebenserhaltenden Zielen dienende Handhabung und effektive Veränderung dieser Gegenstände. Inhalt dieses Erkennens sind immer die *einzelnen* Gegenstände, mit ihren Eigenschaften, verschiedenen möglichen Zuständen. Nur diesen *je besonderen* Inhalten gilt Interesse und Aufmerksamkeit der Erkenntnistätigkeit, nicht etwa dem allgemeinen Charakter und den Gesetzmäßigkeiten der Erkenntnistätigkeit selbst; solche erkenntnisbezogenen Fragestellungen werden durch die praktischen Aufgaben ausgeschlossen, denen dieses praktische Erkennen dient.

Die Erkenntnis dieser Gegenstände wird durch ihren systematischen, umfassenden logisch-vergleichenden Bezug ermöglicht, durch den die Gleichheiten und Unterschiede der Gegenstände bestimmbar werden; die einzelnen Gegenstände werden in ein Netz differenzierter begrifflicher Bestimmungen eingeordnet. Die gegenständlichen Begriffe erster Stufe bestimmen auf diese Weise die Gesetzmäßigkeiten, denen die einzelnen Dinge unterworfen sind: es muss begründet erkannt sein, von welcher Art ein Ding ist (Gesetze sind in ihrer Geltung ja immer auf Dinge bestimmter Art begrenzt); welche bleibenden Eigenschaften und wechselnden Zustände ihm – als Gegenstand betreffender Art – bezüglich der gegebenen Umstände notwendig, möglicherweise ($\mathcal{M}$) oder zufällig zukommen; diese Bestimmungen der Art, der Eigenschaften, Relationen und Zustände sind immer allgemeinbegrifflich. Bei jeder Einzelnes betreffenden Feststellung und Vorhersage kommen Begriffe erster Stufe ins Spiel.

Diese Begriffe erster Stufe stehen in umfassenden bedingungslogischen Gesetzesbeziehungen. In jeder Feststellung werden solche bedingungslogischen Gesetze schließend auf den einzelnen Gegenstand angewandt. Diese konkrete bedingungslogische Gesetzeserkenntnis involviert *Quantifikation in Individuenbereichen*: „Allen/einigen Individuen aus dem Bezugsbereich **B** kommt das Prädikat $\mathfrak{P}$ (nicht) zu“; „Wenn irgendein Individuum aus **B** den Zustand $\mathfrak{Z}$ aufweist, weist es den Zustand $\mathfrak{Y}$ auf“. „In allen (nicht in allen/in einigen) Fällen, in denen einem Individuum aus **B** eine bestimmten Eigenschaft $\mathfrak{P}$ zukommt, kommt ihm die Eigenschaft $\mathfrak{Q}$ nicht zu“ usw.

Diese „Quantifikation über Individuen“ ist die Weise, wie gegenständlich-empirisches Gesetzeswissen ausgedrückt wird: solche Quantifikationen werden umgangssprachlich nicht nur durch solche Wörter wie ‚alle‘, ‚kein‘, ‚jeder‘, ‚manche‘ usw., sondern auch durch logische Conjunktionen ausgedrückt: Wenn $\mathfrak{p}$, dann $\mathfrak{q}$ bedeutet: *jeder* Sachverhalt/*jedes* Ereignis von der Art $\mathfrak{p}$ ist mit einem Sachverhalt/Ereignis von der Art $\mathfrak{q}$ verbunden (tritt mit ihm auf, usw.). Quantifikation über „Individuenvariablen“ setzt keineswegs die symbolischen Darstellungsmittel der Logik voraus; die logischen Darstellungsmittel der Umgangssprachen (Determinatoren, Konjunktionen, Adverbialausdrücke, Indefinitpronomina usw.) sind hinreichend präzise und differenziert.

Die Quantifikation über Gegenstände drückt eine logische Beziehung zwischen Begriffen erster Stufe aus: Wenn allen Dingen, denen ein konkreter Begriff $\mathfrak{P}$ zukommt, nie ein konkreter Begriff $\mathfrak{Q}$ zukommt, dann sind diese beiden Begriffe $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ unverträglich – es wird also zwei Begriffen erster Stufe eine Relation zugeschrieben; wenn allen Dingen, denen ein Begriff $\mathfrak{P}$ zukommt, stets auch ein Begriff $\mathfrak{Q}$ zukommt, aber nicht umgekehrt, dann stehen die beiden Begriffe in der Beziehung der Implikation. Schon vor jeder logischen Reflexion werden Begriffen erster Stufe selbst schon Bestimmungen (bestimmte logische Verhältnisse) zugeschrieben[66].

Das vortheoretische Verständnis der logischen Relationen ist durch ein nur implizites, ganz unreflektiertes, konkretistisches Verständnis der logischen Formen, die ja Formen der relativen Modalisation sind, charakterisiert: es muss so sein – es kann so sein – es kann nicht so sein. Die logischen Zusammenhänge werden in folgender Weise aufgefasst: irgendeinem Gegenstand kommt der Begriff $\mathfrak{P}$ zu; ist es dann notwendig, möglich, zufällig oder unmöglich, dass ihn eine andere bestimmt begriffliche Bestimmung zukommt?[67] Die vielfältigen bedingungslogischen Zusammenhänge, die das gegenständlich-praktische Denken kennt, sind dabei nicht explizit als solche in ihrer Allgemeinheit bewusst, die Kenntnis dieser Formen ist noch untrennbar an den jeweiligen besonderen gegenständlichen Inhalt gebunden; die logische Stimmigkeit fällt völlig zusammen mit der jeweiligen besonderen sachlichen Richtigkeit, mit der widerspruchsfreien Koordination der Beobachtungen und der besonderen empirischen Gesetze. Es werden nur besondere gegenständliche Inhalte modalisierend in Beziehung gesetzt; es werden noch nicht alle jene Begriffe erster Stufe, die in einer ganz bestimmten logischen Beziehung stehen, gegen alle jene Begriffe erster Stufe abgegrenzt, zwischen denen andere logische Beziehungen bestehen. Auf der Ebene der praktisch-gegenständlichen Erkenntnis können zwar die verschiedensten implikativen Zusammenhänge entdeckt und verstanden werden, es ist aber nicht möglich – eben aufgrund der Zentrierung auf die gegenständlichen Inhalte –, etwa die durch einen Wenn- oder Allsatz ausgedrückte Beziehung der Implikation als solche, unabhängig vom besonderen gegenständlich-sachlichen Gehalt in ihrer allgemeinen Struktur und im Unterschied zu allen andersartigen logischen Verhältnissen bewusst zu machen. Sowenig das alltägliche praktisch-gegenständliche Denken die Prädikate erster Stufe als solche klassifiziert und begrifflich bestimmt, sowenig verfügt es über einen ausgearbeiteten klaren Begriff der einzelnen bedingungslogischen Beziehungen als solcher. Wäre es anders, wären die Versuche der theoretischen Logik überflüssig. Die Bewusstwerdung des Logischen setzt eine Umkehr der Intentionalität voraus: das erkennende Bewusstsein muss sich von den besonderen gegenständlichen Inhalten weg hin zu allgemeinen Bedingungen der Erkenntnis beliebiger Inhalte selbst wenden. Die Logik beginnt mit dem reflexiven Rückbezug auf das eigene Wissen in seinem ganzen Umfang (die so genannte *intentio obliqua*).

4.3.6.2. Die Intentionalität der theoretischen Logik

Ihren Fragestellungen gemäß bemüht sich die theoretische Logik nicht um die Erkenntnis der einzelnen Gegenstände in ihrer jeweils besonderen Gesetzmäßigkeit, sondern sie zielt auf die Art der logischen Bestimmungen, wie sie in allen diesen besonderen Bereichen in gleicher Weise vorgenommen werden; die Frage ist nicht mehr, welcher Zusammenhang zwischen diesen oder jenen konkreten Sachverhalten bestimmter Art besteht, sondern unter welchen Bedingungen einem Paar *beliebiger* Begriffe erster Stufe diese oder jene logische Beziehung (Implikation, Exklusion, Independenz usw.) zukommt. Welche verschiedenen *Arten* von Begriffen erster Stufe gibt es, welche Art von Zusammenhang drücken sie jeweils aus? Welche unterschiedlichen *Arten* logischer Zusammenhänge gibt es, was ist der Unterschied, was ihre allgemeine Struktur, welche Beziehung bestehen selber zwischen diesen Formen? Lässt sich jede beliebige logische Relation konstruieren?

Es sind drei zusammengehörende Charakterzüge der theoretischen Logik, die die Untersuchung dieser neuartigen Fragestellungen ermöglicht: der Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate, die Bildung von Begriffen zweiter Stufe, und die Quantifikation über Prädikate.

1. Aufgrund ihrer spezifischen Problemstellungen erstrebt die theoretische Logik eine *neue Art der Verallgemeinerung*. Auf der Ebene des gegenständlich-praktischen Denkens besteht die Verallgemeinerung darin, dass neue Gegenstände in bestehende begriffliche Konzepte erster Stufe eingeordnet werden, wobei diese Ausweitung der Begriffe immer mit ihrer Differenzierung verbunden ist; die Intentionalität des Erkennens bleibt auf die gegenständliche Wirklichkeit gerichtet (*intentio recta*), die Verallgemeinerungen haben eine *linearen* Charakter. Die theoretische Logik gewinnt ihre Einsichten durch eine verallgemeinernde *Reflexion* gegenständlichen Wissens, das Erkennen beginnt, sich auf sich selbst zu richten (*intentio obliqua*). Die Logik muss die begrifflichen Prädikate selber auf den Begriff bringen, sie muss die Normen erforschen, denen jedes beliebige Prädikat unterliegt, sie muss erkunden, welche unterschiedliche Arten von Begriffen es gibt, sie muss die logischen Verhältnisse (Formen), die zwischen beliebigen Prädikate unter bestimmten Bedingungen bestehen, als solche, in ihrer vollen Allgemeinheit und Reinheit bestimmen und in ihrer Gesamtheit konstruieren, sie muss die gesetzmäßigen Beziehungen, die zwischen diesen Formen selbst bestehen (d.h. die logischen Gesetze), darlegen. Die Logik macht keine Aussagen über diese oder jene besonderen Bereiche der Wirklichkeit, daher handeln ihre Aussagen nicht mehr von diesen oder jenen besonderen gegenständlichen Begriffen. Wenn sie die Normen bestimmt, denen jedes beliebige Prädikat unterliegt, bestimmt, „abstrahiert" sie jedoch nicht vom je besonderen Gehalt (Inhalt) dieser Prädikate, sondern zeigt im Gegenteil auf, wie diese mannigfach verschiedenen Inhalte ihre jeweilige Bestimmtheit erst durch ihre logische Struktur erhalten – wobei sie diese Struktur *als solche* kenntlich macht und bestimmt, auf den Begriff bringt; die Logik „abstrahiert" nicht, sie verallgemeinert – was etwas ganz anderes ist[68]. Wenn die Logik von beliebigen Prädikaten, ihren Formen und Gesetzen spricht, dann setzt sie notwendigerweise voraus, dass jedes derartige Prädikat seinen je eigenen spezifischen „Inhalt" besitzt – sonst wären die Prädikate, von denen die Logik spricht, ja überhaupt keine Prädikate.

   Der Verallgemeinerungsschritt, der zur theoretischen Logik führt, kann als **Form-Inhalt-Übersteigung** betrachtet werden; das erkennende Denken vollzieht eine *Form-Inhalt-Übersteigung*, wenn es die Formen, in und durch die es seine bisherigen Inhalte bestimmend aufeinander bezogen hat, selber zum Gegenstand, zum Inhalt seines Erkennens macht. Eine Form-Inhalt-Übersteigung ist eine nicht-lineare Verallgemeinerung. Die *linearen Verallgemeinerungen* bleiben auf der Ebene der jeweiligen Inhalte: sie beziehen mehr Inhalte in ihre logischen Bezugsetzungen ein, erfassen dadurch diese Inhalte bestimmter – einerseits umfassender, andererseits differenzierter (jede erfolgreiche lineare Verallgemeinerung ist zugleich verallgemeinernd und differenzierend). Die linearen Verallgemeinerungen des gegenständlich-praktischen Erkennens bleiben auf die gegenständlichen Inhalte in ihrer jeweiligen besonderen Bestimmtheit zentriert – sie verbleiben auf der Ebene der *intentio recta*; die logischen Bezugsetzungen dieser Inhalte (d.h. die logischen Formen), auf deren Grundlage diese Inhalte für die Erkennenden ihre Bestimmtheit erlangen, sind noch nicht selber Thema der Erkenntnistätigkeit. Bei der nicht-linearen, *reflexiven Verallgemeinerung* hingegen werden die Bezugsetzungen dieser Inhalte, d.h. die möglichen Inhalte in ihrer Gesamtheit Gegenstand der Untersuchung: das begriffliche Wissen als solches wird Thema, die intentio recta wird durch die intentio obliqua abgelöst. Dadurch werden insbesondere die (Bezugsetzungs-)Formen des gegenständlichen Denkens zum Untersuchungsgegenstand, die Formen werden erkannt, die vorher nur implizit in der jeweiligen konkreten Bestimmtheit der Inhalte mitbewusst waren. Dieser Übergang zum Erkennen von Erkenntnisformen setzt zugleich eine Verallgemeinerung bezüglich der Inhalte voraus: die gegenständlichen Begriffe selber werden verallgemeinernd untersucht: welche Art von Begriffen, welche Beziehungen gibt es zwischen Begriffen: es wird notwendigerweise geredet über *alle* Begriffe, die bestimmten Bedingungen genügen: der Übergang zur theoretischen Logik setzt also den Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Begriffe/Prädikate voraus; ohne Gebrauch solcher Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate können logische Formen gar nicht konzipiert und dargestellt werden. Insbesondere ist es der Begriff der Sachverhalts-/Ereignisklasse – bezeichne durch p, q, r,… bzw. Px, Qx, Rx,… usw. – der aus der Verallgemeinerung der Inhalte des gegenständlichen Denkens resultiert, sind doch Sachverhalts-/Ereignisklassen die spezifischen Relata der logischen Formen.

2. Wenn der Logiker/Philosoph/Erkenntnistheoretiker die gegenständlichen Begriffe ihrer kategorialen Dimension nach vergleicht, unterscheidet und bestimmt, bildet er **Begriffe zweiter Stufe**; diese bestimmen, welche Art von Bestimmungen die gegenständlichen Begriffe vornehmen (Kategorien[69]) oder welche Art von Relationen werden zwischen den gegenständlichen Begriffe angenommen (logische Relationen). Die neuartigen Inhalte dieser Untersuchungen sind die gegenständlichen Begriffe erster Stufe selber, die systematisch hinsichtlich ihrer Unterschiede und Gleichheiten verglichen werden müssen. Begriffe zweiter Stufe werden Begriffen erster Stufe zugesprochen.

3. Die Aussagen der theoretischen Logik sind bedingte oder unbedingte Allaussagen im Bereich der Prädikate; ohne **Quantifikation im Bereich dieser Prädikate** ist die theoretische Logik nicht möglich.

   - Das PNW ist beispielsweise eine unbedingte Allaussage im Bereich der Prädikate: für jedes beliebige Prädikat P gilt, dass es einem Gegenstand nicht zugleich zukommen und nicht zukommen kann.
   - Die Bestimmungen logischer Formen sind bedingte Allaussagen im Bereich der Prädikate; so lautet z.B. die Bestimmung der Implikation: *für alle Prädikate P und Q gilt*, dass P das Q genau dann impliziert, wenn es erstens Gegenstände gibt, denen beide Prädikate zukommen, wenn es zweitens Gegenstände gibt, denen beide Prädikate nicht zukommen, wenn es drittens Gegenstände gibt, denen wohl das zweite Prädikat Q, nicht aber P zukommt, und falls es schließlich drittens keine Gegenstände gibt, denen das erste Prädikat P ohne das Prädikat Q zukommt.
   - Auch die logischen Gesetze sind Allaussagen im Bereich der Prädikate, z.B. ist das Kontrapositionsgesetz eine bedingte Aussage über alle Prädikate: für beliebige (für alle) Prädikate P und Q gilt, dass, falls der Sachverhalt, dass P einem Gegenstand zukommt, impliziert, dass diesem Gegenstand auch der zweite zukommt, dann der Sachverhalt, dass einem Gegenstand Q nicht zukommt, impliziert, dass dem Gegenstand P nicht zukommt.

Die Vorstellung einer unbegrenzten Reihe von „Prädikatenlogiken“ verschiedener Stufigkeit postuliert die Unvermeidbarkeit einer endlosen Reihe von Form-Inhalt-Übersteigungen: es wird unterstellt, für das Verständnis von Eigenart und Gehalt der Begriffe zweiter Stufe und die Erkenntnis der logischen Beziehungen/Formen, die speziell zwischen den Begriffen zweiter Stufe bestehen und ihnen ihre spezifische Bestimmtheit geben, sei es unumgänglich, die Begriffe zweiter Stufe in ihrer Gesamtheit zum Inhalt zu nehmen und durch Begriffe dritter Stufe zu bestimmen, was Quantifikation im Bereich der Begriffe zweiter Stufe voraussetzen würde; nur so könne der Logiker auch Aufschluss über seine eigene Erkenntnistätigkeit und die Art der logischen Begriffsbildung gewinnen. Das Verständnis der Begriffe dritter Stufe setze wiederum Begriffe vierter Stufe und Quantifikation im Bereich der Begriffe dritter Stufe voraus, und dies ohne Ende. Diese Reihe stellt sich als infiniter Regress dar, der nie an sein Ziel – das Verständnis der Begriffe erster Stufe – gelangen könnte. Die Unvermeidbarkeit dieses Regresses würde alle Versuche, ein begründetes Verständnis des eigenen Erkennens, der eigenen logischen Formen, zu gewinnen, zur Vergeblichkeit verurteilen; das endlose Fortschreiten von einer „Prädikatenlogik“ bestimmter Stufe zur „Prädikatenlogik“ der nächsthöheren Stufe wäre ein schlagender Beweis für die Unmöglichkeit einer theoretischen Logik überhaupt: die Formen unseres Erkennens erwiesen sich als unerkennbar. Das Erkennen des gegenständlichen Erkennens würde das Erkennen des Erkennens des gegenständlichen Erkennens voraussetzen, dieses wiederum das Erkennen des Erkennens des Erkennens des gegenständlichen Erkennens, und so fort. Jede dieser postulierten Stufen besäße ihre eigene „Logik“ – die jedoch paradoxerweise unerkennbar wäre; die Konzeption der Prädikatenlogiken unbegrenzt fortschreitender Stufigkeit führt sich so selbst ad absurdum.

Es sind überhaupt nur zwei Form-Inhalt-Übersteigungen möglich. Die *erste* vollzieht sich beim Übergang von der sensomotorischen Verhaltensorganisation zur für die Menschen charakteristischen begrifflichen Intelligenz;

dabei werden die sensomotorischen Objektschemata (die Kenntnis der Objekte der Lebenswelt, wie sie aus der durch direkte Dingwahrnehmungen gelenkten praktisch-effektiven handlungsmäßigen Interaktion bestimmter Art mit diesen Objekten resultiert) des Verhaltens (funktionale Äquivalente der Begriffe) auf der Basis der Symbol- oder Repräsentationsfunktion ganz neu organisiert und selber als Einheiten von Form und Inhalt aufeinander bezogen werden. Das sensomotorisch-vorbegriffliche Erkennen ist auf die einzelnen Gegenstände des Verhaltens zentriert, die jeweils in sensorisch-kontingenter Gegenwart gegeben sein müssen. Die vergleichende Bezugsetzung dieser durch sensomotorisch-praktische Handhabung erkannten Gegenstände führt zur begrifflichen Erkenntnis; Voraussetzung ist, dass die sensomotorische Kontingenz überschritten wird (dies ermöglicht die Repräsentationsfunktion, insbesondere die Sprache): das vorher an den unmittelbaren sensorisch-motorischen Vollzug gegenständlicher Handlungen gebundene Wissen von Gegenständen kann nun immer systematischer und unabhängig von der sensorischen Gegenwart der Dinge untereinander verglichen werden, die realen Gegenstände erhalten eine rein mentale Repräsentanz und können logischen Vergleichen unterzogen werden; das Wissen erhält mehr und mehr begriffliche Prägnanz. Die Bezugsetzung der Gegenstände ist dann an die Quantifikation im Bereich der zu den Begriffen gehörenden Gegenstände gebunden. Die *zweite* Form-Inhalt-Übersteigung beginnt mit der erkenntnistheoretisch-logischen Reflexion des gegenständlichen Wissens in seinem ganzen Umfang.

Sachlich begründet werden könnte die Konzeption der Reihe aneinander anknüpfender „Prädikatenlogiken“ zunehmender Stufigkeit nur dann, wenn sich die Notwendigkeit ständiger, aufeinander aufbauender Form-Inhalt-Übersteigungen rechtfertigen ließe; dies wäre nur dann der Fall, wenn die Erkenntnis der Formen, die den logischen Untersuchungen zugrunde liegt, wiederum wie der Übergang vom gegenständlich-praktischen zum logisch-erkenntnistheoretischen Erkennen eine völlige Umkehr der Intentionalität erfordern würde, d.h. wenn der Logiker sich ebenfalls seiner eigenen Erkenntnistätigkeit und seiner logischen Bezugsetzungen (Formen) so wenig und nur implizit bewusst wäre, wie dies für die Subjekte auf der Ebene des gegenständlich-praktischen Denkens charakteristisch ist, so dass eine verallgemeinernde Reflexion der speziellen Formen der theoretischen Logik durchgeführt werden müsste, wobei die Begriffe zweiter Stufe und ihr Zusammenhang (die Erkenntnisformen des Logikers) zum expliziten, eigenständigen Thema einer Untersuchung würden.

Die Tatsache, dass der Erfolg logischer Untersuchungen voraussetzt, dass sich der Logiker bei der Untersuchung der logischen Formen und Gesetze auch der eigenen Erkenntnistätigkeit und der eigenen logischen Bezugsetzungen bewusst wird, erfordert keine erneute Umkehrung der Intentionalität. Erfolgreiche logische Analysen setzen von vornherein eine vergleichsweise ausgeprägte methodische Bewusstheit voraus; der Logiker muss sich über seine Ziele, seine Erkenntnismöglichkeiten und die Grenzen seiner Mittel im Klaren sein. Dem vortheoretischen gegenstandsbezogenen Erkennen wird das eigene Erkennen nicht zum Thema; da die Untersuchungen des Logikers jedoch den Formen des Erkennens selbst gelten, wird dem Logiker notwendigerweise auch das eigene Erkennen und seine Formen zum Thema: die Erkenntnisse der theoretischen Logik sind *selbstbezüglich*, die normativen Gesetzmäßigkeiten, denen das vom Logiker untersuchte gegenständliche Wissen und Erkennen unterliegt, gelten auch für die Begriffsbildungen des Logikers. Mit der Form-Inhalt-Übersteigung der logischen Untersuchung setzt die systematische Bewusstwerdung des begrifflichen Erkennens *im Ganzen*, einschließlich des Erkennens der theoretischen Logik ein. Die Untersuchung der logischen Struktur der menschlichen Erkenntnistätigkeit gibt auch Aufschluss über das Erkennen des Logikers. Der Logiker ermittelt Normen, denen auch sein eigenes Schließen und Urteilen unterstellt ist. *Es gibt für die Logik selber keine eigene, besondere Logik*, die in einem eigenständigen Untersuchungsprozess erkannt werden müsste. Die Formen, die den Inhalten der theoretischen Logik ihre Bestimmtheit verleihen (dies sind insbesondere die logischen Beziehungen zwischen den logischen Formen selbst), sind nicht wiederum Formen und Begriffe etwa dritter Stufe, sondern es sind dieselben Formen, die die theoretische Logik selber untersucht. Dies geht schon aus der Struktur der elementaren logischen Gesetze hervor: diese Gesetze bestimmen die logischen Formen, die zwischen den logischen Formen selbst bestehen. Zwischen diesen logisch-theoretischen Inhalten bestehen genau dieselben Relationen, wie sie von der theoretischen Logik als zwischen gegenständlichen Begriffen bestehend entdeckt werden. Die Inhalte sind wohl verschieden von denen der gegenständlichen Begriffe, die Formen sind dieselben: es ist also keine dritte Form-Inhalt-Übersteigung notwendig, um die Beziehungen, die zwischen den begrifflichen Bestimmungen der Logik zu entdecken; sie ist nicht nur nicht notwendig, sie wäre gar nicht durchführbar.

Wenn der Logiker über beliebige Begriffe erster Stufe spricht (dies erfordert den Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate), so ist dies nicht mehr im Rahmen der linearen Verallgemeinerungen des gegenständlichen Erkennens möglich, sondern erfordert die reflexive Verallgemeinerung. Wenn hingegen der Logiker etwa von beliebigen Begriffen zweiter Stufe spricht, wird die Inhaltsebene der theoretischen Logik nicht verlassen: es können etwa Aussagen getroffen werden über beliebige logische Relationen, die ja spezielle Begriffe zweiter Stufe sind; auch hier ist die Festsetzung von Beliebig-Element-Zeichen für beliebige logische Relationen (z.B. Θ_1, Θ_2, Θ_3, …) erforderlich. Auf beliebige logische Relationen muss Bezug genommen werden, wenn beispielsweise die allgemeinen Bedingungen für die eindeutige Verkettung zweistelliger logischer Relationen wie folgt definiert werden. Zwei logische Relationen Θ_1 und Θ_2 – Begriffe zweiter Stufe – sind unter genau folgender Bedingung eindeutig verkettbar: besteht zwischen 2 Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q eine logische Relation Θ_1, und zwischen der Sachverhalts-/Ereignisklasse q und einer dritten r die Beziehung Θ_2, dann gibt es genau eine logische Relation Θ_3, die zwischen der ersten und dritten Ereignisklassen p und r besteht. Der Begriff der logischen Relation hat dabei den Status eines übergeordneten Gattungsbegriffs, man verbleibt innerhalb des spezifischen Verallgemeinerungsniveaus der Logik (jetzt liegt wieder, auf dem neuen Verallgemeinerungsniveau der theoretischen Logik, eine lineare, nicht-reflexive Verallgemeinerung vor)[70]. Die Inhalte, die von der theoretischen Logik behandelt werden, werden in sich weiter bestimmt; so lassen sich die logischen Formen in verschiedenster Weise klassifizieren und/oder zerlegen: nach der Stelligkeit, nach der Offenheit, der Geschlossenheit, Selbstständigkeit, als Formen der Kommunität, der scheinbaren Dependenz, der Konstituenz usw. Man verbleibt dabei auf dem spezifischen Verallgemeinerungsniveau der Logik, „übersteigt“ dieses Niveau nicht. Für logische Begriffe (Begriffe 2.Stufe) gibt es nur noch die Möglichkeit einer linearen Verallgemeinerung: es sind nur noch Verfeinerungen, differenzierende Ausweitungen der logischen Begriffe möglich, die in diesem linearen Verallgemeinerungsprozess Begriffe zweiter Stufe bleiben – und nicht etwa Begriffe „ dritter Stufe“ sind. Bemerkenswert ist, dass im Rahmen der „modernen Logik“ zwar arglos von Begriffen dritter und höherer Stufe geredet wird, doch *kein einziger* derartiger Begriff angeführt, bestimmt und erläutert werden kann!

Solange nicht erkannt ist, dass Quantifikation über Individuen (reale Gegenstände) nicht Kennzeichen der theoretischen Logik (in Gestalt einer so genannten „Prädikatenlogik erster Stufe“) ist, sondern das vortheoretische Gesetzeswissen charakterisiert, und dass Gebrauch von Begriffen zweiter Stufe und die Quantifikation im Bereich der Prädikate eine Voraussetzung und Charakteristikum *aller* theoretischen Logik ist, bleibt jeder Versuch, eine theoretische Logik zu entwerfen, aussichtslos. Wenn man die geläufige Bestimmung des „engeren Prädikatenkalküls“ zu Grunde legt, wird Prädikatenlogik ein völlig verworrenes, unklares und widersprüchliches Gebilde. Es passt in keiner Weise zusammen, dass einerseits nur von Individuen/Gegenständen bestimmter Bezugsbereiche Aussagen gemacht werden sollen (dies ergibt sich aus der Behauptung, nur Individuenvariablen würden durch Quantoren gebunden), andererseits aber in den Ausdrücken nur „Prädikatvariablen“ vorkommen: wenn nur „Individuenvariablen“ gebunden würden, dann könnten nur Bezeichnungen von konkreten Prädikaten in den Ausdrücken dieser so genannten „Prädikatenlogik erster Stufe“ auftreten: man kann ja nicht allen oder einigen Individuen des Bezugsbereichs irgendein beliebiges Prädikat zu- oder absprechen.

4.3.7. Die elementaren Quantoren und ihre logischen Beziehungen (Quantorenquadrat)

Allsätze der Form $(\forall x)\ P(x)$ bringen **Frege** zufolge die Allgemeinheit zum Ausdruck, wie sie Gesetzen eignet; diese Allgemeinheit glaubte er unabhängig von jeder logischen Form bestimmen und aus dem Zusammenhang mit den logischen Formen lösen zu müssen. Tatsächlich belegt die Betrachtung der Bedeutung des Ausdrucks „$\forall x\ P(x)$“ jedoch, dass der Allsatz „$\forall x\, Px$“ bereits eine logische Beziehung zwischen einem Prädikator Px und jenem Prädikator, der die Extension des zur Quantifikation gehörenden Bezugsbereichs **B** festlegt, bezeichnet. Dieser Bezugsbereich kann im Falle von Allsätzen der Ausdrucksgestalt $\forall x\, Px$ nie der universelle Bereich sein, da sonst das jeweilige Prädikat P *jedem* beliebigen Gegenstand zukommen müsste – P fiele mit der Bestimmung des Gegenstandseins selber zusammen (P wäre ein Begriff erster Stufe, nicht aber eine Bezeichnung beliebiger Begriffe) und jeder Allsatz der Form $\forall x\, Px$ liefe auf die nutzlose Tautologie „Jeder Gegenstand ist ein Gegenstand“ hinaus. Jedes echte, gehaltvolle Prädikat bestimmt Gegenstände *näher*, es muss also die Gegenstände ihrer spezifischen Bestimmtheit nach voneinander *unterscheiden* – Bestimmen ist stets Unterscheiden. Der Begriff des Gegenstandes, der als *einzige* Bestimmung *allen* Gegenständen zukommt, ist kein Begriff, der mit anderen Begriffen in einem logischen Zusammenhang stehen könnte; er ist vielmehr die *Voraussetzung* für die Bestimmung aller begrifflichen Zusammenhänge: die Beziehungen der Begriffe hängen ja von der Weise ab, wie die Begriffe zusammen Gegenstände zukommen und nicht zukommen. „$\forall x\, Px$“ bedeutet, dass jedem Gegenstand x aus dem nicht-universellen Bezugsbereich **B** das Prädikat P zukommt. Bleibt dabei ungewiss, ob jeder Gegenstand, dem P zukommt, auch **B** angehört, haben wir die zweistellige logische Relation $(10\bullet 1)(x\in \mathbf{B}, Px)$; gehört nicht jeder

Gegenstand, dem P zukommt, zu **B**, gilt die Implikationsbeziehung $(x \in \mathbf{B}) \rightarrow (Px)$, gehört schließlich auch jeder Gegenstand, dem P zukommt, zu **B**, gilt die Äquivalenzbeziehung $(x \in \mathbf{B}) \leftrightarrow (Px)$. Der Ausdruck „$\exists x\, Px$" besagt, dass zumindest einem Gegenstand des Bereichs **B** das Prädikat P zukommt; er bezeichnet so die logische Relation $(1 \bullet\bullet 1)(x \in \mathbf{B}, Px)$ – wobei vorausgesetzt wird, dass weder **B** noch $\{x \mid Px\}$ der universelle Bereich sind (deshalb ist die Vorkommenskombination IV realmöglich). Es ist somit unabweislich, dass der Ausdruck der Allgemeinheit „$\forall x\, Px$" bereits eine logische Relation bezeichnet und **FREGE**s Dissoziation von Allgemeinheit und logischer Relation falsch ist.

In einem Ausdruck der Form $(\mathfrak{Q}x)\ Px$, der eine bestimmte logische Beziehung zwischen dem Prädikator Px und dem Begriff, der den Bezugsbereich **B** festlegt und benennt, lässt sich der Quantor, das Zukommen des Prädikats P[71] oder beides negieren. Durch diese Negationen lassen sich, ausgehend von $(\mathfrak{Q}x)\ Px$, die vier verschiedenen Formen elementarer Quantifikation – $(\mathfrak{Q}x)\ Px$, $\sim(\mathfrak{Q}x)\ Px$, $(\mathfrak{Q}x) \sim Px$ und $\sim(\mathfrak{Q}x) \sim Px$ – konstruieren und begriffsschriftlich darstellen. Da jeder der vier derart möglichen $\exists$-Ausdrücke – auf der Grundlage der Äquivalenzen: $(\forall x)\ Px \equiv \ \sim(\exists x) \sim Px$ und $(\exists x)\ Px \equiv \ \sim(\forall x) \sim Px$ – mit genau einem der vier möglichen $\forall$-Ausdrücke bedeutungsgleich ist, gibt es unter Zugrundelegung von $\forall$ und $\exists$ genau vier verschiedene Quantoren; für die Darstellung dieser vier Formen kann daher auf einen der beiden Quantoren verzichtet werden[72]. Wir erhalten jeweils vier verschiedene elementare $\forall$- und $\exists$-Quantifikationen mit jeweils einem Bedeutungsäquivalent:

(1)	$\forall x\, Px$	$\equiv$	$\sim\exists x \sim Px$	Alle x sind P	$\equiv$	Nicht ein x ist nicht P
(2)	$\sim\forall x\, Px$	$\equiv$	$\exists x \sim Px$	Nicht alle x sind P	$\equiv$	Zumindest ein x ist nicht P
(3)	$\forall x \sim Px$	$\equiv$	$\sim\exists x\, Px$	Alle x sind nicht P	$\equiv$	Nicht ein x ist P
(4)	$\sim\forall x \sim Px$	$\equiv$	$\exists x\, Px$	Nicht alle x sind nicht P	$\equiv$	Zumindest ein x ist P

Im Rahmen der logistischen Konzeption der Aussageformen ist jeder Ausdruck $\mathfrak{Q}x\, Px$ als eine Erfüllbarkeitsaussageform aufzufassen, die bei jeder Ersetzung der „Prädikatvariablen" in eine wahrheitswertdefinite Erfüllbarkeitsaussage übergeht; diese Ausdrücke können demnach in Fregegesetzen an die Stelle der Aussagevariablen gesetzt werden, und es resultiert ein SFG-analoges Gesetz der Prädikatenlogistik; jedes derartige Gesetz besagt, dass für jedes Prädikat P die Aussage $\mathfrak{Q}x\, Px$ nicht zugleich wahr und falsch sein kann. Auch auf diese Weise lässt sich eine unbegrenzte Menge allgemeingültiger prädikatenlogistischer SFG-analoger Formeln konstruieren, die allerdings keinerlei logische Relevanz besitzen. Beispielsweise entsteht aus dem Fregegesetz $A \Rightarrow (A \triangledown B) \equiv \neg(A \cdot \neg A \cdot \neg B)$ durch die Ersetzung von A durch $\exists x\, Fx$ und von B durch $\forall x\, Gx$ die „allgemeingültige" prädikatenlogistische Formel $\exists x\, Fx \Rightarrow (\exists x\, Fx \triangledown \forall x\, Gx)$. Die Formel „$\exists x\, Fx \Rightarrow (\exists x\, Fx \triangledown \forall x\, Gx)$" involviert eine Quantifikation über den Bereich der Prädikate und müsste vervollständigt werden zu „$\forall F,G\ [\exists x\, Fx \Rightarrow (\exists x\, Fx \triangledown \forall x\, Gx)]$" $\equiv$ „Für beliebige Prädikate F und G gilt: es ist falsch, dass einem Gegenstand x das Prädikat G nicht zukommt, und das Prädikat F sowohl zukommt wie nicht zukommt".

Es gibt freilich Gesetzesbeziehungen der Form $(\mathfrak{Q}_1 x\, Px \oplus \mathfrak{Q}_2 x\, Px)$, die nicht auf Fregegesetze reduziert werden können. Dazu gehören die bereits vorgestellten Äquivalenzen (Bedeutungsgleichheiten). Der Ausdruck „Alle x sind P" hat dieselbe Bedeutung wie der Ausdruck „Es gibt kein x, das nicht P ist". Diese Äquivalenz wird in der Prädikatenlogistik stets *intuitiv* als gültig vorausgesetzt; ihre Gültigkeit ergibt sich ohne Weiteres aus der Explikation der umgangssprachlich festgelegten Bedeutungen der Ausdrücke „$\forall x\, Px$" und „$\exists x\, Px$"[73]. Wenn mit den Bezeichnungen „$(\forall x)$" und „$(\exists x)$" ein Sinn verbunden wird, dann nur auf der Grundlage dieser umgangssprachlichen Bedeutungsgleichheiten. Es wird z.B. vorausgesetzt, dass „nicht alle" bedeutet „zumindest eines nicht" und dass „nicht eines" bedeutet „alle nicht" oder „keines". Da jeder Ausdruck $\mathfrak{Q}x\, Px$ eine zweistellige logische Relation zwischen dem Sachverhalt $x \in \mathbf{B}$ und dem Sachverhalt Px bezeichnet, ist eine zweifache Negation möglich: negiert werden kann 1. der sich auf die Gegenstände des Bezugsbereichs beziehende Quantor 2. das Zukommen des Prädikats P[74].

Die vier elementaren Quantoren sind nicht wie die Gedankengefüge „wahrheitsfunktional". Oft wird versucht, den Formen $\forall x\, Px$ und $\exists x\, Px$ den Anschein von „Wahrheitsfunktionen" zu geben, indem $\forall x\, Px$ als $\mathbf{K}$-Aussage

„$Pa_1 \,\&\, Pa_2 \,\&\, \ldots \,\&\, Pa_n$“ und ∃x Px als $\mathbb{A}$-Aussage „$Pa_1 \triangledown Pa_2 \triangledown \ldots \triangledown Pa_n$“ dargestellt wird, wobei die Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ der Bezugsbereich der Gegenstände sein soll, über welchen quantifiziert wird[75]. Die Ausdrücke „$Pa_1 \,\&\, Pa_2 \,\&\, \ldots \,\&\, Pa_n$“ und „$Pa_1 \triangledown Pa_2 \triangledown \ldots \triangledown Pa_n$“ sind jedoch *keine* Wahrheitsfunktionen, denn die Formen Ⓠx Px berücksichtigen nicht nur die Wahrheitswerte der durch & und ▿ verbundenen Aussagen und geben sie kund, sondern darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass in den verbundenen Aussagen von *allen Gegenständen eines bestimmten Bezugsbereichs* jedem oder zumindest einem Gegenstand *ein und dasselbe Prädikat* zugesprochen wird; hier ist also nicht nur der Wahrheitswert relevant. Die Quantoren sind prädikatenlogistische Ausdrücke, die sich nicht auf SFG-Sachverhalte reduzieren lassen; die gesetzmäßigen Beziehungen der Quantoren lassen sich deshalb auch nicht mit Mitteln des SFG, und auch nicht ausgehend von Fregegesetzen rechtfertigen. Die in obiger Tabelle angeführten Äquivalenzen lassen sich aus der Bedeutungsgleichheit „(∀x) Px“ ≣ „~(∃x) ~Px“ mit Hilfe des Gesetzes der doppelten Negation herleiten; aus dieser Bedeutungsgleichheit folgen andere Bedeutungsgleichheiten: aus (∀x) ~Px“ folgt aufgrund des Gesetzes [(∀x) Px ↔ ~(∃x) ~Px] die Beziehung ~(∃x) ~~Px, aus dieser nach dem Gesetz der doppelten Negation die Beziehung ~(∃x) Px, usw.

Der Versuch, diese Äquivalenzen mithilfe von Gedankengefügen darzustellen, erfordert es, die Ausdrücke Ⓠx Px, die doch wohlbestimmte logische Formen bezeichnen, als Aussageformen aufzufassen. Der das Gesetz (∀x) Px ↔ ~(∃x) ~Px] begriffsschriftlich abschwächende Ausdruck „(∀x Px) ⇔ (~∃x ~Px)“ ist eine unvollständig dargestellte Erfüllbarkeitsaussage, die zu „∀P [(∀x Px) ⇔ (~∃x ~Px)]“ vervollständigt gedacht werden muss.

Die Beziehungen der Quantoren stellen, anders als die SFG-analogen Gesetze, einen echten prädikatenlogistischen Gesetzestyp dar. Diese im Rahmen der Prädikatenlogistik nur intuitiv als gültig zu erweisenden Gesetzesbeziehungen spielen bei allen prädikatenlogistischen Ableitungen die zentrale Rolle. Zwischen den vier elementaren Quantoren

(∀x) Px	{≣ ~(∃x) ~Px}	identisch mit der logischen Form (10•1)[(x∈**B**), (Px)]
(∀x) ~Px	{≣ ~(∃x) Px}	identisch mit der logischen Form (0111)[(x∈**B**), (Px)]
(∃x) Px	{≣ ~(∀x) ~Px}	identisch mit der logischen Form (1••1)[(x∈**B**), (Px)]
(∃x) ~Px	{≣ ~(∀x) Px}	identisch mit der logischen Form (•1•1)[(x∈**B**), (Px)]

bestehen bestimmte logische Beziehungen; sie sind im so genannten Quantorenquadrat aufgeführt; es ergeben sich 16 verschiedene Gesetze des Quantorenquadrats, dargestellt in folgender Relationenmatrix[76].

	(∀x) Px	(∀x) ~Px	(∃x) Px	(∃x) ~Px
(∀x) Px	$\mathbb{E}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{J}$
(∀x) ~Px	$\mathbb{D}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{C}$
(∃x) Px	$\mathbb{B}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{A}$
(∃x) ~Px	$\mathbb{J}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{E}$

Der Beweis dieser *Gesetze des Quantorenquadrats* kann sich nur auf die jeweilige Bedeutung der Quantoren und auf den Begriff der zweistelligen logischen Relation stützen; es muss systematisch geprüft werden, ob beide Formen zusammen gelten, ob eine ohne die andere gelten kann und ob schließlich keine der beiden Formen gelten kann: Beispielsweise können die beiden Formen (∀x) Px und (∃x) Px zusammen gelten, denn das „zumindest ein x ist P“ schließt die Möglichkeit ein, dass „allen x P zukommt“; hingegen können (∀x) Px und (∃∃x) Px nicht zusammen gelten, denn das „zumindest eines, aber nicht jedes x ist P“ schließt ausdrücklich aus, dass alle x P sind. Gilt (∀x) Px, dann ist es nicht möglich, dass (∃x) Px nicht gilt: wenn alle x P sind, dann ist zumindest ein x P. Bei (∀x) Px kann aber sehr wohl (∃∃x) nicht gelten. Bei ~(∀x) Px kann ∃x Px gelten, denn es ist ja möglich, dass eines aber nicht alle x P sind; bei ~(∀x) Px kann auch ∃∃x Px gelten, denn ∃∃x Px beinhaltet ja, dass nicht alle x P sind. Es ist möglich, dass weder (∀x) Px noch (∃x) Px gilt, und auch (∀x) Px und (∃∃x) Px können beide nicht gelten; dies trifft in beiden Fällen zu, wenn $\forall x \sim Px$ gilt. Damit ist ermittelt, welche Vorkommenskombinationen der logischen Totalrelation von $(\forall x)$ Px] und $[(\exists x)$ Px bzw. von $(\forall x)$ Px] und $[(\exists\exists x)$ Px realmöglich sind; es ergeben sich die logischen Gesetze

$[(\forall x)\ Px] \rightarrow [(\exists x)\ Px]$ und
$[(\forall x)\ Px] \uparrow [(\exists\exists x)\ Px]$.

Die Gültigkeit der restlichen logischen Gesetze des Quantorenquadrats wird auf entsprechende Weise nachgewiesen.

Begriffsschriftlich lässt sich das Gesetz $[(\forall x)\ Px] \rightarrow [(\exists x)\ Px]$ nur unvollständig mit Hilfe des Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ ausdrücken – $\forall P\ \{[(\forall x)\ Px] \Rightarrow [(\exists x)\ Px]\}$: für keine Ersetzung von P ergibt sich aus $(\forall x)$ Px eine wahre und aus $(\exists x)$ Px eine falsche Aussage[77]. Dieses begriffsschriftlich abgeschwächte Gesetz des Quantorenquadrats ist keine „Wahrheitsfunktion" im Sinne der Gedankengefüge, denn wenn ich für ein empirisch-konkretes Prädikat $\mathfrak{P}$ etwa $(\forall x)\ \mathfrak{P}x$ und $(\exists x)\ \mathfrak{P}x$ beide für wahr oder beide für falsch, oder $(\forall x)\ \mathfrak{P}x$ für falsch und $(\exists x)\ \mathfrak{P}x$ für wahr halte, kann ich zwar für den jeweiligen *Einzelfall* die richtige Gedankengefügeaussage „$(\forall x)\ \mathfrak{P}x \Rightarrow (\exists x)\ \mathfrak{P}x$" treffen, aber aus dem Bezug auf vorgegebene Wahrheitswerte von All- und Existenzsätzen wie $(\forall x)\ \mathfrak{P}x$ und $(\exists x)\ \mathfrak{P}x$ kann nie erschlossen werden, dass es für *jede* Wahl eines empirisch-konkreten Prädikats unmöglich ist, dass $(\forall x)$ Px zu einer wahren und $(\exists x)$ Px zu einer falschen Aussage wird. Dies ist nur durch den Rekurs auf die Bedeutungen der Ausdrücke „$(\forall x)\ \mathfrak{P}x$" und „$(\exists x)\ \mathfrak{P}x$" möglich: die Bedingungen für die Geltung von ‚alle x sind P' können nicht gegeben sein, ohne dass auch die Bedingungen für die Geltung von ‚zumindest ein x ist P' vorliegen.

Alle Fregegesetze sind ein unvollständiger Ausdruck des PNW und besagen im Grunde nur „$\forall A\ [\neg(A \& \neg A)]$"; aus den Ausdrücken der Fregegesetze resultieren, wenn die „Aussagevariablen" durch die Ausdrücke von Quantifikationen $\mathfrak{Q}x\,Px$ ersetzt werden, SFG-analoge prädikatenlogistische Gesetze der Ausdrucksform $\forall P \sim[\mathfrak{Q}x\,Px \ \& \sim\mathfrak{Q}x\,Px]$. Die $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetze des Quantorenquadrats in begriffsschriftlich abschwächender Darstellung lassen sich auf einen solchen Ausdruck bringen. Das Gesetz des Quantorenquadrats $[(\forall x)$ Px] $\succ\!\prec$ $[(\exists x) \sim Px]$ lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung „$\forall P\ [(\forall x)\ Px] \bowtie [(\exists x) \sim Px]$"; unter Nutzung von Gesetzen des SFG und des Quantorenquadrats lässt sich aus diesem Ausdruck „$\forall P\ \{\sim[(\exists x) \sim Px \ \& \sim(\exists x) \sim Px]\}$" herleiten:

(1)	$\forall P\ \{[(\forall x)\ Px] \bowtie [(\exists x) \sim Px]\}$	aufgrund der Bedeutungsgleichheit $(A \bowtie B) \equiv \neg(A \& B) \& \neg(\neg A \& \neg B]$ äquivalent mit (2)
(2)	$\forall P\ \{\sim[(\forall x)\ Px \ \& \ (\exists x) \sim Px] \ \& \sim[\sim(\forall x)\ Px \ \& \sim(\exists x) \sim Px]\}$	aufgrund des Gesetzes des Quantorenquadrats $(\forall x)\ Px \leftrightarrow \sim(\exists x) \sim Px]$ äquivalent mit (3)
(3)	$\forall P\ \{\sim[\sim(\exists x) \sim Px \ \& \ (\exists x) \sim Px] \ \& \sim[\sim\sim(\exists x) \sim Px \ \& \sim(\exists x) \sim Px]\}$	aufgrund des Gesetzes der doppelten Negation und des SFG-Gesetzes $(A \& A) \leftrightarrow A$ äquivalent mit (4)
(4)	$\forall P\ \{\sim[(\exists x) \sim Px \ \& \sim(\exists x) \sim Px)]\}$	

Die Gültigkeit der Aussage (4) hätte sich auch ergeben, wenn im Ausdruck des Fregegesetzes $\neg(A \& \neg A]$ die „Aussagevariable" „A" durch den Erfüllbarkeitsaussageform „$(\exists x) \sim Px$" ersetzt worden wäre. Dies heißt jedoch nicht, diese Gesetze des Quantorenquadrats ließen sich durch derartige Ersetzungen der „Aussagevariablen" in Fregegesetzen herleiten. Wenn sich auch aus allen $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetzen des Quantorenquadrats Gesetze des Typs $\forall P \sim[\mathfrak{Q}x\,Px \ \& \sim\mathfrak{Q}x\,Px]$ herleiten lassen, die sich aus dem Fregegesetz $\neg(A \& \neg A)$ durch Vertauschung von „A" und „$\mathfrak{Q}x\,Px$" gewinnen lassen, und wenn auch umgekehrt von $\neg(A \& \neg A)$ der Ausdruck $\forall P \sim[\mathfrak{Q}x\,Px \ \& \sim\mathfrak{Q}x\,Px]$ und *davon* ausgehend jedes $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetz des Quantorenquadrats hergeleitet werden kann, so müssen sich alle diese Herleitungen doch bereits auch auf die grundlegenden Bedeutungsgleichheiten und auf Gesetze des Quantorenquadrats stützen.

Dass die $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetze des Quantorenquadrats auf den SFG-Ausdruck $\neg(A\&\neg A)$ reduzierbar sind, liegt daran, dass die begriffsschriftliche Abschwächung der Quantorenquadrat-Gesetze ausschließt, dass zwei äquivalente Quantoren nicht zugleich gelten[78] oder dass zwei kontradiktorische Quantoren zugleich gelten[79]; es werden wie bei $\neg(A\&\neg A)$ kontradiktorische Widersprüche ausgeschlossen. Die restlichen Gesetze des Quantorenquadrats lassen sich nicht auf einen Ausdruck $\forall P \sim[\mathbb{Q}x\,Px \,\&\, \sim\mathbb{Q}x\,Px]$ und $\neg(A\&\neg A)$ bringen, sondern auf $\forall P \sim[\forall x\,Px \,\&\, \forall x \sim Px]$ und $\forall P \sim[\sim\exists x\,Px \,\&\, \sim\exists x \sim Px]$:

Das Gesetz **$(\forall x)$ Px → $(\exists x)$** Px lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung: $\forall P\,[(\forall x)\,Px \Rightarrow (\exists x)\,Px]$; aus diesem Gesetz lässt sich wohl $\forall P \sim[(\forall x)\,Px \,\&\, (\forall x) \sim Px]$ und $\forall P[(\exists x)\,Px \,\triangledown\, (\exists x) \sim Px] \equiv \forall P \sim[\sim(\exists x)\,Px \,\&\, \sim(\exists x) \sim Px]$ herleiten, nicht aber ein aus einem Fregegesetz herleitbarer Ausdruck der Form $\sim(\mathbb{Q}x\,Px \,\&\, \sim\mathbb{Q}x\,Px)$. Das **Gesetz $[(\forall x)\,Px] \uparrow [(\forall x) \sim Px]$** wird begriffsschriftlich durch den den Aussagegehalt abschwächenden Ausdruck $[(\forall x)\,Px] \Uparrow [(\forall x) \sim Px] \equiv \forall P \sim[(\forall x)\,Px \,\&\, (\forall x) \sim Px] \equiv \forall P \sim[(\sim(\exists x) \sim Px) \,\&\, \sim(\exists x)\,Px)]$ $\equiv \forall P\,(\exists x)\,Px \;\triangledown\; (\exists x) \sim Px$ bezeichnet. Das **Gesetz $(\exists x)$ Px $\vee$ $(\exists x)$ ~Px** wird begriffsschriftlich dargestellt als „$\forall P\,[(\exists x)\,Px \;\triangledown\; (\exists x) \sim Px]$“, was bedeutet $\forall P\,\{\sim[\sim(\exists x)\,Px) \,\&\, \sim(\exists x) \sim Px]\} \equiv \forall P \sim[(\forall x)\,Px \,\&\, (\forall x) \sim Px]$. Es geht in diesen Gesetze nicht um einen kontradiktorischen ($\mathbb{J}$), sondern um einen konträren ($\mathbb{D}$) und subalternen ($\mathbb{A}$) Gegensatz zwischen Quantoren[80]; schon aufgrund der Tatsache, dass Fregegesetze nur den kontradiktorischen Gegensatz ($\mathbb{J}$) $\neg(A\&\neg A)$ ausdrücken, ist es unmöglich, diese Gesetze des Quantorenquadrats ausgehend von einem Fregegesetz herzuleiten.

Weder sind also die Quantoren $\mathbb{Q}x\,Px$, noch sind die logischen Beziehungen zwischen diesen Quantoren (die Gesetze des Quantorenquadrats) „Wahrheitsfunktionen“, sondern ganz bestimmte zweistellige logische Formen. Die „Aussagenlogik“ (das SFG) ist für Verständnis und Beweis dieser Formen und Gesetze irrelevant, um die Wahrheit dieser Gesetze zu rechtfertigen, muss auf den genauen Begriff dieser Formen (d.h. auf die Kenntnis aller notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Geltung) Bezug genommen werden; die logische Beziehung zwischen diesen Bedingungen muss vollständig und systematisch ermittelt werden, was wiederum eine genaue Kenntnis der Struktur logischer Relationen voraussetzt. Die logische Form, auf die der Ausdruck „$\forall x\,Px$“ verweist, ist die logische Relation $(10\bullet1)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ – einem Gegenstand des Bezugsbereich **B** kommt notwendig ($\mathcal{N}$) ein Prädikat P zu (ob auch umgekehrt, bleibt offen); der Ausdruck „$\forall x \sim Px$“ verweist auf die logische Relation $(0111)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ – einem Gegenstand des Bezugsbereichs **B** kommt ein Prädikat P unmöglich ($\mathcal{U}$) zu; der Ausdruck „$\exists x\,Px$“ verweist auf die logische Form $(1\bullet\bullet1)[(x\in\mathbf{B}), (Px)]$ – es ist nicht unmöglich ($\sim\mathcal{U} = \mathcal{P}$), dass einem Gegenstand des Bezugsbereichs **B** ein Prädikat P zukommt[81]. Um nun etwa die Beziehung zwischen $(10\bullet1)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ und $(0111)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ zu bestimmen, ist nachzuweisen, dass (1) beide Relationen nicht zusammen gelten können (denn sie bestimmen die beiden ersten Vorkommenskombinationen unterschiedlich), dass jede Relation ohne die andere, und dass beide Relationen nicht gelten können (wenn z.B. die Relation $(1111)[(x\in\mathbf{B}), (Px)]$ gilt; nur auf diese Weise können die Gesetze des Quantorenquadrats begründet werden.

Im Rahmen der Prädikatenlogistik lassen sich diese Gesetze weder vollständig darstellen und noch beweisen; sie werden meist in ihrer begriffsschriftlich abgeschwächten Form als für die logische Intuition evident gültig vorausgesetzt oder in Form von nicht näher begründeten „Axiomen“ oder „Ableitungsregeln“ eingeführt[82]. Jedenfalls ist es unmöglich, diese nicht auf ein kontradiktorisches Verhältnis verweisenden Gesetze des Quantorenquadrats aus einem SFG-analogen prädikatenlogistischen Ausdruck abzuleiten[83]. Diese als evident vorausgesetzten, nicht ausdrücklich bewiesenen, und mit den Mitteln der Logistik auch nicht beweisbaren Gesetze sind die wichtigsten Gesetze, die zur Umformung und Herleitung anderer prädikatenlogistischer Gesetze benutzt werden.

Wird eine Bedeutungsgleichheit wie $\forall x\,Px \equiv \sim\exists x \sim Px$ und zumindest ein konträres oder subalternes QuantorenquadratGesetz ohne Beweis (als „Axiom“) vorausgesetzt, lassen sich alle begriffsschriftlich abgeschwächten Gesetze des Quantorenquadrats herleiten: so lässt sich aus dem Gesetz $\forall x\,Px \Rightarrow \exists x\,Px$ durch Anwendung des Gesetzes $\exists x\,Px \Leftrightarrow \sim\forall x \sim Px$ und der Gesetze des SFG $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A\&\neg B)$, $(A \Uparrow B) \Leftrightarrow \neg(A\&B)$ und $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ das Gesetz $\forall x\,Px \Uparrow \forall x \sim Px$ herleiten, aus diesem durch Anwendung von $\forall x\,Px \Leftrightarrow \sim\exists x \sim Px$, $(A \Uparrow B) \Leftrightarrow (\neg A \triangledown \neg B)$ das Gesetz $\exists x\,Px \;\triangledown\; \exists x \sim Px$, usw.

Auf die begriffsschriftlich abgeschwächten Gesetze des Quantorenquadrats lassen sich Gesetze des SFG anwenden; wenn das SFG-Gesetz $(A \triangledown B) \leftrightarrow (\neg A \Uparrow \neg B)$ auf das Gesetz $[(\exists x) \sim Px] \triangledown [(\exists x)\,Px]$ angewendet wird, ergibt sich: $[\sim(\exists x) \sim Px] \Uparrow [\sim(\exists x)\,Px]$, usw. Mit Hilfe der Expansionsregeln für Gedankengefüge und anderer Gesetze des SFG lassen sich die begriffsschriftlich abgeschwächten Gesetze des Quantorenquadrats beliebig verkomplizieren (wenn dies auch keinerlei theoretischen oder praktischen Nutzen hat): durch Anwendung der Äquivalenz $(A \overline{\vee} B) \leftrightarrow (A \Leftarrow B) \Rightarrow (A \overline{\vee} B)$ kann der Ausdruck $\exists x\, Px \overline{\vee} \exists x \sim Px$ verändert werden zu $(\exists x\, Px \Leftarrow \exists x \sim Px) \Rightarrow (\exists x\, Px \overline{\vee} \exists x \sim Px)$. Umgekehrt kann von jedem komplexen prädikatenlogistischen Ausdruck entschieden werden, ob er durch die nämlichen Gesetze auf einen einfach begriffsschriftlich abgeschwächten Ausdruck eines Gesetzes des Quantorenquadrats reduziert werden kann.

4.3.8. Fregerelationen

Im Rahmen der „modernen Logik“ werden Ausdrücke der Gestalt „$\mathfrak{Q}x\,(Px \oplus Qx)$“ als Darstellungen logischer Relationen aufgefasst; der Ausdruck „$(\forall x)\,(Px \Rightarrow Qx)$“ etwa soll die („formale“) Implikation bezeichnen. Diese Darstellung logischer Relationen muss jedoch aufgrund der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge indirekt bleiben: „$(\forall x)\,(Px \Rightarrow Qx)$“ drückt nicht direkt eine Allaussage über alle *Gegenstände* x eines bestimmten Bereichs aus, sondern ist eine Erfüllbarkeitsaussageform, die bei jeder Ersetzung der Beliebig-Element-Zeichen P und Q zu einer wahren oder falschen Gesetzesaussage wird. Zweifellos soll der Ausdruck jedoch im Sinne der „objektionalen Interpretation“ der Quantoren jenes logische Verhältnis zwischen zwei Prädikaten P und Q benennen, das darin besteht, dass allen Gegenstände des dazugehörenden Bereichs nicht zugleich das Prädikat P zukommt und das Prädikat Q nicht zukommt, es ist also – im Sinne der „objektionalen Interpretation“ der Quantoren[84] – ein Allsatz bestimmter Art. Wenn ich im Folgenden die prädikatenlogistischen Ausdrücke $\mathfrak{Q}x\,(Px \oplus Qx)$ öfters der Einfachheit halber unmittelbar als Bezeichnungen logischer Relationen behandle und etwa von der Fregerelation $(\forall x)\,(Px \Rightarrow Qx)$ spreche, muss immer im Auge behalten werden, dass die prädikatenlogistischen Ausdrücke, die bedingungslogischen Formen, auf die sie eineindeutig verweisen, gar nicht direkt bezeichnen können; der Ausdruck „$(\forall x)\,(Px \Rightarrow Qx)$“ bezeichnet also genau genommen keine Fregerelation, sondern eine Aussageform, die der betreffenden Fregerelation eineindeutig entspricht. Es besteht folgender Zusammenhang: genau diejenigen konkreten Prädikate, die, eingesetzt in eine Erfüllbarkeitsaussageform $\mathfrak{Q}x\,(Px \oplus Qx)$, auf eine wahre Erfüllbarkeitsaussage führen, stehen in der logischen Relation, die der betreffenden Erfüllbarkeitsaussageform $\mathfrak{Q}x\,(Px \oplus Qx)$ eineindeutig entsprechen. Die *logischen Relation*, die auf der Basis der Gedankengefüge *begriffsschriftlich* – nur indirekt! – dargestellt werden können, nenne ich **Fregerelationen**; die Fregerelationen, auf welche prädikatenlogistische Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}x\,(Px \oplus Qx)$ verweisen, nenne ich (zweistellige) **elementare Fregerelationen**. Beliebige Fregerelationen bezeichne ich durch „Λ_1“, „Λ_2“, „Λ_3“, … Bevor ich darlege, welche logischen Relationen (Fregerelationen) allen möglichen Ausdrücken der Gestalt $\mathfrak{Q}x\,(Px \oplus Qx)$ entsprechen, möchte ich auf **FREGE**s Erörterung dieser Ausdrücke eingehen.

Den Ausdruck „$\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx)$“ erläutert **FREGE** folgendermaßen: „‚Was man auch an die Stelle von x setzen möge, *der Fall*, dass Gx verneint und Fx bejaht werden müsste, *kommt nicht vor*‘. Da ist es also *möglich*, dass bei *einigen* Bedeutungen, die man dem x geben kann,

> G(x) zu bejahen und F(x) zu bejahen, bei anderen
> G(x) zu bejahen und F(x) zu verneinen, *bei noch anderen*
> G(x) zu verneinen und F(x) zu verneinen wäre.“[85]

Was das Wort „*möglich*“ in diesem Zusammenhang bedeutet, ist durch **FREGE**s Definition von „$\Rightarrow$“ vorgegeben. Das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ ist einem Paar wertdefiniter Aussagen (A, B) genau dann zuzusprechen ist, wenn jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist; es bleiben für $\mathbf{C}$ drei sich gegenseitig ausschließende Möglichkeiten: beide Aussagen sind *entweder* beide wahr, *oder* beide falsch, *oder* A ist falsch und B wahr. *Jede* dieser drei disjunkten Möglichkeiten stellt bereits für sich eine *hinreichende* Bedingung dar, damit $\mathbf{C}$ irgendwelchen Aussagen A und B zugesprochen werden kann. Genau diese Struktur disjunkter hinreichender Bedingungen überträgt sich auf den Ausdruck „$\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx)$“: *hinreichende* Bedingung dafür, dass zwischen zwei Prädikatoren Fx und Gx die durch diesen Ausdruck bezeichnete logische Relation besteht, ist einzig, dass die Vorkommenskombination $Fx \frown {\sim}Gx$ jedenfalls nicht realmöglich ist. Das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ besagt, dass jedenfalls die Wahrheitswertkombination *A wahr und B falsch* ausgeschlossen ist, und entsprechend besagt die logische Relation, auf die der Ausdruck $(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$ verweist, dass von den vier Vorkommenskombinationen die Vorkommenskombination II jedenfalls nichtrealmöglich ist. Für die restlichen drei Vorkommenskombinationen bleibt es unbestimmt, ob sie realmöglich sind oder nicht; falls die leere Relation ausgeschlossen ist – dies soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden –, muss allerdings zumindest einer dieser Vorkommenskombinationen realmöglich sein. Die *Möglichkeit*, von der **FREGE** in seiner Erläuterung spricht, ist diese Unbestimmtheit, diese Nichtfestgelegtheit der restlichen Vorkommenskombinationen.

Die Struktur der Gedankengefüge $A \oplus B$ überträgt sich auf die logischen Relationen der Form $\forall x\ (Fx \oplus Gx)$. Jedem Aussagenpaar (A, B) kommt genau eines und nur eines der vier Wahrheitswertprädikate zu. Die vier Stellen einer Matrix wie (jnnn) soll den vier Wahrheitswertkombinationen, die es für jedes Par wahrheitswertdefiniter Aussagen gibt, entsprechen; der Buchstabe „j" bezeichne die *definitive* Bejahung und der Buchstabe „n" die *definitive* Verneinung des entsprechenden Wahrheitswertprädikats. Das Gedankengefüge A&B lässt sich dann durch den Ausdruck „(jnnn)(A,B)" darstellen; er drückt die tatsächliche Bedeutung des Gedankengefüges unmittelbar und direkt aus: die Wahrheitswertkombination $\mathcal{W} \frown \mathcal{W}$ wird definitiv bejaht, die anderen Wahrheitswertkombinationen werden verneint. Für die Belegung der Stellen der Matrix gilt, dass wegen der Disjunktivität der Wahrheitswertkombinationen *nur einmal* „j" vorkommen kann; steht an einer Stell „j", steht an den restlichen drei Stellen notwendig „n". Gedankengefüge können nur eine der vier Wahrheitswertkombinationen definitiv bejahen, aber vier Wahrheitswertkombinationen verneinen (dann liegt das leere Gedankengefüge ◐ vor), drei verneinen (dann ist die restliche Wahrheitswertkombination notwendig bejaht), oder zwei oder eine Wahrheitswertkombination ausdrücklich verneinen; für die zwei bzw. drei restlichen Wahrheitswertkombinationen bleibt dann die Bejahung offen, was durch „•", bzw. „∘" bezeichnet werden kann; wird keine Wahrheitswertkombination ausdrücklich verneint, liegt das Gedankengefüge **V** vor. Diese Bezeichnung der Gedankengefüge macht unmittelbar deutlich, wie sich die Eigenart der Gedankengefüge auf die auf ihrer Grundlage konstruierbaren Fregerelationen überträgt. Zwischen den Gedankengefügen $A \oplus B$, den Aussageformen $\forall x(Fx \oplus Gx)$ und den entsprechenden Fregerelationen bestehen die folgenden eineindeutigen Entsprechungen:

$$(\mathrm{jnnn})(A,B) \equiv A \,\&\, B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \,\&\, Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (1000)(p,q) \equiv p \wedge q$$

$$(\mathrm{njnn})(A,B) \equiv A \vDash B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \vDash Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (0100)(p,q) \equiv p \succcurlyeq q$$

$$(\mathrm{n}\circ\circ\circ)(A,B) \equiv A \Uparrow B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \Uparrow Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (0\circ\circ\circ)(p,q),$$

$$(\circ\mathrm{n}\circ\circ)(A,B) \equiv A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (\circ 0\circ\circ)(p,q),$$

$$(\mathrm{n}\circ\circ\mathrm{n})(A,B) \equiv A \bowtie B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \bowtie Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (0\circ\circ 0)(p,q),$$

$$(\circ\circ\circ\circ)(A,B) \equiv A \bigtriangledown B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \bigtriangledown Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (\circ\circ\circ\circ)(p,q), \text{ usw.}$$

Es gelten die Entsprechungen: genau jene Prädikate F und G, die, wenn sie beispielsweise in die Aussageform $(\forall x)(Fx \bowtie Gx)$ eingesetzt werden, auf eine wahre Erfüllbarkeitsaussage führen, stehen in der Fregerelation $(0\circ\circ 0)(p,q)$.

Die auf der Basis von Gedankengefügen darstellbaren *elementaren* logischen Fregerelationen können nie mehr als eine Vorkommenskombination *definitiv* als realmöglich bestimmen; dann aber liegt, weil die restlichen Vorkommenskombinationen notwendig nichtrealmöglich sind, eine unselbständige logische Relation vor, die nicht für sich alleine, sondern erst in umfassenderen logischen Zusammenhängen verständlich wird. Bei den anderen Fregerelationen der Ausdrucksgestalt $\forall x(Fx \oplus Gx)$ sind nur nicht-realmögliche Vorkommenskombinationen definitiv bestimmt. Alle diese Fregerelationen können deshalb noch gar keinen vollständigen Zusammenhang relativer Modalisierung ausdrücken; mithilfe von Fregerelationen der Ausdrucksgestalt $\forall x(Fx \oplus Gx)$ ist kein notwendiger, kein unmöglicher, kein möglicher ($\mathcal{K}$) Zusammenhang definitiv bestimmbar, noch kann ein solcher Zusammenhang eindeutig ausgeschlossen werden. Als elementare Fregerelation ist so kein einziger Gesetzeszusammenhang vollständig, gehaltvoll und eindeutig zu bestimmen.

Auf der Basis der Gedankengefüge können 15 logischen Relationen der Form $\forall x(Fx \oplus Gx)$ bestimmt werden. Zunächst gibt es die Gedankengefüge **K**, **L**, **M** und **X**, die eine der vier Wahrheitswertkombinationen definitiv bejahen. Ihre Struktur, durch die Bejahung eines Wahrheitswertprädikats genau drei Wahrheitswertprädikate auszuschließen, überträgt sich auf die mit ihrer Hilfe konstruierbaren logischen Relationen. Es werden alle Vorkommenskombinationen definitiv bestimmt, drei davon als nichtrealmöglich. Für beliebige Prädikate F und G verweist deshalb der Ausdruck „$(\forall x)$ $(Fx \,\&\, Gx)$" auf die logische Totalform $\mathbb{K}$ – (1000)(Fx, Gx),

der Ausdruck „(∀x) (Fx ⊧ Gx)" verweist auf die logische Totalform 𝕃 – (0100) (Fx, Gx)
der Ausdruck „(∀x) (Fx ⫤ Gx)" verweist auf die logische Totalform 𝕄 – (0010) (Fx, Gx), und
der Ausdruck „(∀x) (Fx ⇓ Gx)" verweist auf die logische Totalform 𝕏 – (0001) (Fx, Gx).

Die restlichen elf nichtleeren Gedankengefüge schließen höchstens zwei Wahrheitswertkombinationen aus; auf ihrer Grundlage können logische Relationen konstruiert werden, die jeweils einen oder zwei Vorkommenskombinationen als nichtrealmöglich bestimmen, während die restlichen Vorkommenskombinationen unbestimmt bleiben; weil die leere logische Relation 𝕆 ausgeschlossen wird, muss jedoch zumindest einer der nicht ausdrücklich ausgeschlossenen Vorkommenskombinationen realmöglich sein.

$(\forall x)\ (Fx \bigtriangledown G)x \triangleq (\circ\circ\circ\circ)(Fx, Gx)$ $\quad$ $(\forall x)\ (Fx \triangledown Gx) \triangleq (\circ\circ\circ 0)(Fx, Gx)$

$(\forall x)\ (Fx \Leftarrow Gx) \triangleq (\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx)$ $\quad$ $(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx) \triangleq (\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$

$(\forall x)\ (Fx \Uparrow Gx) \triangleq (0\circ\circ\circ)(Fx, Gx)$ $\quad$ $(\forall x)\ (Fx \Leftrightarrow Gx) \triangleq (\circ 00\circ)(Fx, Gx)$

$(\forall x)\ (Fx \nwarrow Gx) \triangleq (00\circ\circ)(Fx, Gx)$ $\quad$ $(\forall x)\ (Fx \nearrow Gx) \triangleq (0\circ 0)(Fx, Gx)$

$(\forall x)\ (Fx \searrow Gx) \triangleq (\circ 0\circ 0)(Fx, Gx)$ $\quad$ $(\forall x)\ (Fx \swarrow Gx) \triangleq (\circ\circ 00)(Fx, Gx)$

$(\forall x)\ (Fx \bowtie Gx) \triangleq (0\circ\circ 0)(Fx, Gx)$

Diese Fregerelationen sind durchweg sehr grobe logische Relationen; besteht zwischen zwei Ereignisklassen eine solche grobe Relation, so können diese beiden Ereignisklassen in mehreren verschiedenen Totalrelationen stehen. Wird nur eine Vorkommenskombination als Nullfall bestimmt, so sind 7 nichtleere Totalformen möglich, es gilt etwa: Für beliebige Ereignisklassen p und q: $(\circ\circ\circ 0)(p, q) \leftrightarrow$ 𝕁 [(p∨q), (p >−< q), (p⌊ q), (p ⌋ q), (p ∧ q), (p⋟q), (p⋞q)]. Besteht zwischen zwei Ereignissen eine logische Relation, die zwei nichtrealmögliche Vorkommenskombinationen aufweist, während die restlichen Vorkommenskombinationen unbestimmt bleiben, kommen genau drei nichtleere logische Relationen in Betracht, z.B. gilt: Für alle p und q: $(0\circ\circ 0)\ (p, q) \leftrightarrow$ 𝕁 [(p >−< q), (p⋟q), (p⋞q)]. In der Ausdrucksgestalt (∀x) (Fx ⊕ Gx) lassen sich also 15 zweistellige logische Relationen begriffsschriftlich darstellen.

Ausgehend von den drei Möglichkeiten, einen Quantor (∀x)Px oder (∃x)Px zu negieren, gibt es in der Menge der elementaren Fregerelationen vier Abbildungen, die jeweils eine elementare Fregerelation 𝔔x (Fx⊕Gx) auf genau eine (andere) Fregerelation abbilden; eine solche Abbildung ist entweder identisch (Neg0; eine elementare Fregerelation wird aus sich selbst abgebildet), oder sie besteht in der Negation des Quantors „(𝔔x)" (Neg1)[86], oder in der Negation des Gedankengefügeprädikators „(Fx⊕Gx)" (Neg2)[87] oder in beiden Negationen zusammen (Neg3). Mithilfe dieser Abbildungen lassen sich zu den genannten 15 elementaren Fregerelationen eine Anzahl weiterer Fregerelationen begriffsschriftlich darstellen:

1) Wir haben zunächst die identische Abbildung Neg0:
   die Fregerelation (∀x)(Fx⊕ Gx) wird abgebildet auf: (∀x)(Fx ⊕ Gx) ≡ ~(∃x)~(Fx ⊕ Gx)[88].
2) Es gibt die Abbildung Neg1:
   die Fregerelation (∀x)(Fx⊕Gx) wird abgebildet auf: ~(∀x)(Fx⊕G x) ≡ (∃x)~(Fx⊕Gx)
3) Es gibt die Abbildung Neg2:
   die Fregerelation (∀x)(Fx⊕Gx) wird abgebildet auf: (∀x)~(Fx⊕Gx) ≡ ~(∃x)(Fx⊕Gx)
4) Wir haben schließlich die Abbildung Neg3:
   die Fregerelation (∀x)(Fx⊕Gx) wird abgebildet auf: ~(∀x)~(Fx⊕Gx) ≡ (∃x)(Fx⊕Gx).

Mithilfe dieser Abbildungen[89] lassen sich ausgehend von den 15 nichtleeren zweistelligen Gedankengefügen genau 30 nichtleere zweistellige logische Relationen konstruieren und darstellen. Alle diese elementaren Fregerelationen sind wohldefiniert und stehen in einem exakt bestimmbaren logischen Zusammenhang.

Die Fregerelationen und ihre Bedeutung sind in nachstehender Tabelle aufgeführt. „𝔉\𝕁,𝕃,𝕄" bezeichnet diejenige logische Relation, die zwischen zwei Ereignisklassen genau dann besteht, wenn zwischen ihnen weder 𝕁, noch 𝕃, noch 𝕄 besteht; mit „𝔉" bezeichne ich die Menge der zweistelligen Totalformen. Der Ausdruck „~𝕂(p, q)" bezeichnet diejenige logische Relation, die zwischen allen Paaren von Ereignisklassen besteht, zwischen denen nicht die Totalform 𝕂 besteht. Die Ausdrücke „(∃x) Fx△Gx" und „(∀x) Fx△Gx" sind sinnlos, denn weder für alle, noch für ein x kann gelten, dass ihnen/ihm F wie G jeweils weder zukommen noch nicht zukommen (es ist die leere zweistellige Fregerelation).

Tabelle 1: Die elementaren Fregerelationen

Fregerelation Neg0	***Fregerelation Neg1***	***Fregerelation Neg2***	***Fregerelation Neg3***
∀x (Fx ⇒ Gx) = ~∃x (Fx ⊧ Gx) = (∘0∘∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt F zu und G nicht zu.	~∀x (Fx ⇒ Gx) = ∃x (Fx ⊧ Gx) = (•1••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt F zu und G nicht zu.	∀x ~(Fx ⇒ Gx) = ∀x (Fx ⊧ Gx) = (0100)(Fx, Gx) Allen x kommt F zu und G nicht zu.	~∀x ~(Fx ⇒ Gx) = ∃x (Fx ⇒ Gx) = ~𝕃(Fx, Gx) = (∘•∘∘)(Fx, Gx) Für mindestens ein x trifft es nicht zu, dass ihm F ohne G zukommt
∀x (Fx ⇐ Gx) = ~∃x (Fx ⫤ Gx) = (∘∘0∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt F nicht zu und G zu.	~∀x (Fx ⇐ Gx) = ∃x(Fx ⫤ Gx) = (••1•)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt F nicht zu und G zu.	∀x ~(Fx ⇐ Gx) = ∀x (Fx ⫤ Gx) = (0010)(Fx, Gx) Allen x kommt F zu und G nicht zu.	~∀x ~(Fx ⇐ Gx) = ∃x (Fx ⇐ Gx) = ~𝕄(Fx, Gx) = (∘∘•∘)(Fx, Gx) Für zumindest ein x trifft es nicht zu, dass ihm G ohne F zukommt.
∀x (Fx ⊽ Gx) = ~∃x (Fx ⇓ Gx) = (∘∘∘0)(Fx, Gx) Keinem x kommt von F und G keines zu.	~∀x (Fx ⊽ Gx) = ∃x (Fx ⇓ Gx) = (•••1)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt weder F noch G zu.	∀x ~(Fx ⊽ Gx) = ∀x (Fx ⇓ Gx) = (0001)(Fx, Gx) Allen x kommt weder F noch G zu.	~∀x ~(Fx ⊽ Gx) = ∃x (Fx ⊽ Gx) = ~𝕏(Fx, Gx) = (∘∘∘•)(Fx, Gx) Für zumindest ein x trifft es nicht zu, dass ihm weder F noch G zukommt.
∀x (Fx ⇑ Gx) = ~∃x (Fx & Gx) (0∘∘∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt F und G zugleich zu.	~∀x (Fx ⇑ Gx) = ∃x (Fx & Gx) = (1•••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt F und G zugleich zu.	∀x ~(Fx ⇑ Gx) = ∀x (Fx & Gx) = (1000)(Fx, Gx) Allen x kommt F und G zu.	~∀x ~(Fx ⇑ Gx) = ∃x (Fx ⇑ Gx) = ~𝕂(Fx, Gx) = (•∘∘∘)(Fx, Gx) Für zumindest ein x trifft es nicht zu, dass ihm F und G zukommt.
∀x (Fx ⇔ Gx) = ~∃x (Fx ⇔ Gx) = (∘00∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt von F und G nur eines zu.	~∀x (Fx ⇔ Gx) = ∃x (Fx ⋈ Gx) = 𝔣\𝕂𝔼𝕏(Fx, Gx) = (•∘∘•)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt von F und G nur eines zu.	∀x ~(Fx ⇔ Gx) = ∀x(Fx ⋈ Gx) = (0∘∘0)(Fx, Gx) Allen x kommt von F und G genau eines zu.	~∀x ~(Fx ⇔ Gx) = ∃x (Fx ⇔ Gx) = 𝔣\𝕁𝕃𝕄(Fx, Gx) = (∘••∘)(Fx, Gx) Zumindest für ein x trifft es nicht zu, dass ihm von F und G genau eines zukommt.
∀x(Fx ⋈ Gx) = ~∃x (Fx ⇔ Gx) = (0••0)(Fx, Gx) Allen x kommt von F und G genau eines zu.	~∀x(Fx ⋈ Gx) = (∃x) (Fx ⇔ Gx) = 𝔣\𝕁𝕃𝕄(Fx, Gx) = (∘••∘)(Fx, Gx) Zumindest für ein x trifft es nicht zu, dass ihm von F und G genau eines zukommt.	∀x~(Fx ⋈ Gx) = ∀x (Fx ⇔ Gx) = (∘00∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt von F und G nur eines zu.	~∀x~(Fx ⋈ Gx) = ∃x (Fx ⋈ Gx) = 𝔣\𝕂𝔼𝕏(Fx, Gx) = (•∘∘•)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt von F und G nur eines zu.
∀x (Fx ⇖ Gx) = ~∃x (Fx ⇘ Gx) = (00∘∘)(Fx, Gx) Allen x kommt jedenfalls nicht F zu.	~∀x (F ⇖ Gx) = ∃x (Fx ⇙ Gx) = 𝔣\𝔽𝕄𝕏(Fx, Gx) = (∘∘••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt jedenfalls F zu.	∀x ~(F ⇖ Gx) = ∀x (F ⇙ Gx) = (∘∘00)(Fx, Gx) Allen x kommt jedenfalls F zu.	~∀x ~(F ⇖ Gx) = ∃x (Fx ⇖ Gx) = 𝔣\𝕀𝕂𝕃 = (••∘∘)(Fx, Gx) Einem x kommt F nicht zu
(∀x)(Fx ⇙ Gx) = ~∃x (Fx ⇖ Gx) = (∘∘00)(Fx, Gx) Allen x kommt jedenfalls F zu	~(∀x)(Fx ⇙ Gx) = ∃x (Fx ⇖ Gx) = 𝔣\𝕀𝕂𝕃 = (••∘∘)(Fx, Gx) Einem x kommt F nicht zu	(∀x)~(Fx ⇙ Gx) = ∀x (Fx ⇖ Gx) = (00∘∘)(Fx, Gx) = Allen x kommt jedenfalls nicht F zu	~(∀x)~(Fx ⇙ Gx) = ∃x (Fx ⇙ Gx) = 𝔣\𝔽𝕄𝕏(Fx, Gx) = (∘∘••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt jedenfalls F zu.
∀x (Fx ∇ Gx) = ~∃x (Fx △ Gx) = (∘∘∘∘)(Fx, Gx) Allen x kommt F und. G jeweils entweder zu oder nicht zu (trifft für alle zweistelligen logischen Relationen zu).	~∀x (Fx ∇ Gx) = ∃x (Fx △ Gx) Zumindest einem x kommt F und G jeweils weder zu noch nicht zu (unmögliches Ereignis)	∀x ~(Fx ∇ Gx) = ∀x (Fx △ Gx) Allen x kommt F und G jeweils weder zu noch nicht zu (unmögliches Ereignis).	~∀x ~(Fx ∇ Gx) = ∃x (Fx △ Gx) Zumindest einem x kommt F und G jeweils entweder zu oder nicht zu (trifft für alle zweistelligen logischen Relationen zu).

FREGEs Versuch, die logischen Beziehungen von der Allgemeinheit zu dissoziieren, ermöglicht – entgegen seinen Erwartungen – nicht eine besonders präzise Bestimmung dieser logischen Beziehungen, sondern bewirkt nur, dass in seinem System in der Form $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$ nur einige wenige, in ihrer Isoliertheit unbedeutende und nichtssagende logische Relationen berücksichtigt werden, von welchen überdies mehrere regelmäßig falsch und in Widerspruch zu den eigenen Definitionen der Gedankengefüge und Quantoren, aufgefasst werden.

Die Struktur der Gedankengefüge unterscheidet sich grundlegend von der Struktur logischer Relationen, damit auch von der Struktur der Fregerelationen. Die Fregerelationen sind keine „Wahrheitsfunktionen"; ich kann die Wahrheit einer Beziehung der Art $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ nicht mehr durch den Hinweis auf die Wahrheit vorgegebener Aussagen entscheiden, sondern die Wahrheitsbedingung dieser Form besteht darin, dass es unmöglich ist, dass $Fx \frown {\sim}Gx$ vorliegt; dass diese Bedingung erfüllt ist, muss ich nachweisen, wenn ich in einem konkreten Fall diese Gesetzesbeziehung behaupte. Im Gegensatz zum Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ ist die Fregerelation $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ eine echte Relation. Die Bedingungen für die Geltung der Fregerelationen sind wie generell bei logischen Relationen normativer Natur: Eine solche Form „existiert" nicht dann, wenn zumindest zwei konkrete Prädikatoren Fx und Gx nachgewiesen werden können, die in dieser Beziehung stehen[90], sondern umgekehrt – zwei beliebigen Prädikatoren kann diese logische Relation nur dann zugeschrieben werden, wenn sie den normative Bedingungen genügen; dass es eine bestimmte logische Form „gibt" setzt alleine ihre widerspruchsfreie Konstruierbarkeit voraus; dann ist sie bestimmt und gehört dem System aller logischen Formen an, und die logischen Beziehungen zu beliebigen anderen logischen Formen liegen eindeutig fest.

Im Rahmen des SFG kann ich zwei Aussagen $\mathfrak{Fa}$ und $\mathfrak{Ga}$ Gedankengefüge nur dann zuschreiben, wenn ich die Wahrheitswerte der Aussagen bereits kenne; mit Hilfe der Gedankengefüge kann ich die vorausgesetzten Wahrheitswerte bestenfalls tautologisch wiederholen. Wenn ich zwei Aussagen $\mathfrak{Fa}$ und $\mathfrak{Ga}$ einer logischen Relationen ($\mathfrak{F}x \boxplus \mathfrak{G}x$) subsumiere, muss ich die Wahrheitsbedingungen für diese Subsumtion kennen – diese stellen die Bedeutung der logischen Relation dar. Aufgrund dieser Subsumtion weiß ich dann nicht bloß, dass $\mathfrak{Fa}$ und $\mathfrak{Ga}$ etwa beides wahre Feststellungsaussagen sind, sondern ob dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ die beiden Prädikate zufällig zukommen, oder ob das eine Prädikat im Hinblick auf das andere notwendig ist, usw.

Einem Gedankengefügeschema wie $A \Rightarrow B$ werden Aussagen subsumiert; dies ist möglich, wenn A und B wahr sind oder A falsch ist; dabei gehört jedes subsumierte Aussagenpaar genau einer der Wahrheitswertkombinationen an. Dieser Disjunktivität der Wahrheitswertkombinationen entspricht keine Disjunktivität der Realmöglichkeit der Vorkommenskombinationen bei Fregerelationen. Wenn eine Fregerelation eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich bestimmt – etwa die Fregerelation $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx) \equiv (1\bullet\bullet\bullet)(Fx, Gx)$ –, so bedeutet dies nicht, dass die anderen Vorkommenskombinationen nichtrealmöglich sind. Die Realmöglichkeit der Vorkommenskombinationen ($Fx \frown Gx$; $Fx \frown {\sim}Gx$; ${\sim}Fx \frown Gx$ und ${\sim}Fx \frown {\sim}Gx$) ist nicht disjunkt wie die Wahrheit der Wahrheitswertkombinationen; sie können alle realmöglich sein. Der Fregerelation $(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$ entspricht somit kein Gedankengefüge.

Es ist ein grundsätzlicher und schwerwiegender Fehler, wenn versucht wird, logische Relationen nach Maßgabe oder nach dem Vorbild der „wahrheitsfunktionalen" Gedankengefüge zu bilden; die Konstruktion der logischen Formen stellt eine völlig andere Art von Operation dar. Bei der Konstruktion logischer Relationen wird untersucht, was überhaupt im Hinblick auf den Zusammenhang von Prädikatoren/Sachverhalts-/Ereignisklassen möglich ist: man konstruiert alle möglichen logischen Zusammenhänge, indem man prüft, welche Vorkommenskombinationen möglich sind, wie viel verschiedene Weisen es gibt, diese als realmöglich bzw. nichtrealmöglich zu bestimmen. Daraus ergeben sich alle nur möglichen bedingungslogischen Zusammenhänge – und die faktischen Gesetzeszusammenhänge werden dann in solche bedingungslogischen Zusammenhänge eingeordnet, bzw. faktische bedingungslogische Gesetze können erst durch ihre Position in einem solchen Zusammenhang erkannt und identifiziert werden. Die Logik stellt im Zuge ihrer Konstruktion der logischen Formen die Wahrheitsbedingungen aller nur möglichen bedingungslogischen Gesetzeszusammenhänge dar. Die Konstruktion der Gedankengefüge führt hingegen nur zu den Wahrheitsbedingungen für die tautologische oder informationsverschleiernde Wiedergabe bereits vorausgesetzter Fakten.

4.3.8.1. Die Missdeutung der Fregerelationen.

Wie sich die Ausdrücke „$A \Rightarrow B$“ und „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$“ oder „$(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$“, generell Gedankengefüge „$A \oplus B$“ und die prädikatenlogistischen Formen $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$ unterscheiden, wie letztere von den Gedankengefügen abhängen und wie sie sich zu den verschiedenen Bedeutungen des umgangssprachlichen „Wenn“ und anderer logischer Partikeln verhalten, ist von den Vertretern der „modernen Logik“ nie systematisch untersucht, geschweige denn auch nur annähernd geklärt worden. Ihre logische Missdeutung der Gedankengefüge überträgt sich zwangsläufig auf die Beurteilung der auf ihrer Grundlage konstruierten logischen Formen (der elementaren Fregerelationen).

Die Fregerelation $(\forall x)$ $(Fx \Rightarrow Gx)$, „formale Implikation“ genannt, schließt einzig den Fall aus, dass einem Gegenstand x zugleich F zukommt und G nicht zukommt: (∘0∘∘)(Fx, Gx); da wir die leere Relation (0000)(Fx, Gx) prinzipiell ausschließen, muss zumindest einer der nicht definitiv ausgeschlossenen Vorkommenskombinationen realmöglich sein. Jede andere „Deutung“ dieser Fregerelation widerspricht **FREGE**s Definition des Zeichens „⇒“. Es können bei $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ sieben verschiedene logische Totalformen vorliegen: es kann entweder gelten, dass F jedenfalls allen x nicht zukommt [*Pränonpendenz* (0**0**11)(Fx, Gx)], oder dass G jedenfalls allen x zukommt [*Postpendenz* (1**0**10)(Fx, Gx)], oder dass allen x sowohl F wie G zukommt [*Konjunktion* (1**0**00)(Fx, Gx)], oder dass allen x G, aber nicht F zukommt [*Präsektion* (0**0**10)(Fx, Gx)], oder dass allen x weder F noch G zukommt [*Rejektion* (0**0**01)(Fx, Gx)], schließlich dass, wenn einem x F zukommt, ihm auch G zukommt (*Implikation* [1**0**11)(Fx, Gx)] oder dass genau dann, wenn einem x F zukommt, ihm auch G zukommt (*Äquivalenz* [1**0**01)(Fx, Gx)].

FREGE identifiziert diese Fregerelation mit einer der sieben bei ihrer Geltung möglichen Totalrelationen, nämlich mit der Beziehung ℂ, wenn er schreibt, man könne „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$“ „übersetzen: ‚wenn etwas die Eigenschaft F hat, so hat es auch die Eigenschaft G‘, oder ‚jedes F ist ein G‘, oder ‚alle F’s sind G’s‘.“ (BS 23)[91] Er meint die Fregerelation (∘0∘∘) (Fx, Gx) sei mit dem a-Urteil der traditionellen Logik identisch; dies gilt jedoch nur für die Implikation (1011)(Fx, Gx) – „allen Gegenständen, denen F zukommt, kommt G zu, aber nicht umgekehrt“ ≡ „Alle Gegenstände, denen F zukommt, kommt G zu“ –, eine logische Form, die begriffsschriftlich gar nicht in der Form $\mathfrak{Q}x$ (Fx, Gx) darstellbar ist, und von (∘0∘∘) (Fx, Gx) verschieden ist. Auch die drei anderen „Urteilsformen“ der traditionellen Logik werden mit elementaren Fregerelationen verwechselt (BS 23f; auch BRL 15f, 22): die Fregerelation $\forall x(Fx \Rightarrow \sim Gx) \equiv \forall x(Fx \Uparrow Gx)$ könne in das e-Urteil „Was die Eigenschaft F hat, hat nicht die Eigenschaft G“ ≡ „Kein F ist G“ „übersetzt“ werden; in Wirklichkeit ist nicht die Fregerelation (0∘∘∘)(Fx, Gx), sondern die Relation (0111)(Fx, Gx) die e-Relation „Keinem Gegenstand, dem F zukommt, kommt G zu“. Eben so wenig verweist der Ausdruck „$\sim(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$“ auf das traditionelle o-Urteil (•1•1)(Fx, Gx) ≡ Nicht alle F sind G ≡ Zumindest ein F ist nicht G, sondern auf die Fregerelation (•1••)(Fx, Gx). Endlich ist $\sim(\forall x)(Fx \Rightarrow \sim Gx)$, gleichbedeutend mit $\sim(\forall x)(Fx \Uparrow Gx)$ ≡ Nicht alle F sind nicht G ≡ Zumindest ein F ist G, nicht, wie **FREGE** behauptet, die i-Syllogismusrelation (1••1)(Fx, Gx), sondern die Fregerelation (1•••)(Fx, Gx). Keine der vier traditionellen „Urteilsformen“ (Syllogismusrelationen) kann eindeutig als elementare Fregerelation dargestellt werden.

Die vier Fregerelationen (0∘∘∘), (∘0∘∘∘), (1•••) und (•1••) sind wohlbestimmt und ihr gegenseitiges logisches Verhältnis sowie ihre Verkettbarkeit lässt sich leicht feststellen. Die vier Fregerelationen stehen paarweise im Verhältnis der Independenz 𝕍, mit Ausnahme der Paare [(0∘∘∘), (1•••)] und [(∘0∘∘), (•1••)], die jeweils im Verhältnis der Kontradiktion 𝕁 stehen. Das hindert **FREGE** freilich nicht zu behaupten, zwischen diesen vier Fregerelationen bestünden dieselben Beziehungen der Kontrarietät (𝔻), der Subalternation (ℂ) und der Subkontrarietät (𝔸) wie zwischen bestimmten Paaren von Syllogismusrelationen (BS 24)[92], und diese Beziehungen ließen sich begriffsschriftlich darstellen; dies ist falsch – auf der Basis der Gedankengefüge **V**, **J**, **A**, **C** und **D** lassen sich weder die tatsächlichen, noch die angeblichen Beziehungen zwischen den Fregerelationen vollständig darstellen.

Natürlich kann man auch für diese vier Fregerelationen (∘0∘∘)(Fx, Gx), (0∘∘∘)(Fx, Gx), (•1••)(Fx, Gx) und (1•••)(Fx, Gx) ein der traditionellen Syllogistik analoges System der eindeutigen Verkettungen erstellen; das ist mit vielen der astronomisch vielen Quadrupel in der Menge der 2^{16} zweistelligen logischen Relationen möglich. Ein schlechter Witz aber ist es, wenn das System der eindeutigen Verkettungen dieser vier Fregerelationen als eine zulässige „Deutung“ oder gar als eine Verbesserung und notwendige Korrektur des traditionellen Systems ausgegeben wird; es geht nicht an, einen traditionellen syllogistischen Modus deshalb für inkorrekt oder „trugschlüssig“ zu erklären, weil er nach der unbedachten und unzulässigen Ersetzung der Syllogismusrelationen durch diese vier Fregerelationen nicht mehr gültig ist[93].

Auch die Verkettung von Fregerelationen lässt sich auf der Basis des Gedankengefüges $\mathbb{C}$ nicht vollständig und eindeutig darstellen. Das Verkettungsgesetz

$$[(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \,\&\, (\forall x)(Gx \Rightarrow Hx)] \rightarrow [(\forall x)(Fx \Rightarrow Hx)]$$

wird nicht durch den begriffsschriftlichen abschwächenden Ausdruck

„$[(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \,\&\, (\forall x)(Gx \Rightarrow Hx)] \Rightarrow [(\forall x)(Fx \Rightarrow Hx)]$“[94]

bezeichnet; der begriffsschriftliche Ausdruck besagt nicht, dass aus $[(\forall x)(Fx\Rightarrow Gx) \,\&\, (\forall x)(Gx\Rightarrow Hx)]$ *notwendig* $(\forall x)(Fx\Rightarrow Hx)$ folgt, sondern nur, dass es unmöglich ist, dass die Fregerelationen $(\forall x)(Fx\Rightarrow Gx)$ und $(\forall x)(Gx\Rightarrow Hx)$ gelten, ohne dass auch $(\forall x)(Fx\Rightarrow Hx)$ gilt. Wäre die Fregerelation (∘0∘∘) die Folgerelation, wie **Frege** und seine Anhänger meinen, müsste, weil z.B. auch gilt $[(\forall x)(Fx\Rightarrow Gx) \;\&\; \sim(\forall x)(Fx\Rightarrow Gx)] \Rightarrow [(\forall x)(Fx\Rightarrow Gx)]$, aus Unmöglichem wie $[(\forall x)(Fx\Rightarrow Gx) \;\&\; \sim(\forall x)(Fx\Rightarrow Gx)]$ Beliebiges „folgen“. Die mit der Implikation verwechselte Relation (∘0∘∘) verbindet nicht immer und eindeutig eine hinreichende Bedingung mit ihrer notwendigen Folge und kann deshalb nicht die Folgebeziehung sein. **Frege** kann in seinem System nicht den Unterschied zwischen einem Implikationsgesetz und dem Pränonpendenzgesetz $[(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \;\&\; \sim(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)] \urcorner [(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)]$[95] bestimmen. Im Rahmen der *Begriffsschrift* lassen sich wohl einige wenige logische Relationen in der Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$ darstellen, die Beziehungen dieser Fregerelationen, etwa ihre eindeutige Verkettung, können jedoch nicht präzise und vollständig bestimmt und dargestellt werden, weil die Implikation $\mathbb{C}$ nicht zu den Fregerelationen gehört. Wegen der Verwechslung der Syllogismusrelationen mit von ihnen tiefgreifend verschiedenen Fregerelationen haben **Frege** und seine Anhänger auf dem Gebiet der traditionellen Syllogistik nicht Klarheit, sondern nur Verwirrung gestiftet.

Frege glaubt, mit dem Zeichen „⇒“ arithmetische Implikationsgesetze darstellen zu können, etwa das Gesetz *Wenn eine reelle Zahl größer als 2 ist, dann ist ihr Quadrat größer als 2*; zwar ist das Gesetz $(\forall x \in \mathbb{R})\,[(x > 2) \Rightarrow (x^2 > 2)]$ gültig, die Darstellung auf der Basis von $\mathbb{C}$ schwächt den spezifischen Gehalt der Implikationsaussage jedoch ab und nimmt dem Gesetz in dieser Abschwächung jede Notwendigkeit; denn die folgenden, ganz unterschiedlichen, teilweise keinen notwendigen Zusammenhang bildenden arithmetischen Verhältnisse werden in **Frege**s System *alle* durch die Form $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ ausgedrückt (m bezeichne eine beliebige natürliche Zahl).

1)	$\mathbb{C}$-Gesetz:	(1**0**11) $[(m > 2),(m^2 > 2)]$
2)	$\mathbb{E}$-Gesetz:	(1**0**01) $[(m^2 = 4),(m^4 = 16)]$
3)	$\mathbb{X}$-Gesetz:	(0**0**01) $[(m+1 < m), (m+1 = m)$
4)	$\mathbb{F}$-Gesetz:	(0**0**11) $[(m+1 = m), (m > 10)]$
5)	$\mathbb{H}$-Gesetz:	(1**0**10) $[(m^2 > 100), (m+1 > m)$
6)	$\mathbb{K}$-Gesetz:	(1**0**00) $[(m^2 \geqslant m), (m+1 > m)$
7)	$\mathbb{M}$-Gesetz:	(0**0**10) $[(m+1 < m),(m+1 > m)$

Das System der elementaren Fregerelationen ist so unvollständig, dass in seinem Rahmen nicht einmal elementarste arithmetische Gesetze eindeutig formuliert werden können, etwa das Gesetz: *Wenn eine Zahl n Nachfolger einer Zahl m ist, dann ist n größer als m*. Von einer logischen Theorie ist Vollständigkeit in dem Sinne zu fordern, dass jede beliebige logische Relation, von welcher Komplexität auch immer, konstruiert und eindeutig in ihrer spezifischen Bedeutung gefasst werden kann. Das Erreichen einer solchen Vollständigkeit hat sich **Frege** durch sein Vorgehen verbaut. Die elementaren Fregerelationen sind sehr grob; keine Notwendigkeit – kein einzige notwendiger Zusammenhang, kein einziges gehaltvolles mathematisches oder anderes Gesetz lässt sich darstellen.

4.3.8.2. Eine „logische Aufgabe“

Dass **Frege**s grobe und unselbständige elementare Fregerelationen mit ganz anderen logischen Relationen verwechselt (dass er also auch auf dem Felde der Prädikatenlogistik etwas anderes meint als er sagt, und etwas anderes sagt, als er meint), geht auch aus einer Stelle hervor, in der er zu demonstrieren versucht, dass bestimmte logische Aufgaben erst im Rahmen seines Verständnisses der logischen Relationen leicht und übersichtlich gelöst werden können: zwischen einigen Sachverhalts-/Ereignisklassen werden bestimmte logische Verhältnisse angenommen, und dann wird geprüft, welche anderen Verhältnisse diese vorgegebenen Beziehungen involvieren und sich rein logisch erschließen lassen. Es ist eine Aufgabenstellung, wie sie uns schon bei der Bestimmung der Verkettbarkeit zweistelliger logischer Relationen begegnet ist; aus dem vorgegebenen Verhältnis zwischen einer ersten und zweiten, und dieser zweiten und einer dritten Ereignisklasse muss das Verhältnis zwischen allen drei Ereignisklassen, aus diesem wiederum das Verhältnis zwischen der ersten und der dritten Ereignisklasse erschlossen werden.

In BRL S.45f liefert **Frege** die angebliche Lösung einer Aufgabe, mit der sich vor ihm schon **Boole**, **Schröder** und **Wundt** befasst hatten. Er geht von der Voraussetzung aus, dass zwischen begrifflichen Bestimmungen („Merkmalen") von Gegenständen bestimmter Art gewisse gesetzmäßige Beziehungen bestehen. Hier, wo sich **Frege** mit logischen Zusammenhängen, und nicht mehr mit logisch irrelevanten Gedankengefügen befasst, befleißigt er sich notwendigerweise der Sprache der Ereignis-/Bedingungslogik. Nicht mehr von der Wahrheit oder Falschheit zusammenhangsloser Aussagen ist die Rede, sondern von Sachverhalts-/Ereignisklassen, d.h. von jedem beliebigen „Umstand", dass „das Merkmal A sich an dem betrachteten Gegenstande" (dem Ereignis-Bezugssystem) findet; er nimmt zu Kenntnis, dass die Prädikate („Merkmale"), deren gesetzmäßige Beziehung um die es in logischen Beziehungen geht, demselben Ereignis-Bezugssystem zukommen: es gehe um eine „Beobachtung einer Klasse von Erscheinungen (Natur- oder Kunsterzeugnisse, z.B. Substanzen)", ob diesen Merkmale zukommen oder nicht. Ich beschränke mich im Folgenden auf zwei der fünf vorgegebenen Beziehungen zwischen den Ereignisklassen Ax, Bx, Cx, Dx und Ex, die in der fregeschen Aufgabenstellung vorkommen; statt „Ax", „Bx", usw. schreibe ich im Folgenden „A", „B", usw.[96]

Verhältnis 1 (V1): „Dass, wo immer die Merkmale A und D in Abwesenheit von E gleichzeitig auftreten, die Merkmale B und C entweder beide sich vorfinden oder beide fehlen." (BRL 45) Im Rahmen der im ersten Teil dieser Arbeit entwickelten Theorie logischer Formen, können wir diese logische Relation präzise bestimmen: bei $A\frown D\frown\sim E$ gilt entweder $B\frown C$ oder $\sim B\frown\sim C$, also $\mathbf{A\frown D\frown\sim E: (B\leftrightarrow C).}$ Durch dies vorgegebene Verhältnis V1 sind schon vier der 32 Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (A, B, C, D, E) eindeutig bestimmt:

V1.1: rm ist $A\frown D\frown\sim E\frown B\frown C$; **rm(II)**
V1.2: rm ist $A\frown D\frown\sim E\frown\sim B\frown\sim C$; rm(XIV)
V1.3: nrm ist $A\frown D\frown\sim E\frown B\frown\sim C$; **nrm(VI)**
V1.4: nrm ist $A\frown D\frown\sim E\frown\sim B\frown C$; nrm(X)

Verhältnis 2 (V2): „Dass überall, wo das Merkmal A mit dem B oder E [oder] mit beiden zusammen besteht, auch entweder das Merkmal C vorkommt oder das D, aber nicht beide. Und umgekehrt, überall, wo von den Merkmalen C und D das eine ohne das andere wahrgenommen wird, da soll auch das Merkmal A in Verbindung mit B oder E oder mit beiden zugleich auftreten." Dies bedeutet, dass bei A mit zumindest einem von B und E, von C und D genau eines vorliegt; $\mathbf{A\&(B\vee E):\ C \succ\!\prec D}$. Durch dieses vorgegebene Verhältnis V2 sind zwölf Vorkommenskombinationen der Totalform von (A, B, C, D, E) eindeutig bestimmt:

Bei $A\frown B\frown E$: $C\succ\!\prec D$ gilt:

V2.1.: nrm ist $A\frown B\frown E\frown C\frown D$; nrm(I)
V2.2.: rm ist $A\frown B\frown E\frown C\frown\sim D$; rm(III)
V2.3.: rm ist $A\frown B\frown E\frown\sim C\frown D$; rm(V)
V2.4.: nrm ist $A\frown B\frown E\frown\sim C\frown\sim D$; nrm(VII)

Bei $A\frown B\frown\sim E$: $C\succ\!\prec D$ gilt:

V2.5.: nrm ist $A\frown B\frown\sim E\frown C\frown D$; **nrm(II)**
V2.6.: rm ist $A\frown B\frown\sim E\frown C\frown\sim D$; rm(IV)
V2.7.: rm ist $A\frown B\frown\sim E\frown\sim C\frown D$; **rm(VI)**
V2.8.: nrm ist $A\frown B\frown\sim E\frown\sim C\frown\sim D$; nrm(VIII)

Bei $A\frown\sim B\frown E$: $C\succ\!\prec D$ gilt:

V2.9.: nrm ist $A\frown\sim B\frown E\frown C\frown D$; nrm(IX)
V2.10.: rm ist $A\frown\sim B\frown E\frown C\frown\sim D$; rm(XI)
V2.11.: rm ist $A\frown\sim B\frown E\frown\sim C\frown D$; rm(XIII)
V2.12.: nrm ist $A\frown\sim B\frown E\frown\sim C\frown\sim D$; nrm(XV)

Es ist zu prüfen, ob und wieweit durch V1 und V2 das logische Verhältnis der fünf Ereignisklassen A, B, C, D, und E bestimmt ist; da V1 und V2 das Vorliegen von A voraussetzen und deshalb nur die ersten 16 Vorkommenskombinationen der Totalform von (A,B,C,D,E) betreffen, habe ich die restlichen Vorkommenskombinationen weggelassen. Zunächst ergibt sich, dass diese Bedingungen V1 und V2 sich widersprechen und deshalb zusammen gar kein logisches Verhältnis festlegen können.

Vorkommens-kombination	Ax	Bx	Cx	Dx	Ex	V1	V2	fünfstellige Relation
I	1	1	1	1	1		0	0
II	1	1	1	1	0	**1**	**0**	Widerspruch
III	1	1	1	0	1		1	1
IV	1	1	1	0	0		1	1
V	1	1	0	1	1		1	1
VI	1	1	0	1	0	**0**	**1**	Widerspruch
VII	1	1	0	0	1		0	0
VIII	1	1	0	0	0		0	0
IX	1	0	1	1	1		0	0
X	1	0	1	1	0	0		0
XI	1	0	1	0	1		1	1
XII	1	0	1	0	0			
XIII	1	0	0	1	1		1	1
XIV	1	0	0	1	0	1		
XV	1	0	0	0	1		0	0
XVI	1	0	0	0	0			
………………………………………………………………								

Mit seinen begriffsschriftlichen Ausdrucksmitteln kann **FREGE** diesen fünfstelligen logischen Zusammenhang nur unvollständig darstellen. Das erste vorgegebene Verhältnis V1 – „Bei der Bejahung von A und D und der Verneinung von E, sollen B und C entweder beide bejaht oder beide verneint werden" (BRL 46) – ist nach **FREGE**s Verständnis bereits durch die folgenden zwei Ausdrücke vollständig dargestellt: einmal durch „~E⇒(D⇒(A⇒(B⇒C)))", was bedeutet ~(~E & D & A & B & ~C), also nrm(VI), und zum zweiten durch „~E⇒(D⇒(A⇒(~B⇒~C)))", was bedeutet ~(~E & D & A & ~B & C), also nrm(X); **FREGE** kann nur den nichtrealmöglichen Vorkommenskombinationen VI und X einen begriffsschriftlichen Ausdruck geben; außerdem muss er jede der darstellbaren nichtrealmöglichen Vorkommenskombinationen durch eine eigene Formel darstellen.

Auch **FREGE**s Behandlung des zweiten vorgegebenen Verhältnisses ist unvollständig; das Verhältnis, dass, wenn A und B bejaht sind, auch C oder D bejaht sein sollen, aber nicht beide, stellt er durch die zwei Formeln „B⇒(A⇒(~D⇒C))", was bedeutet: ~(B & A & ~D & ~C), also nrm(VII,VIII), und „B⇒(A⇒(D⇒~C))", was bedeutet: ~(B & A & D & C), also nrm(I,II), dar. Dass auch bei A und E genau eines von C und D bejaht sein soll, stellt **FREGE** durch den Ausdruck „E⇒(A⇒(~D⇒C))", was ~(E & A & ~D & ~C), also nrm(VII,XV), bedeutet, und durch den Ausdruck „E⇒(A⇒(D⇒~C))", was ~(E & A & D & C), also nrm(I,IX), bedeutet (BRL 46).

FREGE berücksichtigt nur nichtrealmögliche Vorkommenskombinationen. Würde er in seinem System, in dem die logischen Relationen auf der Grundlage von Gedankengefügen konstruiert werden müssen, eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich kennzeichnen, wären alle anderen Vorkommenskombinationen definitiv als nichtrealmöglich zu bestimmen; denn wenn ein Gedankengefüge ein bestimmtes Wahrheitswertprädikat ausdrücklich bejaht, wenn etwa irgendwelche Aussagen A, B, C ausdrücklich als wahr und die Aussagen D und E als ausdrücklich als falsch bewertet werden, wird jede andere Kombination der Wahrheitswerte der drei Aussagen wegen der Disjunktivität der Wahrheitswertprädikate definitiv ausgeschlossen; elementare Fregerelationen können höchstens eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich bestimmen, wenn sie darüber hinaus alle restlichen Vorkommenskombinationen als nichtrealmöglich bestimmen[97]. Ohne dass die verschiedenen Vorkommenskombinationen, die durch die vorgegebenen Verhältnisse V1 und V2 in **FREGE**s Aufgabe als realmöglich bestimmt sind, berücksichtigt werden, lässt sich der spezifische Gesetzeszusammenhang zwischen den Ereignisklassen A,B,C,D und E nicht erkennen und darlegen. Nur wenn Vorkommenskombinationen zugleich teils als realmöglich, teils als nichtrealmöglich bestimmt sind, ergeben sich gesetzmäßigen Beziehungen relativer Modalisierung zwischen verschiedenen Ereignisklassen. Keine einzige zwei- oder höherstellige Fregerelation bestimmt in eindeutiger Weise das Verhältnis einer der elementaren relativen Modalitäten $\mathcal{N}, \mathcal{U}, \mathcal{K}$, da hierbei zumindest zwei Vorkommenskombinationen definitiv als realmöglich bestimmt sein müssten[98]. Die logischen Formen als Strukturen gesetzmäßiger Zusammenhänge sind ihrem Gehalt nach solche relativen Modalisierungen.

FREGE meint, schon durch die Nicht-Realmöglichkeit einer einzigen Vorkommenskombination sei ein aussagekräftiger, gehaltvoller logischer Zusammenhang wie etwa das „Verhältnis von Grund und Folge" gegeben; so sei im Ausdruck „$\sim C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow E)$" ≡ „$\sim(\sim C \,\&\, \sim A \,\&\, \sim E)$" – was *nrm*$(\sim A \frown \sim C \frown \sim E)$ bedeutet – das Ereignis E als „notwendige Folge" der anderen Ereignisse ~A und ~C bestimmt, und im Ausdruck „$E \Rightarrow (A \Rightarrow (\sim D \Rightarrow C))$" ≡ „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$" – also nrm$(E \frown A \frown \sim D \frown \sim C)$ – trete E dagegen als eine „Bedingung" der anderen Ereignisse auf (vgl. BRL 46-48). **FREGE** meint also, wenn es unmöglich ist, dass die Ereignisse ~C und ~A zusammen mit dem Ereignis ~E eintritt, seien ~C und ~A der „Grund" zur „Folge" E. Ein Urteil wie „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$" – also: nrm$(E \frown A \frown \sim D \frown \sim C)$ – bestimmt jedoch noch überhaupt kein logisches *Verhältnis*, weil sich ein logisches Verhältnis als ein Zusammenhang relativer Modalisierung immer erst aus der unterschiedlichen Bestimmtheit *mehrerer* Vorkommenskombinationen zusammensetzt[99]. In einem Ausdruck wie „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$" ist das zu verneinende letzte Glied – im vorliegenden Beispiel C – nie die „notwendige Folge" der vorhergehenden Glieder, denn in der Darstellung einer Vorkommenskombination können die Glieder, z.B. E, A, ~D und ~C beliebig permutiert werden, ohne dass sich die logische Sachlage – z.B. nrm$(E \frown A \frown \sim D \frown \sim C)$ – ändert: „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$" ≡ „$\sim(A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C \,\&\, E)$" ≡ „$\sim(\sim C \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, E)$". usw.; „Grund" und „Folge" wären, nähme man **FREGE** beim Wort, beliebig vertauschbar.

In **FREGE**s Behandlung der vorliegenden Aufgabe werden die verschiedenen Formeln, die jeweils die Nicht-Realmöglichkeit eines oder mehrerer Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (A,B,C,D,E) aussagen, nicht zu einer integralen, übersichtlich dargestellten logischen Beziehung aller fünf Ereignisklassen zusammengefasst. Diese integrale Gesamtheit verschiedener Vorkommenskombinationen, aus der jede logische Relation besteht, kann knapp, übersichtlich und vollständig durch die Normalmatrizen von logischen Total- und Partialformen dargelegt werden. Die *begriffsschriftliche* fregesche Darstellung umfassender logischer Verhältnisse bleibt hingegen prinzipiell bruchstückhaft; diese Darstellung wird außerdem, legt man wie **FREGE** nicht das umgangssprachliche „und", sondern den „Bedingungsstrich" zugrunde, indirekt, unübersichtlich und unannehmbar umständlich[100].

Ein besonders schwerwiegender Mangel von **FREGE**s lückenhafter Darstellung logischer Zusammenhänge ist, dass im Rahmen seines System Widersprüche bei der Beschreibungen eines logischen Zusammenhanges, die darin bestehen, dass verschiedene Festlegungen dieselbe Vorkommenskombination einmal als realmöglich und dann als nichtrealmöglich bestimmen, unerkennbar bleiben müssen, da **FREGE** von umfassenden logischen Beziehungen nur die nichtrealmöglichen Vorkommenskombinationen berücksichtigen kann. Dass mehrere der in **FREGE**s logischer Aufgabe vorgegebenen Beziehungen logisch gar nicht verträglich sind – V1 etwa setzt die Realmöglichkeit, V2 die Nicht-Realmöglichkeit der Vorkommenskombination $A \frown B \frown C \frown D \frown \sim E$ voraus –, vermag **FREGE** gar nicht zur Kenntnis nehmen; sein System kann wegen der Beschränkung auf Fregerelationen eine der wichtigsten Aufgaben der Logik, eine Bewertung der inneren Stimmigkeit und Widerspruchslosigkeit theoretischer Aussagesysteme, nicht einmal im Ansatz leisten.

Aufgrund dieser prinzipiellen Mangelhaftigkeit seiner Konstruktion logischer Relationen kann **FREGE**, ohne es selber zu merken, keine einzige der gestellten Aufgaben lösen, in denen auf der Basis der vorgegebenen Verhältnisse bestimmt werden muss, welche zwei- drei- und vierstelligen Beziehungen zwischen den involvierten Ereignisklassen gelten[101]. Um beispielsweise zu erkennen, was die vorgegebenen Verhältnisse V1 und V2 über die Beziehung aussagen, welche unabhängig vom Vorliegen von E beim Vorliegen von A zwischen B, C, und D bestehen, muss ich zunächst prüfen, wie durch diese Verhältnisse V1 und V2 die Vorkommenskombinationen der logischen Form von (A,B,C,D,E) bestimmt sind, und danach ist zu untersuchen, ob beim Vorliegen von A die

Vorkommenskombinationen der logischen Beziehung von (B,C,D) realmöglich oder nichtrealmöglich sind, falls E vorliegt und falls E nicht vorliegt; eine Vorkommenskombination der Beziehung von (A,B,C,D) ist dann unabhängig von E realmöglich, wenn sie bei E und $\sim E$ zumindest einmal realmöglich ist, eine Vorkommenskombination ist nichtrealmöglich, wenn sie weder bei E noch bei $\sim E$ realmöglich ist. Die Lösung solcher Aufgaben erfordert immer den Bezug auf *alle* Vorkommenskombinationen; weil **FREGE** aber eine logische Beziehung nicht als die Gesamtheit aller Vorkommenskombinationen fasst, schlägt er einen ganz falschen Lösungsweg vor.

Die unzulängliche Art, in der **FREGE** diese Art von Aufgaben – es geht um die Lösung des Problems, welche Beziehung, falls die logische Relation von n Ereignissen vorgegeben ist, zwischen (n-1) dieser Ereignisse unabhängig vom n-ten Ereignis vorliegt – angeht, will ich am einfacheren Beispiel einer dreistelligen logischen Relation darlegen. Ist $[A, B, C\ \mathbb{K}\mathbb{C}]$ vorgegeben – B ist notwendige Folge von A, und C ist notwendige Folge von B –, dann ist Vorkommenskombination II, $A \frown B \frown \sim C$ nichtrealmöglich, es gilt also $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Das Verhältnis $[A, B, C\ \mathbb{K}\mathbb{C}]$ ist äquivalent mit $[C, A, B\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$; es gilt also $\mathrm{nrm}(C \frown A \frown \sim B)$, begriffsschriftlich „$C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“. **FREGE** meint nun, die Nichtrealmöglichkeit einer *einzigen* Vorkommenskombination wie $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv \sim(A \& B \& \sim C)$ reiche bereits aus, um die Geltung des logischen Verhältnisses zwischen hinreichender Bedingung und notwendiger Folge behaupten zu können; er glaubt, im Ausdruck „$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$“ $\equiv$ „$\sim(A \& B \& \sim C)$ sei C „Folge“ der beiden anderen Ereignisse, im Ausdruck „$C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ $\equiv$ „$\sim(C \& A \& \sim B)$ sei C jedoch die „hinreichende Bedingung“ der beiden anderen Ereignisse. Wenn nun die beiden Formeln $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ und $C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ vorgegeben seien, lasse sich, so **FREGE**, aus beiden eine dritte Formel gewinnen, in denen das „C“ „weggeschafft“ sei – diese dritte Formel bestimme demzufolge das Verhältnis von A und B; im Ausdruck „$C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ könne das „C“ durch das, wofür es angeblich „hinreichende Bedingung“ sei, also durch „A&B“ ersetzt werden und es ergäbe sich dann $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow B))$, d.h. $\sim(A \cdot B \cdot A \cdot \sim B)$, d.h. das Fregegesetz, das ausschließt, dass B und $\sim B$ zugleich gelten. Dieses Fregegesetz sagt jedoch überhaupt nichts über das Verhältnis von A und B unabhängig von C aus[102]. Welche Beziehung bei $[A, B, C\ \mathbb{K}\mathbb{C}]$ unabhängig von C zwischen A und B besteht, ergibt sich nicht aus einem derartigen „Wegschaffen von C“, sondern nur aus der Nachprüfung, ob die Vorkommenskombinationen von (A,B) bei C und $\sim C$ jeweils realmöglich sind oder nicht; bei $[A, B, C\ \mathbb{K}\mathbb{C}]$ gilt $A \rightarrow B$ unabhängig von C. Wegen seiner Unkenntnis der Struktur logischer Relationen ist **FREGE** außer Stande, solche Probleme zu bearbeiten – er kann derartige Aufgaben nicht einmal richtig verstehen; das von ihm vorgeschlagene Verfahren des „Wegschaffens“ eines Ereignisses hat mit der Aufgabe gar nichts zu tun. Es fehlt **FREGE** jede Einsicht in die Struktur logischer Formen, und diese Einsicht hat er sich dadurch verbaut, dass er logische Relationen mit Hilfe der Gedankengefüge darlegen wollte.

4.3.8.3. Fregerelationsgesetze und komplexe Fregerelationen

Zwischen zwei beliebigen logischen Relationen (Total- oder Partialformen) besteht wiederum eine eindeutig bestimmbare logische Totalform, aus der hervorgeht, dass bei Geltung und Nichtgeltung einer der beiden logischen Relationen es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass die andere Relation gilt[103]. Auch die zwischen beliebigen elementaren Fregerelationen bestehenden logischen Totalformen lassen sich mit dem im ersten Teil dargelegten Verfahren leicht und eindeutig ermitteln. So gelten etwa folgende elementaren logischen Gesetze:

(1) $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$

(2) $\forall x\,(Fx \mathbin{\overline{\triangledown}} Gx) \top \forall x\,(Fx \bowtie Gx)$

(3) $\forall x\,(Fx \Uparrow Gx) \leftarrow \forall x\,(Fx \Downarrow Gx)$

(4) $(\exists x)(Fx \bowtie Gx) \vee (\forall x)(Fx \Leftarrow Gx)$

(5) $(\exists x)(Fx \Leftrightarrow Gx) \uparrow (\forall x)(Fx \vDash Gx)$[104]

Von allen Ausdrücken in der von mir im ersten Teil festgelegten Notation ist eindeutig entscheidbar, ob sie eine *logische Form* oder ein *logisches Gesetz* bezeichnen[105]. Die Ausdrücke logischer Formen *benennen* eine bestimmte zwischen irgendwelchen n Sachverhalts-/Ereignisklassen $p_1, \ldots, p_n$ bestehende n-stellige logische Relation; die Ausdrücke logischer Gesetze *behaupten*, dass zwischen solchen logischen Relationen eine bestimmte logische Relation besteht. So sind die Ausdrücke „$[p, q, r\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$“ und „$p \rightarrow r$“ und „$(10\circ\circ)(p, q)$ eindeutig als benennende Bezeichnungen bestimmter logischer Relationen, die Ausdrücke „$(p \rightarrow q) \uparrow (p \leftarrow q)$“, „$[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{C}] \rightarrow (p \rightarrow r)$“, „$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$“ und „$[(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), (p \rightarrow r)\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$“ eindeutig als behauptende Bezeichnungen logischer Gesetze identifizierbar.

Im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs wird der für die Logik konstitutive Unterschied von logischer Form und logischem Gesetz verwischt, wenn nicht gar ganz vernachlässigt. Jeder korrekt gebildete prädikatenlogistische Ausdruck wird gleicherweise als eine „Aussageform" aufgefasst, die entweder erfüllbar oder allgemeingültig oder nicht-erfüllbar oder nicht-allgemeingültig ist. Ein Ausdruck der Gestalt „$(\mathfrak{Q}x)\,(Px \oplus Qx)$" bezeichnet (indirekt) eine beliebige elementare Fregerelation; für den Logistiker sind alle derartigen Ausdrücke logischer Formen *nur* erfüllbare Aussageformen und deshalb gerade nicht der eigentliche Untersuchungsgegenstand der Logik. Dieser wird vielmehr die Aufgabe zugewiesen, die „allgemeingültigen Aussageformen" zu konstruieren. Es kommt so zum paradoxen Umstand, dass einerseits etwa die Implikation – die allerdings mit der Fregerelation $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ verwechselt wird – die wichtigste Gesetzesstruktur in den Wissenschaften sein soll[106], sie auf der anderen Seite aber als nicht allgemeingültige Aussageform für die Logik kein Interesse besitzt. Diese allgemeingültigen Aussageformen entsprechen dabei, wie wir sehen werden, allesamt der Allrelation und verweisen damit im Gegensatz zu den „nur" erfüllbaren Aussageformen, die den Fregerelationen entsprechen, auf keinen informativen und gehaltvollen logischen Zusammenhang. Der Unterschied von logischen Formen und logischen Gesetzen erscheint in **FREGE**s Logikentwurf so nur verhüllt und indirekt als Unterschied der erfüllbaren und allgemeingültigen prädikatenlogistischen Aussageformen.

Da die meisten logischen Totalformen nicht mittelbar mit Hilfe der Gedankengefüge dargestellt werden können, lassen sich die logischen Beziehungen zwischen zwei Fregerelationen $\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx)$ und $\mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$ nicht durch einen Ausdruck der Gestalt „$\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$" ausdrücken. Wenn, wie üblich, die Implikation irreführend durch das Gedankengefüge-Zeichen „$\Rightarrow$" bezeichnet wird, wird der Ausdruck des Fregerelationsgesetzes (1) abgeschwächt zum Ausdruck

(1*) $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \Rightarrow (\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$.

Die Bedeutung des Ausdrucks (1*) lässt sich eindeutig aus den festgesetzten Bedeutung der Quantoren, Prädikatoren und der jeweils enthaltenden Gedankengefüge rekonstruieren. Ausdruck (1*) ist eine *spezielle* Aussageform: für jede Ersetzung der „Prädikatvariablen" F und G durch Bezeichnungen konkreter Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ ergibt sich eine wahrheitswertdefinite (wahre oder falsche) $\mathfrak{C}$-Aussage, die besagt, dass es falsch ist, dass die Erfüllbarkeitsaussage $(\forall x)(\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x)$ wahr und zugleich die Erfüllbarkeitsaussage $(\exists x)(\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x)$ falsch ist. Aus den Bedeutungen der Erfüllbarkeitsaussageformen $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ und $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ geht die Allgemeingültigkeit der Aussageform (1*) hervor: jede Ersetzung der „Prädikatvariablen" F und G in Ausdruck (1*) führt auf eine wahre $\mathfrak{C}$-Aussage. Der Grund ist: wenn die Fregerelation $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \equiv (\circ 0 \circ\circ)(Fx, Gx)$ gilt, gilt notwendigerweise auch die Fregerelation $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx) \equiv (\circ \bullet \circ\circ)(Fx, Gx)$. Der Ausdruck (1*) ist die begriffsschriftliche Abschwächung des logischen Gesetzes: $(\circ 0 \circ\circ)(Fx, Gx) \rightarrow (\circ \bullet \circ\circ)(Fx, Gx)$, dessen Gültigkeit unmittelbar aus den Normalmatrizen ersichtlich ist: wenn die Bedingungen für die Geltung von $(\circ 0 \circ\circ)(Fx, Gx)$ gegeben sind, dann notwendig auch die Bedingungen von $(\circ \bullet \circ\circ)(Fx, Gx)$, aber nicht umgekehrt. Gesetze, die wie die Ausdrücke (1) und (1*) die zwischen Fregerelationen bestehenden logischen Beziehungen darlegen, nenne ich im Folgenden **Fregerelationsgesetze**[107]; Ausdruck (1*) bringt das implikative Fregerelationsgesetz (1) allerdings nicht nur in seinem Gehalt abgeschwächt, sondern auch nur indirekt zum Ausdruck[108]. So wenig wie die Fregerelationen sind die begriffsschriftlichen Abschwächungen der Fregerelationsgesetze „Wahrheitsfunktionen". Die Richtigkeit der Behauptung (1*) ergibt sich nicht aus irgendwelchen vorgegebenen Wahrheitswerten, sondern verweist auf einen bestimmten Zusammenhang der allgemeinen Geltungsbedingungen logischer Relationen, die auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogen sind, und deshalb einen Zusammenhang von vornherein voraussetzen und nicht ausschließen wir die „wahrheitsfunktionalen" Gedankengefüge.

Das Fregerelationsgesetz „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \Rightarrow (\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$" behauptet, dass allen Paaren von Erfüllbarkeits*aussagen*, die aus den Ersetzungen der „Prädikatvariablen" in den *zwei* Erfüllbarkeits*aussageformen* $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ und $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ entstehen, das Gedankengefügeprädikat $\mathfrak{C}$ zukommt. Generell gilt, dass sich für jede Aussageform der Gestalt $\Lambda_1(Fx, Gx) \oplus \Lambda_2\,(Fx, Gx)$ bei jeder Ersetzung der „Prädikatvariablen" eine wahrheitswertdefinite Aussage ergibt: den beiden Erfüllbarkeitsaussagen $\Lambda_1(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ und $\Lambda_2\,(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ wird das durch $\oplus$ bezeichnete Gedankengefüge prädiziert. Alle Paare konkreter Prädikate, für die sich, eingesetzt in die Aussageform $\Lambda_1(Fx, Gx) \oplus \Lambda_2\,(Fx, Gx)$, eine wahre Aussage ergibt, stehen in einer ganz bestimmten logischen Beziehung und alle Ausdrücke der Form $\Lambda_1(Fx, Gx) \oplus \Lambda_2\,(Fx, Gx)$ bezeichnen so indirekt eine Fregerelation; ich spreche in diesen Fälle nicht von elementaren, sondern von **komplexen Fregerelationen**. Die Fregerelation, die vom Ausdruck (1*) bezeichnet wird, ist die **Allrelation**, die in diesem Falle bestimmt ist als jene logische Form, die zwischen zwei beliebigen Prädikaten F und G genau dann besteht, wenn jedenfalls nicht $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ ohne $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt; d.h. genau in den folgenden drei Fällen:

1. wenn sowohl $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ als auch $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gelten: dies ist genau dann der Fall, wenn $(\circ 0 \circ\circ\circ)(Fx, Gx)$, gilt, also: $\mathbb{C} \Cup \mathbb{H} \Cup \mathbb{E} \Cup \mathbb{K} \Cup \mathbb{F} \Cup \mathbb{M} \Cup \mathbb{X}(Fx, Gx)$

2. oder wenn $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt, nicht jedoch $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$; dies ist genau dann der Fall, wenn $(\circ 1 \circ\circ)(Fx, Gx)$ gilt, also $\mathbb{V} \Cup \mathbb{A} \Cup \mathbb{B} \Cup \mathbb{I} \Cup \mathbb{D} \Cup \mathbb{J} \Cup \equiv (Fx, Gx)$

3. oder wenn weder $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ noch $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt; dies ist genau dann der Fall, wenn $(0100)(Fx, Gx) \equiv \mathbb{L}(Fx, Gx)$ gilt.

Die logische Relation, die zwischen zwei Prädikaten F und G besteht, wenn jedenfalls nicht $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ ohne $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt, ist demnach die Allrelation – eine der 15 überhaupt möglichen nichtleeren zweistelligen Totalrelationen[109]; irgendeine Information über das spezifische logische Verhältnis zweier Prädikate wird durch diese logische Relation nicht repräsentiert, denn jedes beliebige Paar von Prädikaten steht in dieser Relation. Jeder Ausdruck der Gestalt $\mathfrak{Q}_1 x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2 x(Fx \otimes Gx)$, der die Allrelation bezeichnet, ist die begriffsschriftliche Abschwächung eines Fregerelationsgesetzes; ansonsten bezeichnet der Ausdruck eine von der Allrelation verschiedene zweistellige logische Relation.

Betrachten wir die Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}_1 x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2 x(Fx \otimes Gx)$ näher. Bei der Bestimmung aller n-stelligen logischen Relationen, die sich ausgehend von der Gesamtmenge aller n-stelligen Totalformen konstruieren lassen, sind wir auf den Begriff der **Prädikatverknüpfung** gestoßen. Aus den Prädikatoren Px und Qx lässt sich mittels der „Prädikatenaddition“ der Prädikator $Px \Cup Qx$ bilden, der besagt, dass einem Gegenstand x von den Prädikaten P und Q zumindest eines zukommt; der aus der „Prädikatenmultiplikation“ resultierende Prädikator $Px \Cap Qx$ besagt, dass einem Gegenstand x sowohl das Prädikat P wie das Prädikat Q zukommt; der der „Prädikatenkomplementbildung“ entspringende Prädikator $\complement Px$ kommt allen Gegenständen x zu, denen P nicht zukommt.

Beliebige Paare von logischen Relationen können durch binäre Prädikatenverknüpfungen zu einer dritten logischen Relation verknüpft werden; so führt die Verknüpfung $(p \rightarrow q) \Cup (p \leftrightarrow q)$ auf jene logische Form, die besagt, dass eine Sachverhalts-/Ereignisklasse P eine andere Sachverhalts-/Ereignisklasse q entweder impliziert oder mit ihr äquivalent ist, eine logische Form die ich durch die bedeutungsgleichen Ausdrücke „$(p \leftrightarrows q)$“, „$(10{\bullet}1)(p, q)$“ und „$\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}(p, q)$“ darstelle. Die aus der Prädikatenaddition $(1{\bullet}{\bullet}1)(p, q) \Cap ({\bullet}1{\bullet}1)(p, q)$ ist die logische Form $(11{\bullet}1)(p, q) \equiv \mathbb{V} \Cup \mathbb{B}(p, q)$. Die Bezeichnungen der Prädikatverknüpfungen können nicht durch Bezeichnungen logischer Relationen ersetzt werden: der Ausdruck „$(p \rightarrow q) \Cup (p \leftrightarrow q)$“ *benennt* diejenige logische Form, die aus der Prädikatenaddition von $(p \rightarrow q)$ und $(p \leftrightarrow q)$ resultiert, während der Ausdruck „$(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$“ *behauptet*, dass die logischen Formen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ in der logischen Totalrelation $\mathbb{A}$ stehen (die Behauptung ist falsch). Die Prädikatverknüpfungen $\Cup$ und $\Cap$ dürfen den logischen Relationen $\vee$ und $\wedge$ nicht gleichgestellt werden.

Auch Gedankengefüge sind als Prädikate von wahrheitswertdefiniten Aussagen keine Verknüpfungen; die Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}_1 x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2 x(Fx \otimes Gx)$ bezeichnen keine Verknüpfung von Fregerelationen, sondern stellen eine spezielle Aussageform dar. Zwischen den Gedankengefügen und bestimmten Prädikatverknüpfungen besteht allerdings die folgende *bedingungslogische Isomorphie*. Jedem Gedankengefüge $A \oplus B$ kann eineindeutig eine ganz bestimmte Verknüpfung von Prädikaten F und G zugeordnet werden; ich bezeichne diese dem Gedankengefüge $A \oplus B$ entsprechende Verknüpfung durch den Ausdruck „$Fx\ \mathbf{v}^{\oplus} Gx$“. Den vier möglichen Wahrheitswertkombinationen werden die vier möglichen Vorkommenskombinationen von Fx und Gx in folgender Weise bijektiv zugeordnet:

A wahr und B wahr	$\Leftrightarrow$	Fx und Gx
A wahr und B falsch	$\Leftrightarrow$	Fx und $\sim$Gx
A falsch und B wahr	$\Leftrightarrow$	$\sim$Fx und Gx
A falsch und B falsch	$\Leftrightarrow$	$\sim$Fx und $\sim$Gx

Bestimmt ein Gedankengefüge eine Wahrheitswertkombination definitiv als wahr, so bestimmt die entsprechende Prädikatverknüpfung, dass einem Gegenstand die der Wahrheitswertkombination entsprechende Prädikatkombination definitiv zukommt. Besagt z.B. die Prädikatverknüpfung $Fx\ \mathbf{v}^{\dashv} Gx$, dass einem Gegenstand die Prädikatkombination ~Fx und Gx zukommt, dann kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\oplus}$Gx nur solchen Gegenständen zu, denen F nicht zukommt und G zukommt.

Bestimmt ein Gedankengefüge eine Wahrheitswertkombination definitiv als falsch, so bestimmt die entsprechende Prädikatverknüpfung, dass einem Gegenstand die der Wahrheitswertkombination entsprechende Prädikatkombination definitiv nicht zukommt. Schließt also die Prädikatverknüpfung Fx $\mathbf{v}^{\oplus}$Gx definitiv aus, dass einem Gegenstand die Prädikatkombination ~Fx und Gx nicht zukommt, dann kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\oplus}$Gx nur solchen Gegenständen zu, denen jedenfalls nicht F nicht zukommt und G zukommt.

Bestimmt ein Gedankengefüge eine Wahrheitswertkombination nicht definitiv als falsch (lässt es die Wahrheit der Wahrheitswertkombination offen), so besagt die entsprechende Prädikatverknüpfung, dass es nicht ausgeschlossen ist, dass einem Gegenstand die entsprechende Prädikatkombination zukommt. Schließt also die Prädikatverknüpfung Fx $\mathbf{v}^{\oplus}$Gx nicht definitiv aus, dass einem Gegenstand die Prädikatkombination ~Fx und Gx zukommt, dann kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\oplus}$Gx nur solchen Gegenständen zu, für die es nicht ausgeschlossen ist, dass ihnen F nicht zukommt und G zukommt.

Damit ergibt sich zwischen den 16 zweistelligen Gedankengefügen und den 16 möglichen binären Prädikatverknüpfungen folgende Bijektion:

Gedankengefüge A⊕B	⇔	**Prädikatverknüpfung Fx $\mathbf{v}^{\oplus}$** Gx
A▽B = A⊽¬A⊽B⊽¬B von zwei Aussagen A und B ist jede jeweils entweder wahr oder falsch	⇔	Fx $\mathbf{v}^{\triangledown}$ Gx = Fx⋓~Fx⋓Gx⋓~Gx: einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\triangledown}$ Gx genau dann zu, wenn ihm F und G jeweils entweder zukommen oder nicht zukommen
A⊽B von zwei Aussagen A und B ist zumindest eine wahr	⇔	Fx $\mathbf{v}^{⊽}$ Gx = Fx⋓Gx: einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{⊽}$ Gx genau dann zu, wenn ihm von den Prädikaten F und G zumindest eines zukommt.
A ⇒ B = ¬A⊽B Es ist jedenfalls nicht A wahr und B falsch	⇔	Fx $\mathbf{v}^{\Rightarrow}$ Gx = ~Fx⋓Gx: Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Rightarrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm jedenfalls nicht F zukommt und G nicht zukommt
A ⇐ B = A⊽¬B Es ist jedenfalls nicht A falsch und B wahr	⇔	Fx $\mathbf{v}^{\Leftarrow}$ Fx⋓~Gx: Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Rightarrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm jedenfalls nicht F nicht zukommt und G zukommt
A ⇑ B Von A und B sind jedenfalls nicht beide wahr	⇔	Fx $\mathbf{v}^{\Uparrow}$ Gx = ~Fx⋓~Gx: Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Uparrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm jedenfalls nicht beide Prädikate F und G zukommen.
A ⇔ B = (A&B) ⊽ (¬A&¬B) A und B sind beide wahr oder beide falsch	⇔	Fx $\mathbf{v}^{\Leftrightarrow}$ Gx = (Fx⋒Gx)⋓(~Fx⋒~Gx): Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Leftrightarrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm die Prädikate F und G beide zukommen oder beide nicht zukommen.

$A \nearrow B = (A \& \neg B) \uplus (\neg A \& \neg B)$ Von den Aussagen A und B ist jedenfalls B falsch.	$\Leftrightarrow$	$Fx\ \mathbf{v}^{\nearrow}\ Gx = (Fx \Cap \sim Gx) \uplus (\sim Fx \Cap \sim Gx)$ Einem Gegenstand kommt das Prädikat $Fx\ \mathbf{v}^{\nearrow}\ Gx$ genau dann zu, wenn ihm von den Prädikaten F und G jedenfalls G nicht zukommt.
$A \vDash B = A \Cap \neg B$ A ist wahr und B ist falsch.	$\Leftrightarrow$	$Fx\ \mathbf{v}^{\vDash}\ Gx = (Fx \Cap \sim Gx)$ Einem Gegenstand kommt das Prädikat $Fx\ \mathbf{v}^{\vDash}\ Gx$ genau dann zu, wenn ihm F zukommt und G nicht zukommt.

Jedem der 15 nichtleeren Gedankengefüge kann so eine der 15 überhaupt möglichen binären Prädikatverknüpfungen eineindeutig zugeordnet werden.

Zwischen den Gedankengefügen und den Prädikatverknüpfungen besteht eine *bedingungslogische Isomorphie*: d.h. zwischen den Prädikatverknüpfungen bestehen genau dieselben logischen Beziehungen wie zwischen den ihnen entsprechenden Gedankengefügen; es gibt es zu jedem Gesetz des SFG genau eine entsprechende bedingungslogische Gesetzesbeziehung zwischen den aus den entsprechenden Prädikatverknüpfungen hervorgehenden Prädikaten.

$(A \& B) \to (A \Rightarrow B)$ Wenn die Aussagen A und B wahr sind, dann ist jedenfalls nicht A wahr und B falsch	$\Leftrightarrow$	$(Fx\ \mathbf{v}^{\&}\ Gx) \to (Fx\ \mathbf{v}^{\Rightarrow}\ Gx)$ Wenn einem Gegenstand F und G zukommt, dann trifft es jedenfalls nicht zu, dass ihm F zukommt und G nicht zukommt.
$(A \Leftarrow B) \vee (A \bowtie B)$ Entweder ist nicht A falsch und B wahr und von A und B genau eines wahr, oder es ist nicht A falsch und B wahr und von A und B nicht genau eines wahr, oder es ist A falsch und B wahr und von A und B genau eines wahr. usw.	$\Leftrightarrow$	$(Fx\ \mathbf{v}^{\Leftarrow}\ Gx) \vee (Fx\ \mathbf{v}^{\bowtie}\ Gx)$ Entweder kommt einem Gegenstand jedenfalls nicht F nicht zu und G zu und von F und G nur eines, oder einem Gegenstand kommt F nicht zu und G zu und von F und G genau eines, oder einem Gegenstand kommt jedenfalls nicht F nicht zu und G zu und von F und G beide oder keins.

Auf der Grundlage der bijektiven Zuordnung von Gedankengefügen und Prädikatverknüpfungen sowie der eineindeutigen Entsprechung der prädikatenlogistischen Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$ und der Fregerelationen, wie sie in obiger Tabelle angeführt ist (S.231), können wir jetzt für jeden prädikatenlogistischen Ausdruck der Gestalt $\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$ die eineindeutig korrespondierende komplexe Fregerelation bestimmen. Wenn wir den prädikatenlogistischen Ausdruck, der auf eine Fregerelation Λ_i verweist, durch „$\mathbf{A}^{\Lambda i}$" bezeichnen, dann verweist der Ausdruck „$\mathbf{A}^{\Lambda 1} \oplus \mathbf{A}^{\Lambda 2}$" eineindeutig auf die komplexe Fregerelation ($\Lambda_1\ \mathbf{v}^{\oplus}\ \Lambda_2$). Es gilt: jene konkreten Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, für welche die Aussageform „$\mathbf{A}^{\Lambda 1} \oplus \mathbf{A}^{\Lambda 2}$" wahr wird, stehen in der logischen Beziehung ($\Lambda_1\ \mathbf{v}^{\oplus}\ \Lambda_2$). Der Zusammenhang sei an folgenden Beispielen erläutert.

Erstes Beispiel: Der Ausdruck

(1) $\forall x(Fx \Rightarrow Gx) \triangledown \forall x(Fx \Leftarrow Gx)$

ist eine Aussageform, die für eine Variablenersetzung $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \Updownarrow F,G$ zu der wahrheitswertdefiniten $\mathbf{A}$-Aussage

(1') $\forall x\ (\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x) \triangledown \forall x\ (\mathfrak{F}x \Leftarrow \mathfrak{G}x)$

wird; weder (1) noch (1') sind Ausdrücke von Verknüpfungen logischer Relationen; auch bezeichnen die Teilausdrücke „(∀x) (Fx⇒Gx)“, „(∀x) (Fx ⇐Gx)“ und „(∀x) (𝔉x⇒𝔊x)“, „(∀x) (𝔉x ⇐𝔊x)“ keine logischen Relationen (sondern spezielle prädikatenlogistische Aussageformen: allerdings können die Ausdrücke „(∀x) (Fx ⇒Gx)“ und „(∀x) (Fx ⇐Gx)“ eineindeutig den Fregerelationen (∘0∘∘)(Fx, Gx) und (∘∘0∘)(Fx, Gx) zugeordnet werden; die Erfüllbarkeitsaussagen „(∀x) (𝔉x ⇒𝔊x)“ und „(∀x) (𝔉x ⇐𝔊x)“ entsprechen eineindeutig den konkreten Gesetzesaussagen (∘0∘∘)(𝔉x, 𝔊x) und (∘∘0∘)(𝔉x, 𝔊x). Der Ausdruck (1) seinerseits entspricht eineindeutig der logischen Relation

(1'') (∘0∘∘)(Fx, Gx) **v**$^{\triangledown}$ (∘∘0∘)(Fx, Gx) = (∘0∘∘)(Fx, Gx) ⋓ (∘∘0∘)(Fx, Gx)

Diese komplexe Fregerelation resultiert aus der Prädikatenaddition der Fregerelationen (∘0∘∘)(Fx, Gx) und (∘∘0∘)(Fx, Gx). Es ist jene logische Relation, die zwischen allen Prädikatoren Fx und Gx besteht, die in zumindest einer der beiden Fregerelationen (∘0∘∘)(Fx, Gx) und (∘∘0∘)(Fx, Gx) stehen. Dies trifft in den folgenden drei Fällen zu:

(a) Es ist bei Geltung der Fregerelation (∘0∘∘)(Fx, Gx) **v**$^{\triangledown}$ (∘∘0∘)(Fx, Gx möglich, dass beide Relationen gelten: es gilt dann die logische Partialform (∘00∘)(Fx, Gx) ≡ 𝔼⋓𝕂⋓𝕏 (Fx, Gx)

(b) Gilt (∘0∘∘)(Fx, Gx) ohne (∘∘0∘)(Fx, Gx) gilt die logische Relation (•01•)(Fx, Gx) ≡ ℂ⋓ℍ⋓𝔽⋓𝕄(Fx, Gx)

(c) Gilt (∘∘0∘)(Fx, Gx) ohne (∘0∘∘)(Fx, Gx), haben wir die logische Relation (•10•)(Fx, Gx) ≡ (ℂ⋓𝕀⋓≡⋓𝕃)(Fx, Gx).

Die logische Relation (∘0∘∘)(Fx, Gx) ⋓ (∘∘0∘)(Fx, Gx) ist die logische Relation 𝔼⋓𝕂⋓𝕏⋓ℂ⋓ℍ⋓𝔽⋓𝕄⋓ℂ⋓𝕀⋓≡⋓𝕃)(Fx, Gx) ≡ 𝔣\𝕍𝔸𝔻𝕁(Fx, Gx)[110].

Zweites Beispiel: Der Ausdruck

(2) „(∀x) (Fx ▽ Gx) ▽ (∃x) (Fx ⊻ Gx)“

verweist auf die komplexe Fregerelation (∘∘∘0)(Fx, Gx) **v**$^{\triangledown}$ (∘•∘•)(Fx, Gx); diese besagt, dass von den elementaren Fregerelationen (∘∘∘0)(Fx, Gx) und (∘•∘•)(Fx, Gx) zumindest eine gilt; gelten beide, haben wir die logische Relation (∘•∘0)(Fx, Gx) ≡ 𝔸⋓𝕀⋓𝕁⋓ℍ⋓𝕂⋓𝕄(Fx, Gx): gilt (∘∘∘0)(Fx, Gx) ohne (∘•∘•)(Fx, Gx), so haben wir die Relation (0100)(Fx, Gx); gilt schließlich (∘•∘•)(Fx, Gx) ohne (∘∘∘0)(Fx, Gx), gilt (∘•∘1)(Fx, Gx) ≡ 𝕍⋓𝔹⋓𝔻⋓ℂ⋓𝔼⋓𝔽(Fx, Gx). Ausgeschlossen ist, dass beide Fregerelationen nicht gelten, ausgeschlossen ist demnach die Relation (1•10)(Fx, Gx) ≡ 𝕏⋓≡(Fx, Gx). Es gilt also (∘∘∘0)(Fx, Gx) **v**$^{\triangledown}$ (∘•∘•)(Fx, Gx) = 𝔣\𝕏≡(Fx, Gx).

Eine prädikatenlogistische Aussageform, die der logischen Allrelation entspricht, ist allgemeingültig; entspricht eine Aussageform einer nichtleeren logischen Relation, ist sie erfüllbar, entspricht eine Aussageform der leeren Relation, ist sie unerfüllbar. Ich werde beispielhaft für die beiden Fregerelationen **(∃x) (Fx ▽ Gx)** und **(∃x) (Fx ⥣ Gx)** prüfen, welche der möglichen Aussageformen ∃x (Fx ▽ Gx) ⊕ ∃x (Fx ⥣ Gx) (1) allgemeingültig, (2) unerfüllbar und (3) erfüllbar sind. Zuerst soll untersucht werden, in welchem logischen Verhältnis die diesen Aussageformen entsprechenden Fregerelationen (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) stehen; hierbei ist zu prüfen, ob die beiden Fregerelationen zusammen, jeweils alleine oder beide nicht gelten können.

(1) Allgemeingültige Aussageformen ∃x (Fx ▽ Gx) ⊕ ∃x (Fx ⥣ Gx)

(i) ∃x (Fx ▽ Gx) ▽ ∃x (Fx ⥣ Gx ist *allgemeingültig*:

a) Beide Fregerelationen können zusammen gelten, z.B. wenn (1011)(Fx, Gx) gilt (genau dann, wenn eine Totalform außer 𝕂 und 𝕏 gilt)
b) (∘∘∘•)(Fx, Gx) gilt genau dann ohne (•∘∘∘)(Fx, Gx), wenn (1000)(Fx, Gx) gilt.
c) (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt genau dann ohne (∘∘∘•)(Fx, Gx), wenn (0001)(Fx, Gx) gilt.
d) Dass weder (∘∘∘•)(Fx, Gx) noch (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt ist unmöglich, denn bei ∼(∘∘∘•)(Fx, Gx) ≡ (0001)(Fx, Gx) gilt notwendig (•∘∘∘)(Fx, Gx), und bei ∼(•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ (1000)(Fx, Gx) gilt notwendig (∘∘∘•)(Fx, Gx).

Es gilt demnach das Fregerelationsgesetz:

∃x (Fx ▿ Gx) ∨ ∃x (Fx ⇈ Gx);

die begriffsschriftlich abschwächende Darstellung ist:

∀F,G[∃x (Fx ▿ Gx) ▿ ∃x (Fx ⇈ Gx)][111];

die Aussageform ist *allgemeingültig* und verweist auf die logische Allrelation.

(ii) Die Fregerelation **∃x (Fx ▿ Gx)** ▽ **∃x (Fx ⇈ Gx)** ist die Allrelation, denn sie gilt, ob (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) jeweils gelten oder nicht.

(2) *Unerfüllbar* ist die Aussageform ∃x (Fx ▿ Gx) ⇓ ∃x (Fx ⇈ Gx); es gilt: ∀F,G ~[∃x (Fx ▿ Gx) ⇓ ∃x (Fx ⇈ Gx)]; weil von den Relationen (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) zumindest eine gelten muss, resultiert aus der Verknüpfung (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\Downarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) die leere logische Relation.

(3) *Erfüllbar* sind die Aussageformen

(i) Der Aussageform **∃x (Fx ▿ Gx) ⇐ ∃x (Fx ⇈ Gx)** ist die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\Leftarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ ʄ\𝕏(Fx, Gx) zugeordnet; die Fregerelation liegt nur dann *nicht* vor, wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) und ~(∘∘∘•)(Fx, Gx) ≡ (001)(Fx, Gx) gelten, wenn also (0001)(Fx, Gx) gilt.

(ii) **∃x (Fx ▿ Gx) ⇒ ∃x (Fx ⇈ Gx)** verweist auf die logische Relation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\Rightarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ ʄ\𝕂(Fx, Gx); sie liegt nur dann *nicht* vor, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) und ~(•∘∘∘)(Fx, Gx) gelten, wenn also (1000)(Fx, Gx) gilt.

(iii) **∃x (Fx ▿ Gx) ⇈ ∃x (Fx ⇈ Gx)** verweist auf die logische Relation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\Uparrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ 𝕂⋓𝕏 **(Fx, Gx);** sie liegt nur vor, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) und ~(•∘∘∘)(Fx, Gx) – also (1000)(Fx, Gx) oder wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) und ~(∘∘∘•)(Fx, Gx), also (0001)(Fx, Gx) gelten. Dass beide nicht gelten, ist durch das Fregerelationsgesetz ∃x (Fx ▿ Gx) ∨ ∃x (Fx ⇈ Gx) ausgeschlossen.

(iv) Die der Aussageform **∃x (Fx ▿ Gx) ⇔ ∃x (Fx ⇈ Gx)** entsprechende Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\Leftrightarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt genau dann, wenn entweder (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) beide vorliegen oder beide nicht vorliegen; im ersten Fall sind nur die Totalformen 𝕂 und 𝕏 ausgeschlossen, der zweite Fall ist unmöglich; wir haben also die logische Relation **ʄ\𝕂𝕏 (Fx, Gx).**

(v) Bei der **∃x (Fx ▿ Gx) ⇖ ∃x (Fx ⇈ Gx)** entsprechenden Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\nwarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt keinesfalls (∘∘∘•)(Fx, Gx), es gilt also (0001)(Fx, Gx), damit auch (•∘∘∘)(Fx, Gx); wir haben die logische Relation **𝕏 (Fx, Gx)**

(vi) Bei der **∃x (Fx ▿ Gx) ↗ ∃x (Fx ⇈ Gx)** entsprechenden Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\nearrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt keinesfalls (•∘∘∘•)(Fx, Gx), es gilt also (1000)(Fx, Gx), damit auch (∘∘∘•)(Fx, Gx); wir haben die logische Relation **𝕂 (Fx, Gx)**

(vii) Die Aussageform **∃x (Fx ▿ Gx) ↘ ∃x (Fx ⇈ Gx)** entspricht der Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\nearrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ ʄ\𝕂(Fx, Gx); es gilt jedenfalls (•∘∘∘)(Fx, Gx), also ~𝕂(Fx, Gx).

(viii) Die der Aussageform **∃x (Fx ▿ Gx) ↙ ∃x (Fx ⇈ Gx)** entsprechende Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\swarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ ʄ\𝕏(Fx, Gx) besagt, es gilt jedenfalls (∘∘∘•)(Fx, Gx), also ʄ\𝕏.

(ix) **∃x (Fx ▿ Gx) ⋈ ∃x (Fx ⇈ Gx)** verweist auf die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\bowtie}$(•∘∘∘)(Fx, Gx); sie gilt genau dann, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) ohne (•∘∘∘)(Fx, Gx), also 𝕂(Fx, Gx) gilt, und wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) ohne (∘∘∘•)(Fx, Gx), wenn also (x) gilt; wir haben die logische Relation 𝕂⋓𝕏(Fx, Gx).

(x) Dem Ausdruck „**∃x (Fx ▿ Gx) & ∃x (Fx ⇈ Gx)**“ entspricht die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) $\mathbf{v}^{\&}$(•∘∘∘)(Fx, Gx); sie gilt genau dann, wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) und (∘∘∘•)(Fx, Gx) beide gelten; wir haben die Fregerelation **ʄ\𝕂𝕏 (Fx, Gx)**.

(xi) Die der Formel „**∃x (Fx ▿ Gx) ⊧ ∃x (Fx ⥣ Gx)**“ entsprechende Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**[⊧] (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt genau dann, wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) ohne (∘∘∘•)(Fx, Gx), wenn also 𝕏 **(Fx, Gx)** gilt.

(xii) Der Ausdruck „**∃x (Fx ▿ Gx) ⫤ ∃x (Fx ⥣ Gx)**“ verweist auf die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**[⫤] (•∘∘∘)(Fx, Gx), welche genau dann gilt, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) ohne (•∘∘∘)(Fx, Gx), d.h. 𝕂 **(Fx, Gx)** gilt.

Weil von den beiden Fregerelationen (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) zumindest eine gelten muss, verweisen alle unterschiedlichen Ausdrücke der Gestalt „∃x (Fx ▿ Gx) ⊕ ∃x (Fx ⥣ Gx)“ auf dieselbe logische Relation, bei denen das Gedankengefüge ⊕ nur die Wahrheitswertkombination $\mathcal{F}$ ⌢ $\mathcal{F}$ unterschiedlich bestimmt, also (i) und (viii) – **B** und **I**, (ii) und (vii) – **C** und **H**, (iii) und (ix) – **D** und **J**, (iv) und (x) – **E** und **K**, (v) und (xi) – **G** und **M**, (vi) und (xii) – **G** und **L**; die Ausdrücke „∃x (Fx ▿ Gx) ▽ ∃x (Fx ⥣ Gx)“ und „∃x (Fx ▿ Gx) ▿ ∃x (Fx ⥣ Gx)“ verweisen beide auf die Allrelation.

Es können so eine Vielzahl logischer Relationen dargestellt werden: alle möglichen Verknüpfungen elementarer Fregerelationen können durch die Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}_1$x (Fx ⊕ Gx) ⊖ $\mathfrak{Q}_2$x (Fx ⊗ Gx) dargestellt werden, und jeder derartige Ausdruck verweist seinerseits auf eine komplexe Fregerelation. Auch die Verknüpfungen komplexer Fregerelationen sind wiederum komplexe Fregerelationen und lassen sich *indirekt* begriffsschriftlich darstellen; auch die Verknüpfungen von Verknüpfungen von elementaren Fregerelationen sind logische Relationen, aus denen sich durch Prädikatenverknüpfungen andere logische Relationen ergeben, usw. Es stellt sich die Frage, ob sich auf diese Weise *alle* logischen Relationen indirekt mit den Mitteln der *Begriffsschrift* darstellen lassen. Diese Frage können wir nur aufwerfen und beantworten, weil wir das im ersten Teil dieser Arbeit dargelegte Verfahren zur Konstruktion *aller* zweistelligen logischen Relationen kennen.

Der Ausdruck „∃x (Fx & Gx)“ entspricht der Fregerelation (1•••)(Fx, Gx), der Ausdruck ∼∃x (Fx & Gx) entspricht der Fregerelation (0∘∘∘)(Fx, Gx). Werden zwei konkrete Prädikate 𝔉 und 𝔊 in die vier Aussageformen ∃x (Fx & Gx), ∼∃x (Fx & ∼Gx) ≡ (∀x) (Fx ⇒ Gx), ∃x (∼Fx & Gx) und ∃x (∼Fx & ∼Gx) eingesetzt und ergeben sich *jeweils* wahre Erfüllbarkeitsaussagen, so stehen die Prädikate 𝔉 und 𝔊 in der Implikationsbeziehung: (𝔉x → 𝔊x); der Ausdruck „∃x (Fx & Gx) & ∼∃x (Fx & ∼Gx) & ∃x (∼Fx & Gx) & ∃x (∼Fx & ∼Gx)“ verweist auf die logische Totalform

(1•••)(Fx, Gx) ⋒ (∘0∘∘)(Fx, Gx) ⋒ (••1•)(Fx, Gx) ⋒ (•••1)(Fx, G) ≡
(1011)(Fx, Gx) ≡
(Fx → Gx).

Von jeder der vier Vorkommenskombinationen 𝔓x ⌢ 𝔔x, 𝔓x ⌢ ∼𝔔x, ∼𝔓x ⌢ 𝔔x und ∼𝔓x ⌢ ∼𝔔x kann *jeweils* entweder die Erfüllbarkeit oder Nicht-Erfüllbarkeit behauptet werden; es darf nur dieselbe Kombination nicht zugleich als erfüllbar und nicht-erfüllbar behauptet werden. Es kann zugleich behauptet werden etwa „(∃x) **(**𝔓x ⌢ 𝔔x)“ und „(∃x) (𝔓x ⌢ ∼𝔔x)“, obwohl natürlich keinem einzigen einzelnen Gegenstand 𝔞 zugleich 𝔓x⋒𝔔x und 𝔓x⋒∼𝔔x zugesprochen werden kann; der Ausdruck „(∃x) **(**𝔓x ⌢ 𝔔x) & (∃x) (𝔓x ⌢ ∼𝔔x)“ besagt einfach, dass sowohl „𝔓x ⌢ 𝔔x“ wie „𝔓x ⌢ ∼𝔔x“ erfüllbar ist – natürlich immer von jeweils verschiedenen Individuen. Im Ausdruck „(∃x) (𝔓x ⌢ 𝔔x) & (∃x) (𝔓x ⌢ ∼𝔔x)“ kann ja x nicht durch die Bezeichnung eines Individuums ersetzt werden, denn diese zwei durch „&“ verbundenen Erfüllbarkeitsbehauptungen sind jeweils von einander unabhängig, *der Geltungsbereich des Quantors (*∃x*) erstreckt sich immer nur auf den unmittelbar folgenden Klammerausdruck*. Da jede Vorkommenskombination von 2 oder mehr Prädikatoren für sich als erfüllbar, bzw. unerfüllbar behauptet werden kann, kann jede beliebige logische Relation begriffsschriftlich dargestellt werden; die Implikation „(𝔓x → 𝔔x)“ etwa durch den Ausdruck „(∃x) (𝔓x ⌢ 𝔔x) & ∼(∃x) (𝔓x ⌢ ∼𝔔x) & (∃x) (∼𝔓x ⌢ 𝔔x) & „(∃x) (∼𝔓x ⌢ ∼𝔔x)“; es gibt allerdings kein Gedankengefüge „⊕“, das die Implikation durch einen Ausdruck der Gestalt „($\mathfrak{Q}$x) (Fx ⊕ Gx)“ darstellen könnte. Auf die dreistellige Totalrelation [Px, Qx, Rx ℂ𝔻] verweist die Aussageform

∃x (Px & Qx & Rx) & ∼∃x (Px & Qx & ∼Rx) & ∃x (Px & ∼Qx & Rx) & ∃x (Px & ∼Qx & ∼Rx) &
∼∃x (∼Px & Qx & Rx) & ∃x (∼Px & Qx & ∼Rx) & ∃x (∼Px & ∼Qx & Rx) & ∃x (∼Px & ∼Qx & ∼Rx).

Jene Prädikate 𝔓, 𝔔 und ℜ, für die alle diese durch & verbundenen Erfüllbarkeitsaussageformen wahr werden, stehen in der logischen Totalrelation [p, q, r ℂ𝔻]. Auf sehr umständliche, indirekte und unübersichtliche Weise können die Normalmatrizen aller logischen Relationen begriffsschriftlich dargestellt werden. Da jede der durch „&" verbundenen Erfüllbarkeitsaussageformen selbstständig ist – der Bindungsbereich der Quantoren umfasst nur den Klammerausdruck, der den Quantoren unmittelbar folgt –, können die Quantoren zur Herstellung einer so genannten „pränexen Normalform"[112] nur dann vor den ganzen Ausdruck gezogen werden, wenn jede der Erfüllbarkeitsaussageformen ein unterschiedliches Beliebig-Element-Zeichen für Individuen erhält, und es muss ausdrücklich festgehalten werden, dass sich diese unterschiedlichen Beliebig-Element-Zeichen für Individuen immer auf verschiedene Individuen beziehen. Der Ausdruck „$\exists x\ (Fx \mathbin{\&} Gx) \mathbin{\&} \exists x\ (Fx \mathbin{\&} {\sim}Gx)$" kann also nicht durch den Ausdruck „$\exists x\ [(Fx \mathbin{\&} Gx) \mathbin{\&} (Fx \mathbin{\&} {\sim}Gx)]$", sondern nur durch den Ausdruck „$\exists x \exists y\ [(Fx \mathbin{\&} Gx) \mathbin{\&} (Fy \mathbin{\&} {\sim}Gy)]$, mit $x \neq y$" ersetzt werden.

Jede logische Relation stellt einen Gesetzeszusammenhang bestimmter Art dar; dabei unterscheiden sich logische Relationen, die mehr als eine Vorkommenskombination als realmöglich bestimmen – der entsprechende prädikatenlogistische Ausdruck behauptet dann die Erfüllbarkeit von mindestens zwei Vorkommenskombinationen –, in bemerkenswerter Weise von solchen logischen Relationen, bei denen dies nicht der Fall ist. Im zweiten Falle sagt das Gesetz von zumindest einem oder von allen Gegenständen des Bezugsbereichs aus, was sinnvollerweise von jedem einzelnen dieser Gegenstände gesagt werden kann. Besteht zwischen zwei Prädikaten F und G die Fregerelation $(\circ 0 \circ \circ)(Fx, Gx)$, lässt sich dies als ein Allsatz formulieren: jedem einzelnen Gegenstand des Bezugsbereichs kommt jedenfalls nicht F ohne G zu; der prädikatenlogistische Ausdruck „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$" drückt diesen Allsatz indirekt aus. Auch die Fregerelation $(\circ 0 0 \circ)(Fx, Gx)$, auf die die Aussageform „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \mathbin{\&} (\forall x)(Fx \Leftarrow Gx)$" verweist, sagt von allen Gegenständen des Bezugsbereich aus, was von jedem einzelnen dieser Gegenstände gesagt werden kann: dass ihm jedenfalls weder F ohne G, noch G ohne F zukommt.

Dies trifft für die komplexe Fregerelation $\exists x(Fx \mathbin{\&} Gx) \mathbin{\&} \exists x(Fx \mathbin{\&} {\sim}Gx)$ [$\triangleq (11\bullet\bullet)$ (Fx, Gx)] schon nicht mehr zu: hier wird nicht von zumindest einem oder allen Gegenständen des Bezugsbereichs gesagt, was sich von jedem einzelnen dieser Gegenstände behaupten ließe. Von keinem einzelnen Gegenstand lässt sich behaupten, dass ihm zugleich F und G, und darüber hinaus auch F ohne G zukommt. Die Implikation $(1011)(Fx, Gx) \equiv (Fx \rightarrow Gx)$ kann nicht in dem Sinne als Allsatz formuliert werden, dass von einem *einzelnen* Gegenstand $\mathfrak{a}$ des Bezugsbereichs behauptet würde: „wenn_1 $\mathfrak{a}$ F ist, ist $\mathfrak{a}$ B", denn dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ kommt genau eine und nur eine der vier möglichen Prädikatorkombinationen $Fx\frown Gx$, $Fx\frown{\sim}Gx$, ${\sim}Fx\frown Gx$ und ${\sim}Fx\frown{\sim}Gx$ zu. Deshalb sind Ausdrücke wie „$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$" und „$(\exists x)(Fx \rightarrow Gx)$" widersprüchlich; der Ausdruck „$Fx \rightarrow Gx$" bezeichnet, anders als der Ausdruck „$Fx \Rightarrow Gx$" keine Bestimmung, die einzelnen Gegenständen zugeschrieben werden könnte. Für kein einziges Paar konkreter Prädikate ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$) ist „$(\mathfrak{F}x \rightarrow \mathfrak{G}x)$" eine Aussageform, die für einen Gegenstand $\mathfrak{a}$ zu einer wahrheitswertdefiniten Aussage „$(\mathfrak{F}\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a})$" werden könnte. Nur in einem (enthymematischen) Schluss können die einzelnen Gegenstände mit einem Implikationsgesetz verbunden werden; von einem einzelnen Gegenstand $\mathfrak{a}$ lässt sich nur behaupten: *weil* dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat F zukommt, kommt ihm das Prädikat G zu; oder: *wenn_2* dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat F zukommen sollte, kommt ihm das Prädikat G zu; oder: *wenn* dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat F zukäme, käme ihm das Prädikat G zu. Der implikative Gesetzeszusammenhang kann so nur *bedingterweise* auf die einzelnen Gegenstände bezogen werden; das Gesetz kann nicht, wie bei den Allsätzen *kategorisch* mit den einzelnen Gegenständen verbunden werden, indem von allen Gegenständen des Bezugsbereichs dasselbe ausgesagt wird, wie etwa bei $\forall x Px$, oder $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$, oder $\exists x(Fx \Uparrow Gx)$, usw. Alle elementaren Fregerelationen sind kategorische Gesetzesverhältnisse, und deshalb sind die entsprechenden prädikatenlogistischen Erfüllbarkeits*aussageformen* im Bereich der Prädikate – etwa $(\forall x)(Fx \Leftarrow Gx)$ – für alle Paare konkreter Prädikate Erfüllbarkeits*aussagen* wie $(\forall x)(\mathfrak{F}x \Leftarrow \mathfrak{G}x)$: bei jeder Einsetzung von „Individuenkonstanten" $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, … in die Aussageform $(\mathfrak{F}x \Leftarrow \mathfrak{G}x)$ ergibt sich eine wahre Aussage: $(\mathfrak{F}\mathfrak{a} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{b} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{c} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{c})$, usw.

Im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs werden alle Gesetze nach dem Vorbild kategorischer Gesetze wie $(\forall x)(\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x)$ aufgefasst. Das Schließen, d.h. die Subsumtion von Gegenständen unter Gesetze, wird dabei seit **Frege** als ein Übergang von allgemeingültigen Aussageformen wie $(\mathfrak{F}x \Leftarrow \mathfrak{G}x)$ zu Aussagen wie $(\mathfrak{F}\mathfrak{a} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{b} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{b})$, usw., als die Ersetzung von „Individuenvariablen" durch „Individuenkonstanten" angesehen (**Frege**, Briefe [IX/4] 104ff; LA 168f; GLG I-III, 298f; LM 109). Der fundamentale Unterschied zwischen kategorischen und bedingten Gesetzesbeziehungen wird dabei völlig übersehen; übersehen wird, dass viele schließende Subsumtionen keiner derartigen Variablenersetzung entsprechen können. Der entscheidende Grund liegt in der Konzeption der Aussageformen, für welche Ausdrücke mit Beliebig-Element-Zeichen erst dann eigentlichen Sinn und Wahrheitswertdefinitheit erhalten, wenn die Beliebig-Element-Zeichen durch entsprechende

„Konstanten“ ersetzt sind. Ein anderer Grund für das Ignorieren nicht-kategorischer Gesetze liegt darin, dass die Gesetzesgleichungen in der Mathematik, die als Vorbild der logistischen allgemeingültigen Ausdrücke gelten[113], kategorische Gesetze sind[114].

Für alle prädikatenlogistischen Aussageformen, die auf komplexe Fregerelationen verweisen, die mehr als eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich bestimmen, ergeben sich für jede Wahl konkreter Prädikate keine Aussageformen, die bei Einsetzung einer „Individuenkonstante“ zu einer Aussage über das betreffende Individuum würden. Auf die komplexe Fregerelation $(10\bullet 1)(Fx, Gx)$ verweist die prädikatenlogistische Aussageform $\exists x(Fx \& Gx)\ \&\ {\sim}\exists x(Fx \& {\sim}Gx)\ \&\ \exists x({\sim}Fx \& {\sim}Gx)$. Werden in diese Aussageform zwei konkrete Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, die in der Beziehung $(10\bullet 1)(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ stehen eingesetzt, so resultiert der Ausdruck „$\exists x(\mathfrak{F}x \& \mathfrak{G}x)\ \&\ {\sim}\exists x(\mathfrak{F}x \& {\sim}\mathfrak{G}x)\ \&\ \exists x({\sim}\mathfrak{F}x \& {\sim}\mathfrak{G}x)$“ – es handelt sich um drei konjugierte (d.h. durch „und“ (&) verbundene) Erfüllbarkeitsaussagen; diese verweisen zusammen auf den bedingungslogischen Gesetzeszusammenhang $(10\bullet 1)(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$. In den drei Aussageformen $(\mathfrak{F}x \& \mathfrak{G}x)$, $(\mathfrak{F}x \& {\sim}\mathfrak{G}x)$ und $({\sim}\mathfrak{F}x \& {\sim}\mathfrak{G}x)$, auf die sich die Erfüllbarkeitsaussagen beziehen, kann die „Individuenvariable“ x nicht durch dieselbe „Individuenkonstante“ $\mathfrak{a}$ ersetzt werden, d.h. die schließende Subsumtion des Individuums $\mathfrak{a}$ unter das Gesetz $(10\bullet 1)(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ – **Frege** spricht von einem „Schluss vom Allgemeinen zum Besonderen“ – kann in allen *diesen* Fällen[115] nicht mit **Frege** als „Vorgang“ betrachtet werden, bei welchem „der nur andeutende Buchstabe“ x durch ein „bedeutungsvolles Zeichen“ $\mathfrak{a}$ „ersetzt wird“ (GLG I-III, 298f). Das Gesetz $(10\bullet 1)(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ sagt nicht über alle Gegenstände des Bezugsbereichs etwas aus, was über jeden einzelnen dieser Gegenstände auch gesagt werden könnte, es ist keine kategorische, sondern eine bedingte Gesetzesaussage.

Wird ein einzelner Gegenstand $\mathfrak{a}$ schließend unter ein bedingtes (nicht-kategorisches) Gesetz wie „$\exists x(\mathfrak{F}x \& \mathfrak{G}x)\ \&\ {\sim}\exists x(\mathfrak{F}x \& {\sim}\mathfrak{G}x)\ \&\ \exists x({\sim}\mathfrak{F}x \& {\sim}\mathfrak{G}x)$“ $\triangleq (10\bullet 1)(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ subsumiert[116], ergibt sich daraus nicht wie bei der Subsumtion unter ein kategorisches Gesetz, dass diesem Gegenstand eine bestimmte prädikative Bestimmung zukommt: er ergibt sich vielmehr, dass dem Gegenstand, *falls* ihm das Prädikat $\mathfrak{F}$ zukommt, ihm notwendig ($\mathcal{N}$) auch das Prädikat $\mathfrak{G}$ zukommt; dass dem Gegenstand, falls ihm $\mathfrak{F}$ nicht zukommt, $\mathfrak{G}$ jedenfalls nicht notwendig (${\sim}\mathcal{N} = \mathcal{C}$) zukommt; dass dem Gegenstand $\mathfrak{a}$, falls ihm $\mathfrak{G}$ zukommt, $\mathfrak{F}$ jedenfalls nicht unmöglich (${\sim}\mathcal{U} = \mathcal{P}$): schließlich, dass dem $\mathfrak{a}$, falls ihm $\mathfrak{G}$ nicht zukommt, $\mathfrak{F}$ unmöglich ($\mathcal{U}$) zukommt.

Es können also alle logischen Formen begriffsschriftlich dargestellt werden, wenn auch nur indirekt und inakzeptabel umständlich. Wie steht es um die *begriffsschriftliche Darstellung der logischen Gesetze*? Der prädikatenlogistische Aussageform $(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ {\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)$ verweist auf die Implikation $(Fx \rightarrow Gx)$; die Aussageform ${\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)$ verweist auf die Exklusion $(Fx \uparrow Gx)$. Nun lässt sich von zwei derartigen Aussageformen behaupten, dass sie für zumindest ein (oder für jedes) Prädikatenpaar beide wahr, bzw. falsch, oder dass eine der Aussageformen wahr, die andere falsch wird. Eine solche Erfüllbarkeits*aussage* entspricht einem logischen Gesetz. Der Ausdruck

> „**$(\exists$FG$)$** $\{[(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ {\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)]\ \&\ {\sim}[{\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\}$“

entspricht der Aussage, dass es realmöglich ist, dass $(Fx \rightarrow Gx)$ gilt, nicht jedoch $(Fx \uparrow Gx)$, d.h. dem logischen Gesetz $(\bullet 1 \bullet\bullet)\ [(F \rightarrow Gx), (Fx \uparrow Gx)]$. Genau dann, wenn *alle* vier folgenden Erfüllbarkeitsaussagen

1. **$({\sim}\exists$FG$)$** $\{[(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ {\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\ \&\ [{\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\}$
2. **$(\exists$FG$)$** $\{[(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ {\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\ \&\ {\sim}[{\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\}$
3. **$(\exists$FG$)$** $\{{\sim}[(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ {\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\ \&\ [{\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\}$
4. **$(\exists$FG$)$** $\{{\sim}[(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ {\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\ \&\ {\sim}[{\sim}(\exists x)\ (Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ (Fx{\frown}{\sim}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}Gx)\ \&\ (\exists x)\ ({\sim}Fx{\frown}{\sim}Gx)]\}$

wahr sind, gilt das logische Gesetz **(Fx → Gx) ↑ (Fx ↑ Gx)** ≡ (0111)[(1011)(Fx,Gx),(0111)(Fx,Gx)]. Derselbe Zusammenhang wird direkt durch die bedeutungsgleichen Ausdrücke „(0111)[(1011)(Fx,Gx), (0111)(Fx,Gx)]" und „(Fx → Gx) ↑ (Fx↑Gx)" dargestellt[117].

Die vier konjugierten Erfüllbarkeitsaussagen stellen jeweils Aussagen über mögliche logische Zusammenhänge zwischen irgendwelchen Prädikaten dar; Möglichkeit bedeutet hier widerspruchsfreie Konstruierbarkeit:

1. Es kann keine logische Relation konstruiert werden, die voraussetzt, dass für zwei Prädikate F und G zugleich (Fx → Gx) und (Fx↑Gx) gilt – denn für diese Prädikate würde dann gelten, dass Fx⌢Gx zugleich realmöglich und nichtrealmöglich ist, ebenso dass Fx⌢∼Gx zugleich realmöglich und nichtrealmöglich ist.
2. Es kann eine Relation konstruiert werden, die voraussetzt, dass zwei Prädikate F und G wohl in der Beziehung (Fx → Gx), nicht aber in der Beziehung (Fx↑Gx) steht: diese Relation ist die Relation (Fx → Gx).
3. Es kann eine Relation konstruiert werden, die voraussetzt, dass zwei Prädikate F und G wohl in der Beziehung (Fx↑Gx), nicht aber in der Beziehung(Fx → Gx) stehen; es ist dies die Relation (Fx↑Gx).
4. Es können Relationen konstruiert werden, die voraussetzen, dass weder (Fx → Gx) noch (Fx↑Gx) gilt; dies ist etwa die Relation (Fx ← Gx).

Ob ein logisches Gesetz gültig ist, auf welches ein derartiger prädikatenlogistischer Ausdruck verweist, kann nur mit dem Verfahren beweisen werden, das ich im ersten Teil , Kapitel 3 dargelegt habe; es muss Bezug genommen werden auf die Bedingungen der Verträglichkeit und Unverträglichkeit logischer Relationen. Die begriffsschriftliche Darstellung der logischen Gesetze erfordert darüber hinaus die *explizite* Quantifikation über Prädikate.

Aus der Tatsache, dass schließlich doch alle logischen Formen begriffsschriftlich darstellbar sind, darf nicht geschlossen werden, dass schließlich auch **FREGE**s Vorgehen – die Konstruktion der Gedankengefüge auf dem Boden einer Dissoziation von Allgemeinheit und logischer Form – eine zutreffende und fachgemäße Erkenntnis der logischen Formen und Gesetze ermöglicht. In Wirklichkeit verbaut **FREGE**s Logikentwurf jede Einsicht in Struktur und Gehalt der logischen Formen.

In welcher Weise logische Formen überhaupt mit den Darstellungsmitteln der *Begriffsschrift* dargestellt werden können, kann in Rahmen des fregeschen Logikentwurf gar nicht beurteilt, ja nicht einmal problematisiert werden; in diesem Entwurf gelten ja schon die Gedankengefüge als logische Formen, und diese Missdeutung wird in den Bereich der Prädikatenlogistik übernommen, und bedingt auch dort ein durchgehendes Unverständnis der tatsächlichen Bedeutung der prädikatenlogistischen Ausdrücke. Auch die in **FREGE**s Konzeption unvermeidliche Verwischung der Unterschiede von logischen Formen und Gesetzen zerstört jeden vernünftigen Begriff der logischen Form. Wenn logische Formen auch mit Hilfe von informationsverschleiernden Gedankengefügen dargestellt werden können, so spielen hierbei ausschließlich das *und* und das *nicht* eine unverzichtbare Rolle; der Gebrauch anderer Gedankengefüge ist eine unnötige Umständlichkeit, welche obendrein zu den logischen Missdeutungen verleitet. Wenn ich die Form (∘•∘∘)(Fx,Gx) begriffsschriftlich darstelle durch „∃x(Fx ⇒ Gx)" so ist das ein fruchtlose Verkomplizierung, denn ich muss ja das sekundäre Zeichen ⇒ durch seine primäre Darstellung ersetzen, um die Bedeutung des Ausdrucks zu verstehen: ∃x ∼ (Fx & Gx).

Wie weit und in welcher Weise in der Prädikatenlogistik logische Formen und Gesetze berücksichtigt, lässt sich nur einsehen, wenn die präzise Kenntnis der Struktur der logischen Formen vorhanden ist; diese Voraussetzung ist in der „modernen Logik" nicht vorhanden. Im Grunde können die Logistiker über einen prädikatenlogistischen Ausdruck nichts weiter sagen, als dass er erfüllbar oder allgemeingültig ist oder nicht.

4.3.9. „Multiforme Quantifikation"

Alle logischen Gesetze, die wir für einstellige Prädikatoren entwickelt haben, gelten ebenso für beliebig-stellige Prädikate und jede logische Relation kann zwischen Prädikaten beliebiger Stelligkeit bestehen. So ist das Gesetz *Wenn ein Gegenstand x ein Mensch ist, dann ist x sterblich* ein Beispiel für eine Implikation, die zwischen einstelligen Prädikaten besteht und die durch den Ausdruck „Px → Qx" dargestellt werden kann. Das Gesetz *Wenn eine Person x Vater einer Person y ist, dann ist x mit y in erstem Grad verwandt* ist eine Implikationsbeziehung zweistelliger Prädikate, in allgemeiner Darstellung: $\mathbf{R}_1(x, y) \rightarrow \mathbf{R}_2(x, y)$. Bei der Darstellung des Verkettungsgesetzes $((p\rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ können die Beliebig-Element-Zeichen für Ereignisklassen/Sachverhalte bestimmter Art auf Prädikate beliebiger Stelligkeit verweisen. Die allgemeine Darstellung des Verkettungsgesetzes ℂℂℂ für dreistellige Prädikate lautet:

$$\{[\mathbf{R}_1(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_2(x,y,z)] \wedge [\mathbf{R}_2(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_3(x,y,z)]\} \rightarrow [\mathbf{R}_1(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_3(x,y,z)]$$ [118]

Wichtig ist dabei, dass bei der Darstellung einer logischen Relation wie der Implikation „$Fx \rightarrow Gx$" oder „$\mathbf{R}_1(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_2(x,y,z)$" usw. immer auf dasselbe Ereignis-Bezugsystem verwiesen wird: wenn das erste Prädikat irgendeinem n-Tupel zukommt, dann kommt auch der zweite Prädikator notwendig ($\mathcal{N}$) eben diesem n-Tupel zu[119]. Wir können festhalten, dass die Struktur der logischen Formen und die Gültigkeit logischer Gesetze von der Stelligkeit der involvierten Prädikate ganz unberührt bleiben. Mehrstellige Prädikate kommen nicht einzelnen Gegenständen, sondern n-Tupeln von Gegenständen zu[120].

4.3.9.1. Die „Fixierung" mehrstelliger Prädikate

Der zweistellige Prädikator „x *ist bezüglich der Körpergröße kleiner als* y" ist für *Paare* von Lebewesen definiert, er kommt demnach einem Paar von Lebewesen zu oder nicht zu; wenn nun ein Relatum dieser Relation durch einen bestimmten Gegenstand definitiv „fixiert" oder „gebunden" ist – z.B. „x *ist kleiner als Charly Chaplin*", dann haben wir einen *ein*stelligen Prädikator: der Prädikator *x ist kleiner als Charly Chaplin* kommt dem einen Lebewesen zu, dem anderen nicht; der Prädikator kann, so fixiert, nicht mehr Paaren von Gegenständen zugesprochen werden. Zweistellig ist der Prädikator „x ist mit y verheiratet"; hingegen einstellig ist der Prädikat „x ist mit Mary Smith verheiratet" oder „x ist mit einer Pariserin verheiratet" oder auch nur „x ist verheiratet". Durch derartige „Fixierungen" werden aus mehrstelligen Prädikaten Prädikate geringerer Stelligkeit.

4.3.9.2. „Quantorfixierung"

Eine Fixierung einer zweistelligen Relation **R** ist auch dann gegeben, wenn feststeht, dass jemand zu keinem, zu allen, zu (genau, mindestens, höchstens) einem oder zu (genau, mindestens, höchstens) *n* Elementen einer bestimmten Gesamtheit **B** in der zweistelligen Relation **R** steht. Dies ist beispielsweise der Fall bei den Prädikatoren „x ist der Kleinste seiner/ihrer Schulklasse", „ist der Klassenbeste" usw. „ist der viertschnellste Läufer im Verein"; im Gegensatz zu den zweistelligen Relationen „ x ist leistungsmäßig besser als y", „x ist bezüglich der Körpergröße kleiner als y" usw. sind diese quantitativ spezifizierten Prädikatoren einstellig. Diese Fixierungen mehrstelliger Prädikatoren können mit Hilfe der beiden Quantoren ∀ und ∃ ausgedrückt werden.

Viele einstellige Prädikate involvieren eine Beziehung des Prädikanden zu Gegenständen, und wird ein solches Prädikat prädiziert, so ist immer vorausgesetzt (*Präsuppositionen* als konstitutive Voraussetzungen sinnvoller Äußerungen), dass es (zumindest) einen derartigen Gegenstand gibt, von dem die Beziehung zum Prädikanden behauptet wird. Das Prädikat *Halbwaise* besagt, dass derjenige, dem dieses Prädikat zukommt, *genau einen und nur einen* lebenden Elternteil hat; das Prädikat *Waise* besagt, dass der Prädikand *keinen* lebenden Elternteil hat. Dass Hans Vollwaise ist, kann mithilfe einer Quantorfixierung der Relation *y ist lebender Elternteil von x* ausgedrückt (paraphrasiert) werden: *Es gibt kein y, so dass gilt, y ist ein lebender Elternteil von Hans*. Das Prädikat *kinderreich* besagt, dass die Familie, der dieses Prädikat zukommt, *zumindest drei* Kinder hat. Das Prädikat *einstimmig* besagt, dass der Beschluss, dem dieses Prädikat zukommt, von *keinem* der Beschließenden abgelehnt (von *allen* Beschließenden beschlossen) worden ist.

Es gibt viele Prädikate, die besagen, dass es keine Gegenstände oder dass es einige Gegenstände (zumindest einen Gegenstand) gibt, die zum Prädikanden in einer ganz bestimmten Relation stehen; diese Prädikate lassen sich mit Hilfe des Quantors ∃ zum Ausdruck bringen:

Verheiratet(x) ≡ (∃y) (y ist Ehegatte von x) – es gibt ein Individuum, das Ehegatte von x ist;
Kinderlos(x) ≡ (~∃y)(y ist das Kind von x) – es gibt keinen Gegenstand y, der Kind von x ist;
Hausbesitzer(x) ≡ (∃y)(y ist ein Haus und y gehört x)
Großelter(x) ≡ (∃y) (y ist Kind eines Kindes von x)

generell: ~(∃y) (R(y,x) oder (∃y) (R(y,x)

Es kann auch sein, dass irgendein Gegenstand x zu allen Gegenständen einer vorgegebenen, stets näher zu spezifizierenden Gesamtheit **B** in einer Beziehung R steht, was sich mit Hilfe des Allquantors ausdrücken lässt:

x sorgt für alle seine Kinder ≡ (∀y∈{y | y ist ein Kind von x})(x sorgt für y)
x behandelt alle seine Kunden freundlich ≡ (∀y∈{y | y ist ein Kunde von x})(x behandelt y freundlich)
x kennt alle Psalmen auswendig ≡ (∀y∈{y | y ist ein Psalm})(x kennt y auswendig)
Allgemein: (∀y∈$\mathbf{B}_x$) (xRy)

Ich nenne solche Prädikatoren *quantorfixierte Prädikatoren*; zwischen ihnen bestehen stets ganz bestimmte logische Beziehungen: Die Sachverhalte „x sorgt für alle seine Kinder" und „x genügt den Normen, die die Familienbeziehungen regeln" sind jeweils realmöglich; zwischen diesen Prädikatoren besteht die logische Beziehung der Implikation: „Wenn jemand den Normen, die die Familienbeziehungen regeln genügt, dann sorgt er für alle seine Kinder". Auch das Gesetz „Wenn jemand für alle seine Kinder sorgt, dann ist er nicht kinderlos" – (∀y∈{y | y ist ein Kind von x})(x sorgt für y) → (∃z)(z ist ein Kind von x) – ist ein solches Implikationsgesetz.

4.3.9.3. Besonderheiten der „multiformen Quantifizierung"

Im Zusammenhang mit mehrstelligen Prädikaten, die quantorfixiert sind, reden Logistiker von einer „Kombination der Quantoren", von der „nicht-uniformen, multiformen Quantifizierung", von der „Quantifikation im weiteren Sinne", von „Quantoren innerhalb von Quantoren" (**QUINE**), von „verzweigten Quantoren" (**QUINE**), von der „erweiterten Methode der Quantifikation" (**KLEINKNECHT**/**WÜST**), von einer „multiplen Quantifikation" **E.TUGENDHAT**/**U.WOLF**). Das sind durchweg unspezifische, auf den Ausdruck zentrierte Kennzeichnungen, die das Wesentliche ausklammern, nämlich die Verminderung der Stelligkeit von Prädikaten durch Fixierung von Stellen durch Quantoren. *Diese fixierenden Quantoren gehören zur Bedeutung des Prädikats und dienen so nicht dem Ausdruck einer logischen (kategorischen) Gesetzesbeziehung zwischen Prädikatoren*.

Im dem Ausdruck eines beliebigen Prädikators „Px" verweist P auf das Prädikat, x verweist auf die möglichen Prädikanden; die Quantifikation eines solchen Prädikators – etwa ∀x Px – ist eine (kategorische) Gesetzesquantifikation, die auf alle möglichen Prädikanden (die Gegenstände des Bezugsbereichs des Prädikats P[121]) verweist; der Quantor dient hier dem Ausdruck einer *logischen* Relation: einer Relation zwischen dem Begriff, der den Bezugsbereich festlegt und dem Prädikatbegriff. Im Ausdruck der quantorfixierten Prädikatoren ($\mathfrak{Q}$y)R(x, y) oder ($\mathfrak{Q}_1$y)($\mathfrak{Q}_2$z)R(x,y,z) gehören die fixierenden Quantoren ($\mathfrak{Q}_1$y)($\mathfrak{Q}_2$z) zum Prädikat, während alleine das Beliebig-Element-Zeichen x auf die möglichen Prädikanden dieses Prädikats verweist; nur ein zusätzlicher, auf das x bezogener Quantor würde hier eine *logische* Relation zum Ausdruck bringen; die fixierenden Quantoren hingegen drücken keine logische Relation aus. Im Ausdruck „$\mathfrak{Q}_3$x [($\mathfrak{Q}_1$y)($\mathfrak{Q}_2$z)R(x,y,z)]" ist also nur „$\mathfrak{Q}_3$x" ein eine logische Relation ausdrückender Gesetzesquantor; die Quantifikation „$\mathfrak{Q}_3$x [($\mathfrak{Q}_1$y)($\mathfrak{Q}_2$z)R(x,y,z)]" – was im Ausdruck zum Prädikat gehört, ist rot – ist dabei nur ein Spezialfall der Quantifikation $\mathfrak{Q}_3$x Px und logisch auf dieselbe Weise zu behandeln.

In den Ausdrücken ($\mathfrak{Q}$y)R(**x**, y) oder ($\mathfrak{Q}_1$y)($\mathfrak{Q}_2$z)R(**x**,y,z) gehören die Gegenstände der Bezugsbereiche von y und z zu den fixierenden Quantoren; den Gegenständen y und z kann dieses quantorfixierte Prädikat nicht zugeschrieben werden, sie sind mit den sie fixierenden Quantoren Teile des Prädikats. Im Allgemeinen sind die Bezugsbereiche des Gesetzesquantors und diejenigen der fixierenden Quantoren verschieden und müssen jeweils genau angeführt werden. Beliebige Bezugsbereiche bezeichne ich durch die Zeichen $\mathbf{B}_i$; bei der Darstellung von quantorfixierten Prädikaten ist immer der jeweilige Bezugsbereich anzugeben, etwa auf folgende Weise: ($\mathfrak{Q}_1$y ∈ $\mathbf{B}_1$)($\mathfrak{Q}_2$z ∈ $\mathbf{B}_2$)R(**x**, y, z).

Die Bezugsbereiche des Gesetzesquantors und der fixierenden Quantoren müssen sorgfältig unterschieden werden. Gehen wir von einem einmal quantorfixierten Prädikator ($\mathfrak{Q}$y) R(x, y) aus; der Bezugsbereich der x gehört zum Prädikat, insofern den x das Prädikat zu oder abgesprochen wird; der Bezugsbereich der y gehört zum fixierenden Quantor. Die Bezugsbereiche können in den folgenden verschiedenen Verhältnissen stehen:

1. Die x und y gehören demselben Bezugsbereich an:

Das Lebewesen x hat mit jedem Lebewesen y zumindest ein Gen gemeinsam.
„$(\forall y)\ [(x+y) \in \mathbb{N}]$“: „x ergibt zu jeder Zahl y addiert eine natürliche Zahl“ $\{x,y \in \mathbb{N}\}$

2. Die x und y gehören unterschiedlichen Bezugsbereichen an[122]:

a. Jedes x wird auf denselben Bezugsbereich $\mathbf{B}_1$ bezogen

x kann alle Psalmen auswendig.
x kennt alle Großstädte von allen europäischen Ländern.

b. Jedes x wird auf eine eigene, nur zu ihm gehörende Bezugsmenge der y bezogen; diesen Bezug des Bezugsbereich der y auf das jeweilige x stelle ich durch $\mathbf{B}_x$ dar – $(\mathbb{Q} y \in \mathbf{B}_x)\mathsf{R}(x, y)$

x liebt alle seine Kinder y.
Sie hatte einen Ring an jedem Finger. (**Quine**, Grundzüge, S.171)
Wer auf jedes Pferd setzt, das im Rennen ist, verliert wenig. (**Quine**)[123]

Viele Formulierungen sind mehrdeutig; im Ausdruck „Es gibt ein y, zu welchem jedes x in der Beziehung R steht“ ist nicht klar, ob jedes x sich auf dasselbe oder jeweils auch auf andere y bezieht. So sind **Quine**s Beispiele „Es gibt ein Bild, das alle Kritiker bewundern“ und „Es gibt einen Philosophen, dem alle Philosophen widersprechen“ (Grundzüge, S. 165) zweideutig; es ist nicht deutlich, ob jeder Kritiker auf ein und dasselbe Bild, bzw. jeder Philosoph auf ein und denselben Philosophen bezogen wird. Der Unterschied muss durch eine sorgfältigere und umfassendere Formulierung kenntlich gemacht werden; er kann etwa durch die Stellung und Funktion der Quantoren verdeutlicht werden:

Jedes Element x steht zu mindestens einem Element y in der Relation $\mathbf{R}$ (nicht jedes x zu ein und demselben y): $(\forall x)\ [(\exists y)(y\mathbf{R}x)]$; hier gehört x zum Gesetzesquantor

und

Es gibt ein (ganz bestimmtes) y, zu welchem jedes Element x in der Relation $\mathbf{R}$ steht: $(\exists y)\ [(\forall x)\ (y\mathbf{R}x)]$; hier gehört y zum Gesetzesquantor.

4.3.9.4. Diese Formen bilden eine „Prädikatorfamilie“

Quantorfixierte Prädikate sind keine eigentlichen logischen Formen als Beziehungen von verschiedenen Begriffen (wie $p \rightarrow q$ oder $[p, q, r\ \ \mathbb{X}\mathbb{B}]$), sondern nur spezielle Prädikate; der Ausdruck „$(\forall y)\mathsf{R}(x, y)$“ bezeichnet einen einstelligen Prädikator, der Ausdruck „$(\exists z)(\forall u)(\exists v)\mathsf{R}(x,y,u,v,z)$“ einen speziellen zweistelligen Prädikator. Allerdings gehören alle diese quantorfixierten Prädikatoren umfangreichen Gruppen solcher Prädikatoren an, zwischen denen jeweils wohlbestimmte logische Verhältnisse bestehen. Ist ein beliebiger Prädikator eines bestimmten Typs gegeben, so lassen sich – ohne dass irgendwelchen empirischen Informationen berücksichtigt werden müssten, alle anderen Prädikatoren der betreffenden Gruppe konstruieren; man kann eine solche Gruppe „**Prädikatorfamilie**“ nennen.

Die Prädikatorfamilie, der der einfache einstellige Prädikator P(x) angehört, ist die Menge $\{P(x), \sim P(x)\}$: mit dem Prädikator P(x) ist immer auch der kontradiktorische Prädikator $\sim P(x)$ gegeben; die beiden Mitglieder der Familie stehen in der Beziehung $\mathbb{J}$.

Ist ein zweistelligen Prädikator $\mathbf{R}(x, y)$ gegeben, lässt sich der kontradiktorische Prädikator $\sim\mathbf{R}(x, y)$ konstruieren – $\mathbf{R}(x, y)$ und $\sim\mathbf{R}(x, y)$ stehen in der Beziehung $\mathbb{J}$. Ausgehend von $\mathbf{R}(x, y)$ kann die konverse Relation $\check{\mathsf{R}}(x, y)$ hergeleitet werden: besteht zwischen x und y die Relation R, dann besteht zwischen y und x die konverse Relation $\check{\mathsf{R}}$. Auch für die konverse Relation gibt es die Kontradiktion $\sim\check{\mathsf{R}}(x, y)$. Wir erhalten so vier Elemente der Prädikatorfamilie. Nehmen wir als Beispiel die arithmetische Relation $a < b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; die kontradiktorische Relation ist $a \geq b$; die konverse Relation ist $a > b$; die Konverse der kontradiktorischen Relation ist schließlich $a \leq b$. Zwischen den vier Elementen der Prädikatorfamilie bestehen die folgenden logischen Verhältnisse:

$(a < b) \ \rtimes\!\!\!\ltimes\ (a \geq b)$
$(a < b) \uparrow (a > b)$
$(a < b) \rightarrow (a \leq b)$
$(a \geq b) \vee (a \leq b)$

$(a \geq b) \leftarrow (a > b)$
$(a > b) \succ\!\prec (a \leq b)$

Für den dreistelligen Prädikator $\mathbf{R}(x,y,z)$ gibt es die Kontradiktion $\sim\mathbf{R}(x,y,z)$, und die 3! Konversen $\check{R}_1(x,y,z)$, $\check{R}_2(x,z,y)$, $\check{R}_3(y,x,z)$, $\check{R}_4(y,z,x)$, $\check{R}_5(z,x,y)$ und $\check{R}_6(z,y,x)$. Ein weiteres Beispiel für eine Prädikatorfamilie sind die Prädikatorverknüpfungen; ausgehend von zwei beliebigen Prädikatoren Fx und Gx lassen sich alle möglichen Prädikatorverknüpfungen konstruieren und die zwischen ihnen bestehenden logischen Beziehungen ermitteln.

Die zu einem quantorfixierten Prädikator gehörende Familie ist besonders umfangreich. Von einem einfachen Prädikator Px ist nur der kontradiktorische Gegensatz $\sim$Px mitgegeben, von einem einmal quantorfixierten Prädikator $(\mathfrak{Q}y)\,R(x, y)$ gibt es drei verschieden *andere* einmal-quantorfixierte Prädikatoren: $\sim(\mathfrak{Q}y)\,R(x, y)$, $(\mathfrak{Q}y) \sim R(x, y)$ und $\sim(\mathfrak{Q}y) \sim R(x, y)$; jedem $\forall$-Ausdruck ist jeweils ein $\exists$-Ausdruck bedeutungsgleich:

x steht mit allen y in der Relation **R** ≡ es gibt kein y, mit dem x nicht in der Relation **R** steht. $(\forall y)\, \mathbf{R}(x,y)] \equiv (\sim\exists y) \sim \mathbf{R}(x,y)$

x steht nicht mit allen y in der Relation **R** ≡ es gibt ein y, zu dem x nicht in der Reaktion **R** steht $\sim(\forall y)\, \mathbf{R}(x,y)] \equiv (\exists y) \sim \mathbf{R}(x,y)$

nicht mit allen y steht x nicht in der Relation **R** ≡ x steht mit zumindest einem y in der Relation **R** $(\sim\forall y) \sim \mathbf{R}(x,y) \equiv (\exists y)\, \mathbf{R}(x,y)]$

zu allen y steht x nicht in der Relation **R** ≡ es gibt kein y, zu welchem x in der Relation **R** steht $(\forall y) \sim \mathbf{R}(x,y) \equiv \sim(\exists y)\, \mathbf{R}(x,y)]$

Die logischen Beziehungen zwischen diesen Prädikatoren lassen sich leicht ermitteln, ohne dass auf irgendwelche empirischen Sachverhalte Bezug genommen werden müsste:

	$(\forall y)\, \mathbf{R}(x,y) \equiv \sim(\exists y) \sim \mathbf{R}(x, y)$	$(\forall y) \sim \mathbf{R}(x,y) \equiv \sim(\exists y)\, \mathbf{R}(x, y)$	$(\exists y)\, \mathbf{R}(x, y) \equiv \sim(\forall y) \sim \mathbf{R}(x, y)$	$(\exists y) \sim \mathbf{R}(x, y) \equiv \sim(\forall y)\, \mathbf{R}(x, y)$
$(\forall y)\, \mathbf{R}(x, y) \equiv \sim(\exists y) \sim \mathbf{R}(x, y)$	𝔼	𝔻	ℂ	𝕁
$(\forall y) \sim \mathbf{R}(x, y) \equiv \sim(\exists y)\, \mathbf{R}(x, y)$	𝔻	𝔼	𝕁	ℂ
$(\exists y)\, \mathbf{R}(x, y) \equiv \sim(\forall y) \sim \mathbf{R}(x, y)$	𝔹	𝕁	𝔼	𝔸
$(\exists y) \sim \mathbf{R}(x, y) \equiv \sim(\forall y)\, \mathbf{R}(x, y)$	𝕁	𝔹	𝔸	𝔼

Jede dieser Prädikatoren kann jeder der möglichen *Gesetzes*quantifikationen unterzogen werden; es ergeben sich dann logische Formen der Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}_1 x\, [(\mathfrak{Q}_2 y)\, \mathbf{R}(x, y)$; für jede dieser Formen gibt es drei bedeutungsgleiche Formen:

$(\forall \mathbf{x})\, [(\forall y)\, R(x, y)] \equiv$ $(\forall x)\, [\sim(\exists y) \sim R(x, y)] \equiv$ $\sim(\exists x) \sim[(\forall y)\, R(x, y)] \equiv$ $\sim(\exists x)\, [(\exists y) \sim R(x, y)]$	$(\forall \mathbf{x})\, [(\forall y) \sim \mathbf{R}(x, y)] \equiv$ $(\forall x) \sim(\exists y)\, R(x, y) \equiv$ $\sim(\exists x) \sim[(\forall y) \sim R(x, y)] \equiv$ $\sim(\exists x)\, [(\exists y)\, R(x, y)]$	$(\forall \mathbf{x})\, [(\exists y)\, \mathbf{R}(x, y)] \equiv$ $(\forall x) \sim(\forall y) \sim R(x, y) \equiv$ $\sim(\exists x) \sim[(\exists y)\, \mathbf{R}(x, y)] \equiv$ $\sim(\exists x)\, [(\forall y) \sim \mathbf{R}(x, y)]$	$(\forall \mathbf{x})\, [(\exists y) \sim \mathbf{R}(x, y) \equiv$ $(\forall x)\, [\sim(\forall y)\, R(x, y)] \equiv$ $\sim(\exists x) \sim[(\exists y) \sim \mathbf{R}(x, y) \equiv$ $\sim(\exists x)\, [(\forall y)\, R(x, y)]$

usw.

Auch die logischen Beziehungen dieser Formen „$(\mathfrak{Q}_1 x)\, [\mathfrak{Q}_2 y)\, \mathbf{R}(x, y)]$“ lassen sich eindeutig ermitteln[124].

Die Prädikatorfamilie für **zweimal quantorfixierte dreistellige Relationen** soll am Beispiel des Prädikators „*x zeigt allen seinen Freunden alle seine Bilder*“ dargelegt werden; die Bezugsbereiche der fixierenden Quantoren variieren mit dem jeweiligen x.

quantorfixierte dreistellige Relation $(Q_1y)(Q_2z)R(x,y,z)$	**Beispiel**	**Äquivalenzen**
(1) Der Fall: **alle – alle** $(\forall y)(\forall z)\, R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)\sim(\forall z)\, R(x,y,z)$ $(\forall y)(\sim(\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)(\exists z) \sim R(x,y,z)$	Hans zeigt allen seinen Freunden alle seine Bilder $\equiv$ Allen seinen Freude zeigt Hans nicht eines seiner Bilder nicht $\equiv$ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle seine Bilder $\equiv$ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans eines der Bilder nicht	allen – alle $\equiv$ allen – nicht eines nicht $\equiv$ nicht einem – nicht alle $\equiv$ nicht einem – eines nicht
(2) Der Fall: **alle – nicht alle** $(\forall y) \sim(\forall z)\, R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)(\forall z)\, R(x,y,z)$ $(\forall y)\, (\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z)$	Hans zeigt allen seinen Freunde nicht alle seine Bilder[125] $\equiv$ Allen seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines der Bilder nicht $\equiv$ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder $\equiv$ Nicht einem von seinen Freunden zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht	alle – nicht alle $\equiv$ alle – eines nicht $\equiv$ nicht einem – alle $\equiv$ nicht einem – nicht eines nicht
(3) Der Fall: **alle – eines** $(\forall y)(\exists z)\, R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y) \sim(\exists z)\, R(x,y,z)$ $(\forall y) \sim(\forall z) \sim R(x,y,z)\ \ \sim(\exists y)\, (\forall z) \sim R(x,y,z)$	Hans zeigt allen seinen Freunde zumindest eines seiner Bilder $\equiv$ Hans zeigt allen seinen Freunden nicht alle seine Bilder nicht $\equiv$ Nicht einem seiner Freunden zeigt Hans nicht eines seiner Bilder $\equiv$ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder nicht	alle – eines $\equiv$ alle – nicht alle nicht $\equiv$ nicht einem – nicht eines $\equiv$ nicht einem – alle nicht
(4) Der Fall: **alle – nicht eines** $(\forall y) \sim(\exists z)\, R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)\, (\exists z)\, R(x,y,z)$ $(\forall y) \sim(\forall z)\, R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)\, (\forall z)\, R(x,y,z)$	Hans zeigt allen seinen Freunde nicht eines seiner Bilder $\equiv$ Hans zeigt allen seinen Freunden alle seine Bilder nicht $\equiv$ Nicht einem seiner Freunden zeigt Hans eines seiner Bilder $\equiv$ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle seine Bilder nicht	alle – nicht eines $\equiv$ alle – alle nicht $\equiv$ nicht einem – eines $\equiv$ nicht einem – nicht alle nicht
(5) Der Fall: **nicht alle – alle** $\sim(\forall y)\, (\forall z)\, R(x,y,z) \equiv (\exists y) \sim(\forall z) R(x,y,z)$ $\sim(\forall y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv (\exists y)\, (\exists z) \sim R(x,y,z)$	Hans zeigt nicht allen seinen Freunden alle Bilder $\equiv$ Hans zeigt nicht allen seinen Freunden nicht eines seiner Bilder nicht $\equiv$ Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle Bilder $\equiv$ Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines seiner Bilder nicht	nicht alle – alle $\equiv$ nicht alle – nicht eines nicht $\equiv$ einem – nicht alle $\equiv$ einem – eines nicht
(6) Der Fall: **nicht alle – nicht alle**	Hans zeigt nicht allen seinen Freunden nicht alle seine Bilder $\equiv$	nicht allen – nicht alle $\equiv$ nicht allen – eines nicht $\equiv$

$\mathbf{\sim(\forall y)}\sim(\forall z)\ R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)\ (\exists z)\ \sim R(x,y,z)$ ≣	Hans zeigt nicht allen seinen Freunden zumindest eines seiner Bilder nicht ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde alle seine Bilder ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde nicht eines der Bilder nicht	einem – alle ≣ einem – nicht eines nicht
(7) Der Fall: **nicht alle – eines** $\mathbf{\sim(\forall y)}\ (\exists z)\ R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)\ \sim(\forall z)\ \sim R(x,y,z)$ ≣	Hans zeigt nicht allen seinen Freunden zumindest eines der Bilder ≣ Hans zeigt nicht allen seinen Freunden nicht alle Bilder nicht ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde nicht eines der Bilder ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde alle seiner Bilder nicht	nicht allen – eines ≣ nicht allen – nicht alle nicht ≣ einem – nicht eines ≣ einem – alle nicht
(8) Der Fall: **nicht alle – nicht eines** $\mathbf{\sim(\forall y)}\ \sim(\exists z) R(x,y,z)$ ≣ $(\exists y)\ (\exists z)\ R(x,y,z)$ $\sim(\forall y)\ (\forall z)\ \sim R(x,y,z)$ ≣ $(\exists y)\ \sim(\forall z)\ \sim R(x,y,z)$	Hans zeigt nicht allen seiner Freunde nicht eines der Bilder ≣ Hans zeigt nicht allen seiner Freunde alle Bilder nicht ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde zumindest ein Bilder ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde nicht alle der Bilder nicht	nicht allen – nicht eines ≣ nicht allen – alle nicht ≣ einem – eines ≣ einem – nicht alle nicht
(9) Der Fall: **eines – alle** $\mathbf{(\exists y)}\ (\forall z)\ R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)\ \sim(\forall z) R(x,y,z)$ $(\exists y)\ \sim(\exists z)\ \sim R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)\ (\exists z) \sim R(x,y,z)$	Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder ≣ Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans nicht alle seiner Bilder ≣ Hans zeigt nicht allen seiner Freunde zumindest eines der Bilder nicht	Einem – alle ≣ einem– nicht eines nicht ≣ nicht allen – nicht alle ≣ nicht allen – eines nicht
(10) Der Fall: **eines – nicht alle** $\mathbf{(\exists y)}\ \sim(\forall z)\ R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)\ \sim(\exists z) \sim R(x,y,z)$ $(\exists z)\ \sim R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)\ (\forall z)\ R(x,y,z)$	Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines der Bilder nicht ≣ Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle der Bilder ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder	einem – nicht alle ≣ Einem – eines nicht ≣ nicht allen–nicht eines nicht ≣ nicht allen – alle
(11) Der Fall: **eines – eines** $\mathbf{(\exists y)}\ (\exists z)\ R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)\ \sim(\exists z)R(x,y,z)$	Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines der Bilder ≣ Zumindest einem seiner Freunde	Einem – eines ≣ einem – nicht alle nicht ≣

$(\exists y)\ \sim(\forall z)\ \sim R(x,y,z) \equiv \sim(\forall)\ (\forall z) \sim R(x,y,z)$	zeigt Hans nicht alle der Bilder nicht ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder nicht	nicht allen – nicht eines ≣ nicht allen – alle nicht
(12) Der Fall: **eines – nicht eines** $(\exists y) \sim(\exists z)\ R(x,y,z) \equiv \sim(\forall y) \sim(\forall z) \sim R(x,y,z)$ $(\exists y)\ (\forall z) \sim R(x,y,z) \equiv \sim(\forall y)(\exists z) R(x,y,z)$	Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder nicht ≣ Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder ≣ Nicht allen seinen Freunden zeigt Hans nicht alle Bilder nicht ≣ Nicht allen seinen Freunden zeigt zumindest eines der Bilder	einem – nicht eines ≣ Einem – alle nicht ≣ nicht allen–nicht alle nicht ≣ nicht allen – eines
(13) Der Fall: **nicht einem – alle** $\sim(\exists y)(\forall z)\ R(x,y,z) \equiv (\forall y) \sim(\forall z)\ R(x,y,z)$ $\sim(\exists y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv (\forall y)\ (\exists z) \sim R(x,y,z)$	Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder ≣ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht alle Bilder ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans zumindest ein Bild nicht	Nicht einem – alle ≣ nicht einem – nicht eines nicht ≣ allen – nicht alle ≣ allen – eines nicht
(14) Fall: **nicht einem – nicht alle** $\sim(\exists y) \sim(\forall z)\ R(x,y,z) \equiv (\forall y)\ (\forall z)\ R(x,y,z)$ $\sim(\exists y)\ (\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv (\forall y) \sim(\exists z) R(x,y,z)$	Nicht einem (= nicht einem) seiner Freunde zeigt Hans eines Bilder nicht ≣ Nicht einem (= nicht einem) seiner Freunde zeigt Hans nicht alle Bilder ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans al-le Bilder ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht	nicht einem – nicht alle ≣ Nicht einem – eines nicht ≣ allen – alle ≣ allen – nicht eines nicht
(15) **nicht einem – eines** $\sim(\exists y)(\exists z)\ R(x,y,z) \equiv (\forall y) \sim(\exists z) R(x,y,z)$ $\sim(\exists y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv (\forall y)\ (\forall z) \sim R(x,y,z)$	Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans eines Bilder ≣ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle Bilder nicht ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht eines der Bilder ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans al-le Bilder nicht	Nicht einem – eines ≣ nicht einem – nicht alle nicht ≣ allen – nicht eines ≣ allen – alle nicht
(16) **nicht einem– nicht eines** $\sim(\exists y) \sim(\exists z)\ R(x,y,z) \equiv (\forall y)\ (\exists z) R(x,y,z)$	Nicht einem (= nicht einem) seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder nicht ≣ Nicht einem (= nicht einem) seiner	nicht einem – nicht eines ≣ Nicht einem – alle nicht ≣

~(∃y) (∀z) ~R(x,y,z)	≣ (∀y) ~(∀z) ~R(x,y,z)	Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans zumindest eines der Bilder ≣ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht alle Bilder nicht	allen – eines ≣ allen – nicht alle nicht

Weil jeder ∀-Ausdruck genau einem ∃-Ausdruck Äquivalenz ist, sind von den in der Tafel erfassten 16 Fällen immer jeweils zwei äquivalent:

(1) und (14) (2) und (13) (3) und (16) (4) und (15)
(5) und (10) (6) und (9) (7) und (12) (8) und (11)

Ein dreistelliger Prädikator R(x,y,z) kann also auf 8 paarweise bedeutungsverschiedene Weisen zweimal quantorfixiert werden, d.h. in die Ausdrucksgestalt ($\mathbb{Q}_1$y)($\mathbb{Q}_2$z) **R**(x,y,z) gebracht werden. Für jedes dieser fixierten dreistelligen Prädikate gibt es drei bedeutungsgleiche Paraphrasen. Die zwischen diesen 8 Formen bestehenden logischen Beziehungen sind einfach zu bestimmen; sie sind in der folgenden Relationenmatrix dargestellt. Die Form (∀y)(∀z)R(x,y,z) stelle ich abkürzend durch den Ausdruck „∀–∀", die Form (∀y)(∃z)R(x,y,z) durch den Ausdruck „∀ – ∃", und die Form (∃y)(∀z)~R(x,y,z) durch den Ausdruck „∃ – ∀~", usw. dar.

Die Gesetze werden bewiesen, indem jeder der vier möglichen Vorkommenskombinationen auf ihre Realmöglichkeit hin überprüft werden. Um etwa die logische Beziehung zwischen den Prädikatoren ∀ –∀ [= (∀y) (∀z) R(x,y,z)] und ∃ –∀~ [= (∃y)(∀z) ~R(x,y,z)] zu ermitteln (Gesetz Nr. 6) ist zunächst zu prüfen, ob beide Prädikatoren zugleich gelten können : dies ist nicht der Fall, denn bei *alle – alle* kann nicht gelten *eines – keines* (Vorkommenskombination I ist also nichtrealmöglich). Der Prädikator ∀–∀ kann gelten, ohne dass auch ∃ – ∀~ gilt, was unmittelbar aus der Bedeutung dieser Prädikatoren hervorgeht (Vorkommenskombination II ist realmöglich). Es ist möglich, dass ∃ –∀~ gilt, ohne dass ∀ –∀ gilt; dies ist etwa der Fall, wenn ∀–∀~ gilt (Vorkommenskombination II ist realmöglich). Es ist schließlich möglich, dass beide Prädikatoren nicht gelten: dies ist der Fall, wenn gilt ∀ –∃∃ (x steht zu allen y und zu einigen, aber nicht allen z in der Beziehung R), d.h. Vorkommenskombination IV ist realmöglich. Es gilt also das Gesetz [(∀y) (∀z) R(x,y,z)] ↑ [(∃y)(∀z) ~R(x,y,z)].

In untenstehender Tabelle steht über den Beziehungen der logischen Relationen Nummer, des jeweiligen logischen Gesetzes; die Ziffer in Klammern bezeichnet die Nummer jenes logischen Gesetzes, das die bedeutungsgleiche Konverse des Gesetzes darstellt.

Tabelle 2: Die logischen Beziehungen zwischen den zweifach quantorfixierten Prädikatoren der Form ($\mathbb{Q}_1$y) ($\mathbb{Q}_2$z) R(x,y,z)

	∀–∀ ≡ ∀–~∃~ ≡ ~∃–~∀ ≡ ~∃–∃~	∀–~∀ ≡ ∀–∃~ ≡ ~∃–∀ ≡ ~∃–~∃~	∀–∃ ≡ ∀–~∀~ ≡ ~∃–~∃ ≡ ~∃–∀~	∀–~∃ ≡ ∀– ∀~ ≡ ~∃–∃ ≡ ~∃–~∀~	∃–∀ ≡ ∃–~∃~ ≡ ~∀–~∀ ≡ ~∀–∃~	∃–∀~ ≡ ∃–~∃ ≡ ~∀–~∀~≡ ~∀–∃	∃–∃ ≡ ∃–~∀~ ≡ ~∀–~∃ ≡ ~∀–∀~	∃–∃~ ≡ ∃–~∀ ≡ ~∀–~∃~≡ ~∀–∀
∀–∀ ≡ ∀–~∃~ ≡ ~∃–~∀ ≡ ~∃–∃~	1 E	2 (9) D[126]	3 (17) C[127]	4 (25) D[128]	5 (33) C	6 (41) D[129]	7 (49) C	8 (57) J[130]
∀–~∀ ≡ ∀–∃~ ≡ ~∃–∀ ≡ ~∃–~∃~	9 (2) D	10 E	11 (18) V[131]	12 (26) B[132]	13 (34) J[133]	14 (42) V[134]	15 (50) A[135]	16 (58) C[136]
∀–∃ ≡ ∀–~∀~ ≡ ~∃–~∃ ≡ ~∃–∀~	17 (3) B	18 (11) V	19 E	20 (27) D[137]	21 (35) V[138]	22 (43) J[139]	23 (51) C[140]	24 (59) A[141]
∀–~∃ ≡ ∀–∀~ ≡ ~∃–∃ ≡ ~∃–~∀~	25 (4) D	26 (12) C	27 (20) D	28 E	29 (36) D	30 (44) C[142]	31 (52) J[143]	32 (60) C[144]
∃–∀ ≡ ∃–~∃~ ≡ ~∀–~∀ ≡ ~∀–∃~	33 (5) B	34 (13) J	35 (21) V	36 (29) D	37 E	38 (45) V[145]	39 (53) C[146]	40 (61) A[147]
∃–∀~ ≡ ∃–~∃ ≡ ~∀-~∀~ ≡ ~∀–∃	41 (6) D	42 (14) V	43 (22) J	44 (30) B	45 (38) V	46 E	47 (54) A[148]	48 (62) C[149]
∃–∃ ≡ ∃–~∀~ ≡ ~∀–~∃ ≡ ~∀–∀~	49 (7) B	50 (15) A	51 (23) B	52 (31) J	53 (39) B	54 (47) A	55 E	56 (63) A[150]
∃–∃~ ≡ ∃–~∀ ≡ ~∀– ~∃~≡ ~∀–∀	57 (8) J	58 (16) B	59 (24) A	60 (32) B	61 (40) A	62 (48) B	63 (56) A	64 E

Das Gesetz Nr. 59 lautet in Bezug auf unser Beispiel: Entweder zeigt jemand einem seiner Freunde eines der von ihm gemalten Bilder nicht, oder er zeigt allen seinen Freunden zumindest eines der Bilder oder er tut beides.

Das Gesetz Nr. 60 lautet für unser Beispiel: Nur wenn jemand einem seiner Freunde eines seiner Bilder nicht zeigt, zeigt er allen seinen Freunden nicht eines seiner Bilder. Eine andere Formulierung: Jemand kann allen seinen Freunden nur dann nicht eines seiner Bilder zeigen, wenn er zumindest einem seiner Freunde nicht alle seiner Bilder zeigt.

Wird eine solche Form als ganze negiert, kann diese Negation bei Vertauschung von *alle* und *eines* schrittweise an das Ende des Ausdrucks gebracht werden. Nehmen wir als Beispiel die Negation des Prädikators „x bekennt allen Mitgliedern seiner Gemeinde alle seine Sünden“:

nicht(x bekennt allen Mitgliedern seiner Gemeinde alle Sünden) ≡
(x bekennt nicht allen Mitgliedern seiner Gemeinde alle Sünden) ≡
(x bekennt zumindest einem Mitglied seiner Gemeinde nicht alle Sünden) ≡
(x tut zumindest einem Mitglied seiner Gemeinde zumindest eine Sünde nicht bekennen).

Allgemein:

$\sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}(x,y,z)] \equiv$
$[\sim(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}(x,y,z)] \equiv$
$[(\exists y)\ \sim(\forall z)\ \mathbf{R}(x,y,z)] \equiv$
$[(\exists y)\ (\exists z)\ \sim\mathbf{R}(x,y,z)]$[151]

Wie aus der obigen Tabelle hervorgeht, besteht zwischen den möglichen zweifachen Quantorfixierungen derselben dreistelligen Relation eine der Beziehungen 𝔼, 𝕍, 𝔸, 𝔻, 𝕁 und die Totalform 𝔹 bzw. ℂ. Unter welchen Bedingungen stehen zwei derartige Formen in einer dieser Beziehungen?

Kontradiktion 𝕁: Jede Form steht zu ihrer Negation in der Beziehung des kontradiktorischen Gegensatzes (𝕁): Die Negation etwa von ∀-∀ wird in der angegebenen schrittweisen Weise durchgeführt: $\sim(\forall - \forall) \equiv \exists - \sim\forall = \exists - \exists\sim$ oder $\sim(\exists - \exists) \equiv \forall - \sim\exists \equiv \forall - \forall\sim$, usw.

Unverträglichkeit (Kontrarietät) 𝔻:

es gibt drei *elementare* Quantorverhältnisse:

alle (∀)
einige, aber nicht alle (≡ einige nicht, aber nicht keines) (∃∃)
keines (≡ alle nicht)[152] (∀∼)

Das zweite dieser Verhältnisse erhält in der Prädikatenlogistik keinen direkten und elementaren Ausdruck (durch einen einzigen Quantor). Jeder dieser drei elementaren Quantoren bildet zu jedem der beiden anderen jeweils einen konträren Gegensatz (𝔻); jeder elementare Quantor steht zu jenem nichtelementaren Quantor, der seine beiden konträren Gegensätze zusammenfasst, im kontradiktorischen Gegensatz (𝕁):

Alle ist konträr erstens zu *einige und nicht alle* und zweitens zu *keines*: ***alle*** ist kontradiktorisch zu *eines nicht* (entweder *einige und nicht alle* oder *keines*)

Alle nicht ist konträr erstens zu *einige und nicht alle* und zweitens zu *alle;* ***alle nicht*** ist kontradiktorisch zu *eines* (entweder *alle* oder *einige und nicht alle*)

Einige, aber nicht alle ist konträr erstens zu *alle* und zweitens zu *keines*, und kontradiktorisch zu *alle oder keines*.

Die nichtelementaren Quantoren *Einige* (∃ = ∼∀∼), dann *einige nicht* (∃∼ = ∼∀) und *alle oder keines* (∼∃∃) umfassen jeweils zwei Möglichkeiten: *einige* sind entweder *alle* oder *einige und nicht alle*; *einige nicht* sind entweder *keine* oder *einige und nicht alle*; *nicht einige, aber nicht alle* sind entweder *alle* oder *keines*. Für nichtelementare Quantoren gibt es keine konträren Gegensätze, sondern nur einen kontradiktorischen Gegensatz (der ein elementarer Quantor ist):

Einige hat den kontradiktorischen Gegensatz *keines*.
Einige nicht hat den kontradiktorischen Gegensatz *alle*.

Bei der Kombination von zwei Quantoren ergeben sich so die folgenden Gegensätze:

alle – alle hat drei konträre Gegensätze: *alle–keines*, *alle–eines nicht* und *eines–keines*, sowie den kontradiktorischen Gegensatz *eines – eines nicht*.

alle – alle nicht hat drei konträre Gegensätze: *alle – alle*, *alle – eines* und *eines – alle*, sowie den kontradiktorischen Gegensatz *eines – eines*.

alle – eines hat den einen konträren Gegensatz *alle - nicht eines* und den kontradiktorischen Gegensatz *eines – keines*

alle - eines nicht hat den einen konträren Gegensatz *alle - alle* und den kontradiktorischen Gegensatz *eines – alle*.

eines – alle hat den einen konträren Gegensatz: *alle – keines* und den kontradiktorischen Gegensatz *alle – eines nicht*

eines - alle nicht hat den einen konträren Gegensatz: *alle – alle* und einen kontradiktorischen Gegensatz *alle – eines nicht*.

eines – eines hat keinen konträren Gegensatz, sondern nur den kontradiktorischen Gegensatz *alle – keines*

eines – eines nicht hat ebenfalls nur den kontradiktorischen Gegensatz alle – alle

Wenn beide fixierenden Quantoren Allquantoren sind ($\forall$ oder $\forall\sim$), gibt es drei konträre Gegensätze, ist einer der fixierenden Quantoren ein Allquantor, der andere ein Existenzquantor ($\sim\forall = \exists\sim$) haben wir nur einen konträren Gegensatz; sind beide fixierenden Quantoren Existenzquantoren gibt es gar keinen konträren Gegensatz.

Alternative $\mathbb{A}$:

Wenn zwei Formen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in der Beziehung der Kontrarietät stehen, dann stehen ihre kontradiktorischen Gegensätze $\sim\mathfrak{F}_1$ und $\sim\mathfrak{F}_2$ in der Beziehung der verträglichen Alternative $\mathbb{A}$. Dies ist ein Spezialfall des logischen Gesetzes: $(p \mid q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$. Stehen zwei Formen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in der Beziehung der Kontradiktion, so stehen ihre jeweiligen Kontradiktionen wiederum in der Beziehung der Kontradiktion; dies ergibt sich aus dem logischen Gesetz: $(p \succ\!\prec q) \leftrightarrow (\sim p \succ\!\prec \sim q)$.

Independenz $\mathbb{V}$:

Zwei Formen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind independent, wenn sich für beide, ob unnegiert oder negiert, keine Gegensätze ergeben.

Beispiel: *alle – eines nicht* und *alle – eines*; bei *alle–eines nicht* gilt: entweder *alle–keines* oder *alle – teilweise*; bei *alle – eines nicht* gilt entweder *alle–alle* oder *alle–teilweise*; damit kann beides jeweils mit oder ohne das andere gelten.

Auf jeden Fall sind die Beziehungen zwischen allen möglichen Formen ohne Mühe bestimmbar; man stützt sich dabei auf die elementaren Quantorgesetze und die oben angesprochene schrittweise Negation. Man muss systematisch die Realmöglichkeit aller Vorkommenskombinationen überprüfen, und dabei muss man für jede dieser Formen die Bedingungen der Geltung und der Nichtgeltung berücksichtigen.

4.3.9.5. Die quantorfixierten Prädikate sind in der Logik wie die nicht-quantorfixierten Prädikate zu behandeln

Die quantorfixierten Prädikate, sieht man ab von ihren vielfachen Beziehungen (mehrere bedeutungsgleiche Papaphrasen, Äquivalenzen, sonstige logischen Verhältnisse), sind wie nicht-quantorfixierte Prädikate zu behandeln und stehen wie diese in einer ganz bestimmten logischen Totalform und allen von dieser Totalform involvierten logischen Relationen. In den Ausdrücken logischer Gesetze können statt der Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen oder für Prädikatoren auch Beliebig-Element-Zeichen für quantorfixierte Prädikate eingesetzt werden[153]. Der Ausdruck „$Fx \rightarrow Gx$" bezeichnet die Implikation zweier einstelliger Prädikate, der Ausdruck $\sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \rightarrow \sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}_2(x,y,z)]$ bezeichnet die Implikationsbeziehung zweier zweimal quantorfixierten ebenfalls einstelliger Prädikate; die Relata können durch einen bedeutungsgleichen Ausdruck ersetzt werden: „$[(\exists y) \sim(\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \rightarrow [(\exists y)\ (\exists z) \sim\mathbf{R}_2(x,y,z)]$ drückt dieselbe Implikation aus. Das logische Gesetz $(Fx \rightarrow Gx) \uparrow (Fx \uparrow Gx)$ kann auch für beliebige quantorfixierte Prädikate formuliert werden, etwa: $\{[(\exists y) \sim(\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \rightarrow [(\exists y)\ (\exists z) \sim\mathbf{R}_2(x,y,z)]\} \uparrow \{\sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \uparrow \sim[(\forall y)\ (\forall z)$

$\mathbf{R}_2(x,y,z)]\}$. Jede logische Form, jedes logische Gesetz kann mit Hilfe quantorfixierter Prädikate formuliert werden; es resultieren unbegrenzt viele sinnvolle und entscheidbare Formeln.

Quantorfixierte Prädikatoren können ohne weiteres unter alle geeigneten logischen Gesetze subsumiert werden. So können wir etwa zeigen, dass die einmal quantorfixierten zweistelligen Relationen $(\forall y)\mathbf{R}(x, y)$ und $(\exists y)\ \mathbf{R}(x,y)$ in der Beziehung der Implikation, die Prädikatoren $(\exists y\in)\ \mathbf{R}(x, y)$ und $(\forall y) \sim\mathbf{R}(x, y)$ zueinander kontradiktorisch sind. Diese Sachverhalte lassen sich unter das logische Verkettungsgesetz $\mathbb{C}\mathbb{J}\mathbb{D}$ subsumieren, und wir können den folgenden Schluss ziehen:

Weil gilt

$(\forall y)\mathbf{R}(x, y) \rightarrow (\exists y)\ \mathbf{R}(x, y)]$ – Subsumtionsprämisse 1

und weil gilt

$(\exists y\in)\ \mathbf{R}(x, y) \succ\!\prec (\forall y) \sim\mathbf{R}(x, y)$, – Subsumtionsprämisse 2

gilt aufgrund des Verkettungsgesetzes

$[(p \rightarrow q)\ \&\ (q \succ\!\prec r)] \rightarrow (p \uparrow r)$ – Gesetzesprämisse

die Konklusion

$(\forall y)\ \mathbf{R}(x, y)\ \uparrow\ (\forall y) \sim\mathbf{R}(x, y)]$[154]

4.3.10. Gesetze der „Quantorenverteilung" und „Quantorenverschiebung"

Es gibt noch zwei spezielle Arten allgemeingültiger prädikatenlogistischer Ausdrücke: sie tragen die Namen „Gesetze der Quantorenverteilung" und „Gesetze der Quantorenverschiebung".

4.3.10.1. Gesetze der Quantorenverteilung

Die so genannten Gesetze der **„Quantorenverteilung"** haben im Gegensatz zu den Ausdrücken des SFG einen genuin logischen Gehalt; sie drücken – begriffsschriftlich abgeschwächt – einen logischen Zusammenhang aus (es sind spezielle Fregerelationsgesetze); es geht darum,

was bei $\mathfrak{Q}_1(Fx \oplus Gx)$ für $\mathfrak{Q}_2(Fx)$ und $\mathfrak{Q}_3(Gx)$ folgt,
was bei $\mathfrak{Q}_1(Fx \oplus Gx)$ und $\mathfrak{Q}_2(Fx)$ für $\mathfrak{Q}_3(Gx)$
was bei $\mathfrak{Q}_1(Fx \oplus Gx)$ und $\mathfrak{Q}_3(Gx)$ für $\mathfrak{Q}_2(Fx)$ folgt.

Da wir den drei involvierten Aussageformen die ihnen eineindeutig entsprechenden Fregerelationen zuordnen können, ist es mit den im ersten Teil entwickelten Verfahren leicht, die logischen Beziehungen dieser drei logischen Formen zu bestimmen.

Beispiel 1: Die Aussageformen $\forall x(Fx\ \&\ Gx)$, $\forall x Fx$ und $\forall x Gx$ entsprechen der Reihe nach den Fregerelationen $(1000)(Fx,Gx)$, $(\circ\circ 00)(Fx,Gx)$ und $(\circ 0 \circ 0)(Fx,Gx)$; es gelten die Fregerelationsgesetze

$$\forall x(Fx\ \&\ Gx) \leftrightarrow (\forall x Fx\ \&\ \forall x Gx)$$

$$\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x Fx$$

$$\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x Gx$$

Die begriffsschriftliche Abschwächung dieser Fregerelationsgesetze ergibt die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formeln:

$$(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \Leftrightarrow [(\forall x)Fx\ \&\ (\forall x)Gx]$$
$$(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \Rightarrow (\forall x)Fx$$
$$(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \Rightarrow (\forall x)Gx$$

Diese logischen Gesetzeszusammenhänge können dann geeigneten logischen Gesetzen subsumiert werden, etwa folgt aus $\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x Fx$ und $\forall x Fx \rightarrow \exists x Fx$ nach dem Verkettungsgesetz $\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}$ das Fregerelationsgesetz $\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \exists x Fx$ [damit die Allgemeingültigkeit der Aussageform $\forall x(Fx\ \&\ Gx) \Rightarrow \exists x Fx$]; aus $(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \leftrightarrow [(\forall x)Fx\ \&\ (\forall x)Gx]$ und $[\forall x Fx\ \&\ \forall x Gx] \rightarrow [\forall x Fx \triangledown \forall x Gx]$ folgt nach dem Verkettungsgesetz 𝔼ℂ𝔼 das logische Gesetz ∀x(Fx & Gx) → (∀xFx ▽ ∀xGx) — allgemeingültig ist also die prädikatenlogistische Aussageform ∀x(Fx & Gx) ⇒ (∀xFx ▽ ∀xGx). Usw.

Beispiel 2: ∀x (Fx ▽ Gx) ≙ (∘∘∘0)(Fx,Gx); (∃xFx ▽ ∃xGx) ≙ (∘∘••⌣∘•∘•)(Fx,Gx)[155]; es gilt das logische Gesetz ∀x (Fx ▽ Gx) → (∃xFx ▽ ∃xGx) und die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formel ∀x (Fx ▽ Gx) ⇒ (∃xFx ▽ ∃xGx).

Beispiel 3: ∀x (Fx ⇒ Gx) ≙ (∘0∘∘)(Fx,Gx); (∃x ~Fx ▽ ∃xGx) ≙ (••∘∘⌣∘•∘•)(Fx,Gx); es gilt das logische Gesetz ∀x (Fx ⇒ Gx) → (∃x ~Fx ▽ ∃xGx) und die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formel ∀x (Fx ⇒ Gx) ⇒ (∃x ~Fx ▽ ∃xGx).

Beispiel 4: ∀x(Fx ▽ Gx) ≙ (∘∘∘0)(Fx,Gx); ∀x ~Gx ≙ (0∘0∘)(Fx,Gx); ∀xFx ≙ (∘∘00)(Fx,Gx); wegen [∀x(Fx ▽ Gx) & ∀x ~Gx] ≙ (0100)(Fx,Gx) erhalten wir das logische Gesetz [∀x(Fx ▽ Gx) & ∀x ~Gx] → ∀xFx und die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formel [∀x(Fx ▽ Gx) & ∀x ~Gx] ⇒ ∀xFx.

Beispiel 5: ∀x(Fx ⇒ Gx) ≙ (∘0∘∘)(Fx,Gx); ∀xFx ≙ (∘∘00)(Fx,Gx); [∀x(Fx ⇒ Gx) & (∀x)Fx] ≙ (1000)(Fx,Gx); ∀xGx ≙ (∘0∘0)(Fx,Gx); es gilt also das logische Gesetz [∀x(Fx ⇒ Gx) & ∀xFx] → ∀xGx und die prädikatenlogistische Aussageform [∀x(Fx ⇒ Gx) & ∀xFx] ⇒ ∀xGx ist allgemeingültig.

Wir können auf diese Weise beliebig viele „Gesetze der „Quantorenverteilung“ konstruieren; die involvierten Fregerelationen können dabei von beliebiger Komplexität sein.

4.3.10.2. Gesetze der Quantorenverschiebung

Die „moderne Logik“ präsentiert außerdem einen speziellen Typ prädikatenlogistischer Formeln, die sowohl Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen (A, B,…) als auch Beliebig-Element-Zeichen für Prädikatoren (Fx, Gx,…) enthalten; diese Formeln werden als „Gesetze der Quantorenverschiebung“ vorgestellt, ihre generelle Ausdrucksform ist

$$\mathbf{(A \oplus \mathfrak{Q}_1 x\, Fx) \ominus \mathfrak{Q}_2 (A \otimes Fx)}$$

Es handelt sich um **gemischte Aussageformen**[156], die für jede kombinierte Wahl einer wahrheitswertdefiniten Aussage 𝔄 für A und eines konkreten Prädikates 𝔉 für F zu einer wahrheitswertdefiniten Aussage werden.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\mathfrak{A}}_{\text{Aussage}} \;\oplus\; \underbrace{\mathfrak{Q}_1 x \mathfrak{F}x)}_{\text{Erfüllbarkeitsaussage}}}_{\text{Gedankengefügeaussage}} \;\ominus\; \underbrace{\mathfrak{Q}_2 \underbrace{(\mathfrak{A} \;\otimes\; \mathfrak{F}x)}_{\text{Gedankengefügeaussageform[157]}}}_{\text{Erfüllbarkeitsaussage}}}_{\text{Gedankengefügeaussage}}$$

Diese Gesetze bringen keinerlei logischen Zusammenhang zwischen irgendwelchen Aussagen A und Prädikatoren Fx zum Ausdruck; die Aussageformen A und $\mathfrak{Q}_1$xFx erhalten ihre Werte ganz unabhängig von einander; es gibt deshalb für A⊕$\mathfrak{Q}_1$xFx wie für die Aussageform A⊕B alle vier Wahrheitswertkombinationen; damit ist der Wahrheitswert von (A ⊕$\mathfrak{Q}_1$x Fx) „wahrheitsfunktional“ festgelegt – je nachdem, was das Gedankengefüge ⊕ behauptet, ist die Gedankengefügeaussage wahr. Durch jede Wahl einer konkreten Aussage für A und für jede Wahl eines konkreten Prädikats für F steht der Wahrheitswert von (A⊕$\mathfrak{Q}_1$x Fx) fest. Jede nur mögliche Ersetzung von A und Fx führt auf genau eine der Wahrheitswertkombinationen:

$$\mathcal{W}(A) \frown \mathcal{W}(\mathfrak{Q}_1 xFx)$$
$$\mathcal{W}(A) \frown \mathcal{F}(\mathfrak{Q}_1 xFx)$$
$$\mathcal{F}(A) \frown \mathcal{W}(\mathfrak{Q}_1 xFx)$$
$$\mathcal{F}(A) \frown \mathcal{F}(\mathfrak{Q}_1 xFx).$$

Ein logischer Zusammenhang kommt erst dadurch ins Spiel, dass die Bedeutung der Quantifikation $\mathfrak{Q}_1 xFx$ festlegt, ob der Wahrheitswert des Teilausdrucks $\mathfrak{Q}_2 x(A\otimes Fx)$ durch eine Wahl von A und $\mathfrak{Q}_1 xFx$ überhaupt festgelegt ist. Diese Abhängigkeit sei am Beispiel $(A\oplus\forall x\, Fx) \ominus \forall x\,(A \otimes Fx)$ erläutert:

Ist $\forall x Fx$ wahr für ein Prädikat F, dann ist Fx für jede Wahl von x wahr, folglich kann bei wahrem $\forall x Fx$ der Wahrheitswert von $\forall x\,(A \otimes Fx)$ für jeden Wert von A bestimmt werden. Ist $\forall x Fx$ hingegen falsch, dann ist Fx zumindest für ein x falsch und es ist ungewiss, ob Fx für jedes x falsch ist. Gilt für einen gegebenen Wert von A: von $\mathfrak{w}(A)$ demnach: ($\mathfrak{w}(A)\otimes\mathcal{F}$ ist $\mathcal{W}$) und ebenso ($\mathfrak{w}(A) \otimes \mathcal{W}$ ist $\mathcal{F}$), kann der Wahrheitswert von $\forall x(A\otimes Fx)$ nicht bestimmt werden, weil nicht feststeht, ob Fx immer falsch, ob also $\forall x(A\otimes Fx)$ wahr ist. Bei $\forall x Fx$ ist der Wahrheitswert von $\forall x(A\otimes Fx)$ für jene Gedankengefüge nicht bestimmt, bei denen entweder die Wahrheitswertkombination $\mathcal{W}\frown\mathcal{F}$ mit $\mathcal{W}$ und die Wahrheitswertkombination $\mathcal{W}\frown\mathcal{W}$ mit $\mathcal{F}$ bestimmt ist (die Gedankengefüge **D**, **G**, **J** und **L**), oder bei denen die Wahrheitswertkombination $\mathcal{F}\frown\mathcal{F}$ mit $\mathcal{W}$ und die Wahrheitswertkombination $\mathcal{F}\frown\mathcal{W}$ mit $\mathcal{F}$ bestimmt ist (die Gedankengefüge **B**, **E**, **G** und **X**). Für alle anderen Gedankengefüge $\forall x(A\otimes Fx)$ gibt es für jeden Wert von A und $\forall x Fx$ für die gesamte Formel $(A\oplus\forall x\, Fx) \ominus \forall x\,(A \otimes Fx)$ einen Wahrheitswert; für $\oplus$ und $\ominus$ können alle Gedankengefüge gewählt werden. Soll die Formel $(A\oplus\forall x\, Fx) \ominus \forall x\,(A \otimes Fx)$ jedoch allgemeingültig sein, gibt es für die Wahl von $\ominus$ Restriktionen:

Das Gedankengefüge $\ominus$ wird den beiden Aussageformen $(A\oplus\forall x\, Fx)$ und $\forall x\,(A \otimes Fx)$ prädiziert; für diese beiden Aussageformen gibt es – anders als für die Aussageformen A und $\forall x Fx$ – nicht alle nur möglichen Wahrheitswertkombinationen. Die folgende Tabelle zeigt, wie die Wahrheitswerte von $(A \triangledown \forall x Fx)$ bzw. $(A \Rightarrow \forall x Fx)$ und $\forall x(A\triangledown Fx)$ von der Wahrheitswerten von A und $\forall x Fx$ abhängen, und dass sich aufgrund dieser Abhängigkeit für $(A\oplus\forall x\, Fx)$ und $\forall x\,(A \otimes Fx)$ nicht alle Wahrheitswertkombinationen bestimmt sind:

A	$\forall x Fx$	$(A \triangledown \forall x Fx)$	$(A \Rightarrow \forall x Fx)$	$\forall x(A\triangledown Fx)$
$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$
$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$

Die Aussageformen $(A\triangledown\forall x\, Fx)$ und $\forall x\,(A \triangledown Fx)$ haben immer denselben Wahrheitswert; für alle Gedankengefüge $\ominus$, die zumindest die Wahrheitswertkombinationen $\mathcal{W}\frown\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}\frown\mathcal{F}$ beide nicht ausschließen (für **V**, **C**, **B** und **E**), ist demnach die Aussageform $(A\triangledown\forall x\, Fx) \ominus \forall x\,(A \triangledown Fx)$ allgemeingültig. Ebenso ist die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formeln $(A\Rightarrow\forall x\, Fx)\ \bigtriangledown\ \forall x\,(A \triangledown Fx)$ und $(A\Rightarrow\forall x\, Fx) \triangledown \forall x\,(A \triangledown Fx)$ ersichtlich.

Die folgende Tabelle präsentiert alle möglichen Abhängigkeiten, die zwischen $\mathfrak{Q}_1 xFx$ und $\mathfrak{Q}_2 x(A \otimes Fx)$ bestehen:

	$\exists x\, Fx$		$\exists x \sim Fx$	
	$\mathcal{W}$ $\exists x\, Fx$	$\mathcal{F}$ $\forall x \sim Fx$	$\mathcal{W}$ $\exists x \sim Fx$	$\mathcal{F}$ $\forall x\, Fx$
$\forall x\,(A \oplus Fx)$	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{F}$ Ob Fx für ein x falsch wird, ist ungewiss, deshalb ist ungewiss, ob $\forall x\,(A \oplus Fx)$ wahr oder falsch ist Unentscheidbar sind: **C, E, H, K** **A, G, J, M**	Fx ist immer falsch, die Aussageform (A $\oplus$ Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert und $\forall x\,(A \oplus Fx)$ ist für jedes Gedankengefüge wahrheitswertdefinit.	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{F}$ Ob Fx für zumindest ein x wahr wird, ist ungewiss, deshalb ist nicht entscheidbar, ob $\forall x\,(A \oplus Fx)$ falsch wird. Unentscheidbar sind: **D, G, J, L** **B, E, G, X**	Fx ist immer wahr — (A $\oplus$ Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.
	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$
$\exists x\,(A \oplus Fx)$	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{W}$ Es ist ungewiss, ob Fx falsch sein kann, ob also $\exists x\,(A \oplus Fx)$ wahr sein kann. Unentscheidbar sind: **D, G, J, L** **B, E, G, X**	Fx ist immer falsch, die Aussageform (A $\oplus$ Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{W}$ Ob Fx für zumindest ein x wahr wird, ist ungewiss, deshalb ist nicht entscheidbar, ob $\forall x\,(A \oplus Fx)$ wahr ist. Unentscheidbar sind: **C, E, H, K** **A, G, J, M**	Fx ist immer wahr, (A$\oplus$Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.
	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$
$\forall x\,(A \oplus \sim Fx)$	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{F}$ Es ist ungewiss, ob Fx falsch sein kann, ob ~Fx wahr und damit $\forall x\,(A \oplus \sim Fx)$ falsch ist. Unentscheidbar sind: **C, E, H, K** **A, G, J, M**	Alle x sind ~F, A $\oplus$ ~Fx hat für jede Einsetzung einen Wert.	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{F}$ Es ist ungewiss, ob es ein x gibt, dem F zukommt, ob also ~Fx falsch sein kann und damit $\forall x\,(A \oplus \sim Fx)$ falsch. Unentscheidbar sind: **C, E, H, K** **A, G, J, M**	Fx ist immer wahr, (A$\oplus$Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.
	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$
$\exists x\,(A \oplus \sim Fx)$	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{W}$ Es ist ungewiss, ob Fx falsch sein kann, ob ~Fx wahr und damit $\exists x\,(A \oplus \sim Fx)$ falsch ist. Unentscheidbar sind: **C, E, H, K** **A, G, J, M**	Alle x sind ~F, A $\oplus$ ~Fx hat für jede Einsetzung einen Wert.	$\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{W} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}(A) \oplus \mathcal{F} = \mathcal{W}$ Es ist ungewiss, ob ~Fx einmal falsch ist, deshalb ist ungewiss, ob $\exists x\,(A \oplus \sim Fx)$ wahr ist.. Unentscheidbar sind: **D, G, J, L** **B, E, G, X**	Fx ist immer wahr, (A$\oplus$Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.

Es können alle nur möglichen „Gesetze des Quantorenverschiebung“ systematisch hergeleitet werden: zuerst ist zu prüfen, für welche Gedankengefüge $\otimes$ der Ausdruck $\mathfrak{Q}_2x\,(A \otimes Fx)$ bei gegebenen $\mathfrak{Q}_1x\,Fx$ überhaupt bestimmt ist; dann muss, wie angegeben, untersucht werden, welche Wahrheitswerte die Ausdrücke $A \oplus \mathfrak{Q}_1x\,Fx$ und $\mathfrak{Q}_2x\,(A \otimes Fx)$ für jede Wahrheitswertkombination von A und $\mathfrak{Q}_1x\,Fx$ annehmen, und schließlich kann dann festgestellt werden, für welche Gedankengefüge $\ominus$ die Formel $(A \oplus \mathfrak{Q}_1x\,Fx) \ominus \mathfrak{Q}_2x\,(A \otimes Fx)$ allgemeingültig wird. Diese so genannten „Gesetze der Quantorenverschiebung“ betreffen aber keine neuen, interessanten logischen

Zusammenhänge, vor allem keine Zusammenhänge zwischen irgendwelchen Aussagen A und Prädikatoren Fx; der triviale logische Gehalt, den diese Gesetze ausdrücken, besteht darin, dass für jede Ersetzung von F bei $\forall x Fx$ der Prädikator Fx für alle x bestimmt ist, und dass bei $\exists x Fx$ der Ausdruck Fx nicht für alle x bestimmt ist.

4.3.11. Zusammenfassung: die Arten prädikatenlogistischer Ausdrücke und ihre Entscheidbarkeit

Ein Teil der prädikatenlogistischen Formeln ist SFG-analog; in die Ausdrücke von Fregegesetzen werden die „Aussagevariablen" durch irgendwelche prädikatenlogistischen *Aussageformen* oder Erfüllbarkeitsaussagen ersetzt; Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit der SFG-Formeln bleiben erhalten. Diese SFG-analogen prädikatenlogistischen Formeln lassen sich wie die SFG-Formeln beliebig expandieren und Gesetzen des SFG subsumieren. Bei diesen Bildungen dürfen nur „Prädikatvariablen" verwendet werden. Daneben gibt es prädikatenlogistische Ausdrücke, die auf logische Formen und logische Gesetze verweisen, die – außer in dem Falle, dass in kontradiktorischen Verhältnissen stehende logische Formen ausgeschlossen werden – nicht aus SFG-Formeln gewonnen werden können, und für die es auch keine „wahrheitsfunktionalen", SFG-analogen Entscheidungsverfahren gibt. In folgender Tabelle versuche ich einen Überblick über diese Ausdrücke zu geben:

prädikatenlogistischer Ausdruck		Ausdruck, der aus einer Ersetzung der „Aussagevariablen" im Fregegesetz $\mathbf{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}$ resultiert	Bewertung des resultierenden Ausdrucks
beliebige Prädikatoren	Fx, Gx, Hx,…	$Fx \Bumpeq A$; $Gx \Bumpeq B$: (A1) $Fx \Rightarrow (Gx \Rightarrow Fx)$	Ausdruck (A1) ist in zweifacher Weise unvollständig: Da weder Fx und Gx, noch $Fx \Rightarrow (Gx \Rightarrow Fx)$ bereits Aussageformen darstellen, ist immer implizit die Allgemeingültigkeit dieser Formeln behauptet: also (A1') $\forall x\, [Fx \Rightarrow (Gx \Rightarrow Fx)]$; von dieser Erfüllbarkeitsaussageform (A1') wird die Allgemeingültigkeit im Bereich der Prädikate behauptet: (A1") $\forall F,G\ \{\forall x\, [Fx \Rightarrow (Gx \Rightarrow Fx)]\}$
beliebige Gedankengefügeprädikatoren	$Fx \oplus Gx$; $Fx \oplus (Gx \ominus Hx)$; usw.	$Fx \triangledown Gx \Bumpeq A$; $Fx \Downarrow Hx \Bumpeq B$: (A2) $(Fx \triangledown Gx) \Rightarrow [(Fx \Downarrow Hx) \Rightarrow (Fx \triangledown Gx)]$	Wie der Ausdruck (A1) zweifach unvollständig; gemeint ist die Allgemeingültigkeitsbehauptung (A2") $\forall F,G,H\ \{\forall x\, [(Fx \triangledown Gx) \Rightarrow [(Fx \Downarrow Hx) \Rightarrow (Fx \triangledown Gx)]\}]$
beliebige quantorfixierte Prädikatoren	$(\mathbb{Q}y)\, \mathbf{R}(x,y)$; $(\mathbb{Q}_1 y\ \mathbb{Q}_2 z)\ \mathbf{R}\ (x,y,z)$, usw.	$(\forall y)\ \mathbf{R}_1(x,y) \Bumpeq A$; $(\exists y \forall z)\ \mathbf{R}_2(x,y,z) \Bumpeq B$: (A3) $[(\forall y)\ \mathbf{R}_1(x,y)] \Rightarrow \{[(\exists y \forall z)\ \mathbf{R}_2(x,y,z)] \Rightarrow [(\forall y)\ \mathbf{R}_1(x,y)]\}$	Auch hier besteht eine doppelte Unvollständigkeit, die erst im Ausdruck (A3") beseitigt ist: (A3") $\forall \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2\ \{\forall x\ [(\forall y)\ \mathbf{R}_1(x,y)] \Rightarrow \{[(\exists y \forall z)\ \mathbf{R}_2(x,y,z)] \Rightarrow [(\forall y)\ \mathbf{R}_1(x,y)]\}\}$

Es können dann auch durch Gedankengefüge „verbundene“ quantorfixierte Prädikatoren in Fregegesetze eingesetzt werden, eben so wie alle begriffsschriftlichen Darstellungen der folgenden logischen Formen und Gesetze; diese Ausdrücke sind ja stets Aussageformen, die bei geeigneten Variablenersetzungen zu wahrheitswertdefiniten Aussage werden oder wahrheitswertdefinite Gesetzesaussagen; die stets involvierte Quantifikation im Bereich der Prädikate ist zu beachten. Die Bezeichnungen beliebiger Prädikatoren können in diesen Formeln immer durch Bezeichnungen quantorfixierter Prädikatoren ersetzt werden. Es können so beliebig viele und beliebig komplexe SFG-analoge prädikatenlogistische Formeln konstruiert werden; trotz ihres „beeindruckenden“ Aussehens sind diese Formeln logisch bedeutungslos, ihr ganzer Gehalt beschränkt sich, wie der der allgemeingültigen Ausdrücke der „Aussagenlogik“, auf die Behauptung, dass eine Aussage nicht zugleich wahr und falsch sein kann.

Die prädikatenlogistischen Ausdrücke, die auf logische Formen verweisen, sind durchweg keine „Wahrheitsfunktionen“ und die begriffsschriftlich dargelegten logischen Gesetze können nur durch logische Erwägungen, d.h. durch die Beachtung der Geltungsbedingungen der betreffenden logischen Formen bewiesen werden[158]. In diesen Ausdrücken können die Ausdrücke einstelliger Prädikatoren immer durch Ausdrücke von Prädikatoren beliebiger Stelligkeit ersetzt werden, wobei diese Prädikatoren quantorfixiert sein können oder nicht; es werden dann eben nur besondere Fälle der entsprechenden logischen Formen und Gesetze dargestellt. Alle begriffsschriftliche Darstellungen dieser logischen Gesetze sind allgemeingültige Aussageformen (allgemeingültig im Bereich der Prädikate).

1) Wir haben zunächst die *elementaren Quantoren*: die Ausdrücke „$\forall x\, Px$“, „$\sim\exists(x)\, P(x)$“, usw. die logische Formen benennen (Beziehungen zwischen den Begriffen die den Bezugsbereich der Gegenstände); in der Prädikatenlogistik erscheinen diese Ausdrücke als erfüllbare Erfüllbarkeitsaussageformen (z.B. *es gibt Prädikate P, für welche die Aussageform $\forall xPx$ wahr wird*, usw.)

2) Es gibt die begriffsschriftlichen Abschwächungen der *Gesetze des Quantorenquadrats*, z.B. das Gesetz: $(\forall x\, Px) \Uparrow (\forall x\, \sim Px)$; in der Prädikatenlogistik erscheinen diese Ausdrücke als allgemeingültige Aussageformen (z.B. Für jede Ersetzung der „Prädikatvariablen“ P werden die beiden Aussageformen $(\forall x\, Px)$ und $(\forall x\, \sim Px)$ nicht zugleich wahr.

3) Die elementaren Fregerelationen haben die Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}x\,(Fx \oplus Gx)$, die komplexen Fregerelationen haben die Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}_1x\,(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x\,(Fx \otimes Gx)$ oder $[\mathfrak{Q}_1x\,(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x\,(Fx \otimes Gx)] \oslash [\mathfrak{Q}_3x\,(Fx \odot Gx) \circleddash \mathfrak{Q}_4x\,(Fx \circledast Gx)]$, usw.; sie erscheinen (mit Ausnahme der Ausdrücke, die auf die Allrelation verweisen) in der Prädikatenlogistik als erfüllbare, nicht allgemeingültige Aussageformen; die Fregerelationsgesetze (logische Beziehungen zwischen Fregerelationen) erscheinen als allgemeingültige Aussageformen, Ausdrücke, die auf die leere logische Relation verweisen erscheinen als nicht erfüllbare Aussageformen.

4) Die so genannten „Gesetze der Quantorenverteilung“ sind spezielle Fregerelationsgesetze.

5) Es gibt schließlich noch die „Gesetze der Quantorenverschiebung“, Aussageformen die neben Prädikatoren auch Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen enthalten, deren Allgemeingültigkeit auf die oben skizzierte Weise nachgewiesen oder widerlegt werden kann. Sie allenfalls triviale logische Bedeutung.

Andere „wohlgeformte“ und sinnvolle Ausdrücke der Prädikatenlogistik gibt es nicht; von allen diesen Aussageformen läst sich Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und Nichterfüllbarkeit erweisen, entweder durch Herleitung aus einem Fregegesetz oder durch Bezug auf die logischen Sachverhalte, auf die ein prädikatenlogistischer Ausdruck eineindeutig verweist; diese Bedeutung ist immer durch die festgelegten Bedeutungen der prädikatenlogistischen Zeichen (Gedankengefüge, Prädikatoren, Quantoren) eindeutig vorgegeben, sie darf allerdings nicht durch die gebräuchlichen logischen Missdeutungen der Gedankengefüge und Fregerelationen verwischt werden. Die sachgerechte Beurteilung der prädikatenlogistischen Ausdrücke ist nur möglich auf dem Boden des im ersten Teil dieser Arbeit entwickelten Begriffs der logischen Formen, der eine präzise und vollständige Konstruktion und Kenntnis aller logischen Formen und den Nachweis der zwischen ihnen bestehenden logischen Beziehungen (das sind die logischen Gesetze) erlaubt.

Anmerkungen zu Teil II, Kapitel 4

1 Bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge werden von **FREGE** meistens „ursächliche Zusammenhänge“ oder „ursächliche Verknüpfungen“ genannt; vgl. etwa BS 6, 23, 28, 33.

2 „Die Verbindung von Bedingung und Folge erscheint bei mir in zwei Bestandteile zerlegt, von denen der eine die Allgemeinheit ist, bezeichnet mittels lateinischer Buchstaben, während der andere durch das Zeichen ‚⇒‘ bezeichnet wird. Diese Zerlegung ist bei Herrn **PEANO** nicht deutlich erkennbar, weil beides: der Gebrauch“ der *lettres variables* und des Zeichen ‚⊃‘ zusammen erklärt wird.“ (Def 165)

3 Die Anführungszeichen sollen die Auffassung zurückweisen, es könne eine Logik geben, die nicht „Prädikatenlogik“ wäre, in der also noch keine Prädikate/Begriffe und die logischen Beziehungen zwischen Prädikaten/Begriffen berücksichtigt sind. Im Zusammenhang mit **FREGE**s Logikentwurf kann erst die „Prädikatenlogik“ mit Fug und Recht als Logik angesprochen werden – denn erst im Rahmen der Prädikatenlogik, keinesfalls schon im Rahmen der „Aussagenlogik“ (SFG), berücksichtigt **FREGE** logische Formen – so unzureichend dies auch jetzt geschieht.

Ich nenne die in der Tradition **FREGE**s stehende, an das System der Gedankengefüge anknüpfende „Prädikatenlogik“ in Folgenden *Prädikatenlogistik*.

4 Siehe Teil II, Abschnitt **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**

5 *Jede* Feststellung hat beispielsweise, welches auch ihr besonderer Inhalt sei, die allgemeine Form P(a) – ein (Ousia-, Eigenschafts-, Zustands-)Begriff kommt einem Gegenstand a zu.

6 „Einen Satz wie ‚Zwei ist eine Primzahl‘ können wir in zwei wesentlich verschiedene Bestandteile zerlegen: in ‚Zwei‘ und ‚ist eine Primzahl‘.“ (LPM 191f; auch BS 15f)

7 Diese Auffassung steht im Widerspruch zur Freges Theorie von Sinn und Bedeutung$_F$, in welcher drei grundlegende Arten von Ausdrücken – Eigennamen, Begriffswörter und Sätze – unterschieden werden; im Rahmen des Begriff-Gegenstand-Dualismus werden die Sätze zu Eigennamen der beiden Wahrheitswerte, die **FREGE** irrtümlich nicht für Prädikate, sondern für Gegenstände hält. Damit gibt **FREGE** die Unterscheidung zwischen benennenden Ausdrücken (Begriffswörter, Eigennamen) und behauptenden Ausdrücken (Urteile, Sätze) preis, die zu jenen Einsichten gehört, die den Anfang der theoretischen Logik markieren (**PLATON**, *Sophistes* 262bff; **ARISTOTELES**, De Interpretatione, 3, 16b, 34 – 17a 3; 17a 11f); auch Sätze werden von **FREGE** jetzt als benennend aufgefasst; es gibt für ihn nur benennende Ausdrücke.

8 „Der Begriff – wie ich das Wort verstehe – ist prädikativ.“ (BG 67 [193]; auch EL 87)

9 **I. ANGELELLI** nennt **FREGE**s „Idee der Ungesättigtheit“ faszinierend, suggestiv und originell – aber ganz hoffnungslos (Freges Ort in der Begriffsgeschichte, S. 11). Die Ersetzung begrifflicher Klarheit durch eine schillernde Metaphorik rechtfertigt **FREGE** wie üblich: die Zusammenhänge seien unbestimmbar, undefinierbar, „logisch einfach“, auf mehr als ahnungsvolle Intuitionen könne nicht gebaut werden. „ ‚Abgeschlossen‘ und ‚ungesättigt‘ sind zwar nur bildliche Ausdrücke, aber ich will und kann ja hier nur Winke geben.“ (BG 80 [205])

10 An dieser Stelle postuliert **FREGE** einen eigenständigen Wirklichkeitsbereich der Begriffe – dies im Widerspruch zu seiner „Drei-Welten-Theorie“, in der er die Welt der physischen realen Dinge, die „Welt“ der psychisch-subjektiven Vorstellungen und die „Welt“ der objektiven „nicht-realen“ wahrheitswertdefiniten Gedanken unterscheidet; die nicht-wahrheitswertdefinitem Begriffe haben in keiner dieser drei „Welten“ Platz.

11 **FREGE** spricht ja vom Fallen oder der Subsumtion eines Gegenstandes unter einen Begriff (Brief an **HUSSERL**, XIX/3, 42).

12 Die Bedeutungen eines Ausdrucks im Sinne **FREGE**s (Bedeutung$_F$) stellt die realen Dinge und Sachverhalte dar, auf welche die sprachlichen Ausdrücke verweisen (Referenz als Bezug eines Ausdrucks auf Auersprachlich-Reales).

13 Wenn der Eigenname seiner Bedeutung$_F$ nach auf ein objektiv gegenständliches und relativ dauerhaftes Reales verweist, dann muss dies auch für das Begriffswort zutreffen; mit der Wirklichkeit, auf die die Begriffswörter verweisen, kann nicht eine andere Art von Wirklichkeit gemeint sein als die, die von „bedeutungsvollen“ Eigennamen gemeint wird. Denn nur dann ist eine Subsumtionsbeziehung von Gegenstand und dem, worauf das Begriffswort verweist, möglich, nur dann kann einem Satz, der eine solche Subsumtion behauptet, selber sowohl Sinn wie Bedeutung$_F$ zukommen. – Ein Widerspruch ergibt sich bei **FREGE** allerdings dadurch, dass er einerseits die Bedeutung$_F$ als etwas Abgeschlossenes, Selbständiges bezeichnet und dadurch mit seiner Bestimmung des Gegenstandseins konfundiert; die Begriffe (für **FREGE** ist die Bedeutung$_F$ eines Begriffswortes der Begriff selbst – (ASB 34); (BG [193ff]; Über Sinn und Bedeutung, 27, Fn.; Kl. Schriften 144)) hat er aber gerade durch die Unselbständigkeit definiert.

14 Nach **H. J. SCHNEIDER** hat sich **FREGE** bei der „formal-syntaktischen“ Analyse des Verhältnisses von Begriff und Gegenstand an der Frage orientiert „was ist am Ausdruck veränderlich, was bleibt konstant?“ (Begriffe als Gegenstände der Rede, S. 166f). In der *Begriffsschrift* lesen wir in diesem Sinne: „Wenn in einem Ausdrucke … ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen an einer oder an mehreren Stellen vorkommt, und wir denken es an allen oder einigen dieser Stellen durch Anderes, überall aber durch Dasselbe ersetzbar, so nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Teil des Ausdruckes Funktion, den ersetzbaren

ihr Argument." (BS 16; auch KÜL 217) Die Orientierung an angeblich veränderlichen und unveränderlichen Teilen des Ausdrucks erlaubt eben keine Unterscheidung von Gegenstand und Begriff, denn sowohl die Ausdrücke für Gegenstände wie für Begriffe können jeweils gleich bleibend bzw. veränderlich gehalten werden. Tatsächlich hat sich **FREGE** nie an solchen nur die Zeichenebene betreffenden Operationen orientiert, sondern an der alten Frage: „Von wem wird etwas ausgesagt? – Was ist ‚Subjekt'/Prädikand?", „Was wird ausgesagt? – Was ist Prädikat?" – so überzeugt er auch gewesen sein mag, mit der logisch grundlegenden und unverzichtbaren Unterscheidung von Subjekt/Prädikand und Prädikat als „unnützer Weitläufigkeit" „aufgeräumt" zu haben.

15 Wir müssen diese epistemologische Aussage ergänzen: es kann auch real, in ontologischer Betrachtung, keinen Gegenstand geben, der nicht mit anderen Gegenständen derselben Art einer bestimmten artgemäßen Gesetzmäßigkeit unterläge – und diese vielen Gegenständen gemeinsame Gesetzmäßigkeit wird durch die Begriffe widergespiegelt, diese objektiv allen derartigen Dingen innewohnende Gesetzmäßigkeit stellt die Bedeutung$_F$ der Begriffswörter dar.

16 Diese Behauptung zeigt, dass sich **FREGE** nie ernsthaft mit der *Synthesisfunktion der logischen Formen* befasst hat. Nur wenn das „Sehen", die verschiedenen Wahrnehmungsbilder in die umfassendere Tätigkeit begrifflich-logischer Bezugsetzung eingeordnet ist, kann ein Gegenstand als identisch und bestimmt erkannt werden. Die Wahrnehmung ist nie hinreichend, um die Erkenntnis identischer Gegenstände zu gewährleisten. Erst die umfassende logische Beziehungsbildung auf der Grundlage begrifflichen Wissens ermöglicht das „Sehen" *eines Gegenstandes*. **FREGE** schlägt die grundlegendsten Einsichten der Philosophie in den Wind.

17 „Es ist eigentümlich, dass **FREGE** fordert, ein Gefüge werde zusammengehalten, indem ein Unvollständiges und ein Vollständiges … einander ergänzen. Wechselseitige Ergänzung könnte besser so erklärt werden, dass alle einander ergänzenden Glieder erst in der Zusammenfügung ihre Vollständigkeit erlangen." (**HANS LENK**, Kritik der logischen Konstanten, S. 508) Dieser Einwand, der auf das Verhältnis der durch Gedankengefüge prädizierten „selbstständigen" Aussagen und der „ungesättigten" Gedankengefüge zielt, trifft generell **FREGE**s Verständnis von Gegenstand und Begriff.

18 **HANS HERMES**, Zur Begriffsschrift und zur Begründung der Arithmetik, Einleitung in **G.FREGE**, Nachgelassene Schriften, S.X)

Diese dualistische Konzeption alles Seienden ist nicht die einzige „Ontologie" **FREGE**s; er entwickelt vielmehr nacheinander drei mit einander unverträgliche Einteilungen des Seienden; sie entsprechen im großen Ganzen dem SFG, dem SFA und der fregeschen „Prädikatenlogik". In der ersten Theorie (der „**Dreiwelten-Theorie**") zerlegt er das Wirkliche in die „Welten" der physischen Gegenstände (das Thema der Naturwissenschaften), der „Vorstellungen" (für **FREGE** der erschöpfende Gegenstand der Psychologie) und der „ansich seienden" Gedanken (angeblich die Thematik der Logik); entsprechend dieser Theorie kann die Logik die ewig und unabhängig von denkenden Menschen bestehenden Gedanken nur mitsamt ihrem jeweiligen besonderen Gehalt (dem fregeschen „begrifflichen Inhalt", in dem Form und Inhalt der Gedanken/Urteile noch völlig ungeschieden sind) und ihrem Wahrheitswert *als gegeben* hinnehmen („fassen") und voraussetzen, was ja zum Charakter der Gedankengefüge als bestenfalls tautologischem Ausdruck des Fürwahrhaltens passt. In einer zweiten Theorie (der **Theorie von Sinn und Bedeutung$_F$**) unterscheidet er drei grundlegende Arten von Ausdrücken, die Eigennamen, die Begriffswörter und die Sätze, denen jeweils ein Sinn und eine Bedeutung$_F$ zugeordnet wird (was **FREGE** „Bedeutung" nennt ist die Referenz, der Realitätsbezug oder das Denotat eines Ausdrucks, daher Bedeutung$_F$; unter Bedeutung versteht man üblicherweise das, was **FREGE** Sinn nennt). Die Bedeutung$_F$ der Eigennamen sind die realen physischen Gegenstände selbst, der Sinn ist die vom subjektiven Standpunkt und vom perspektivischen Erscheinen des realen Gegenstandes abhängige Auffassung des realen Gegenstandes. Die Bedeutung$_F$ der Begriffswörter sollen die Begriffe selbst sein (über den Sinn der Begriffswörter weiß **FREGE** nichts zu sagen). Der Sinn der Sätze sollen die Gedanken als das den Menschen gemeinsame Wissen sein (in der „Dreiwelten"-Theorie sind die Gedanken hingegen ansich seiende, „objektive" Gegebenheiten, die den Subjekten wie physische Gegenstände „gegenübertreten"), und die Bedeutung$_F$ sollen die Wahrheitswerte sein (sie wären dann „Gegenstände" einer ganz neuen Art, die in der „Dreiwelten-Theorie" nicht vorkommen; die Bedeutung$_F$ der Sätze sind in Wirklichkeit nicht die Wahrheitswerte, sondern die objektiven Tatsachen (die objektiv bestehenden Sachverhalte) bzw. bei Sätzen, die Gesetze ausdrücken, die objektiv in der Realität wirkenden Gesetzmäßigkeiten). Jedenfalls entspricht diese theoretische Kehrtwendung dem System der Fregealgebra (SFA), wo wir es nicht mehr mit Aussagen zu tun haben, sondern nur mehr mit zwei „Wahrheitswerten" (richtiger: mit zwei Komplementärwerten), für die alle möglichen monadischen Abbildungen und binären (oder höherstelligen) Verknüpfungen gebildet werden. In der dritten **Theorie von Begriff und Gegenstand** schrumpft die Dreiheit der Ausdrücke Eigenname, Satz, Begriffswort zur dissoziativen Zweiheit Begriff und Gegenstand; jeder Ausdruck benennt nun entweder einen „abgeschlossenen Gegenstand" oder einen „ungesättigten Begriff". Die dritte Theorie entspricht dem fregeschen Missverständnis und der Konfusion von Prädikation und Abbildung/Funktion, die seiner „Prädikatenlogik" zu Grunde liegen.

19 Dass **FREGE** endliche, anzahlmäßig definite Mengen von Dingen wie die Menge der Monde des Planeten Jupiter, die an eine bestimmte Raum-Zeit-Stelle gebunden sind und wie die dinglichen Gegenstände der Ebene des Einzelnen angehören, den überzeitlichen, anzahlmäßig nicht definiten, durch echte Begriffe bestimmten Klassen (wie etwa die Klasse der Monde oder die Klasse der Planeten), die nicht an eine bestimmte Raum-Zeit-Stelle gebunden sind und der Ebene des Allgemeinen angehören, unterschiedslos als „Begriffe" betrachtet, ist einer von vielen Gründen für das Misslingen von **FREGE**s Versuchs einer sachgerechten, nichtzirkulären Bestimmung des Zahlbegriffs.

20 Es „besteht der Begriffsumfang nicht aus den Gegenständen, die ihm angehören… Der Begriffsumfang hat eben seinen Bestand im Begriffe, nicht in den Gegenständen, die ihm angehören; diese sind nicht seine Teile." (LPM 199; auch SVAL 111 [455]) – Es entgeht **FREGE** hier, dass es ein Widerspruch ist, wenn er einerseits die scharfe Begrenzung der Begriffe fordert, und andererseits den Bestand eines jeden Begriffs für unabhängig von Gegenständen erklärt. Die Abgrenzung der Begriffe wird durch das PNW

normiert, welches die untrennbare Einheit von Begriff und Gegenstand vorausgesetzt; die Abgegrenztheit eines Begriffs P besteht darin, dass *von jedem Gegenstand* entscheidbar ist, ob ihm dieser Begriff zukommt oder nicht: $P(x) \succ\!\prec \sim P(x)$; nur im Hinblick auf die Gegenstände, denen Begriffe zukommen, lassen sich Begriffe gegeneinander abgrenzen.

21 „Es-gibt-Sätze“ sind Sätze wie „Es gibt schwarze Löcher“, „Es gibt Nashörner“, „Es gibt keine Einhörner“, „Es gibt keine reellen Zahlen, deren Quadrat -4 beträgt“.

22 **FREGE** fordert einerseits von der Logik, sich nicht in grammatischen Distinktionen zu verlieren (er wirft dies pauschal der „hergebrachten Logik“ vor); er selbst versucht aber ständig, alle möglichen logischen Bestimmungen, etwa die Grundunterscheidung von Begriff und Gegenstand, alleine an grammatischen Unterschieden festzumachen; **FREGE** ist es, der einen exzessiven „Linguismus in der Logik“ praktiziert.

23 „Ich habe die Existenz Eigenschaft eines Begriffes genannt.“ (BG 73 [199]) Die Leerheit/„Nichtexistenz“ des Begriffs Einhorn bedeutet nicht, dass es diesen leeren Begriff (auf der Ebene des Sinns) nicht gibt, sondern dass es keinen Gegenstand gibt, dem der Begriff zukommt.

24 Die logischen Formen als Beziehungen aller jener Begriffe erster Stufe, die bestimmte Bedingungen erfüllen, stehen dann selber auch jeweils in bestimmten logischen Beziehungen.

25 Niemand sagt, dass der Begriff *Nashorn* existiert, sondern dass Gegenstände existieren, denen dieser Begriff zukommt.

26 Was veranlasst **FREGE**, zwar alle ausgedachten, phantastischen Dinge oder Personen wie den Heiligen Gral, Aladins Wunderlampe, den Odysseus oder Rumpelstilzchen als legitime Gegenstände wissenschaftlicher Untersuchung zu verwerfen, leere Begriffe, also Artbegriffe wie *Schlossgespenst*, *Vampir*, *Hobbit* oder *Erzengel* aber für wissenschaftlich zulässig zu erklären (SVAL 112 [456])? Es ist ungereimt, einen Wirklichkeitsbezug zwar für Gegenstände, nicht aber für Begriffe zu fordern. Einen Grund für **FREGE**s Gleichstellung der leeren und gehaltvollen Begriffe, neben **FREGE**s Unvermögen, die Bedeutung$_F$ von Begriffen zu erfassen, werden wir bald kennen lernen: die logischen Formen, die **FREGE** im Rahmen seiner „Prädikatenlogik“ konstruiert und begriffsschriftlich darstellt, und denen er durchweg eine Deutung gibt, die den durch ihn selbst festgelegten Bedeutungen seiner begriffsschriftlichen Zeichen widerspricht, wie etwa die so genannte „formale Implikation“ $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ sind sehr grobe Relationen, die auch gelten, wenn einer der Begriffe oder beide Begriffe leer sind.

27 In SB S.40 [25] betont **FREGE** gerade diesen Invariantencharakter der Identität: „Die Entdeckung, dass nicht jeden Morgen eine neue Sonne aufgeht, ist wohl eine der folgenreichsten in der Astronomie gewesen. Noch jetzt ist die Wiedererkennung eines kleinen Planeten oder eines Kometen nicht immer etwas Selbstverständliches.“ Im Gegensatz zum vorigen Zitat ist sich **FREGE** hier klar, dass Identität nichts „Logischeinfaches“, Unmittelbares und Selbstverständliches ist, sondern logische Synthesis, Anstrengung des Erkennens, voraussetzt.

28 „‚Identisch‘ ist ein zweistelliger Funktor.“ (**A.MENNE**: Einige Aspekte zum Thema ‚Sprache und Logik‘, S.172). Auch **H.WESSEL** spricht von dem „zweistelligen Prädikat der Identität“ (Logik, S. 231)

29 „Wenn gesagt wird ‚a und b sind identisch‘ (symbolisch a = b), so wird damit nicht ausgedrückt, dass die Relation der Identität zwischen zwei unterschiedlichen Objekten a und b besteht, sondern nur dass a und b zwei verschiedene Bezeichnungen („Termini“) für ein und dasselbe Objekt sind.“ (**MENNE**, ebd. S. 232) Aber eben diese verschiedenen Zeichen sind nicht identisch, sondern verschieden, jedoch bedeutungsgleich, wobei die Feststellung der Bedeutungsgleichheit die Identität des Bezeichneten voraussetzt und nicht etwa begründet!

30 Die Identität von Gegenständen ist auch in der beliebten Formel „a = a“ nicht begriffen; es kommt nicht zum Ausdruck, dass die Sichselbstgleichheit der Gegenstände *zugleich* besagt, dass jeder Gegenstand von *jedem anderen* Gegenstand verschieden ist.

31 „Durch das Argument wird die Funktion ergänzt; das, wozu sie ergänzt wird, nenne ich Wert der Funktion für das Argument.“ (GGA I, § 1; zit. 109) Für die als Funktionen missverstandenen Begriffe hieße das: der Gegenstand ergänzt das ihm zugeschriebene Prädikat zu einem Wahrheitswert-„Gegenstand“; der Begriff ist hier ein verschwindendes Moment einer mysteriösen Verwandlung von völlig unterschiedlichen „Gegenständen“ ineinander, es ist schleierhaft, wozu Begriffe dienen.

32 **FREGE** bestimmt Prädikanden (Subjekte) und Prädikate der beiden Sätze „Bei Plateae besiegten die Griechen die Perser“ und „Bei Plateae wurden die Perser von den Griechen besiegt“ nicht korrekt. Prädikate sind ihm nicht die zweistelligen Relationen „x besiegten bei Plateae die y“ und „x wurden bei Plateae von den y besiegt“, sondern die *einstelligen* Prädikate „x besiegten bei Plateae die Perser“ und „x wurden bei Plateae von den Griechen besiegt“. Für einstellige Prädikate kann überhaupt kein Passiv gebildet werden! Subjekt ist ihm im einen Satz die Griechen, im andere die Perser; Subjekt/Prädikand in seinem Beispielssatz sind aber Paare von Gegenständen, (die Griechen, die Perser), bzw. (die Perser, die Griechen).

33 Nun ist dieser Satz aber bedeutungsgleich dem Satz „Der Begriff $\mathfrak{P}$ kommt dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ zu“ – ist hier ein Begriff plötzlich Subjekt des gleichbedeutenden Satzes? Tatsächlich haben wir in *beiden* Fällen eine zweistellige Relation zwischen einem Begriff und einem Gegenstand.

34 Da der Satz den Begriffen *Säugetier* und *Landbewohner* eine logische Relation zuschreibt, stellt nicht der Teilausdruck „sind Landbewohner“ das Prädikat dar; Prädikand ist das Paar dieser Begriffe, Prädikat ist die diesen Begriffen zukommende logische Relation.

35 Weil **FREGE** die Begriffe als angeblich „ungesättigt“ den Gegenständen gegenüber verselbstständigt, bestreitet er, dass sich die Ausdrücke „alle Wale“, „jeder (beliebige) Wal“ sich überhaupt auf Tiere bestimmter Art beziehen: „wenn man fragt, von welchen Tieren die Rede sei, so kann man kein einziges aufweisen. Gesetzt, es liege ein Walfisch vor, so behauptet doch von diesem unser Satz nichts… Das Wort ‚Walfisch‘ benennt … kein Einzelwesen. Wenn man erwidert, allerdings sei nicht von einem einzelnen, bestimmten Gegenstande die Rede, wohl aber von einem unbestimmten, so meine ich, dass ‚unbestimmter Gegenstand‘ nur ein anderer Ausdruck für ‚Begriff‘ ist, und zwar ein schlechter, widerspruchsvoller.“ (GLA 61 [60f]) In gleicher Weise behauptet **FREGE**, das Gesetz „alle Menschen sind sterblich“ schließe in seine Geltung nicht den „Häuptling Akpanya“ ein, von dem man „vielleicht noch nie gehört hat.“ (RH 188 [327]; vgl. auch SVAL 111 [454]) Das Begriffswort „Wal“ bezeichnet jedes beliebig Wal-Einzelwesen, wie das Wort „Mensch“ jeden beliebigen Menschen bezeichnet.

36 **FREGE** vernachlässigt die Tatsache, dass es einerseits *benennende*, andererseits *behauptende* sprachliche Ausdrücke gibt, und meint, nur ein behauptender Ausdruck besitze einen Sinn; wenn ein Sachverhaltsausdruck (ein Beliebig-Element-Zeichen von Gegenständen enthaltender „grammatischer Teilsatz“) keinen wahrheitswertdefiniten Gedanken ausdrücke, dann, so **FREGE**, besage er überhaupt nichts, da man weder seine Wahrheit (Gültigkeit) noch seine Falschheit (Ungültigkeit) behaupten könne (GLG I-III, 296f). Auch **A. MENNE** behauptet, benennende Ausdrücke seien „unbestimmt“: „Unbestimmte Aussagen … zum Beispiel ‚es regnet‘ … sind unvollständig und ungenau und darum noch keine Aussagen.“ (Einführung in die Logik, S. 32) Der Ausdruck „es regnet“ ist zwar keine Aussage, aber doch ein eindeutiger, von anderen Sachverhaltsausdrücken wie „es scheint die Sonne“, „es donnert“ usw. klar abgegrenzter *benennender* Sachverhaltsausdruck. Die Einsicht, dass die sprachlichen Ausdrücke teils benennend, teils behauptend sind, welche bei **PLATON** ganz am Anfang der logischen Reflexion stand (*Sophistes* 262 b ff), wird von **FREGE** ignoriert. – Diese falsche These, nach der nur behauptende Ausdrücke Sinn und Bedeutung$_F$ besitzen, steht freilich zu jener anderen fundamentalen These **FREGE**s im Widerspruch, nach der die Bedeutung$_F$ der Sätze Wahrheitswert-Gegenstände sind, und nach der es überhaupt nur benennende Ausdrücke gibt; von einem Gegenstand kann man ja kaum behaupten, er sei wahr oder falsch.

37 Da dies voraussetzt, dass auch die Sachverhaltsausdrücke, die Teil solcher Sätze sind, sinnvoll sind, schwächt **FREGE** seine ansonsten apodiktisch vorgetragene Behauptung der Sinnlosigkeit von Gesetzesaussagen in gewundener Weise ab: jetzt sind diese Ausdrücke nicht mehr sinnlos, sondern nur „nicht von jedem Sinn ganz entfernt“ (GLG III-V, 315 [400]). Dieses ständige Sich-Widersprechen ist charakteristisch für **FREGE**.

38 Über die beiden Sätze „Wenn *a* ist ein Mensch, so *a* sterblich ist“ und „Wenn Napoleon ein Mensch ist, so Napoleon sterblich ist“ meint **FREGE**: „Der erste Satz drückt nicht wie der zweite ein Gedankengefüge aus, weil ‚*a ist ein Mensch*‘ ebenso wenig wie ‚*a ist sterblich*‘ einen Gedanken ausdrückt. wir haben hier eigentlich nur Satzteile, keine Sätze.“ (LA 171, Fn.)

HEINRICH SCHOLZ bestreitet insbesondere den logischen Gesetzen den Aussagecharakter – logische Sätze enthalten nicht nur Beliebig-Element-Zeichen für Individuen, sondern auch Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate. Er meint über das (falsche) logische Gesetz „Wenn F wenigstens einem x zukommt, so kommt F jedem x zu“: „Es ist klar, dass diese Redeweise keine Aussage ist; denn die Entscheidung der Frage, ob sie etwas Wahres oder etwas Falsches ausdrückt, hängt zunächst einmal von dem vorgegebenen Individuenbereich ab, sodann, in jedem Falle, in welchem dieser Bereich nicht einzahlig ist, auch noch von der Eigenschaft, die durch ‚F‘ symbolisiert wird. Ohne diese Informationen kann auch ein absoluter Geist hier nichts entscheiden wollen.“ (Logik, Grammatik, Metaphysik, S. 187) Auch der Ausdruck des Nichtwiderspruchprinzips “Es gibt kein x, dem F zukommt und *nicht* zukommt.“ (ebd. 190) ist ihm noch keine wahrheitswertdefinite Aussage – weil angeblich die Rede von irgendwelchen, von beliebigen Prädikaten ohne Sinn sei.

Auch **ŁUKASIEWICZ** hält wahrheitswertdefinite logische Gesetzesaussagen für Aussageformen, die erst durch Variablenersetzung zu wahren Aussage gemacht werden müssen. Das wahre logische Verkettungsgesetz ‚wenn alles b a ist und alles a c ist, so ist alles b c‘ (syllogistischer Modus *Barbara*) wird ihn erst dann zu einer wahrheitswertdefiniten Aussage, wenn „für diese Variablen konstante Werte eingesetzt“ werden. (Geschichte der Aussagenlogik, S. 114) Diese Gesetz macht über die 3 logischen Formen *alles b ist a*, *alles a ist c* und *alles b ist c* eine Aussage, indem es diesen logischen Sachverhalten die logische Relation [p, q, r ℂ𝕍] zuordnet – dies ist eine Aussage.

39 „Jede Konstante hat eine bestimmte Bedeutung. Die Variablen dagegen dienen zum Hinweis auf unbestimmte Gegenstände, Eigenschaften usw.“ (**CARNAP**, Symbolische Logik, S.16) – „Variable sind bedeutungsleere Zeichen, die nur dazu dienen, die Stellen anzuzeigen, an denen die bedeutungsvollen *Konstanten*, hier die Prädikate, einzusetzen sind.“ (**LORENZEN**, Formale Logik, S. 4f) – „Eine solche Variable wie ‚x‘ bedeutet selbst also gar nichts, sondern zeigt nur eine Leerstelle an, in die etwas eingesetzt werden kann… Die Ausdrücke, die fest stehen bleiben, also ihre feste Bedeutung behalten im Gegensatz zur Variablen, heißen *Konstanten*.“ (**MENNE**, Einführung in die Logik, S. 9)

40 **KONDAKOW**, Wörterbuch der Logik, S.156

41 Es ergibt sich so die Ungereimtheit, dass das Gedankengefüge **C**, da es irrtümlich mit der logischen Form der Implikation verwechselt wird, einerseits eine wichtige logische Form darstellen müsste, andererseits aber als nur erfüllbare, nicht allgemeingültige „Aussageform“ kein logisches Interesse verdient – ist sie doch aus nur außerlogischen Gründen wahr.

42 Die Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit von SFG-„Aussageformen“ kann natürlich auch mit Hilfe von Quantoren dargestellt werden; statt „die Aussageform ›$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$‹ ist allgemeingültig“ lässt sich sagen: „Für jedes beliebige Paar von Aussagen (A,B) wird ›$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$‹ wahr“ oder kurz: „$(\forall A,B) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$“ oder auch „$(\forall A,B)\ [A \Rightarrow (B \Rightarrow A)]$“.

43 Die Meinung, nicht bereits im Rahmen des üblichen SFG (der normalen „Aussagenlogik“), sondern erst in einem „quantified sentence calculus“ höherer Ordnung gebe es Ausdrücke der Art: „$(\forall A)(A \triangledown \neg A)$“ (**HAACK**, S.40; vgl. **H.WESSEL**, Logik, S. 189), ist also falsch; es ist nicht entscheidend, ob ausdrücklich das Allquantorsymbol gebraucht wird, sondern dass jede Behauptung der Allgemeingültigkeit eines Gedankengefügeschemas eine „Allquantifikation“ und jede Behauptung der Erfüllbarkeit eines Gedankengefügeschemas eine „Existenzquantifikation“ darstellt. Schon im SFG spielen Quantifikationen in der Form der Erfüllbarkeits-/Allgemeingültigkeitsaussagen eine zentrale Rolle.

44 Wenn wir prüfen wollen, ob Aussagen wahr sind, müssen wir ihre Bedeutung (d.h. *was behauptet wird*) kennen; erst unter dieser Voraussetzung kann der Wahrheitswert der Aussagen ermittelt und den Aussagen dann ein Gedankengefüge zugesprochen werden. Da die „Aussagenlogik“ am Ergebnis der Wahrheitsprüfung, d.h. am nicht weiter thematisierten Fürwahrhalten ansetzt und dieses zum Thema macht, konnte die falsche Auffassung aufkommen, in der „Logik“ könnten die Bedeutungen der Aussagen unbeachtet bleiben – es komme ja nur auf den Wahrheitswert an.

45 Vertreter der „modernen Logik“ meinen, der angebliche mathematische Charakter der „modernen Logik“ rühre nicht zuletzt daher, dass die Rechen- und Beweisverfahren in der Mathematik ebenso wie angeblich das „aussagenlogische“ Vorgehen die Bedeutung der mathematischen Symbole ignorieren könnten und man sich auf ein gedankenlos-automatisiertes Manipulieren „bedeutungsloser Symbole“ (die Rede von bedeutungslosen Symbolen oder Zeichen ist eine *Contradictio in adjecto*, ist semiotischer Unsinn) beschränken könne. Die Rechenalgorithmen können in der Tat mechanisch und gedankenlos angewendet werden; bei dieser Anwendung ist es überflüssig, zu wissen, warum der Algorithmus eigentlich funktioniert und auf welchen *mathematischen* Gesetzmäßigkeiten er basiert – das Verfahren muss in den Einzelfällen nur korrekt angewendet werden, nicht als solches gerechtfertigt werden; damit muss auch nicht systematisch auf die mathematische Bedeutung der Ausdrücke, auf die sich das mechanische Rechnen bezieht, eingegangen werden. Die Logistiker trugschließen, dass das Rechnen, die Arithmetik überhaupt unabhängig von der Bedeutung der mathematischen Symbole durchgeführt werden kann — das ist natürlich nicht richtig: die Erfindung und Rechtfertigung der Rechenverfahren muss sich systematisch auf die Bedeutung der mathematischen Symbole in Rechnung stellen, wie ja auch die „metalogische“ Rechtfertigung und Begründung der SFG- und SFA-Prozeduren auf die tatsächliche (und nicht logisch missdeutete) Bedeutung der SFG-Ausdrücke eingehen muss.

46 Die Entscheidung der Wahrheit einer *jeden* Aussage muss stets bewerten, ob das, was die Aussage behauptet (die Bedeutung der Aussage) tatsächlich der Fall ist – dies trifft auch für Gedankengefügeaussagen zu: eine $\mathfrak{C}$-Gedankengefügeaussage $A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn zutrifft, was die Aussage ihrer Bedeutung gemäß behauptet, dass nämlich nicht A wahr und B zugleich falsch ist (dies ist die zu beachtende *Bedeutung* der Aussage) – die Bedeutung der Gedankengefüge besteht darin, dass (überflüssigerweise!) die schon vorausgesetzte Wahrheit oder Falschheit von Aussagen tautologisch oder informationsverschleiernd behauptet wird und diese Bedeutung muss bei der Prüfung der Wahrheit von Gedankengefügeaussagen zunächst beachtet werden.

47 „Der Prädikator drückt das Prädikat und seine Zuordnung zu dem Argument aus, enthält also *Beschaffenheit plus Kopula*.“ (**A. MENNE**, Einführung in die Logik, S. 58)

48 Wie die Gedankengefüge „expandiert“ werden können, so auch die Gedankengefügeprädikatoren: Da das Gedankengefüge $(A \Rightarrow B) \Leftarrow (A \triangledown B)$ wie das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ besagt, dass jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist, haben auch die prädikatenlogistischen Ausdrücke „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$“ und „$(\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)) \Leftarrow (\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x))$“ die gleiche Bedeutung, nämlich, dass Gegenständen x jedenfalls nicht $\mathfrak{P}$ ohne $\mathfrak{Q}$ zukommt. Die Expansionen können dabei beliebig komplex sein.

49 **GEORG VON WRIGHT** ordnet diese Art von SFG-analogen prädikatenlogistischen Ausdrücken einer „*Non-Quantified-Logic of Properties*“ zu, welche „‚isomorphous‘ to the Logic of Propositions“ (d.h. „isomorph“ zum SFG) sei (On the Idea of Logical Truth, in: Logical Studies, S.29); da die Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren als spezielle „Aussageformen“ zu wahren Aussagen werden, wenn der jeweilige Prädikator (Eigenschaftsprädikat, property) dem gewählten Gegenstand zukommt, spricht **VON WRIGHT** nicht von „Wahrheitsfunktion“, sondern von *presence-function* mit den „presence-values“ *presence* bzw. *absence of the property in the thing* Er verwechselt dann freilich diese Gedankengefügeprädikatoren wie schon die Gedankengefüge mit logischen Formen: für die Prädikate $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sei „$\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x)$“ der *disjunction*-name, „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$“ der „*implication*-name“ von P und Q usw. (30) Wenn der Gedankengefügeprädikator „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$“ für einen bestimmten Gegenstand wahr wird, bedeutet dies jedoch in keiner Weise, dass die Prädikatoren $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{Q}(x)$ in der logischen Beziehung der Implikation stehen. Die „Non-Quantified-Logic of Properties” ist ebenso wenig eine Logik wie die „Aussagenlogik“ – denn die Gedankengefügeprädikatoren wiederholen wie schon die Gedankengefüge nur die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen (oder „presence-values“) bestenfalls tautologisch und geben die vorausgesetzte Meinung, dass einem Gegenstand bestimmte Prädikate zukommen oder nicht, mit oder ohne Informationsverschleierung wieder, ohne dass irgendein logischer Zusammenhang bestimmt würde. Der Name *Non-Quantified-Logic of Properties* suggeriert außerdem, in diesem SFG-analogen System würden noch keine Quantifikationen vorgenommen; dies trifft nicht zu, denn die Unterscheidung von „Eigenschaftstautologien“ (tautology of the properties) und Eigenschaftsnichttautologien), d.h. von allgemeingültigen und nichtallgemeingültig-erfüllbaren Gedankengefügeprädikatoren (als Aussageformen) stellt bereits eine Quantifikation im Sinne der Logistik dar, auch wenn sie nicht explizit als solche zur Kenntnis genommen und dargestellt wird.

50 Hier wird auch deutlich, dass die fregeschen Vorstellungen von der „Ungesättigtheit“, „Ergänzungsbedürftigkeit“, „Unselbstständigkeit“ der Prädikate, die durch „Gegenstände“ gesättigt werden, die im Gegensatz zu ihnen „abgeschlossen“, „gesättigt“ und „selbstständig“ sind, dem logischen Grundverhältnis der Prädikation nicht gerecht wird: denn hier werden die „ungesättigten“ Erfüllbarkeitsprädikate durch ebenso „ungesättigte“ Aussageformen „gesättigt“.

51 **MENNE**, Einführung in die Logik, S.59; Quantoren machen in dem Sinne aus Aussageformen Aussagen, als sie Erfüllbarkeitsprädikate sind, die diesen Aussageformen zugesprochen werden.

GEORG KLAUS, Stichwort: *Konstante, prädikatenlogische*, MLWP 2, S.649: „Zum Unterschied zu den aussagenlogischen Konstanten, mit deren Hilfe aus Aussagen andere Aussagen erzeugt werden können, können durch prädikatenlogische Konstante aus Aussagefunktionen (prädikatenlogische Ausdrücke mit mindestens einer freien Variable) Aussagen erzeugt werden. Prädikatenlogische Konstanten in diesem Sinne sind der sog. Allquantor und der sog. Existenzquantor.“

52 In den Erläuterung **BOCHEŃSKI**s und **MENNE**s treten beide Konzeptionen neben- und durcheinander auf: einerseits soll der Ausdruck „$\forall x\, f(x)$“ bedeuten „für alle (Gegenstände) x gilt: *f* von x“ {das Prädikat *f* kommt x zu}, was eindeutig der objektbezogenen Konzeption entspricht, dann heißt es im selben Absatz, der Allquantor oder „Generalisator bedeutet, dass jede Einsetzung einer Konstanten für die in ihm enthaltenen Variablen in die Aussagefunktion, auf die er sich bezieht, eine wahre Aussage ergibt.“ (Abriss der Logistik, S.68) Vgl. **S.HAACK**, S. 42.
HILBERT und **ACKERMANN** schreiben, dass ein Ausdruck wie „$\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx)$“ von einer Aussageform die Allgemeinheit behaupte, und behaupten gleich danach , der Ausdruck besage, „dass alles, was eine gewisse Eigenschaft F hat, auch die Eigenschaft G hat.“ (70)
Sehr deutlich ist die Verwischung beider Konzeptionen bei **STUHLMANN-LAEISZ**: Es sei „das Ergebnis der Anwendung des Allquantors ›für alle a‹ auf die Aussagefunktion ›a ist F‹ der vollständige Satz: ›Alle Entitäten haben die Eigenschaft F‹ oder halbformal: ›für alle a: a ist F‹.“ (Gottlob Freges ‚Logische Untersuchungen‘, S.186)

53 **SUSAN HAACK**, Philosophy of Logics, S. 42

Klar haben **RUSSELL** und **WHITEHEAD** die substitutionelle Konzeption formuliert: „So gibt es zu irgendeiner Propositionalfunktion $\phi\hat{x}$ einen Bereich oder eine Menge von Werten, bestehend aus allen (wahren oder falschen) Propositionen, die man erhält, indem man dem *x* in $\phi\hat{x}$ jede mögliche Bestimmung gibt. … Nun muss man bezüglich Wahrheit und Falschheit von Propositionen dieses Bereichs drei wichtige Fälle auffassen und symbolisch bezeichnen… Entweder 1. alle Propositionen des Bereichs sind wahr, oder 2. einige {im Sinne von zumindest eine} Propositionen des Bereichs sind wahr, oder 3. keine Proposition des Bereichs ist wahr. Der Tatbestand 1 wird symbolisiert durch ‚$(x)\ \phi\hat{x}$ ‘ und 2 wird symbolisiert durch ‚$(\exists x)\cdot\phi\hat{x}$ ‘. Von diesen zwei Symbolen wird keine Definition gegeben; sie stellen also zwei neue Grundbegriffe in unserem System dar.“ (Principia Mathematica, Vorwort und Einleitungen, S.26) (Die Autoren präsentieren hier eine eindeutige, korrekte Definition der Quantoren im Rahmen der substitutionellen Konzeption und erklären im Anschluss daran die so definierten Begriffe zu „undefinierten Grundbegriffen“; solche überraschenden Wendungen sind eine Spezialität der „modernen Logik“.)j

Ebenso eindeutig vertritt **QUINE** die substitutionelle Konzeption: „‚$(\exists x)\varphi$‘ ist … dann und nur dann wahr, wenn die Formel φ nicht für alle Werte der Variablen α falsch ist, also dann und nur dann, wenn φ für einige Werte von α wahr ist.“ (Von einem logischen Standpunkt, S.85) Korrekt müsste es allerdings heißen: die *Aussage* ‚$(\exists x)\varphi$‘, welche die Erfüllbarkeit der Aussageform φ behauptet, ist genau dann wahr, wenn zumindest eine von den Aussagen, die aus einer möglichen Variablenersetzung in der Aussageform φ resultieren, wahr ist; dass etwas (die Formel φ, die ja gar nicht wahrheitswertdefinit ist) bald wahr, bald falsch ist, ist ja nicht möglich.

In **TUGENDHAT**/**WOLF** heißt es richtig, dass in **FREGE**s „neue Auffassung“ eine Quantifikationsaussage eine Aussage über die Wahrheit anderer Sätze sind, nämlich diejenigen, die bei der Substitution entstehen; der Satz „Alle F sind G“ (er wird verwechselt mit: „$(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$“) sei wahr, wenn die Feststellungs-Sätze „a_i ist nicht F ohne zugleich G zu sein“ (verwechselt mit „wenn a_i F ist, so ist es G“) für jedes a_i aus dem Bezugsbereich wahr seien (S. 91). Allerdings übersehen die Autoren, dass der Ausdruck „alle F sind G“ bzw. „$(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$“ erst eine Erfüllbarkeitsaussageform ist, die erst bei der Ersetzung der Beliebig-Element-Zeichen F und G durch Bezeichnungen konkreter Prädikate zu einer Erfüllbarkeitsaussage wird.

Andere Vertreter der „modernen Logik“ gebrauchen die Quantoren nur im Sinne der gegenstandsbezogen („objectional“) Konzeption; für **WESSEL** sind die Quantoren „logische Operatoren …, die sich auf Termini in Aussagen beziehen“ (Logik, S. 189); diese Termini sind aber „Variablen“, die in „Aussageformen“ vorkommen; **WESSEL** übersieht die Tatsache, dass die Quantifikation auf Grund der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge nicht die Gegenstände oder die sie bezeichnenden „Terme“ betrifft, sondern nur die *Aussagen*, die durch Ersetzung der „Variablen“ aus einer Aussageform gewonnen werden können. Einerseits ist die Unterscheidung von Aussage und Aussageform für die „moderne Logik“ von zentraler Bedeutung, andererseits wird überaus häufig zwischen Aussagen und Aussageformen überhaupt kein klarer Unterschied gemacht.

54 Hier ist deutlich, dass im Rahmen der Konzeption der Aussageformen die Bestimmung logischer Formen wie $\forall x Fx$ und $(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$ abhängig wird vom Nachweis und der Bewertung empirisch-konkreter Prädikate, die mutmaßlich in besagter logischer Beziehung stehen; dies ist mit dem nicht-empirischen Charakter der theoretischen Logik nicht zu vereinbaren; in der theoretischen Logik werden die infinit vielen und beliebig komplexen logischen Formen ganz unabhängig davon bestimmt, ob man Prädikatoren kennt, die vermutlich in diesen Beziehungen stehen.

55 Im Ausdruck des empirischen Gesetzes „$\forall x$ [Mensch(x) $\Rightarrow$ Sterblich(x)]“ darf das Beliebig-Element-Zeichen x auch nicht durch die Bezeichnung eines konkreten Individuums ersetzt werden.

56 **S. KONDAKOW**, Wörterbuch der Logik, S. 393; **H. HERMES**: Prädikatenlogik, HWP 7, 1186-1194

57 **QUINE** nennt Gedankengefügeprädikator-Schemata wie „$(Px \Rightarrow Qx)$“ und „$Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ *offene Quantorenschemata*, die zu *abgeschlossenen Quantorenschemata* werden, wenn ihnen ein Quantor über die „freien“ Individuenvariablen vorangestellt wird

(Grundzüge der Logik, S. 130). Offenbar merkt **QUINE**, der Aussageformen als Schemata bezeichnet, nicht, dass „(Px ⇒ Qx)" und „Qx ⇒ (Px ▽ Qx)" noch gar keine Aussageformen sind. **QUINE** meint dann, ein abgeschlossenes Quantorenschema sei *allgemeingültig*, „wenn es unter jeder Interpretation von ›Fx‹, ›Gx‹ usw. wahr ist" (S. 134); er räumt damit zumindest indirekt ein, dass erst solche abgeschlossenen Quantorenschemata Aussageformen, und zwar Erfüllbarkeitsaussageformen sind, und dass ihre Charakterisierung als allgemeingültig eine Quantifikation im Bereich der Prädikate darstellt. Ein „offenes Quantorenschema" wie Qx ⇒ (Px ▽ Qx) sei schließlich selbst allgemeingültig, wenn „der dazugehörige Allsatz" ∀x [Qx ⇒ (Px ▽ Qx)] allgemeingültig sei (S. 137); dies ist das Zugeständnis, dass Ausdrücke wie „Qx ⇒ (Px ▽ Qx)" implizit als Abkürzungen für „∀x [Qx ⇒ (Px ▽ Qx)]" aufgefasst werden. Nur von Ausdrücken wie „∀x [Qx ⇒ (Px ▽ Qx)]", nicht von „Qx ⇒ (Px ▽ Qx)", kann Allgemeingültigkeit behauptet werden.

Für **HILBERT** und **BERNAYS** ist es eine „Grundformel", dass ∀x $\mathcal{F}$(x) nicht wahr sein kann, ohne dass $\mathcal{F}$(x) wahr ist (Grundlagen der Mathematik I, S.104). Ebenso etwa **R.CARNAP** (Symbolische Logik, S. 59), **LUDWIK BORKOWSKI** (Formale Logik, S. 146f), **BOCHEŃSKI**/**MENNE** (Grundriss der Logistik, S. 73)

58 Zweifach elliptisch sind Formeln der Gestalt $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$, einfach elliptisch sind Formeln der Gestalt $\forall(x_1, \ldots, x_n)$ [$\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$.

59 Einführung in die Logik, S.59 – Wenn **BOCHEŃSKI** und **MENNE** schreiben „Eine Aussageform ist keine Aussage, kann aber zu einer solchen werden durch Bindung ihrer Variablen durch einen Quantifikator oder durch Einsetzung von Individuenkonstanten für die -variablen" (Grundriss der Logistik, S. 68), übersehen sie, dass dies nur für Ausdrücke gilt, die keine Prädikatvariablen enthalten, was aber für die Ausdrücke der Prädikatenlogistik nicht zutrifft.

Auch **BORKOWSKI** behandelt „Prädikatvariable" wie Abkürzungen von gegenständlichen Prädikaten erster Stufe. „Wenn wir annehmen, dass die Prädikate erster Stufe von einem Argument Merkmale (Eigenschaften) von Gegenständen denotieren und die Prädikate erster Stufe von zwei oder mehreren Argumenten zwischen diesen Gegenständen bestehende zwei- und mehrgliedrige Relationen (Beziehungen) denotieren, dann lesen wir den Ausdruck ‚A(x)': x hat die Eigenschaft (das Merkmal) A bzw. das Merkmal A kommt x zu, den Ausdruck ‚xRy' lesen wir: x steht in der Relation R zu y…" (Formale Logik, S. 140) Diese Erläuterung ist nicht richtig, denn der Ausdruck „A(x)" bezeichnet einen *beliebigen* Prädikator, er denotiert keine bestimmte, konkrete Eigenschaft (nicht den Begriff erster Stufe einer Eigenschaft), sondern einen beliebigen Begriff in seinem Bezug zu geeigneten Gegenständen: den allgemeinen logischen Sachverhalt: irgendein Prädikat P kommt irgendeinem Gegenstand des zu P gehörenden Bezugsbereich zu: über diese Sachverhalte können dann durchaus selber Aussagen getroffen werden: etwa: Wenn irgendein Prädikat P irgendeinem geeigneten Gegenstand zukommt, dann ist es unmöglich, dass diesem Gegenstand dieses Prädikat zugleich nicht zukommt.

60 Grundlagen der Mathematik I, S.87

61 **A.OBERSCHELP**, Elementare Logik und Mengenlehre I, S.10

62 **WESSEL**, Logik, S.190

63 Grundzüge der Logik, S.130

64 **H.HERMES**, HWP 7, Sp.1193

KONDAKOW schreibt, es sei charakteristisch für einen *Prädikatenkalkül* der *ersten Stufe*, „dass … nur Quantifizierungen von *Individuenvariablen* zugelassen sind." (Wörterbuch der Logik, S.392) „In first-order predicate calculus only ›individual‹ variables, ‚x', ‚y' … etc., may be bound by the quantifiers; in *second-order* calculi ‚F ', ‚G ' ... etc. may also be bound, as in ‚(x) (F) (Fx)'." (**HAACK**, S. 40) „Die Quantoren einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe beziehen sich wie die ξ-Quantifikatoren nur auf Einzelgegenstände (Individuen) und nicht auf (durch prädikative Ausdrücke bezeichnete) Eigenschaften. Prädikatenlogische Sprachen, in denen auch über prädikative Ausdrücke quantifiziert wird, nennt man *prädikatenlogische Sprachen höherer Stufen…* Die elementare Logik bezieht sich ausschließlich auf prädikatenlogische Sprachen erster Stufe." (**KLEINKNECHT**/**WÜST**: Lehrbuch der elementaren Logik, Band 2: Prädikatenlogik, S.268f)

65 **FREGE** hält die Bestimmung der *Existenz* für einen Begriff zweiter Stufe (vgl. oben Freges Verständnis der Existenz, S. 199; auch natürliche Zahlen werden zu Unrecht für Begriffe zweiter Stufe gehalten.

66 Nach der Stufigkeitskonzeption der Prädikatenlogistik würden Prädikate erster Stufe erst in der Prädikatenlogik zweiter Stufe prädiziert werden.

67 Wenn ich den Gegenstand *Hans Huckebein* als *Raben* bestimme, dann ordne ich diesen Gegenstand in ein umfassendes Wissen von in bestimmten logischen Verhältnissen stehenden Begriffen erster Stufe ein: ich weiß, dass Hans Huckebein *als Rabe* notwendig ein *Vogel*, notwendig ein *Wirbeltier* ist, dass es unmöglich ist, dass er ein *Säugetier* oder ein *Lurch* ist, dass es möglich ($\mathcal{M}$) ist, dass er ein *Kolkrabe* oder ein *Weißhalsrabe* oder ein *Wüstenrabe* ist; ich weiß, dass er *Allesfresser* ist, dass er kein Fellkleid hat, dass er zuweilen fliegt, dass es aus einem Ei geschlüpft ist. Der Gegenstand wird so einem ganzen Netz von Begriffen erster Stufe subsumiert, deren Beziehungen in Wenn-dann-Gesetzen/Allsätzen/Modalbehauptungen dargelegt werden:

> *Wenn etwas ein* Rabe *ist, dann ist es ein* Vogel *(ein* Wirbeltier*)* ≡ *Alle* Raben *sind* Vögel ≡ *ein* Rabe *ist notwendig (ohne Ausnahme) ein* Vogel.
> *Wenn etwas ein* Rabe *ist, dann ist es kein* Säugetier (Lurch) ≡ *Kein* Rabe *ist ein* Lurch ≡ *es ist unmöglich, dass irgendein* Rabe *ein* Lurch *ist.*

Wenn etwas ein Rabe *ist, dann ist es möglicherweise ein* Kolkrabe (*ein* Wüstenrabe*, ein* Weißhalsrabe) ≡ *Einige (aber nicht alle)* Raben *sind* Kolkraben ≡ *Ein* Rabe *kann (aber muss nicht) ein* Kolkrabe *sein*
Wenn etwas ein Rabe *ist, dann ist es* Allesfresser, hat es kein Fellkleid (kann es fliegen, ist es aus einem Ei geschlüpft, usw.) ≡ *Alle* Raben *sind* Allesfresser, haben kein Fellkleid usw. ≡ *ein* Rabe *ist notwendig ein* Allesfresser usw.

Die teilweise synonymen Wendungen, die die logische Beziehung zwischen den Begriffen erster Stufe ausdrücken, sind kursiv gesetzt.

68 **Hoyningen-Huene** meint, aus den Ausdrücken konkreter All- und Existenzaussagen könne man „prädikatenlogische Formen“ gewinnen, indem man „vom Inhalt des Individuenbereichs (Art und Anzahl der Individuen), vom Sinn der Prädikate und vom Sinn der Individuenkonstanten“ *abstrahiere*; von der „Abstraktion“ verschont blieben nur Gleichheit, Verschiedenheit und Stelligkeit der Prädikate (Formale Logik, S. 197); an die Stelle der Bezeichnungen konkreter Prädikate erster Stufe würden „Prädikatbuchstaben“ gesetzt (S. 201), die zwar nicht bloß als Abkürzungen der ursprünglichen konkreten Prädikate zu betrachten seien, aber doch nur „Prädikatenplatzhalter“ darstellten: sie „stehen da, wo vor dem Abstraktionsschritt Prädikate standen“, sie halten „den Platz für ein Prädikat frei“ (198); es wird unspezifisch von „Prädikatbuchstaben“ gesprochen (201).

Die gängige Vorstellung, die Erkenntnis der logischen Formen verdanke sich solchen „Abstraktionen“, ist eine unzutreffende, logisch widersprüchliche Darlegung jener komplexen logischen Bezugsetzungs- und Vergleichsoperationen, die zu jenen gehaltvollen Verallgemeinerungen führen, denen sich die Kenntnis der logischen Formen verdankt. Verallgemeinerungen resultieren aus einem systematischen Vergleich der untersuchten Inhalte mit anderen Inhalten hinsichtlich ihrer Unterschiede und Gleichheiten; deshalb können Verallgemeinerungen gar nicht auf „Abstraktionen“ beruhen: wenn ich von den Inhalten der zu verallgemeinernden Konzepte „absehe“, bleibt nichts mehr übrig, das in verallgemeinernder Perspektive verglichen und bestimmt werden könnte. Wenn ich bei der Betrachtung von Birnen von ihrem Birnen-Sein tatsächlich „abstrahieren“ würde, bliebe kein Obst übrig, sondern nur leere Worte; auch bei der Reflexion und Analyse konkreter bedingungslogischer Zusammenhänge bleiben keine „abstrakten“ implikativen, konträren usw. Beziehungen übrig, wenn ich von jeweils besonderen Gehalt dieser konkreten bedingungslogischen Zusammenhänge „absehe“; nur dann, wenn ich diese Gehalte/Inhalte in ihrer mannigfaltigen, je besonderen Bestimmtheit systematisch auf bestimmte strukturelle Unterschiede und Gleichheiten hin untersuche, kann ich den Begriff der Implikation, des konträren Verhältnisses usw. gewinnen. Wenn vom Inhalt eines mathematischen Implikationsgesetzes „abstrahiert“ wird, verschwindet auch die Implikation, denn diese ist ja die Beziehung, in der die mathematischen Inhalte stehen, und die diesen Inhalten ihre Bestimmtheit verleiht. Die Ansicht, „Abstraktionen“ könnten die Grundlage der Erkenntnis allgemeiner Begriffe sein, ist eine ungenaue und undurchdachte erkenntnistheoretisch-logische Konzeption: die Erkenntnis allgemeiner Zusammenhänge entspringt nicht der „Abstraktion“ (dem Absehen, Ignorieren, Vernachlässigen der zu verallgemeinernden Inhalte), sondern dem systematischen und umfassenden logischen *Vergleich* der Inhalte; dieser Vergleich wäre gar nicht möglich, wenn von den Besonderheiten, und den unterschiedlichen Gehalten, also von dem, was verglichen werden soll, „abgesehen“ würde; die „Abstraktions“-Vorstellung mystifiziert den Aspekt der Gleichheit; sie vereinseitigt die Gleichheit, weil sie diese von den Unterschieden abspaltet: es handelt sich bei einer Verallgemeinerung aber um die Erarbeitung spezifischer Gleichheiten von sich spezifisch Unterscheidenden. Die Verallgemeinerung ignoriert nicht den („sieht nicht ab vom“) einzelnen/besonderen Inhalt, sondern macht diesen zu einem beliebigen logisch untergeordneten Fall des Allgemeinen. Die „Abstraktion“ – wäre so etwas tatsächlich durchführbar – würde immer beim Einzelnen stehen bleiben, das nur Gehalt und Bestimmtheit verlöre und so zu einer zunehmend leeren Einzelvorstellung würde. Nähme man von einer konkreten All- oder Existenzaussage den spezifischen Gehalt weg, bliebe man bei dieser *einzelnen* Aussagen stehen, diese einzelne Aussage würde nur in ihrem Gehalt verarmt, es bliebe recht besehen, gar nichts von ihr übrig: weder eine einzelne Aussage, noch der allgemeine Begriff aller derartigen Aussagen, deshalb ist „Abstraktion“ eine rein imaginäre, nicht wirklich durchführbare Operation. Die Rede von „Abstraktion“ ist irreführende, oberflächliche Erkenntnistheorie. Mit dieser Abstraktionsvorstellung verbunden ist die Meinung, die Darstellung einer bestimmten logischen Form bzw. eines bestimmten logischen Gesetzes sei, auf Grund ihrer angeblichen „Abstraktheit“, noch einer „Interpretation“ zugänglich; indem die Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate durch Bezeichnungen konkreter Prädikate ersetzt würden, werde der „Abstraktionsschritt, der von der Aussage zu ihr {der prädikatenlogischen Formel} geführt hat, vollständig rückgängig“ gemacht (**Hoyningen-Huene**, S. 208). Dass dann erst solcherart „interpretierten“ prädikatenlogischen Ausdrücken Sinn und Wahrheitswertdefinitheit zugebilligt wird – dies wird auch von der Konzeption der Aussageformen unterstellt –, zeigt, dass diese Konzeption beim Einzelnen stehen bleibt und gar nicht zur Einsicht der logischen Formen in ihrer Allgemeinheit gelangt.

69 Begriffe erster Stufe unterscheiden sich etwa dadurch, dass sie die Artbestimmtheit, den veränderlichen Zustand oder eine fixe Eigenschaft von Gegenständen bestimmen (die entsprechenden Begriffe zweiter Stufe sind dann: Ousiabegriff, Zustandsbegriff, Eigenschaftsbegriff), dass sie eine quantitative oder qualitative Bestimmung vornehmen, dass sie die Stelligkeit von Begriffen erster Stufe bestimmen, usw.

70 Ein Begriff zweiter Stufe (z.B. der Begriff *Ousiabegriff*), der einem Begriff erster Stufe zukommt (z.B. dem Begriff *Pferd*), ist hingegen nicht übergeordneter Gattungsbegriff des Begriffs erster Stufe.

71 Dass einem Gegenstand x ein Prädikat P *nicht* zukommt, drücke ich durch den Ausdruck „∼Px“ aus.

72 Im „Quantorenquadrat“ – die Relationenmatrix mit den vier Quantoren – fehlt allerdings in aller Regel jener Quantor, der nicht durch Negation aus ∀ oder ∃ gewonnen werden kann: einige (zumindest eines), aber nicht alle x sind P. Für diese Form gibt es in der Begriffsschrift keinen elementaren Quantor, er müsste begriffsschriftlich dargelegt werden etwa durch den Ausdruck „(∃x) Px & (∃x) ∼Px“; ich stelle diesen Quantor (einige, aber nicht alle x sind P) durch den Ausdruck ∃∃x Px dar.

73 „Bemerkenswert ist die Äquivalenz ‚∃xFx‘ ⇔ ‚¬∀x¬Fx‘. Ist nämlich Φ ein beliebiges einstelliges Prädikat, so ist ‚es gibt ein x mit der Eigenschaft Φ‘ und ‚nicht für alle x ist nicht Φx der Fall‘ in allen Bereichen gleichbedeutend. Desgleichen ist ‚∀xFx‘ ⇔ ‚¬∃x¬Fx‘.“ **HILBERT/ACKERMANN**, Grundzüge der theoretischen Logik, S. 76 (statt ¬ und ⇔ werden die Zeichen → und äq benutzt).

74 **BOCHEŃSKI** meint, in der „modernen Logik“ seien die Quantoren „‚alle‘ und ‚es gibt‘, welche auf Individuen bezogen sind“, „im Gegensatz zur aristotelischen Tradition, als von der quantifizierten Funktion“ – dem Prädikat P – „und ihrer Kopula getrennt gedacht.“ (Formale Logik, S. 402) Diese Behauptung ist falsch, denn diese Trennung ist unmöglich, da es sich bei der Quantifikation um die Beziehung von zwei Prädikaten handelt; die Negation der Quantoren ist nur bei Einbezug der Prädikate und ihres Zukommens (Kopula) möglich – *nicht alle* bedeutet ja *einige nicht* und *nicht eines* bedeutet *alle nicht* – es wird für einige oder alle das Zukommen (die Kopula) negiert.

75 **BOCHEŃSKI/MENNE**, Grundriss der Logistik, S. 71

76 Für den in dieser Matrix vernachlässigten Quantor „(zumindest) eines, aber nicht alle“ hinzugefügt, den ich durch „∃∃xPx“ darstelle, ergeben sich die zusätzlichen Gesetze

∀xPx ↑∃∃xPx
∀x ~ Px ↑ ∃∃xPx
∃xPx ←∃∃xPx
∃x ~Px ←∃∃xPx.

Aus der Bedeutung des Quantors ∃∃xPx ergibt sich außerdem die Äquivalenz (∃∃xPx ↔ ∃∃x ~Px).

77 Da die Ausdrücke „∀x Px“ und „∃x Px“ jetzt durch das Gedankengefügezeichen „⇒“ verbunden sind, wird die logische Gesetzesaussage „[(∀x) Px] → [(∃x) Px]“ über den logischen Zusammenhang zweier logischer Formen zu einer Erfüllbarkeitsaussage im Bereich der Prädikate.

78 Das 𝔼-Gesetz ∀x Px ↔ ∀x Px lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung „∀ P [∀x Px ⇔ ∀x Px]“ und bedeutet „∀ P [¬ (∀x Px & ¬ ∀x Px) & ¬ (¬ ∀x Px & ∀x Px)]“, wegen der Gesetze des SFG (A & B) ↔ (B & A) und (A & A) ↔ A gleichbedeutend mit ∀ P [¬ (∀x Px & ¬ ∀x Px)] ≡ ∀ P [¬ (¬∃x ¬Px & ∃x ¬Px).

79 Das Gesetz ∃x Px ≻≺ ∀x ∼Px lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung „∃x Px ⋈ ∀x ∼Px“ und bedeutet ¬ (∃x Px & ∀x ∼Px) & ¬ (¬ ∃x Px) & ¬ (¬ ∀x ∼Px), wegen des Quantorenquadrat-Gesetzes (∀x ∼Px) ↔ ∼(∃x Px) und der SFG-Gesetze ¬ ¬ A ↔ A, (A & B) ↔ (B & A) und (A & A) ↔ A gleichbedeutend mit ¬ (∃x Px & ¬ ∃x Px) ≡ ∀ P [¬ (∀x¬ Px & ¬ ∀x¬ Px)].

80 Zwischen ∀x Px und ∀x ∼Px besteht ein konträrer Gegensatz (𝔻-Relation) und zwischen ∃x Px und ∃x ∼Px besteht ein subalterner Gegensatz (𝔸-Relation).

81 Der Ausdruck ∃∃x Px verweist auf die logische Form (11•1) (x ∈ **B**, Px) – einem Gegenstand des Bezugsbereichs kommt möglicherweise (𝒦) das Prädikat P zu.

82 **BOCHEŃSKI/MENNE** (Grundriss der Logistik, S. 72) führen als „Grundgesetze“ ein ∀xPx ⇒ Pa (Pa: ein Prädikat P kommt irgendeinem bestimmten Gegenstand a zu), Pa ⇒ ∃xPx und ∀xPx ⇒ ∃xPx (das dritte „Grundgesetz“ folgt schon aus den beiden ersten). Dasselbe bei **HILBERT/BERNAYS** (Grundlagen der Mathematik I, S. 104) Bei **HILBERT/ACKERMANN** werden Gesetze des Quantorenquadrats als nicht weiter begründete „Ableitungsregeln“ eingeführt (Grundzüge der theoretischen Logik, S. 78).

83 **HILBERT/ACKERMANN** (Grundzüge der theoretischen Logik, S. 78f) geben vor, aus einem allgemeingültigen, SFG-analogen prädikatenlogistischen Ausdruck den *nicht*-SFG-analogen Ausdruck „(∃x¬Fx ▽ ∃xFx)“ {≡ „(∀x Fx ⇒ ∃x Fx)“} herleiten zu können. Sie gehen aus von der Formel

(1) „∃x ¬Fx ▽ **¬Fy** ▽ ∃x Fx **▽ Fy**“.

Diese Formel ist wegen „… ¬Fy … ▽ Fy“ allgemeingültig („Grundformel“) und kann ausgehend vom Fregegesetz ¬(A &¬A) ≡ (¬A▽A) konstruiert werden: wenn wir die „Aussagevariable“ A durch den Prädikator Fy ersetzen, erhalten wir die Formel Fy ▽¬Fy, die zumindest implizit zur Erfüllbarkeitsaussageform ∀y (Fy ▽¬Fy) zu vervollständigen ist. Der resultierenden Formel können beliebige ▲-Glieder angehängt werden, ohne dass die prädikatenlogistische Allgemeingültigkeit der Formel Fy▽¬Fy bzw. ∀y(Fy▽¬Fy) davon berührt ist. Indem der Formel Fy ▽¬Fy als zwei von einander unabhängige ▲-Glieder ∃xFx und ∃x¬Fx angefügt werden, entsteht die Formel (1); dabei muss beachtet werden, dass die Allgemeingültigkeit der ganzen Formel (1) einzig auf Grund der Allgemeingültigkeit der Glieder Fy▽¬Fy bzw. ∀y(Fy▽¬Fy) besteht, die aus dem ursprünglichen Fregegesetz hergeleitetet ist. Entfernt man aus (1) eines der ▲-Glieder Fy oder ¬Fy, so steht die Allgemeingültigkeit von (1) in Frage.

Auf den Ausdruck (1) wenden die Autoren eine „Ableitungsregel“ (d) an, derzufolge, wenn ∃x𝓕x ▽ 𝓕y als prädikatenlogistisch allgemeingültig erwiesen ist, auch ∃x𝓕x als allgemeingültig behauptet werden darf:

(d) aus ∃x𝓕x ▽ 𝓕y lässt sich ∃x𝓕x herleiten

$\mathcal{F}$ bezeichnet dabei einen Prädikator oder Gedankengefügeprädikator mit der „freien Variable“ x ($\mathcal{F}$x „ist irgendein Ausdruck, der die freie Variable *x* enthält“ (ebd. 78)). Der Ausdruck „$\mathcal{F}$y“ ist implizit gedacht als „∀y $\mathcal{F}$y“. Die Regel (d) ist freilich nichts anderes als das Quantorengesetz ∀y Py ⇒ ∃x Px, gleichbedeutend mit „∀x Px ⇒ ∃x Px“. Denn der Ausdruck ∃x$\mathcal{F}$x ▽ $\mathcal{F}$y kann nur dann allgemeingültig sein, wenn $\mathcal{F}$y allgemeingültig ist (das ▲-Glied ∃x$\mathcal{F}$x kann also weggelassen werden); wäre wohl ∃x$\mathcal{F}$x, nicht aber $\mathcal{F}$y allgemeingültig, müsste entweder die Erfüllbarkeitsaussageform (∃x Px) oder die Erfüllbarkeitsaussageform [∃(x) $\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x) allgemeingültig sein („$\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x)“ bezeichnet einen Gedankengefügeprädikator, der die Prädikatoren P_1x, P_2x, … und P_nx durch irgendwelche Gedankengefüge verbindet). Die Erfüllbarkeitsaussageform „∃xPx“ ist jedoch nicht allgemeingültig, weil nicht jedes Prädikat zumindest einem Individuum (aber nicht allen) des zugehörigen Bezugsbereich zukommt. Der Ausdruck ∃(x) $\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x) kann nicht prädikatenlogistisch allgemeingültig sein, ohne dass auch ∀(x) $\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x), und damit $\mathcal{F}$y, prädikatenlogistisch allgemeingültig ist. Nur wenn der Gedankengefügeprädikator $\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x) die Allrelation ist, gilt ∃(x) $\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x) – aber nur, weil dann auch ∀(x) $\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x) allgemeingültig ist; wenn der Gedankengefügeprädikator nicht die Allrelation ist, gibt es zu ihr immer eine kontradiktorische Relation – und für alle Prädikate die in dieser kontradiktorischen Relation stehen, ist ∃(x) $\mathcal{F}\langle P_1,\ldots,P_n\rangle$(x) falsch. Für den Gedankengefügeprädikator (Fx⇒Gx) z.B. kann die Erfüllbarkeitsaussageform (∃x)(Fx⇒Gx) nicht allgemeingültig sein, denn sie wird falsch für alle Prädikate F und G, die in der zu (∃x)(Fx⇒Gx) ≡ (∘•∘∘) (Fx, Gx) kontradiktorischen Relation (0100)(Fx, Gx) stehen. Damit steht fest: Wenn der Ausdruck „∃x $\mathcal{F}$x ▽ $\mathcal{F}$x“ prädikatenlogistisch allgemeingültig sein soll, dann muss gelten: ∀$P_1,\ldots,P_n$ (∀y$\mathcal{F}$y)“; dann aber ist diese Regel (d) das Gesetz: ∀y$\mathcal{F}$y⇒∃x $\mathcal{F}$x.

Diese Regel (d) wenden nun **HILBERT**/**ACKERMANN** zweimal hintereinander auf die Formel (1) an: Zuerst leiten sie aus dem Teilausdruck von (1) „∃x¬Fx ▽ ¬Fy ▽…“ die Formel ∃x¬Fx her, danach aus dem Teilausdruck von (1) „∃x Fx ▽ Fy ▽…“ die Formel ∃x Fx. Dieses Vorgehen wäre nur dann korrekt, wenn *sowohl* Fy *als auch* ¬Fy in Formel (1) von einander unabhängig als allgemeingültig erwiesen wären; durch die Herleitung von (1) aus dem Fregegesetz (A▽¬A) ist jedoch wohl ∀y (Fy▽¬Fy), nicht aber ∀y (Fy) *und* ∀y(¬Fy) als allgemeingültig erwiesen – die implizite Behauptung der Autoren, dass ∀y (Fy) und ∀y(¬Fy) zugleich gelten, ist sogar ein Widerspruch. **HILBERT**/**ACKERMANN**s Ableitung des Gesetzes ∃xFx▽∃x¬Fx aus einem Fregegesetz ist logisch inkorrekt und ungültig; es ist prinzipiell unmöglich aus einem Fregegesetz A▽¬A ein prädikatenlogistisches Gesetz ¬(¬∃xFx & ¬∃x ¬Fx) herzuleiten – eben weil ¬∃xFx und ¬∃x ¬Fx zueinander nicht kontradiktorisch wie A und ¬A, sondern konträr sind.

84 **FREGE** und viele seiner Anhänger übersehen bei der Deutung der Fregerelationen, dass die Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge sie zur „substitutionellen Auffassung der Quantifikation“ verpflichtet; so meint **FREGE**, den Ausdruck „(∀x) (Fx ⇒ Gx)“ ohne weiteres mit „Wenn etwas die Eigenschaft P hat, dann hat es die Eigenschaft Q“ oder „Jedes P ist ein Q“ oder „Alle P’s sind Q“ übersetzen zu können (BG 23). Weder dieser „objektionale Gebrauch“ der Quantoren, noch diese „Übersetzung“ stimmt mit seiner Bestimmung des Gedankengefüges ◖ überein (nebenbei bemerkt, ist die Erläuterung einer Zeichenkette oder die paraphrasierende Formulierung eines Ausdrucks keine Übersetzung). Quantifikation im Rahmen der „modernen Logik“ ist immer eine Aussage über die aus Variablenersetzungen in einer Aussageform resultierenden Aussagen, nie eine Aussage über Gegenstände eines bestimmten Bezugsbereichs.

85 BS 23; Hervorhebungen von mir, J.P. — Hier ist deutlich, dass **FREGE** die Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate F und G wie konkrete Prädikate behandelt; nur wenn ein konkretes Prädikat einem Gegenstand zugesprochen wird, ergibt sich eine Aussage. Die Behauptung **FREGE**s ist also falsch; richtig müsste er sagen: „Werden die „Prädikatvariablen“ F und G durch die Bezeichnungen konkreter Prädikate ersetzt, dann ergibt sich in manchen Fällen, dass bei jeder Ersetzung von x durch eine Eigennamen dass (Fx und ∼Gx) falsch ist; in anderen der Ersetzung von F und G durch konkrete Prädikate ist (Fx und ∼Gx) nicht bei jeder Ersetzung von x durch einen Eigennamen falsch“.

86 Die Bedeutung der Fregerelation ∼(∀x)(Fx⊕Gx) kann – unter Anwendung des Äquivalenzgesetzes ∼(∀x)Px ↔ (∃x)∼Px bestimmt werden als (∃x)∼(Fx⊕Gx): Es gibt wenigstens ein x, für welches die Bedingungen für (Fx ⊕ Gx) nicht gelten; es kommen so für ∼(∀x)(Fx ⊕ Gx) alle logischen Relationen außer denen in Frage, die für *alle* x fordern (Fx ⊕ Gx).

Nehmen wir die Fregerelation ∼(∀x)(Fx ⬉ Gx); der Ausdruck „∼(∀x)(Fx ⬉ Gx)“ ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „(∃x)∼(Fx ⬉ Gx)“; die Forderung von (Fx ⬉ Gx), dass dem x jedenfalls F nicht zukommt, wird von mindestens einem x nicht erfüllt; zumindest einem x kommt also F zu; es kommt jede logische Relation in Frage, außer den Formen 𝕄, 𝕏 und 𝔽, die alle drei fordern, dass keinem x F zukommt.

Der Ausdruck „∼(∀x)(Fx ⋈ Gx)“ ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „(∃x)∼(Fx ⋈ Gx)“; die Forderung von (Fx ⋈ Gx), dass dem x von F und G genau eines und nur eines zukommt, wird von mindestens einem x nicht erfüllt; zumindest einem x kommt entweder F und G zusammen, oder weder F und G zu. Es kommt demnach jede logische Relation in Frage, außer den Totalformen 𝕂, 𝕏 und 𝔼, die alle drei fordern, dass jedem x entweder F und G zusammen oder weder F und G zukommen.

87 Für den Ausdruck „Fx⊕Gx“ lässt sich ∼(Fx ⊕ Gx) bestimmen, wenn das Gedankengefüge „⊕“ durch das kontradiktorische Gedankengefüge ersetzt wird. So ist (∀x) ∼(Fx ⇒ Gx) die Relation (∀x) (Fx ⊧ Gx), und (∀x) ∼(Fx ⇔ Gx) ist (∀x) (Fx ⋈ Gx), usw.

Die Bedeutung von „(∀x) (Fx ⋈ Gx)“ besagt, dass für alle x die Vorkommenskombinationen I (Fx⌢Gx) und IV (∼Fx⌢∼Gx) jedenfalls nicht realmöglich sind; dies bedeutet (wenn man die leere Relation 𝕆 ausschließt), dass allen x von den Prädikaten F und G genau eines zukommt; es ist dann möglich, dass allen x nur F zukommt, nicht aber G (es besteht dann die Relation 𝕃), zweitens dass allen x des Bereichs nur G, nicht aber F zukommt (die Relation $\mathbb{M}$), oder dass einem Teil der x des Bereichs F, aber nicht G, dem restlichen Teil der x G, aber nicht F zukommt (die Relation $\mathbb{J}$).

Entsprechend bezeichnet der Ausdruck „$(\forall x)\sim(Fx \bowtie Gx)$" die Fregerelation $(\forall x)(Fx \Leftrightarrow Gx)$: allen x kommt von den Prädikaten F und G jedenfalls nicht bloß eines zu. Es ist dann möglich, dass allen x beide Prädikate zukommen (Relation $\mathbb{K}$), dass allen x keines der beiden Prädikate zukommt (Relation $\mathbb{X}$), und dass einem Teil der x F und G, dem restlichen Teil der x weder F und G zukommen (Relation $\mathbb{E}$).

88 Aufgrund des Gesetzes $(\forall x)Px \leftrightarrow \sim(\exists x)\sim Px$ bezeichnen die Ausdrücke „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$" und „$\sim(\exists x)(Fx \models Gx)$", die Ausdrücke „$(\forall x)(Fx \Uparrow Gx)$" und „$\sim(\exists x)(Fx \,\&\, Gx)$", die Ausdrücke „$(\forall x)(Fx \Leftrightarrow Gx)$" und „$\sim(\exists x)(Fx \bowtie Gx)$", usw., jeweils dieselbe Fregerelation.

89 Diese vier Abbildungen bilden bezüglich ihrer Hintereinanderausführung eine Kleinsche Vierergruppe.

90 Im konzeptionellen Rahmen der Prädikatenlogistik kann diesem normativ-nichtempirischen Charakter der Logik nicht Rechnung getragen werden; „$\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$" ist als eine Aussageform zu nehmen, die nur dann als nicht unerfüllbar gelten kann, wenn es nachweislich zwei konkrete Prädikatoren $\mathfrak{F}x$ und $\mathfrak{G}x$ gibt, die in der Beziehung stehen; die Bestimmung logischer Formen wird von empirischen Gegebenheiten abhängig.

91 **FREGE** war der Ansicht, dass „notwendige Zusammenhänge nicht nur mit Hilfe der formalen Implikation ausgedrückt werden müssen, sondern die formale Implikation auch ausreiche, notwendige Zusammenhänge auszudrücken, die formale Implikation also als die Explikation des Begriffs des notwendige Zusammenhangs zu verstehen ist." (**GABRIEL, GOTTFRIED**, Einige Einseitigkeiten des fregeschen Logikbegriffs, in: **SCHIRN**, Fregestudien, II, 67-86, S.78) **QUINE** nennt die Fregerelation (∘0∘∘) „generalisiertes Konditional" und glaubt, die Gesetzesaussage „Wenn etwas ein Wirbeltier ist, hat es ein Herz" sei ein Beispiel dafür **QUINE**, Grundzüge der Logik, S.43. Diese Einschätzungen sind falsch.

92 **E.SCHRÖDER** behauptet, erst die Ersetzung der traditionellen Syllogismusrelationen durch die vier angegebenen Fregerelationen führe zu einer „exakten Logik", und in einer solchen könnten u.a. die subalternen Modi gar nicht gültig sein (**BOCHEŃSKI**, Formale Logik, S.424f). In der Tat besteht zwischen keinem Paar der vier Fregerelationen die Subalternationsbeziehung $\mathbb{C}$ – das ist jedoch kein Vorzug, sondern belegt, dass diese vier Fregerelationen gröber und kognitiv viel unbedeutender sind als die traditionellen Syllogismusrelationen; wo die Verwirrung derart Platz greift, kann von Präzisierung und Exaktheit keine Rede sein.

93 **B. RUSSELL** beteuert, erst die Ersetzung der traditionellen a-Relation (1011) durch die Fregerelation (∘0∘∘) habe die traditionelle Syllogistik von „Trugschlüssen" – wie etwa dem Modus *Darapti* – befreit, und den Weg zu einer „mathematischen Logik, wie wir sie besitzen", geebnet (**B. RUSSELL**, Philosophie des logischen Atomismus, S. 227f). Werden die Syllogismusrelationen durch die vier Fregerelationen ersetzt, ergeben sich natürlich andere Modi; und der Modus, der dann üblicherweise mit dem *Darapti* verwechselt wird, ist tatsächlich ungültig; das ändert nichts an der Gültigkeit der traditionellen Modi. Es ist erst die logistische Verwechslung ganz verschiedener logischer Relationen, die zu einer Fülle von Ungereimtheiten und scheinbaren Paradoxien führt.

94 Vor diesem Ausdruck und entsprechenden prädikatenlogistischen Ausdrücken müsste stehen „$\forall$ F,G,H…", denn der Ausdruck behauptet, dass bei jeder Ersetzung von F,G,H durch Bezeichnungen konkreter Prädikate die Erfüllbarkeitsaussageformen $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ und $(\forall x)(Gx \Rightarrow Hx)]$ nicht wahr und die Erfüllbarkeitsaussageform $[(\forall x)(Fx \Rightarrow Hx)]$ falsch ist.

95 Dieses Pränonpendenzgesetz besagt, dass keinesfalls $[(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \,\&\, \sim(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)]$ gelten kann, gleichgültig ob $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt oder nicht.

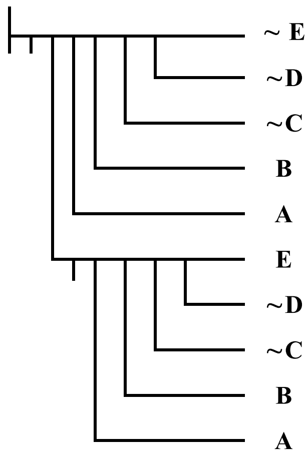
96 **FREGE** benützt nicht lateinische, sondern griechische Großbuchstaben.

97 Ausnahmen sind die mit Neg1 aus Fregerelationen gebildeten Fregerelationen wie etwa $\sim(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) = (\exists x)(Fx \models Gx) =$ (•1••)(Fx, Gx); hier ist Vorkommenskombination II realmöglich, ohne dass alle restlichen Vorkommenskombinationen notwendigerweise nichtrealmöglich sind; dann aber sind diese restlichen Fälle unbestimmt. Aber unter den mit Neg1 gebildeten Fregerelationen der Form $(\exists x)\sim(Fx \oplus Gx)$ gibt es keine Beziehung, die *definitiv* mehr als eine Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt; jede Fregerelation der Form $(\exists x)\sim(Fx \oplus Gx)$ bestimmt nur mindestens einen der Vorkommenskombinationen als realmöglich, die von der Fregerelation $(\forall x)(Fx \oplus Gx)$ ausdrücklich ausgeschlossen werden.

98 Dass ein Ereignis q relativ zu einem Ereignis p notwendig ist, kann nur dann behauptet werden, wenn $p\frown q$ und $\sim p\frown\sim q$ realmöglich sind, $p\frown\sim q$ aber nichtrealmöglich ist. Dass ein Ereignis q relativ zu einem Ereignis p unmöglich ist, kann nur dann behauptet werden, wenn $p\frown\sim q$ und $\sim p\frown q$ realmöglich sind, $p\frown q$ aber nichtrealmöglich ist. Dass ein Ereignis q relativ zu einem Ereignis p möglich ($\mathcal{K}$) ist, kann nur dann behauptet werden, wenn $p\frown q$ und $p\frown\sim q$ realmöglich sind. Es ist im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs vermutlich auch deshalb nie zur Kenntnis genommen worden, dass logische Formen Formen relativer Modalisierung sind, weil alle begriffsschriftlich darstellbaren logischen Relationen irgendeine relative Modalisierung *definitiv* weder bejahen, noch verneinen können.

99 Von zwei Ereignisklassen Fx und Gx darf ich nur dann behaupten, dass Gx die notwendige Folge der hinreichenden und evtl. auch notwendigen Bedingung Gx ist, wenn nicht nur die Vorkommenskombination $Fx\frown\sim Gx$ als nichtrealmöglich bestimmt ist – es gilt dann $\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx)$ –, sondern wenn darüber hinaus sowohl Vorkommenskombination $Fx\frown Gx$ wie Vorkommenskombination $\sim Fx\frown\sim Gx$ *ausdrücklich* als realmöglich charakterisiert sind.

100 Nur mit dem „und“ („&“) und dem „nicht“ („~“) lässt sich die Nichtrealmöglichkeit zweier Vorkommenskombinationen der logischen Relation von (A,B,C,D,E) – ~(A & B & ~C & ~D & E) & ~(A & B & ~C & ~D & ~E) – direkt und unmissverständlich ausdrücken; die fregesche Darstellung der Nicht-Realmöglichkeit dieser beiden Vorkommenskombinationen mithilfe des „Bedingungsstrichs“ ⇒ ist dagegen sehr unübersichtlich; die tatsächliche Bedeutung des unnötig verkomplizierten Ausdrucks „~{~[A⇒(B⇒(~C⇒(~D⇒E)))] ⇒ [A⇒(B⇒(~C⇒(~D⇒~E)))]}“, der in der fregeschen Notation



noch unübersichtlicher ist, muss erst durch „Rückübersetzung“ in den direkten „nicht“/„und“ - Ausdruck rekonstruiert werden. Auch diese ganz unnötige (und daher unzulässige) Unübersichtlichkeit der Darstellung *einfachster* logischer Verhältnisse leistet den logistischen Fehldeutungen dieser Formen Vorschub.

101 Er ist der Überzeugung, mit Hilfe der *Begriffsschrift* könne man derartige Aufgaben „ohne Schwierigkeit… bewältigen.“ (BRL, S. 51)

102 **FREGE** meint in BRL, S. 47f, er müsse, um das logische Verhältnis der anderen Ereignisse unabhängig von E zu bestimmen, aus einem Ausdruck, der alle 5 Ereignisse anführt, das Zeichen für das Ereignis E eliminieren. Er unterstellt fälschlicherweise, im Ausdruck „~C ⇒ (~A ⇒ E)“ mit der Bedeutung ~(~C · ~A · ~E) sei E „Folge“ von ~A und ~C; im Ausdruck „E⇒(A⇒(~D⇒C))“ mit der Bedeutung ~(E · A · ~D · ~C), sei E hingegen „Bedingung“ der anderen Ereignisse; E als „Folge“ könne dann durch seine „Bedingungen“ ersetzt werden, und es resultiere ein Urteil „~C⇒(~A⇒(A⇒(~D⇒~C)))“, in dem E „weggeschafft“ sei. Was auf diese Weise resultiert, ist nun freilich kein Urteil mehr über einen logischen Zusammenhang; es ist das Fregegesetz ~(~C · ~A · A · ~D · ~C), das die gleichzeitige Geltung von A und ~A ausschließt – und das mit dem spezifischen Gehalt der vorliegenden Beziehung zwischen A, B, C, D und E *rein gar nichts* zu tun hat.

103 Generell gilt: Zwischen n logischen Formen besteht eine bestimmte logische Totalrelation, aus der für jeden der möglichen Vorkommenskombinationen von n-1 dieser n logischen Relationen hervorgeht, ob die restliche logische Relation notwendig oder möglicherweise gilt bzw. nicht gilt.

104 Diese Ausdrücke drücken nicht direkt elementare logische Gesetze aus, da (∀x)(Fx⇒Gx) etwa nicht die logische Relation (∘0∘∘)(Fx, Gx) bezeichnet, sondern eine prädikatenlogistische Aussageform: wird diese Aussageform für zwei konkrete Prädikate wahr, dann besteht zwischen eben diesen Prädikaten die logische Beziehung (∘0∘∘)(Fx, Gx). Der Ausdruck (1) besagt: „Wenn[1] die Aussageform (∀x)(Fx⇒Gx) für zwei konkrete Prädikate wahr wird, wird auch die Aussageform (∃x)(Fx⇒Gx) für diese beiden Prädikate wahr. Mit der Wahrheit von (1) liegt auch die Wahrheit des elementaren logischen Gesetzes: (∘0∘∘)(Fx, Gx) → (∘•∘∘)(Fx, Gx) fest und umgekehrt. Ausdruck (5) besagt: Die beiden Aussageformen (∃x)(Fx⇔Gx) und (∀x)(Fx ⊧ Gx) können nicht für dieselben zwei Prädikate wahr werden; mit der Wahrheit von (5) liegt die Wahrheit des elementaren logischen Gesetzes (∘••∘)(Fx, Gx) ↑ (0100)(Fx, Gx) fest und umgekehrt. Dies gilt für alle derartigen Ausdrücke. Es besteht bedingungslogische Isomorphie.

105 Ausdrücke in dieser Notation sind nur sinnvoll und zulässig, wenn sie entweder eine logische Form oder ein logisches Gesetz (logische Form von logischen Formen) bezeichnen.

106 **MENNE, ALBERT**: Implikation, HWP 4, Sp. 264

107 Das Fregerelationsgesetz (1*) behauptet die Allgemeingültigkeit der Aussageform, lautet also in vollständiger Darstellung: ∀F, G [(∀x)(Fx⇒Gx) ⇒ (∃x)(Fx⇒Gx)].

108 Das Gesetz (**1011**) [(∘0∘∘)(Fx,Gx), (∘•∘∘)(Fx,Gx)] wird in seinem Gehalt abgeschwächt zu (**∘0∘∘**) [(∘0∘∘)(Fx,Gx), (∘•∘∘)(Fx,Gx)].

109 Man kann also nur unter Voraussetzung der Kenntnis *aller* zweistelliger logischer Totalformen erkennen, ob ein Ausdruck „$\mathfrak{Q}_1$x(Fx ⊕ Gx) ⊖ $\mathfrak{Q}_2$x(Fx ⊗ Gx)“ die Allrelation bezeichnet oder nicht; diese Voraussetzung ist in der „modernen Logik“ nicht gegeben.

110 Die Verknüpfung schließt aus, dass von den Formen (∘0∘∘)(Fx,Gx) und (∘∘0∘)(Fx,Gx) keine gilt, ausgeschlossen wird also (•11•)(Fx,Gx); die logische Form kann so auch durch „~(•11•)(Fx,Gx)“ dargestellt werden.

Der Ausdruck (∘0∘∘)(Fx,Gx) ⋓ (∘∘0∘)(Fx,Gx) *benennt* direkt die logische Relation ~(•11•)(Fx,Gx); der Ausdruck „(∀x)(Fx ⇒ Gx) ⊽ (∀x)(Fx ⇐ Gx)“ tut dies indirekt; der Ausdruck „(∘∘∘0)(Fx,Gx) ∨ (∘•∘∘)(Fx,Gx)“ schließlich stellt ein falsches logisches Gesetz dar, da gilt (∘∘∘0)(Fx,Gx) ⊤ (∘•∘∘)(Fx,Gx).

111 Diese Darstellung ist abschwächend, weil bei dieser Darstellung nicht nur die Beziehung 𝔸 zwischen $\mathfrak{Q}_1$x(Fx ⊕ Gx) und $\mathfrak{Q}_2$x(Fx ⊗ Gx) möglich ist, sondern auch, die Beziehungen 𝕀, ℍ, 𝕂, 𝕁, 𝕃 und 𝕄. Diese abschwächende Darstellung ist als Erfüllbarkeitsaussage außerdem indirekt.

112 Eine *pränexe Normalform* „ist ein Ausdruck der Form $Q_1xi_1Q_2xi_2 \dots Q_nxi_n H$, in dem $Q_1,\dots,Q_n$ Quantoren sind und *H* ein quantorenfreier Ausdruck ist. … In einer pränexen Normalform dürfen also links von einem Quantor nur Quantoren und quantifizierte Variable stehen…“ (**Kondakow**, S. 367)

113 **Hilbert/Ackermann**, S. 9

114 Werden in der Gesetzesgleichung $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ die Beliebig-Element-Zeichen durch Bezeichnungen beliebiger reeller Zahlen ersetzt, ergeben sich wiederum wahre Gleichungen $(2+3)^2 = 2^2+2\cdot2\cdot3+3^2$, $(7+9)^2 = 7^2+2\cdot7\cdot9+9^2$, usw.; insofern haben wir es mit einem kategorischen Gesetz zu tun: was von beliebigen Zahlenpaaren gilt, kann auch von jedem einzelnen Zahlenpaar ausgesagt werden.

115 Es wird mehr als eine Vorkommenskombination definitiv als erfüllbar bestimmt; dem entspricht, dass die entsprechenden Vorkommenskombinationen beide realmöglich sind.

116 Diese Subsumtion kann assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch sein.

117 Das logische Gesetz **(Fx → Gx) ↑ (Fx ↑ Gx)** kann nicht abgeschwächt durch „∀x(Fx ⇒ Gx) ⥣ ∀x(Fx ⥣ Gx)“ ausgedrückt werden, denn anders als die Formen (Fx → Gx) und (Fx↑Gx) können die elementaren Fregerelationen ∀x(Fx ⇒ Gx) und ∀x(Fx ⥣ Gx) zugleich gelten. Der Ausdruck „(∀x) (Fx ⇒ Gx) ⥣ (∀x) (Fx ⥣ Gx)“ verweist also auf kein gültiges logisches Gesetz, wohl aber auf eine komplexe Fregerelation, und zwar jene, die gilt, wenn jedenfalls nicht die Fregerelationen R_1: (∀x) (Fx ⇒ Gx) und R_2: (∀x) (Fx ⥣ Gx) beide zusammen gelten:

R_1 ohne R_2:	(∘0∘∘) und (1•••), also (10••)
R_2 ohne R_1:	(0∘∘∘) und (•1••), also (01••)
Weder R_1 noch R_2:	(1•••) und (•1••), also (11••)

Wir erhalten also die Fregerelation ~(00••)(Fx,Gx) = (∘∘••)(Fx,Gx) = (∃x) (Fx ⩗ Gx).

118 Die genaueste Darstellung dieses logischen Verkettungsgesetzes für dreistellige Prädikate ist: [$\mathbf{R}_1$(x,y,z), $\mathbf{R}_2$(x,y,z), $\mathbf{R}_3$(x,y,z) ℂ𝕍]

119 Beispiel: Wenn *irgendeine* erste Person *irgendeine* zweite Person beraubt, dann fügt *diese* erste Person *dieser* zweiten Person Übles zu. Wenn irgendein erster Gegenstand zu irgendeinem zweiten Gegenstand in der Beziehung $\mathbf{R}_1$ steht, dann steht eben dieser erste Gegenstand zu eben diesem zweiten Gegenstand in der Beziehung $\mathbf{R}_2$.

120 Deshalb ist es nicht richtig, wenn **Frege** meint, gerade die Mehrstelligkeit belege die logische Irrelevanz der Unterscheidung von Subjekt (Prädikand) und Prädikat; diese falsche Meinung kommt auf, wenn nicht der betreffende n-Tupel, sondern nur ein Glied dieses n-Tupels für den Prädikanden (das Subjekt) gehalten wird.

Auch **H.G.v.Wright** (On the Idea of Logical Truth, in: Logical Studies, S. 28) meint, die Unterscheidung ein- und mehrstelliger Prädikate gehe einher mit zwei ganz verschiedenen Arten von Aussagen. „Propositions can be analyzed into parts which are not themselves propositions. There are two principal ways of analysis. The first way we can call the Aristotelian view of propositions. According to it, the proposition attributes a property to a thing (an object, an individual). The second we call the relational view of propositions. According to it, the proposition establishes a relation between a number of things“. Logisch grundlegend ist nicht die Stelligkeit der Prädikate, sondern die Subjekt-Prädikat-Beziehung: in jedem Urteil wird einem Gegenstand oder einem n-Tupel von Gegenständen (dem Subjekt oder Prädikanden) ein ein- bzw. mehrstelliges Prädikat zugesprochen.

121 Der Bezugsbereich eines Prädikats ist die Menge derjenigen Gegenstände oder derjenigen n-Tupel von Gegenständen, denen dieses Prädikat sinnvollerweise zu- oder abgesprochen werden kann.

122 „In einer Aussage, die mit mehreren Quantoren formuliert ist, können Individuenvariable n vorkommen, die verschiedenen Bereichen angehören.“ Die entsprechenden Formeln gehören dann der „mehrsortigen Prädikatenlogik“ an. (**Hyoiningen-Huene**, S. 191)

123 Grundzüge der Logik, S. 169.

Für jedes einzelne Rennen gibt es für die Pferde einen anderen Bezugsbereich. – Diesen Fall spricht **QUINE** in folgender Aussage an: „›(x)(∃y)‹ sagt: Für jede Wahl von x kann ein y gewählt werden, so dass der folgende Satz wahr wird. Verschiedene x erfordern möglicherweise verschiedene y: Die Wahl von y hängt im Allgemeinen von der Wahl von x ab. Betrachten wir nun einen Satz ‚Fxyzw' mit den Variablen ‚x', ‚y', ‚z', ‚w'. Angenommen, wir wollen sagen: Zu jedem x gibt es ein y, und zu jedem z gibt es ein wahr, so dass Fxyzw." (**QUINE**, Grundzüge, S. 102f)

124 Vgl. die Darlegung der logischen Beziehungen zwischen den zweimal quantorfixierten dreistelligen Relationen.

125 Hans zeigt jedem seiner Freunde nicht alle seiner Bilder – d.h. Hans zeigt jedem einzelnen seiner Freunde entweder nur einen Teil seiner Bilder oder keines dieser Bilder.

126 Vorkommenskombination II – (∀ – ∀) & ~(∀ – ~∀) – ist realmöglich, wenn *allen – alles*; Vorkommenskombination III – ~(∀ – ∀) & (∀ – ~∀) – ist z.B. realmöglich, wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination IV – ~(∀ – ∀) & ~(∀ – ~∀) – ist z.B. realmöglich, wenn *einigen – keines* und *einigen – alles*. Vorkommenskombination ist I – (∀ – ∀) & (∀ – ~∀) – nichtrealmöglich: denn *alle – alles* und *alle – nicht alles* schließen sich aus.

127 Vorkommenskombination I ist realmöglich bei *allen – alles*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – nur einen Teil (= einige, aber nicht alle)*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, wenn *alle – keines*.

128 Es ist unmöglich, dass zugleich *allen – alles* und *allen – keines (= nicht eines)*; eins ist ohne das andere möglich; nicht beides ist realmöglich, wenn z.B. *einige – alles* und *einige – keines*.

129 Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alles – nur zum Teil*.

130 Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: wenn es falsch ist, dass *allen – alles*, genau dann kann nicht falsch sein, dass *zumindest – eines* und *eines – nicht*.

131 Es ist möglich, dass beides nicht zugleich zutrifft, etwa wenn gilt: *nicht alle –eines nicht*.

132 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, etwa wenn *allen – nur ein Teil*; Vorkommenskombination III ist nichtrealmöglich: bei *allen – keines*, kann *allen – zumindest eines nicht*, nicht nicht gelten; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, etwa wenn *allen – alles*.

133 Vorkommenskombination I ist nichtrealmöglich: genau dann, wenn *einem – alle*, ist *allen - zumindest eines nicht* falsch; Vorkommenskombination II ist realmöglich. z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*; Vorkommenskombination IV ist genau dann nichtrealmöglich, wenn es nicht zutrifft, dass allen eines nicht zukommt, dann kommt zumindest einem alles zu.

134 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *allen – nur ein Teil*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *einigen – allen* und *einigen – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*.

135 Vorkommenskombination I ist realmöglich: z.B. wenn *allen – nur ein Teil*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: wenn *allen – eines nicht* nicht gilt, dann gilt *einem – alles*; dann aber kann *einem – eines* nicht falsch sein.

136 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich: wenn *allen – eines nicht*, kann *einem – eines nicht* nicht falsch sein; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *einigen – alles* und *einigen – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*.

137 Vorkommenskombination I ist nichtrealmöglich, denn *alle – eines* und *alle – nicht eines* sind unverträglich; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn gilt *alle – nicht eines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – eines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*.

138 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alle*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *alle – nur teilweise*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*.

139 Genau dann, wenn *alle – eines*, trifft *eines – keines* nicht zu.

140 Wenn *alle – eines* gilt, ist es unmöglich, dass *eines – eines* nicht gilt; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*.

141 Vorkommenskombination I ist realmöglich: *alle – eines* und *eines – nicht alle* liegen z.B. zusammen vor, wenn gilt *alle – nur teilweise*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alles*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn gilt *alle – keines*; Vorkommenskombination IV ist hingegen nichtrealmöglich: die Kontradiktion von *alle – eines* ist *eines – keines*; die Kontradiktion von *eines – nicht alle* ist *alle – alle*; *eines – keines* und *alle – alle* sind unverträglich.

142 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alle nicht*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich, denn bei *allen – keins* gilt auch *zumindest eins - keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, etwa wenn gilt *einige, aber nicht alle – keins*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alle – eines*.

143 Vorkommenskombination I nichtrealmöglich: *alle – keines* ist unverträglich mit *eines – eines*; Vorkommenskombination II und III; das eine kann jeweils ohne das andere gelten; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: die Negation von *alle – keines* ist *eines - eines*, und die Negation von *eines - eines* ist *alle - nicht eines*; die Negation des einen führt jeweils auf das andere.

144 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*; Vorkommenskombination II nichtrealmöglich: *alle keines* ist unverträglich mit *alle alle*; Vorkommenskombination III realmöglich, z.B. wenn *alle teilweise*; Vorkommenskombination IV realmöglich, bei *alle alle*.

145 Vorkommenskombination I realmöglich, z.B. wenn *einige – alles* und *einige – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alle*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*; die beiden Negationen *alle – eines nicht* und *alle – eines* sind verträglich, z.B. wenn *alle – teilweise*.

146 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. bei *eines – alle*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich: *eines – alle* ist unverträglich mit *alle – keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – teilweise* gilt; Vorkommenskombination IV ist realmöglich: *alle – eines nicht* und *alle – keines* gelten etwa bei *alle – keines* zugleich.

147 Vorkommenskombination I ist realmöglich, beides gilt etwa bei *einige – alle* und *einige – teilweise*; Vorkommenskombination II ist realmöglich: *eines – alle* und *alle – alle* sind verträglich; Vorkommenskombination III ist realmöglich: *alle – eins nicht* und *eines – eines nicht* sind verträglich; Vorkommenskombination IV nichtrealmöglich: *alle – eines nicht und alle – alle* sind unverträglich.

148 Vorkommenskombination I ist realmöglich: beides gilt z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich: *eines – keines* und *alle – keines* sind verträglich; Vorkommenskombination II ist realmöglich: *alle – eines* und *eines – eines* sind verträglich; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: denn *alle – eines* und *alle – keines* sind unverträglich.

149 Vorkommenskombination I realmöglich: bei *eines – keines* gilt auch *eines – eines nicht*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich: *eines – keines* ist unverträglich mit *alle – alle*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn gilt *alle – teilweise*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich: *alle – eines* und *alle – alle* sind verträglich.

150 Vorkommenskombination I ist realmöglich, etwa wenn gilt *eines – teilweise*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. bei *eines – eines* und *alle – alle*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, wenn gilt *alle – keines* und *eines – eines nicht*; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich, denn *alle – keines* und *alle – alle* sind unverträglich.

151 Die Negationen aller zweifach quantorfixierten dreistelligen Relationen (die doppelte Negation nicht nicht hebt sich auf)
nicht(alle – alle) ≣ (eines – nicht alle) ≣ (eines – eines nicht)
nicht(alle – alle nicht) ≣ (eines – nicht alle nicht) ≣ (eines – eines nicht nicht)
nicht(alle – eines) ≣ (eines – nicht eines) ≣ (eines – alle nicht)
nicht(alle – eines nicht) ≣ (eines – nicht eines nicht) ≣ (eines – alle nicht)

nicht(eines – alle) ≣ (alle – nicht alle) ≣ (alle – eines nicht)
nicht(eines – alle nicht) ≣ (alle – nicht alle nicht) ≣ (alle – eine nicht nicht)
nicht(eines – eines) ≣ (alle – nicht eines) ≣ (alle – alle nicht)
nicht(eines – eines nicht) ≣ (alle – nicht eines nicht) ≣ (alle – alle nicht nicht)

152 *Nichtelementar* sind jene Quantoren, bei deren Geltung *zwei* elementare Quantoren möglich sind: so kann bei *nicht alle* ≣ *eines nicht* gelten: entweder: *einige, aber nicht alle* oder *keines*; bei *einige* kann gelten entweder *einige, aber nicht alle* oder *alle*. Diese drei elementaren Quantoren $\forall x Px$, $\forall x \sim Px$ und $\exists\exists x Px$ entsprechen den drei elementaren Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{K}$; die drei nicht-elementaren Quantoren $\exists x Px \equiv \sim\forall x \sim Px$, $\exists x \sim Px \equiv \sim\forall x\, Px$ und $\sim\exists\exists x\, Px$ besagen dasselbe wie die nicht-elementaren Modalitäten $\mathcal{P}$ (= $\sim\mathcal{U}$) und C (= $\sim\mathcal{U}$) und $\mathcal{A}$ (= $\sim\mathcal{K}$: entweder $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{U}$).

$[(\forall x \in \mathbf{B})\, Px] \leftrightarrow (x \in \mathbf{B})\mathcal{N}(Px)$	genau dann, wenn alle x aus dem Bezugsbereich **B** P zukommt, kommt einem x aus **B** P notwendig ($\mathcal{N}$) zu
$[(\forall x \in \mathbf{B}) \sim Px] \leftrightarrow (x \in \mathbf{B})\mathcal{U}(Px)$	genau dann, wenn keinem x aus dem Bezugsbereich **B** P zukommt, kommt einem x aus **B** P unmöglich ($\mathcal{U}$) zu
$[(\exists\exists x \in \mathbf{B})\, Px] \leftrightarrow (x \in \mathbf{B})\mathcal{K}(Px)$	Genau dann, wenn zumindest einem, aber nicht allen x aus **B** P zukommt, kommt einem x aus **B** P möglicherweise ($\mathcal{K}$) zu
$[(\exists x \in \mathbf{B})\, Px \leftrightarrow (x \in \mathbf{B}) \sim\mathcal{U}(Px)$	Genau dann, wenn zumindest einem x aus **B** P zukommt, ist es nicht unmöglich ($\mathcal{U}$), dass einem x aus **B** P zukommt

$[(\exists x \in \mathbf{B}) \sim Px \leftrightarrow (x \in \mathbf{B}) \sim \mathcal{N}(Px)$	Genau dann, wenn zumindest einem x aus **B** P zukommt, ist es nicht notwendig ($\mathcal{N}$), dass einem x aus **B** P zukommt
$[\sim(\exists\exists x)\, Px \leftrightarrow (x \in \mathbf{B}) \sim \mathcal{K}(Px)$	Genau dann, wenn nicht zutrifft, dass einigen x aus **B** P zukommt und einigen x aus **B** P nicht zukommt, kommt einem x aus **B** P entweder notwendig ($\mathcal{N}$) oder unmöglich ($\mathcal{U}$) zu.

Der nicht elementare Quantor $\exists\exists x$ (einige, aber nicht alle) erhält in der „modernen Logik“ keinen eigenständigen Ausdruck, muss aber immer implizit berücksichtigt werden, wenn die logischen Verhältnisse der anderen Quantoren bestimmt werden.

153 So wie etwa auch jede logische Form und jedes logische Gesetz mit Hilfe von Prädikatoren beliebiger Stelligkeit formuliert werden können.

154 Dies Beispiel mit konkreten Prädikatoren in enthymematischer umgangssprachlicher Formulierung: Weil, wenn jemand alle seine Kinder liebt, er zumindest eines seiner Kinder liebt, und weil genau dann, wenn jemand zumindest eines seiner Kinder liebt, er nicht alle von seinen Kindern nicht liebt, deshalb trifft es nicht zu, dass einer nicht alle seiner Kinder nicht liebt, wenn er alle seine Kinder liebt.

155 (∘∘••⌣∘•∘•)(Fx, Gx) soll bedeuten: $((\mathrm{I} = 1 \vee \mathrm{II} = 1) \vee (\mathrm{I} = 1 \vee \mathrm{III} = 1)$

156 **QUINE** (Grundzüge der Logik, S. 185) spricht von „gemischten Schemata“.

157 Wir haben eine Aussageform der Art: $[1 + 1 = 2 \otimes \text{Mensch}(x)]$, wobei Mensch(x) einer „Aussagevariablen“ entspricht. Für diese Aussageform steht der Wahrheitswert bei einer gegebenen Wahl für A und Fx noch nicht fest!

158 Diese Erwägungen bleiben im Rahmen der „modernen Logik“ freilich durchgängig intuitiv (und entsprechend vage), da hier immer bestimmte logische Gesetze (insbesondere Gesetze des Quantorenquadrats) als „Axiome“ genommen werden, aus denen dann mit Hilfe geeigneter Umformungsregeln (auch diese sind wiederum intuitiv als gültig unterstellte beweisbare logische Gesetze) andere logische Gesetze abgeleitet werden. Das Verständnis dieser auf logische Sachverhalte verweisenden prädikatenlogistischen Ausdrücke bleibt hoffnungslos ungenau, fehlerhaft, verschwommen, solange nicht ein sachgerechter Begriff der logischen Form gewonnen und klar zwischen logischen Formen und Gesetzen unterschieden wird; diese Voraussetzungen sind im Rahmen der „modernen Logik“ nicht gegeben.