Josef Predan

Das System der bedingungslogischen Formen. Kritik des fregeschen Logikentwurfs.

Josef Predan

Silcherstraße 9

72581 Dettingen an der Erms

Letzte Änderung März 2006

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Das System der bedingungslogischen Formen

I, Kapitel 1. Die Konstruktion logischer Formen

1.1. Die Struktur der logischen Formen

Mit intuitiver Sicherheit gebrauchen wir in Alltag und Wissenschaft vielfältige umgangssprachliche Mittel zum Ausdruck gesetzmäßiger Zusammenhänge – z.B. Partikeln wie „Wenn-dann", „Entweder-oder", „Weder-noch" usw., ohne je ausdrücklich auf ihren jeweiligen gemeinsamen, allgemeinen Gehalt und ihre gemeinsame Struktur reflektiert zu haben. Ohne dass wir irgendeine logische Analyse durchgeführt haben müssten, verstehen wir Gesetzesaussagen der folgenden Form:

- Wenn durch einen Draht elektrischer Strom fließt, dann erwärmt sich dieser Draht.
- Wenn etwas ein Vogel ist, ist es ein Wirbeltier.
- Wenn ein Mensch ein Mörder ist, dann ist er ein Verbrecher.
- Wenn eine Zahl größer als 2 ist, dann ist ihr Quadrat größer als 2.
- Wenn die Sonne scheint, dann erwärmt sich die Luft.
- Wenn es regnet, ist die Straße nass.

Wir können diese Wenn-dann-Sätze darauf hin befragen, welche *Art von Beziehung* sie zwischen welcher *Art von Inhalten* behaupten. Die Inhalte, die hier in Beziehung gebracht sind – nämlich die Sachverhalte, die durch Ausdrücke wie „durch einen Draht fließt elektrischer Strom", „es regnet", „die Luft erwärmt sich" oder „eine Zahl ist größer als 2" bezeichnet werden, sind zunächst keine entweder wahren oder falschen Aussagen. Dies heißt aber nicht, dass diese Ausdrücke, wie **FREGE** behauptet, ohne hinzukommenden Wink gehaltlos sind; sie benennen vielmehr jeden beliebigen Fall – in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft –, in welchem ein Ereignis bestimmter Art stattfindet bzw. ein Sachverhalt bestimmter Art der Fall ist. So wie wir nicht nur von diesem oder jenem einzelnen Menschen, und nicht nur von dieser oder jener einzelnen Rose, sondern über alle beliebigen Menschen und Rosen sprechen können, so können wir nicht nur über den einzelnen Fall, dass es zu bestimmter Zeit und an bestimmtem Ort regnet, sondern über jeden beliebigen Fall, dass es regnet, über jeden beliebigen Fall, dass ein Kind die Masern hat, dass sich die Luft erwärmt, usw. sprechen. Wir können nicht nur über den einzelnen Fall sprechen, dass die Zahl 5 größer als 2 ist, sondern über jeden beliebigen Fall, da eine Zahl größer als 2 ist. Ohne die Möglichkeit, eindeutig über jeden beliebigen Fall reden zu können, in dem ein Ereignis bestimmter Art vorliegt, könnten wir keine Gesetze formulieren. Alle beliebigen Fälle, in denen Sachverhalte bestimmter Art der Fall sind oder Ereignisse bestimmter Art stattfinden, bilden eine bestimmte *Sachverhalts-/Ereignisklasse*.

Eine Sachverhalts- oder Sachverhalts-/Ereignisklasse benennt alle Fälle, da eine Sache, ein Ding bestimmter Art eine bestimmte dauerhafte Artbestimmung oder Beschaffenheit/Eigenschaft aufweist, oder sich auf eine bestimmte Weise verhält, oder einen ganz bestimmten zeitweiligen Zustand durchläuft: ein Tier ist ein Vogel Artbestimmtheit), ein Mensch ist rothaarig (bleibende Eigenschaft), ein Draht erwärmt sich (zeitweiliger Zustand)… Ein solcher Sachverhalt, ein solches Ereignis ist *allgemein* in dem Sinne, dass jeder beliebige Fall gemeint ist, in dem ein Sachverhalt oder Ereignis der betreffenden Art stattfindet.

Wenn wir ein umgangssprachlich formuliertes Wenn-dann-Gesetz wie „*Wenn es regnet, ist die Straße nass*" behaupten, beziehen wir uns also weder auf diesen oder jenen Einzelfall, da es regnet, geregnet hat oder regnen wird, noch meinen wir eine Beziehung zwischen wahrheitsdefiniten, d.h. entweder wahren oder falschen Aussagen. Ein derartiger Wenn-Satz bringt zum Ausdruck, dass in jedem Falle, da es regnet, dieses Ereignis mit einem anderen Ereignis bestimmter Art in einer ganz bestimmten Weise gesetzmäßig verbunden ist. Aussagen von der Art unserer Beispielssätze besagen, dass in jedem Fall, in dem ein Ding oder System bestimmter Art einen bestimmten veränderlichen Zustand oder eine bestimmte bleibende Beschaffenheit aufweist, eben dieses Ding/System zugleich einen anderen Zustand, eine andere Beschaffenheit aufweisen muss oder aufweisen kann oder nicht aufweisen kann. Diese Beschaffenheiten und Zustände sind jeweils auf ein und dasselbe Ding oder System bestimmter Art bezogen; ich werde vom *Ereignis-Bezugssystem* sprechen. Gesetze charakterisieren solche Ereignis-Bezugssysteme bestimmter Art (es geht beispielsweise um den gesetzmäßigen Zusammenhang der Fälle, da durch irgendeinen bestimmten Draht Strom fließt und *eben dieser* Draht erwärmt wird, oder um die Gesetzmäßigkeit aller Fälle, da irgendein Mensch ein Mörder ist und *eben dieser* Mensch ein Verbrecher ist, oder um alle Fälle, da irgendeine Zahl größer als zwei ist und das Quadrat *eben dieser* Zahl 2 ist, usw.). Im Folgenden versuche ich, die allgemeine Struktur der gesetzmäßigen, logischen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Zuständen/Beschaffenheiten von Ereignis-Bezugssystemen näher zu bestimmen.

Wenn wir in einer verallgemeinernden Reflexion *verschiedener* Wenn-dann-Sätze die *eine*, begrifflich-identische Beziehung erfassen wollen, deren Geltung in allen diesen verschiedenen Äußerungen behauptet wird, wollen wir nicht wissen, ob zwischen diesen oder jenen konkreten Sachverhalts-/Ereignisklassen eine derartige Beziehung besteht, sondern wir wollen alle notwendigen Bedingungen auffinden, die erfüllt sein müssen, wann immer die Geltung eines derartigen Wenn-dann-Gesetzes rechtens behauptet wird. Mit den Buchstaben „p“, „q“, „r“,… werde ich solche beliebigen, stets auf ein Ereignis-Bezugssystem bestimmter Art bezogene Sachverhalts-/Ereignisklassen (keine Aussagen!) bezeichnen[1].

Zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q kann nur dann eine gesetzmäßige Beziehung bestehen, wenn p und q jeweils sowohl vorkommen wie nicht vorkommen können – derartige Ereignisse müssen *realmöglich* sein. Es macht keinen Sinn, über die „Gesetzmäßigkeit“ von Sachverhalten/Ereignissen zu sprechen, die überhaupt nicht passieren können. Ich bezeichne dieses *Vorkommenkönnen* oder diese *Realmöglichkeit* einer beliebigen Sachverhalts-/Ereignisklasse p durch „*rm* (p)“. Das Vorkommenkönnen oder die Realmöglichkeit einer Sachverhalts-/Ereignisklasse bedeutet einfach, dass es Fälle gibt, in denen derartige Ereignisse vorliegen, und dass es ebenso Fälle gibt, in denen derartige Ereignisse nicht vorliegen – *rm*(~p). Immer dann, wenn *rm*(p) gilt, gilt auch *rm*(~p) und umgekehrt, wobei der Ausdruck „p“ eine beliebige Sachverhalts-/Ereignisklasse bezeichnet – genauer *jeden beliebigen* Fall, in dem ein Ereignis ganz bestimmter Art, p, vorliegt; „~p“ soll jeden beliebigen Fall bezeichnen, in denen dieses Ereignis p nicht vorliegt. Gilt *rm*(p), dann ist p ein *echtes* (eben realmögliches) *Ereignis*; kann ein p unter keinen Umständen vorkommen, handelt es sich um ein *unbedingt unmögliches* (nicht-realmögliches) Ereignis und ich schreibe „*nrm* (p)“[2].

Der Ausdruck „*rm*(p)“ besagt, dass die Sachverhalte/Ereignisse, die der Sachverhalts-/Ereignisklasse p angehören, überhaupt vorkommen können, ohne dass die Bedingungen dieses Vorkommens irgendwie schon angesprochen würden; da die *Realmöglichkeit* wie die *Nicht-Realmöglichkeit* den Sachverhalts-/Ereignisklassen ohne Bezug auf irgendwelche bestimmte andere Gegebenheiten zugesprochen wird, handelt es sich bei beiden Bestimmungen um die *unbedingten (nicht-relativen) Modalitäten* der *Möglichkeit* und der *Unmöglichkeit*. Eine *unbedingte Notwendigkeit* kann Ereignissen prinzipiell nicht zugesprochen werden, da ein solcher Sachverhalt bzw. ein solches Ereignis immer und zu jeder Zeit vorliegen müsste, was dem Begriff des Ereignisses und der Endlichkeit aller wirklichen Dinge widerspräche. Für beliebige Ereignisse p können wir so behaupten, dass entweder *rm*(p) oder *nrm*(p) gilt. Wir unterscheiden dadurch die Ereignisse, die vorkommen können von den fiktiven Ereignissen, die unter keinen Umständen vorkommen können; nur erstere können Relata logischer Formen sein, nur für sie können Gesetze behauptet werden[3] und nur sie sind für die Logik von Belang.

Immer wenn wir im Sinne der Umgangssprache die Geltung einer Implikations-Beziehung *Wenn p, dann q* behaupten, wollen wir zum Ausdruck bringen, dass in *allen* Fällen, in denen p vorliegt, auch q vorliegt, dass es also nicht möglich ist, dass auch nur in einem Falle, in dem p beobachtet wird, q nicht vorliegt. Es geht in einer Wenn-dann-Beziehung um einen Zusammenhang zwischen den Fällen, dass eines der Ereignisse vorliegt bzw. nicht vorliegt, mit den Fällen, in denen das andere Ereignis vorliegt bzw. nicht vorliegt. Für jedes Paar von auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogenen Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q gibt es genau vier verschiedene Fälle, in denen die Fälle des Vorliegens und Nicht-Vorliegens der beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen miteinander kombiniert sind; ich spreche von den „*Vorkommenskombinationen*“ gegebener Sachverhalts-/Ereignisklassen.

1. der Fall, dass beide Ereignisse zusammen vorliegen: ich schreibe „$p \frown q$“.
2. der Fall, dass das erste, nicht aber das zweite der Ereignisse vorliegt: „$p \frown {\sim} q$“
3. der Fall, dass das zweite, nicht aber das erste der beiden Ereignisse vorkommt: „${\sim} p \frown q$“
4. der Fall, dass keines der beiden Ereignisse vorliegt: „${\sim} p \frown {\sim} q$“

Ich bezeichne die Vorkommenskombinationen (abgekürzt: VK) in der angeführten Reihenfolge mit römischen Ziffern ($p \frown q$ ist VK I, $p \frown {\sim} q$ ist VK II, usw.).

Für *beliebige* Paare (p, q) von Klassen echter Ereignisse sind diese vier Fälle zunächst jeweils nur *hypothetisch möglich*, weil es unter der Voraussetzung von *rm*(p) und *rm*(q) noch offen ist, welche dieser vier Vorkommenskombinationen auch tatsächlich vorliegen kann und welche nicht. Ich nenne die Menge der überhaupt möglichen Kombinationen der Vorkommenswerte einer bestimmten Anzahl von Sachverhalts-/Ereignisklassen den *Raum des Hypothetischmöglichen* oder das *Hypothetischmögliche. Der bedingungslogisch-gesetzmäßige Zusammenhang zwischen einer Anzahl von Ereignissen bestimmter Art ist dann vollständig erkannt, wenn von* ***allen*** *hypothetischen Kombinationen der Vorkommenswerte* ***jeweils*** *eindeutig feststeht, ob sie realmöglich oder nicht realmöglich sind.*

Zusammen mit dem Begriff der auf ein Ereignis-Bezugssystem bezogenen Sachverhalts-/Ereignisklasse und der angegebenen Kombinationen solcher Sachverhalts-/Ereignisklassen bilden die beiden unbedingten Modalitäten der Möglichkeit (Realmöglichkeit) und der Unmöglichkeit (Nicht-Realmöglichkeit) die begriffliche Basis eines infiniten Systems aller nur denkbaren Gesetzeszusammenhänge von der Art der Wenn-dann-Beziehung. Ich nenne solche bedingungslogischen Zusammenhänge „**logische Totalformen**“ oder „logische Totalrelationen“; das Attribut „total“ verweist darauf, dass die Realmöglichkeit bzw. Nichtrealmöglichkeit *aller* hypothetischmöglichen Vorkommenskombinationen festliegt.

Betrachten wir die Vorkommenskombinationen der im Satz „Wenn eine natürliche Zahl größer als zwei ist, ist ihr Quadrat größer als zwei“ angesprochenen Sachverhalts-/Ereignisklassen, dass irgendeine natürliche Zahl größer als zwei ist, und dass das Quadrat *eben dieser* Zahl größer als 2 ist!

> Vorkommenskombination I ist realmöglich, denn dass eine natürliche Zahl größer als 2 ist, und ihr Quadrat ebenfalls größer als 2, ist realmöglich (es trifft z.B. für die Zahl 3 zu).
>
> Auch die Vorkommenskombinationen III und IV sind realmöglich, denn es ist einerseits möglich, dass eine natürliche Zahl nicht größer als 2 ist, während dies für ihr Quadrat gilt (die Zahl 2), und es ist andererseits realmöglich, dass weder eine natürliche Zahl noch ihr Quadrat größer als 2 sind (die Zahl 1).
>
> Vorkommenskombination II ist jedoch nicht realmöglich, denn es gibt keine natürliche Zahl, die größer als 2 ist, deren Quadrat jedoch nicht größer als 2 wäre (diese Nicht-Realmöglichkeit einer Vorkommenskombination kann im Gegensatz zur Realmöglichkeit nicht durch Einzelfälle, sondern nur durch den Bezug auf ein geltendes Gesetz begründet werden).

Auch für die anderen angeführten Wenn-dann-Gesetze ergibt eine entsprechende Prüfung, dass alle Vorkommenskombinationen außer der Vorkommenskombination II realmöglich sind. *Es gibt keine Wenn-dann-Gesetzesaussage anführen können, die nicht diese Struktur aufweist.* Ich kann die allgemeine Struktur dieser Gesetzesbeziehung somit durch eine Matrix (1011) darstellen, wobei die Ziffer „1“ *realmöglich*, die Ziffer „0“ *nichtrealmöglich* bedeutet und die vier Positionen der Reihe nach die vier Vorkommenskombinationen I, II, III und IV bezeichnen. Da die vier Vorkommenskombinationen zweier Sachverhalts-/Ereignisklassen auf 16 verschiedenen Weisen als realmöglich bzw. nicht-realmöglich bestimmbar sind, erhalten wir genau 16 verschiedene zweistellige logische Totalrelationen, die zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen bestehen können. Die Matrizen, die wie (1011) die Realmöglichkeit und Nicht-Realmöglichkeit der einzelnen Vorkommenskombinationen angeben, nenne ich „*Normalmatrizen*“; die 16 zweistelligen logischen Totalformen können durch ihre jeweilige Normalmatrix eindeutig dargestellt werden.

1.2. Die logischen Formen als Verhältnisse relativer Modalisierung

Die Normalmatrizen einer Totalform geben an, welche der hypothetischmöglichen Vorkommenskombinationen realmöglich und welche nichtrealmöglich sind; diese Bestimmungen der einzelnen Vorkommenskombinationen werden unabhängig voneinander[4] vorgenommen. Wenn wir jedoch die Vorkommenskombinationen einer solchen vorgegebenen Matrix, etwa die Matrix der Implikation (1011), in ihrem Zusammenhang betrachten, erkennen wir die Struktur einer durchgehenden *relativen Modalisierung* der Sachverhalts-/Ereignisklassen – und in dieser relativen Modalisierung von Sachverhalts-/Ereignisklassen liegt der wesentliche Gehalt der umgangssprachlichen Partikeln, mit denen wir schon vor jeder theoretischen Logik logische Zusammenhänge ausdrücken.

Von den 6 verschiedenen Paaren, die sich aus den vier Vorkommenskombinationen bilden lassen, haben vier eine besondere Bedeutung:

Zusammen stellen die ersten beiden **Vorkommenskombinationen I und II** alle Fälle dar, da p vorliegt: die Menge dieser p-Fälle zerfällt dann in jene Fälle, da *bei p* auch q vorliegt (diese Fälle entsprechen der Vorkommenskombination I), und in jene Fälle, da *bei p* q nicht vorliegt (diese Fälle entsprechen der Vorkommenskombination II).

Die **Vorkommenskombinationen III und IV** stellen zusammen die Gesamtheit der Fälle dar, da p nicht vorliegt; in einem Teil dieser Fälle liegt *bei ~p* q vor (die Vorkommenskombination III stellt diese Fälle dar), in den restlichen Fälle liegt *bei ~p* q nicht vor (diese Fälle entsprechen der Vorkommenskombination IV).

Die **Vorkommenskombinationen I und III** stellen zusammen die Menge der Fälle dar, da q vorliegt; die Gesamtheit dieser q-Fälle zerfällt in jene Fälle, da *bei q* auch p vorliegt (dies ist die Vorkommenskombination I), und in jene Fälle, da *bei q* p nicht vorliegt (Vorkommenskombination III).

Die Vorkommenskombinationen **II und IV** schließlich stellen die Fälle dar, da q nicht vorliegt; diese ~q-Fälle zerteilen sich in die Fälle, da *bei ~q* p vorliegt (Vorkommenskombination II), und in die Fälle, da *bei ~q* p nicht vorliegt (Vorkommenskombination IV).

Die angeführten Paare von Vorkommenskombinationen – (I, II), (III, IV), (I, III) und (II, IV) – stellen *jeweils* zusammen die Fälle dar, da einer der beiden Sachverhalte/Ereignisse vorliegt bzw. nicht vorliegt, wobei jeder dieser Fälle *jeweils* in die Fälle, da das andere vorliegt, und in die Fälle, da das andere nicht vorliegt, zerfällt. Betrachten wir bei einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Relation nacheinander die vier oben dargelegten Paare von Vorkommenskombinationen (I, II), (III, IV), (I, III) und (II, IV), zeigt sich, dass eine solche Form die durchgehende *relative Modalisierung* der beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen darstellt. Für die Implikationsbeziehung mit der Normalmatrix (1011) ergibt sich:

Vorkommenskombinationen I und II – alle p-Fälle: Vorkommenskombination I (p⌢q) ist realmöglich, Vorkommenskombination II (p⌢~q) ist nichtrealmöglich: p kann also mit q vorliegen (Vorkommenskombination I), aber bei p ist es unmöglich, dass q nicht vorliegt (Vorkommenskombination II): dies bedeutet, dass *bei p* q *notwendig* ist im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{N}$. Die ersten beiden Stellen einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen also die Modalisierung des Vorkommens von q relativ zum Vorkommen von p dar.

Vorkommenskombinationen III und IV – alle nicht-p-Fälle: die Vorkommenskombinationen III und IV sind beide realmöglich; nicht-p kann demnach einerseits mit q (Vorkommenskombination III), andererseits ohne q vorliegen (Vorkommenskombination IV); dies bedeutet, *bei nicht-p* ist q *möglich* im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{K}$. Die letzten beiden Stellen einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen somit die Modalisierung des Vorkommens von q relativ zum Nichtvorkommen von p dar.

Vorkommenskombinationen I und III – alle q-Fälle: die Vorkommenskombinationen I und III sind beide realmöglich; q liegt also entweder mit p (Vorkommenskombination I) oder ohne p vor (Vorkommenskombination III); demnach ist das Vorliegen von p relativ zum Vorliegen von q *möglich* im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{K}$. Die erste und dritte Stelle einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen somit die Modalisierung des Vorkommens von p relativ zum Vorkommen von q dar.

Vorkommenskombinationen II und IV – alle nicht-q-Fälle: die Vorkommenskombination p⌢~q ist nichtrealmöglich, die Vorkommenskombination ~p⌢~q ist realmöglich: liegt also q nicht vor, dann ist ~p möglich (Vorkommenskombination IV), aber bei nicht-q ist p unmöglich (Vorkommenskombination II): dies bedeutet, relativ zu nicht-q ist p unmöglich im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{U}$. Die zweite und vierte Stelle einer Normalmatrix einer zweistelligen logischen Beziehung zwischen p und q stellen somit die Modalisierung des Vorkommens von p relativ zum Nichtvorkommen von q dar.

Der Gehalt einer umgangssprachlichen Wenn-dann-Gesetzesaussage wie „Wenn eine natürliche Zahl größer als zwei ist, ist ihr Quadrat größer als zwei“ involviert demnach die vier folgenden relativen Modalisierungen:

1) ist eine Zahl größer als 2, dann ist auch ihr Quadrat notwendig ($\mathcal{N}$) größer als 2 (d.h. es ist unmöglich, dass das Quadrat dieser Zahl nicht größer als 2 ist).

2) Ist eine Zahl nicht größer als 2, dann ist es möglich ($\mathcal{K}$), dass das Quadrat dieser Zahl größer als zwei ist (dies trifft für die Zahl 2 zu); es sind jedoch auch Fälle möglich, da sich unter der Bedingung, dass eine Zahl nicht größer als 2 ist, das Quadrat dieser Zahl auch nicht größer als 2 ist (dies gilt etwa für die Zahl 1,42).

3) Ist das Quadrat einer Zahl größer als zwei, dann ist es möglich ($\mathcal{K}$), dass diese Zahl größer als 2 ist (dies gilt etwa für die Zahl 3); es kommen jedoch auch Fälle vor, da das Quadrat einer Zahl größer als zwei ist, diese Zahl jedoch nicht größer als zwei ist (dies gilt etwa für die Zahl 1,9)

4) Ist das Quadrat einer Zahl nicht größer als 2, dann ist es unmöglich ($\mathcal{U}$), dass diese Zahl größer als 2 ist; denn es gibt wohl Fälle, da das Quadrat einer Zahl nicht größer als 2 ist und auch diese Zahl nicht größer als 2 ist – aber es gibt keinen Fall, dass das Quadrat einer Zahl nicht größer als 2 ist und diese Zahl größer als Geist ist.

Man überzeugt sich leicht, dass jedes gültige Wenn-dann-Gesetz genau diese vier relativen Modalisierungen behauptet[5].

Man kann die Struktur der Implikation durch die „*Modalitätenmatrix*“ ($\mathcal{N}\mathcal{K}\mathcal{K}\mathcal{U}$) bestimmen, wobei die Positionen der Reihe nach folgende relative Modalisierungen bedeuten:

q relativ zu p (ich spreche vom *Modalisierungsfall* α);
q relativ zu ~p (*Modalisierungsfall* β);
p relativ zu q (*Modalisierungsfall* γ)
p relativ zu ~q (*Modalisierungsfall* δ).

Aus allen 16 Normalmatrizen der zweistelligen Totalformen können in der angegeben Weise die jeweiligen Modalitätenmatrizen abgelesen werden.

Auch das umgangssprachliche (ausschließende) *Entweder-oder* drückt eine spezielle relative Modalisierung aus; die Gesetzesaussage *Eine natürliche Zahl ist **entweder** gerade **oder** ungerade* besagt, dass eine gerade Zahl unmöglich ungerade ist, eine ungerade Zahl unmöglich gerade ist; eine nicht gerade Zahl ist notwendigerweise ungerade und eine nicht ungerade Zahl ist notwendigerweise gerade. Die Normalmatrix (0110) und die von ihr abgeleitete Modalitätenmatrix ($\mathcal{U}\mathcal{U}\mathcal{N}\mathcal{N}$) legen den reinen logischen Gehalt des umgangssprachlichen *Entweder-oder*, die Beziehung zweier einziger unverträglicher Alternativen dar.

Für eine beliebige Sachverhalts-/Ereignisklasse p können ebenfalls alle möglichen *einstelligen* Totalformen ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass von *jeder* Sachverhalts-/Ereignisklasse p, die als Teil eines logischen Zusammenhangs auftritt, vorausgesetzt werden muss, dass sie überhaupt realmöglich ist; dieses Vorkommenkönnen ist unbedingt, es gilt nicht bloß relativ zum Vorliegen/Nichtvorliegen anderer Ereignisse. Nichtrealmögliche Sachverhalte/Ereignisse werden aus der logischen Betrachtung ausgeschlossen. Unter der Voraussetzung dieser unbedingten Möglichkeit kann von jeder Sachverhalts-/Ereignisklasse *darüber hinaus* bestimmt werden, ob die ihr zugehörenden Sachverhalte/Ereignisse *im Hinblick auf das Vorliegen oder das Nichtvorliegen irgendwelcher anderer Ereignisse* vorkommen können oder nicht; im Hinblick auf das Vorliegen oder Nichtvorliegen irgendeines anderen Ereignisses bestimmter Art steht für eine Sachverhalts-/Ereignisklasse zunächst nur in hypothetischer Weise fest, ob das Vorliegen (p) oder Nichtvorliegen (~p) derartiger Ereignisse realmöglich ist. Es gibt die hypothetischen Fälle, dass p vorliegt (Vorkommenskombination I) und die Fälle, dass p nicht vorliegt (Vorkommenskombination II); es gibt dann vier Möglichkeiten, die Realmöglichkeit der beiden Vorkommenskombinationen zu bestimmen; jede dieser Möglichkeiten stellt eine logische einstellige Form dar.

Tabelle 1: Die einstelligen logischen Totalformen

Sachverhalts-/Ereignisklasse p		relative Möglichkeit $\mathcal{K}$	relative Notwendigkeit $\mathcal{N}$	relative Unmöglichkeit $\mathcal{U}$	Leere logische Relation O
Vorkommenskombination I	p	1	1	0	0
Vorkommenskombination II	~p	1	0	1	0

Eine Sachverhalts-/Ereignisklasse p, für die es relativ zum Vorliegen oder Nichtvorliegen eines anderen Sachverhalts oder Ereignisses einerseits Fälle gibt, in denen derartige Ereignisse vorliegen, und andererseits Fälle gibt, in denen derartige Sachverhalte oder Ereignisse nicht vorliegen (Normalmatrix (11)), ist ein *möglicher* Sachverhalt (ein mögliches Ereignis): $\mathcal{K}$(p). Ein Sachverhalt/Ereignis p, das – wiederum relativ zum (Nicht-) Vorliegen eines anderen Sachverhalts/Ereignisses bestimmter Art – vorkommen kann, deren Nichtvorkommen aber nicht-realmöglich ist (Normalmatrix (10)), ist ein *notwendiger* Sachverhalt (ein notwendiges Ereignis): $\mathcal{N}$(p). Ein Sachverhalt oder ein Ereignis, dessen Vorkommen – relativ zum (Nicht-)Vorliegen eines anderen Ereignisses – nicht-realmöglich ist, und das aber nicht vorkommen kann (Normalmatrix (01)), ist ein *unmöglicher* Sachverhalt (ein unmögliches Ereignis): $\mathcal{U}$(p). Sachverhalte/Ereignisse, die bezüglich anderer Sachverhalte/Ereignisse weder vorkommen noch nicht vorkommen können (00), sind keine unmöglichen, sondern Sachverhalte/Ereignisse, die sich nicht einmal ausdenken lassen – Un-Sachverhalte oder Un-Ereignisse; O(p) ist die leere einstellige logische Form. Die vier einstelligen Totalformen erweisen sich so als die elementaren *relativen* Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{K}$ und die „Quasimodalität“ O; relativ ist diese Modalisierung, weil von vorneherein vorausgesetzt ist, dass p ein echtes Ereignis ist. Da vorausgesetzt werden muss, dass p realmöglich ist (nicht-relative, unbedingte Möglichkeit), können die Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ der Sachverhalts-/Ereignisklasse p nur bezüglich des Vorliegens oder Nicht-Vorliegens anderer Sachverhalts-/Ereignisklassen bestimmter Art zugesprochen werden. Die unbedingte Möglichkeit einer Sachverhalts-/Ereignisklasse p ist Voraussetzung dafür, dass diese Sachverhalts-/Ereignisklasse relativ zum Vorliegen anderer Ereignisse notwendig, relativ zu wieder anderen Sachverhalts-/Ereignisklassen möglich ($\mathcal{K}$) und wiederum relativ zu dritten Sachverhalts-/Ereignisklassen unmöglich ist. Von einer Sachverhalts-/Ereignisklasse p wird rm (p) ohne jeden Bezug auf andere Sachverhalts-/Ereignisklassen ausgesagt; von p kann dann ohne Widerspruch nur bezüglich anderer Sachverhalts-/ Ereignisklassen $\mathcal{N}$(p), $\mathcal{K}$(p) oder $\mathcal{U}$(p) ausgesagt werden. Die Quasimodalität O ergibt als einstellige logische Form nicht viel Sinn, sie spielt aber in umfassenderen bedingungslogischen Zusammenhängen eine unverzichtbare Rolle.

Es gibt drei nicht-leere einstellige logische Formen (elementare relative Modalitäten); nun werden oft nicht nur zwei *apodiktische* – $\mathcal{N}$ und $\mathcal{U}$ –, sondern auch zwei nicht-apodiktische Modalitäten unterschieden, das *Mögliche im engeren Sinne* (ich schreibe „$\mathcal{M}$“) und das *Zufällige* („$\mathcal{Z}$“). Wird versucht, das Mögliche i.e.S. als das, was *nicht notwendig nicht* vorliegt (was also *nicht unmöglich* ist), das Zufällige aber als das, was *nicht notwendig* vorliegt, zu bestimmen[6], so stellt dies keine differenzierende Zerlegung der nicht-apodiktischen Modalität $\mathcal{K}$ dar, denn die Disjunktivität der Bestimmungen $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{K}$ wird nicht berücksichtigt: was nicht möglich (~$\mathcal{K}$) ist, ist entweder nicht notwendig oder nicht unmöglich. Wäre das „Mögliche“ das Nicht-Unmögliche, wäre es entweder möglich ($\mathcal{K}$) oder notwendig; das Mögliche im eigentlichen Sinne ist aber in keinem Falle notwendig. Wäre das „Zufällige“ das Nicht-Notwendige, wäre es entweder möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich; das Zufällige ist aber in keinem Falle unmöglich. Diese Bestimmungen – „möglich“ = nicht unmöglich und „zufällig“ = nicht notwendig – sind demnach nicht korrekt, sie widersprechen schon dem intuitiven Verständnis der Wörter „möglich“ und „zufällig“. Eine sachhaltige, mit dem intuitiven Verständnis übereinstimmende und logisch bedeutsame Differenzierung der nicht-apodiktischen Modalität $\mathcal{K}$ in ein *Mögliches im engeren Sinne* ($\mathcal{M}$) und ein *Zufälliges* wird erst durch die Einbeziehung umfassenderer bedingungslogischer Zusammenhänge, für welche in gleicher Weise $\mathcal{K}$(p) gilt, möglich; es gibt zwei grundlegende Möglichkeiten einer dichotomen Zerlegung des Relativ-Möglichen i.w.S. ($\mathcal{K}$).

Gilt $\mathcal{K}$(p, q) – liegt p vor, kann p, aber auch q vorliegen[7] –, kann es sein, dass in jenen Fällen, in denen bei p das Ereignis q nicht vorliegt, notwendig ein drittes Ereignis r vorliegt, welches zusammen mit q einer wohlbestimmten Menge alternativer Ereignisse angehört. Falls p realisiert ist, muss zumindest eines dieser alternativen Ereignisse vorliegen; bei p ist jede der Alternativen möglich im Sinne von $\mathcal{M}$ (*möglich i.e.S.*). Dies bedeutet zugleich, dass, falls p nicht vorliegt, keine dieser Alternativen vorliegen kann, denn das Vorliegen von q, setzt wie das Vorliegen jeder anderen der Alternativen notwendig das Vorliegen von p voraus: bei $\mathcal{M}(p,q)$ gilt dann zugleich $\mathcal{N}(q,p)$ und $\mathcal{U}(\sim p,q)$. Dieser Zusammenhang lässt sich an einem einfachen Beispiel erläutern. Wenn ich mit einem Würfel werfe (Ereignisklasse $\mathfrak{a}$), ist es im Sinne von $\mathcal{M}$ möglich, dass ich die Augenzahl 4 werfe (Ereignisklasse $\mathfrak{b}$); es gilt $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, ebenso wie $\mathcal{N}(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ und $\mathcal{U}(\sim\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Das Ereignis $\mathfrak{b}$ ist eine von sechs wohlunterschiedenen, sich gegenseitig ausschließenden Alternativen. Wenn ich mit einem Würfel werfe, kann ich nicht sagen, dass das Eintreten der Augenzahl 4 völlig unvorhersehbar, und damit zufällig ist, dass man mit dem Ereignis $\mathfrak{b}$ also verständigerweise nicht zu rechnen hat; dem Ereignis $\mathfrak{b}$ kann ja ein bestimmter Wahrscheinlichkeitswert zugeschrieben werden. Den Wahrscheinlichkeitserwägungen liegt stets die Modalität $\mathcal{M}$ zu Grunde, d.h. ein Wissen um die überhaupt möglichen Alternativen.

Verschiedene zusammengehörende Alternativen können miteinander verträglich sein, d.h. zusammen realisiert sein, oder nicht. Sind zwei Alternativen unverträglich, dann ist, falls eine davon vorliegt, jede andere unmöglich ($\mathcal{U}$). Sind zwei Alternativen verträglich, dann ist, falls die eine vorliegt, die andere im Sinne von $\mathcal{M}$ möglich. Wenn ich z.B. mit einem Würfel werfe (Ereignisklasse $\mathfrak{a}$), ist es im Sinne von $\mathcal{M}$ möglich, dass eine gerade Augenzahl geworfen wird (Ereignisklasse $\mathfrak{b}$) oder dass eine Augenzahl größer als 3 geworfen wird (Ereignisklasse $\mathfrak{c}$); $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind verträgliche Alternativen. Es gilt dann $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ und $\mathcal{N}(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$, sowie $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{c})$ und $\mathcal{N}(\mathfrak{c},\mathfrak{a})$. Tritt $\mathfrak{b}$ auf ($\mathfrak{a}$ ist dann notwendig), ist es auch möglich ($\mathcal{M}$), dass $\mathfrak{c}$ auftritt. Umgekehrt ist bei $\mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{b}$ möglich im Sinne von $\mathcal{M}$. Diese symmetrische $\mathcal{M}$-Beziehung zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist durch $\mathfrak{a}$ vermittelt: weil bei $\mathfrak{b}$ notwendig $\mathfrak{a}$ vorliegt, und bei $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{c}$ möglich ($\mathcal{M}$) und $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b}$ verträglich ist, ist bei $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ möglich ($\mathcal{M}$). Während für die *„unmittelbare" und asymmetrische* $\mathcal{M}$-Beziehung $\mathcal{M}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ die Umkehrung $\mathcal{N}(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ gilt, weist die *„mittelbare" oder symmetrische* $\mathcal{M}$-Beziehung $\mathcal{M}(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ die Umkehrung $\mathcal{M}(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ auf.

Gilt bei $\mathcal{K}(p,q)$ die Umkehrung $\mathcal{K}(q,p)$, und gibt es kein drittes Ereignis r, das *sowohl* zu p *als auch* zu q in einer apodiktischen Modalitätenbeziehung steht, liegt die Zufallsrelation $\mathcal{Z}(p,q)$ vor: das Vorliegen von q ist hinsichtlich des Vorliegens von p zufällig. Diese Beziehung ist vollkommen symmetrisch; es gilt notwendig auch $\mathcal{Z}(\sim p,q)$, $\mathcal{Z}(q,p)$ und $\mathcal{Z}(\sim q,p)$. Jedes der beiden Ereignisse kann auftreten und nicht auftreten, falls das andere Ereignis vorliegt und falls dieses nicht vorliegt; es gibt so keinerlei bedingungslogische Abhängigkeit zwischen zueinander zufälligen Ereignissen, sie müssen nur miteinander verträglich sein. Die Zufälligkeit wird von der Totalform $\mathbb{V}$ (Independenz) mit der Modalitätenmatrix ($\mathcal{ZZZZ}$) zum Ausdruck gebracht.

Vom *Möglichen* kann in den folgenden verschiedenen Bedeutungen gesprochen werden:

1. Das *Hypothetischmögliche* ist das Denkbare und der Bereich dieses Möglichen ist umfassender als der Bereich desjenigen, von dem wir wissen, dass es wirklich sein kann, oder zu einer bestimmten Zeit wirklich ist[8]. Gleichwohl kann alles Wirkliche und Realmögliche nur dann in seiner jeweiligen objektiven Bestimmtheit und Gesetzmäßigkeit erkannt werden, wenn es im umfassenderen Bereich des Hypothetischmöglichen dem Nicht-Wirklichen bzw. Unmöglichen entgegengesetzt und von ihm abgegrenzt wird. Was vorliegt, kann nur in der Abgrenzung gegen das, was nicht vorliegt, bestimmt werden. In seiner Notwendigkeit/Gesetzmäßigkeit ist das Wirkliche nur dann erkennbar, wenn begründet werden kann, dass es nicht anders sein kann – wenn dieses Wirkliche also zusammen mit dem gedacht wird und auf dasjenige bezogen wird, das unter keinen Umständen wirklich sein kann. Dass z.B. *bei* p q *notwendig* ist, ergibt sich daraus, dass $p \frown q$ und $\sim p \frown \sim q$ vorkommen können, $p \frown \sim q$ aber unbedingt unmöglich ist. Die hypothetische Möglichkeit $p \frown \sim q$ muss *gedacht* werden können, damit sie auf Realmöglichkeit hin überprüft werden kann. Es ist eine fundamentale Gesetzmäßigkeit, dass das Seiende nur zusammen mit dem Nicht-Seienden (mit den Nichtwirklichen und Unmöglichen) erkannt und bestimmt werden kann.

   Alles Denkbare fällt in den Bereich des Hypothetischmöglichen; der Gegensatz der hypothetischen Möglichkeit ist das *Undenkbare*. Undenkbar ist z.B. ein Ereignis, das weder vorkommen noch nicht vorkommen kann; undenkbar sind etwa für n Sachverhalts-/Ereignisklassen mehr als 2^n Vorkommenswertkombinationen, oder für n geordnete Elemente mehr als n! Permutationen. Kombinatorische Operationen begrenzen das Hypothetischmögliche; sie spielen bei der Bestimmung aller hypothetischen Möglichkeiten in einem bestimmten Bereich eine entscheidende Rolle und bilden eine wichtige Grundlage der systematischen Hypothesenbildung und Hypothesenüberprüfung. Um den bedingungslogischen Zusammenhang von *n* Sachverhalts-/Ereignisklassen zu überprüfen, müssen wir zunächst in hypothetischer Weise alle nur möglichen Vorkommenskombinationen konstruieren, um dann zu bestimmen, welche dieser Kombinationen realmöglich sind und welche nicht. Im Bereich des Hypothetischmöglichen wird dann das Realmögliche, das wirklich sein kann, vom Nicht-Realmöglichen geschieden (aus dieser Scheidung resultiert die Erkenntnis des Gesetzmäßigen). Diese *Realmöglichkeit* – eine nicht-relative, unbedingte Modalität – stellt die zweite Art von Möglichkeit dar.

2. Der eigentümliche Gegensatz dieses *Realmöglichen* ist das *unbedingt Unmögliche* oder *Nicht-Realmögliche*, das unter keinen Umständen vorliegen kann. Ein Ereignis ist entweder realmöglich (dann ist es ein *echtes Ereignis*) oder unbedingt unmöglich (nicht realmöglich). Die unbedingte Modalität der Realmöglichkeit (*rm*) ist eine notwendige Bedingung dafür, dass einem Ereignis überhaupt eine relative Modalität zugeschrieben werden kann[9].

3. Die dritte Art des *Möglichen* ist *das Mögliche im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{K}$;* ihr spezifischer Gegensatz ist die relative apodiktische Modalität (entweder $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{U}$), und dieser Gegensatz der apodiktischen und der nicht-apodiktischen relativen Modalität fällt in den Begriff der relativen Modalität selber. Für alle p gilt das Gesetz: *Genau dann, wenn* $\mathcal{K}$(p), so $\mathcal{K}$(~p)[10].

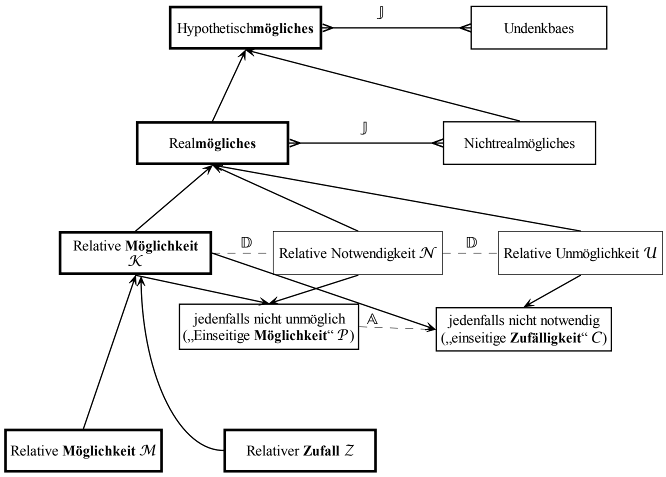
4. In den Begriff des Möglichen im Sinne von $\mathcal{K}$ fällt der Gegensatz des *Möglichen im engeren Sinne* ($\mathcal{M}$) und des *Zufälligen* $\mathcal{Z}$.

5. Vom Möglichen wird seit **ARISTOTELES** auch noch in einer weiteren Bedeutung gesprochen, im Sinne der sog. *einseitigen Möglichkeit*; als „zweiseitige Möglichkeit" werden die Begriffe *rm*, $\mathcal{K}$ und $\mathcal{M}$ bezeichnet, weil in diesen Fällen die jeweilige Möglichkeiten von p immer die entsprechende Möglichkeit von ~p mit umfasst. Ein Ereignis wird hingegen dann „einseitig möglich" genannt, wenn es *jedenfalls nicht unmöglich* ist, d.h. wenn es entweder notwendig ($\mathcal{N}$) oder möglich im Sinne von $\mathcal{K}$ ist. Ich bezeichne diese Bestimmung der *Nicht-Unmöglichkeit* mit „$\mathcal{P}$(p)". In gleichem Sinne heißt es irreführend, ein Ereignis p sei „zufällig", wenn es jedenfalls nicht notwendig ist, wenn ihm also entweder $\mathcal{U}$ oder $\mathcal{K}$ zukommt; ich schreibe dafür „$\mathcal{C}$(p)"[11]. Ist p im Sinne von $\mathcal{P}$ „einseitig möglich", ist nicht auch notwendigerweise ~p „einseitig möglich", es gilt vielmehr: $\mathcal{C}$(p) *gilt genau dann, wenn* $\mathcal{P}$(~p) *gilt*; und: $\mathcal{P}$(p) *gilt genau dann, wenn* $\mathcal{C}$(~p) *gilt*. In entsprechender Weise kann das logische Prädikat „jedenfalls nicht möglich im Sinne von $\mathcal{K}$ (entweder $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{U}$)" bestimmt werden; ich schreibe dafür „$\mathcal{A}$(p)". Ich echten Wortsinne handelt es sich bei $\mathcal{P}$(p) und $\mathcal{C}$(p) nicht um Möglichkeiten, da sie neben der echten zweiseitigen Möglichkeit $\mathcal{K}$ die Notwendigkeit bzw. die Unmöglichkeit $\mathcal{U}$ einschließen.

Relative Modalisierung bezieht den Einzelfall auf alle Fälle derselben Art. Ist ein einzelner Sachverhalt (ein einzelnes Ereignis) unter bestimmten Bedingungen notwendig ($\mathcal{N}$), dann weil es unter gleichartigen Bedingungen keinen einzigen Fall gibt, in dem ein Ereignis von derselben Art nicht vorliegt. Ist ein einzelner Sachverhalt (ein einzelnes Ereignis) unter bestimmten Bedingungen möglich ($\mathcal{K}$), dann weil es unter gleichartigen Bedingungen auch Fälle gibt, in denen ein Ereignis von derselben Art nicht vorliegt. Ist ein einzelner Sachverhalt (ein einzelnes Ereignis) unter bestimmten Bedingungen unmöglich ($\mathcal{U}$), dann weil es unter gleichartigen Bedingungen keinen einzigen Fall gibt, in dem ein Ereignis von derselben Art vorliegt.

Diese verschiedenen Arten des (*objektiven*) Möglichen dürfen nicht mit dem Problematischen im Sinne der subjektiven Ungewissheit verwechselt werden; dass ein Ereignis p „möglich" im Sinne der subjektiven Ungewissheit ist, besagt, dass der Sprecher sich unschlüssig ist, ob p der Fall ist oder nicht, dass er es aufgrund seines unvollständigen Wissens weder behaupten noch ausschließen kann. Der ganze logische Zusammenhang der objektiven Modalitäten ist in folgender Abbildung dargelegt[12].

Abbildung 1: Die Arten des objektiven Möglichen



Die einstelligen logischen Formen sind *relative* Modalitäten und bestimmen daher Sachverhalts-/Ereignisklassen nur bezüglich des Vorkommens und Nicht-Vorkommens von zumindest einer weiteren Sachverhalts-/Ereignisklasse; sie können nicht für sich alleine gelten. Einen logischen Zusammenhang zwischen n Sachverhalts-/Ereignisklassen, der nur in einem Zusammenhang gelten kann, der mindestens n+1 Sachverhalts-/Ereignisklassen umfasst, nenne ich ***obligatorisch unselbständig***; alle einstelligen Totalformen sind obligatorisch unselbständig, ihre Betrachtung erfordert notwendig den Übergang zur Analyse zweistelliger Totalformen. Die Gesamtheit aller zweistelligen Totalformen lässt sich konstruieren, wenn alle möglichen Kombinationen der relativen Modalisierung von q einerseits für p, andererseits für ~p bestimmt werden; die Bestimmung der Modalisierungsfälle α und β legen ja die jeweilige Normalmatrix einer zweistelligen logischen Totalform vollständig fest.

Die Normal- und Modalitätenmatrizen aller zweistelligen Totalformen sind in den folgenden Tafeln mit den Namen und den Bezeichnungen dieser logischen Verhältnisse dargelegt[13]. Besteht z.B. zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q die logische Relation der Kontravalenz, so schreibe ich „𝕁(p,q)“, „p ≻≺ q“ oder „(0110)(p,q)“.

Tabelle 2: Die zweistelligen logischen Totalformen[14]

Vorkommens-kombination		Independenz 𝕍 p ⊤ q	Alternation 𝔸 p ∨ q	Replikation 𝔹 p ← q	Implikation ℂ p → q	Exklusion 𝔻 p ↑ q	Äquivalenz 𝔼 p ↔ q	Pränonpendenz 𝔽 p ⌉ q	Postnonpendenz ≡ p ⌈ q
I	p⌢q	1	1	1	1	0	1	0	0
II	p⌢~q	1	1	1	0	1	0	0	1
III	~p⌢q	1	1	0	1	1	0	1	0
IV	~p⌢~q	1	0	1	1	1	1	1	1
I	p⌢q	0	0	0	0	1	0	1	1
II	p⌢~q	0	0	0	1	0	1	1	0
III	~p⌢q	0	0	1	0	0	1	0	1
IV	~p⌢~q	0	1	0	0	0	0	0	0
		Antilogie 𝕆 p ⊥ q	Rejektion 𝕏 p ↓ q	Präsektion 𝕄 p ⋞ q	Postsektion 𝕃 p ⋟ q	Konjunktion 𝕂 p ∧ q	Kontravalenz 𝕁 p ≻≺ q	Präpendenz 𝕀 p ⌋ q	Postpendenz ℍ p ⌊ q

Tabelle 3: Die Modalitätenstruktur der zweistelligen logischen Totalformen

Modalisierungsfall	gegeben	modalisiert	𝕍 ⊤	𝔸 ∨	𝔹 ←	ℂ →	𝔻 ↑	𝔼 ↔	𝔽 ⌉	𝔾 ⌈	ℍ ⌊	𝕀 ⌋	𝕁 ⋈	𝕂 ∧	𝕃 ⋟	𝕄 ⋞	𝕏 ↓	𝕆 ⊥
α	p	q	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$
β	~p	q	$\mathcal{K}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{O}$
γ	q	p	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$
δ	~q	p	$\mathcal{K}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{O}$

1.3. Dreistellige logische Totalformen

Eine *dreistellige logische Totalform* bestimmt, welche der hypothetischmöglichen Kombinationen der Vorkommenswerte (Vorkommenskombinationen) von drei Sachverhalts-/Ereignisklassen realmöglich bzw. nicht-realmöglich sind. Es gibt 8 Vorkommenskombinationen; da diese auf $2^8 = 256$ unterschiedliche Weisen als realmöglich bzw. nicht-realmöglich bestimmbar sind, gibt es genau 256 dreistellige Totalformen. Wie der Übergang von den ein- zu den zweistelligen, so ist der Übergang von den zwei- zu den dreistelligen Totalformen zwangsläufig, da die meisten zweistelligen Totalformen obligatorisch unselbständig sind und deshalb nur als Bestandteile bedingungslogischer Zusammenhänge bestehen können, die mehr als zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen umfassen.

Die 8 Vorkommenskombinationen der dreistelligen Totalformen bezeichne ich wiederum mit römischen Ziffern. Die Vorkommenskombination I stellt die Gesamtheit der Umstände dar, bei denen drei Ereignisse p, q und r zusammen vorliegen – hypothetisch betrachtet, denn für drei Ereignisse steht nicht von vorneherein fest, dass sie zusammen vorkommen können; dafür schreibe ich auch „p⌢q⌢r“. Die Vorkommenskombination II ist die Gesamtheit der Fälle, bei denen – hypothetisch – p und q vorliegen, r jedoch nicht vorliegt; ich schreibe „p⌢q⌢~r“, usw. Jede dreistellige Totalform kann durch eine Normalmatrix wie (1110 1001) dargestellt werden; diese logische Form ist in Tabelle 4 ausführlich dargestellt:

Tabelle 4: Die Totalform [𝔸𝕏]

Vorkommenskombination		∨ ↓
I	p⌢q⌢r	1
II	p⌢q⌢~r	1
III	p⌢~q⌢r	1
IV	p⌢~q⌢~r	0
V	~p⌢q⌢r	0
VI	~p⌢q⌢~r	0
VII	~p⌢~q⌢r	0
VIII	~p⌢~q⌢~r	1

Unter den 8 Vorkommenskombinationen einer *drei*stelligen Totalform kommt jede der vier Vorkommenskombinationen von *zwei* der drei Sachverhalts-/Ereignisklassen genau zweimal vor; einmal, wenn das jeweils dritte Ereignis vorliegt, und dann wenn das dritte Ereignis nicht vorliegt. Auf diese Weise gibt jede dreistellige Totalform erschöpfend darüber Auskunft, welche zweistellige Totalform zwischen zwei der drei Sachverhalts-/Ereignisklassen besteht, wenn das dritte Ereignis vorliegt *und* wenn das dritte Ereignis nicht vorliegt. Die nebenstehende Totalform sagt aus, dass bei p die Beziehung q∨r gilt; ich schreibe: „p⫶ q∨r“. Bei ~p gilt q ↓ r, ich schreibe: „~p⫶ q ↓ r“. Diese dreistellige Gesetzesbeziehung kann durch die Ausdrücke „[p, q, r 𝔸𝕏]“ oder „[p, q, r ∨↓]“ eindeutig bezeichnet werden: bei p gilt q∨r und bei ~p gilt q↓r.

Die Normalmatrix einer dreistelligen logischen Totalform kann auch wie folgt gelesen werden: es wird festgestellt, welche elementare relative Modalität, dem Ereignis r zukommt, falls p⌢q gilt (Vorkommenskombinationen I und II), falls p⌢~q (Vorkommenskombinationen III und IV), ~p⌢q (Vorkommenskombinationen V und VI) und ~p⌢~q (Vorkommenskombinationen VII und VIII) gilt. Die obige dreistellige Totalform setzt sich somit zusammen aus den Beziehungen:

- ((p⌢q), r) bei p⌢q ist r möglich ($\mathcal{K}$)
- ((p⌢~q), r) bei p⌢~q ist r notwendig
- ((~p⌢q), r) bei ~p⌢q ist r notwendig
- ((~p⌢~q), r) bei ~p⌢~q ist r unmöglich.

Gilt [p, q, r 𝔸𝕏], so sind q und r die beiden einzigen verträglichen hinreichenden Bedingungen des Ereignisses p. Dieser gesetzmäßige Zusammenhang lässt sich, wie jede andere dreistellige Totalform, nicht eindeutig durch den Ausdruck „$p \leftrightarrow (q \vee r)$“ darstellen; der Ausdruck „$p \leftrightarrow (q \vee r)$“ besagt zwar, dass bei p das Verhältnis $q \vee r$ gilt, jedoch steht für den Fall, dass $\sim p$ vorliegt, nur fest, dass $p \vee q$ nicht gilt; gilt $p \vee q$ nicht, so bedeutet dies, dass irgendeine zweistellige logische Totalform, nur eben nicht 𝔸, zwischen p und q besteht; der Ausdruck „$r \leftrightarrow (p \vee q)$“ drückt also im Gegensatz zum Ausdruck „[p, q, r 𝔸𝕏]“ nicht eindeutig aus, dass bei $\sim r$ gilt $p \downarrow q$.

Es ist auf diese Weise für jede natürliche Zahl *n* jeder beliebig komplexe ereignislogisch/bedingungslogische n-stellige Zusammenhang rekursiv konstruierbar, was den einheitlichen, zusammenhängenden und infiniten Charakter des *Systems der logischen Relationen* zeigt: jede n-stellige logische Totalrelation baut sich aus (n-1)-stelligen logischen Relationen auf, wobei am Ausgangspunkt der Konstruktion die relativen logischen Modalitäten stehen; jede n-stellige logische Form sagt aus, welche (n-1)-stellige bedingungslogische Relation zwischen (n-1) Ereignissen besteht, wenn ein n-tes Ereignis vorliegt und welche (n-1)-stellige bedingungslogische Relation zwischen genau diesen (n-1) Ereignissen besteht, wenn dieses n-te Ereignis nicht vorliegt. So sagt etwa die zweistellige Relation der Implikation $p \rightarrow q$ aus, dass bei p q notwendig ($\mathcal{N}$) und dass bei $\sim p$ q möglich ($\mathcal{K}$) ist; die dreistellige Relation [p, q, r ℂ𝕍] sagt aus, dass bei p zwischen q und r die Beziehung ℂ, und dass bei $\sim p$ zwischen q und r die Beziehung 𝕍 besteht. Die vierstellige logische Relation [p, q, r, s 𝔸𝕏ℂ𝔹] besagt, dass beim Vorliegen von p die dreistellige Relation [q, r, s 𝔸𝕏] und beim Nichtvorliegen von p die Relation [q, r, s ℂ𝔹] gilt.

Diese Konstruktion legt für jede beliebige logische Form in vollständiger und endgültiger Weise alle notwendigen Bedingungen fest, die erfüllt sein müssen, damit in irgendeinem Bereich der Wirklichkeit mit Recht von der Geltung des betreffenden bedingungslogischen Zusammenhangs gesprochen werden kann; die vollständige und unverrückbare Bestimmtheit einer beliebigen logischen Form ist völlig unberührt davon, ob das empirische Bestehen eines derartigen bedingungslogischen Zusammenhanges je schon nachgewiesen worden ist oder jemals nachgewiesen werden wird.

1.4. Logische Totalformen und logische Partialformen

Jede in einer Menge N erklärte n-stellige Relation R ist in extensionaler Betrachtung die Menge derjenigen n-Tupel von Elementen aus N, denen R zukommt. Wenn R_1 und R_2 verschiedene zweistellige Relationen auf einer Menge $M \times M$, $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ die entsprechenden Mengen von Paar-Elementen aus $M \times M$ sind, denen R_1 bzw. R_2 zukommt, ist die Vereinigungsmenge $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ die Extension einer Relation, die ich durch den Ausdruck „$R_1 \Cup R_2$“ darstelle. Ist ein Mensch z.B. entweder die Schwester (R_1) oder der Bruder (R_2) eines anderen Menschen, so besteht zwischen ihnen die Relation des Geschwisterseins ($R_1 \Cup R_2$). Das Zeichen $\Cup$ bezeichnet eine Verknüpfung von zwei n-stelligen Prädikaten zu einem dritten Prädikat; ich nenne diese Verknüpfung „Prädikatenvereinigung“: $R_1 \Cup R_2$ ist das Prädikat, das allen Elementen der Menge $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \in (M \times M)$ zukommt. Die zwei Prädikate R_1 und R_2 können auch durch die „Prädikatenmultiplikation“ $R_1 \Cap R_2$ zu jener Relation verknüpft werden, die allen jenen Elementen zukommt, denen sowohl R_1 wie auch R_2 zukommt, d.h. die den Elementen von $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ zukommen. Auch beliebige Prädikatverknüpfungen von logischen Relationen sind wiederum logische Relationen.

Sind z.B. zwei Ereignisse p und q die einzigen hinreichenden Bedingungen eines dritten Ereignisses r, und bleibt es offen, ob p und q verträglich sind, so stehen, falls r vorliegt, p und q entweder in der Relation 𝔸 oder in der Relation 𝕁. Diese neue logische Relation kann durch den Ausdruck „𝔸⋓𝕁(p, q)“ bezeichnet werden. Für diese logische Relation 𝔸⋓𝕁(p, q) sind nur drei der vier hypothetischmöglichen Vorkommenskombinationen bestimmt: die Vorkommenskombinationen II und III als realmöglich, die Vorkommenskombination IV als nicht-realmöglich. Ob die Vorkommenskombination I realmöglich ist, bleibt offen. Die Relation 𝔸⋓𝕁 lässt sich so auch durch den Ausdruck „(•110)“ bezeichnen. Ist eine Vorkommenskombination nicht definitiv bestimmt, so steht an seiner Position in der Normalmatrix das Zeichen „•“. Eine logische Relation, die eine Vorkommenskombination unbestimmt lässt, gilt genau dann, wenn diese unbestimmte Vorkommenskombination entweder realmöglich oder wenn sie nicht-realmöglich ist. Beispielsweise gilt (10•1)(p, q) genau dann, wenn $p \rightarrow q$ oder wenn $p \leftrightarrow q$ gilt; die Ausdrücke „(10•1)(p, q)“ und „ℂ⋓𝔼(p, q)“ sind bedeutungsgleich. Logische Relationen, die aus einer Prädikatenverknüpfung oder aus einer Prädikatenmultiplikation resultieren und bei denen nicht alle

Vorkommenskombinationen definitiv bestimmt sind, nenne „ich ***logische Partialformen***, die logischen Relationen, bei welche alle Vorkommenskombinationen definitiv als realmöglich oder nichtrealmöglich bestimmt sind, nenne ich ***logische Totalformen.***

Logische Relationen können auch durch die Angabe der Bedingungen für die Bestimmung ihrer Vorkommenskombinationen dargestellt werden. Die zweistellige logische Relation, für die gefordert wird, dass von den Vorkommenskombinationen I und II zumindest eine realmöglich soll, und dass die Vorkommenskombinationen II und IV gegensätzlich – die eine als realmöglich, die andere als nicht-realmöglich – bestimmt sein sollen, ist die Relation $\mathbb{E}\Cup\mathbb{H}\Cup\equiv\Cup\mathbb{J}\Cup\mathbb{A}\Cup\mathbb{B}(p,q)$; genau diese und nur diese 6 Totalformen genügen den angegebenen Bedingungen[15]. Die zweistellige logische Relation $\mathbb{V}\Cup\mathbb{C}\Cup\mathbb{B}$ ist dadurch definiert, dass die Vorkommenskombinationen I und IV realmöglich sind und dass von den Vorkommenskombinationen II und III zumindest einer realmöglich ist; diese Relation stelle ich auch durch den Ausdruck „$(1\circ\circ 1)(p,q)$“ dar; von den Vorkommenskombinationen, an deren Position das Zeichen $\circ$ steht, ist immer zumindest einer realmöglich.

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ lässt sich die Menge der logischen Relationen mit Hilfe der Operation der Potenzmengenbildung[16] kombinatorisch bestimmen. Wenn die Menge der 16 zweistelligen *Totalformen* mit „$\mathcal{F}$“ bezeichnet wird, stellt jede Vereinigung von irgendwelchen Teilmengen aus $\mathcal{F}$ eine *logische Partialform* dar. Da es für die 16-elementige Menge $\mathcal{F}$ genau 2^{16} verschiedene Teilmengen gibt, gibt es genau 2^{16} verschiedene zweistellige logische Relationen. Wenn wir vernünftigerweise die leere Totalform $\mathbb{O}$ ausschließen, erhalten wir (2^{15})-1 nichtleere zweistellige logische Relationen[17]. Für die vier einstelligen Totalformen gibt es $2^4 = 16$ Möglichkeiten, davon sind $(2^3)-1$ nicht-leer[18]. Für *n* Sachverhalte/Ereignisse gibt es 2^n Vorkommenskombinationen, $2^{(2^n)}$ n-stellige Totalformen (davon sind $2^{(2^n)-1}$ nicht-leer) und $2^{(2^{(2^n)})}$ n-stellige logische Relationen – darunter $2^{(2^{(2^n)}-1)}-1$ nicht-leer. Unter den logischen Relationen unterscheiden wir die Totalformen (alle Vorkommenskombinationen sind definitiv als realmöglich oder nicht-realmöglich bestimmt) und die logischen Partialformen (zumindest eine Vorkommenskombination ist nicht definitiv bestimmt).

Viele zweistellige logische Partialformen lassen sich durch Modalitätenmatrizen darstellen, wenn zu den drei elementaren Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{K}$ ihre jeweiligen Negationen hinzugefügt werden: $\sim\mathcal{N} = \mathcal{C}$, $\sim\mathcal{U} = \mathcal{P}$ und $\sim\mathcal{K} = \mathcal{A}$[19]. Die logische Relation $(\bullet 110)$ – entweder $\mathbb{A}$ oder $\mathbb{J}$, entweder also ausschließende oder nicht-ausschließende *Oder*-Alternativen – hat dann die Modalitätenmatrix: $(\mathcal{C}\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{N})$: bei p ist q jedenfalls nicht notwendig, bei $\sim$p ist q notwendig, bei q ist p jedenfalls nicht notwendig und bei $\sim$q ist p notwendig. Diese Modalitätenmatrix kann direkt aus der Normalmatrix $(\bullet 110)$ abgelesen werden. Ein anderes Beispiel: macht p das Ereignis q echt notwendig, ohne dass bestimmt ist, ob auch bei q p notwendig ist (es gilt entweder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{E}$, d.h. die Relation $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}$), haben wir die Normalmatrix $(10\bullet 1)$ und die Modalitätenmatrix $(\mathcal{N}\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{U})$: bei p ist q notwendig, und bei $\sim$q ist p unmöglich; bei $\sim$p aber ist q jedenfalls nicht notwendig, und bei q ist p jedenfalls nicht unmöglich. – Beispiel 3: besteht zwischen den Ereignissen p und q entweder der konträre Gegensatz ($\mathbb{D}$) oder der kontradiktorische Gegensatz ($\mathbb{J}$) also die Relation $\mathbb{D}\Cup\mathbb{J}$, ergibt sich die Normalmatrix $(011\bullet)$ und die Modalitätenmatrix $(\mathcal{U}\mathcal{C}\mathcal{U}\mathcal{C})$: bei p ist q und bei q ist p unmöglich; bei $\sim$p ist q und bei $\sim$q ist p jedenfalls nicht notwendig. Die beliebige *nichtleere* zweistellige logische Relation kann durch den Ausdruck „$(\circ\circ\circ\circ)(p,q)$“ dargestellt werden; zumindest einer der Vorkommenskombinationen ist realmöglich: alle Paare von Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen in dieser Beziehung.

Anmerkungen zu Teil I, Kapitel 1

1 p, q, r,… sind Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen; mit den Frakturbuchstaben $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ bezeichne ich Abkürzungen bestimmter, *konkreter* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „eine Zahl ist größer als zwei“, „durch ein Stück Draht fließt elektrischer Strom“.

2 Die Sachverhalte *rm*($\sim$p) und *nrm*(p) sind strikt zu unterscheiden. Da bei *rm($\sim$p)* stets auch *rm*(p) gilt, sind *rm*($\sim$p) [= *rm*(p)] und *nrm*(p) kontradiktorische Gegensätze.

3 Realmöglich wäre die Sachverhalts-/Ereignisklasse, dass ein Mensch 100 Jahre alt wird, nicht-realmöglich hingegen die Sachverhalts-/Ereignisklasse, dass ein Mensch 300 Jahre alt wird oder er sich zugleich an zwei verschiedenen Orten aufhält.

4 Das heißt dadurch, dass eine der Vorkommenskombinationen als realmöglich oder nichtrealmöglich bestimmt ist, ist die Bestimmung der anderen Vorkommenskombinationen noch nicht determiniert. Jede einzelne Vorkommenskombination muss für sich, unabhängig von den anderen Vorkommenskombinationen auf Realmöglichkeit hin geprüft werden.

5 Wenn wir das Implikationsgesetz ***Wenn** durch einen Draht elektrischer Strom fließt* ($\mathfrak{p}$)*, **dann** erwärmt sich dieser Draht* ($\mathfrak{q}$) behaupten, wollen wir sagen, dass ein von Strom durchflossener Draht notwendig (ohne Ausnahme) erwärmt wird (Modalisierungsfall α: relativ zu $\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{q}$ notwendig), während die Erwärmung eines Drahtes nicht in jedem Falle durch das Durchfließen eines Stroms bedingt ist (Modalisierungsfall β: relativ zu $\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{p}$ nur möglich ($\mathcal{K}$), nicht notwendig); die Gesetzesaussage bringt außerdem zum Ausdruck, dass es, wenn ein Draht nicht erwärmt wird, nie vorkommt, dass Strom durch diesen Draht fließt (Modalisierungsfall δ: bei $\sim\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{p}$ unmöglich), und dass, falls durch einen Draht kein Strom fließt, dieser Draht in dem einen Falle erwärmt sein kann, in einem anderen Falle nicht (Modalisierungsfall γ: relativ zu $\sim\mathfrak{p}$ ist also $\mathfrak{q}$ möglich im Sinne von $\mathcal{K}$).

6 Diese Einteilung der Modalitäten in *notwendig*, *unmöglich*, *möglich* (im Sinne von *nicht unmöglich*) und *zufällig* (im Sinne von *nicht notwendig*) ist in der traditionellen und modernen Logik vorherrschend; vgl. etwa **BOCHEŃSKI/MENNE**, Grundriss der Logistik, S.112f; **J.A.SLININ**, Die Modalitätentheorie in der modernen Logik, S.362f.

7 „$\mathcal{N}(p,q)$“ bedeutet: bei p ist q notwendig; „$\sim\mathcal{N}(p,q)$“ bedeutet: bei p ist q nicht notwendig; „$\mathcal{N}(\sim p,q)$“ bedeutet: bei $\sim$p ist q notwendig; „$\mathcal{N}(p,\sim q)$“ bedeutet: bei p ist $\sim$q notwendig. Für die Ausdrücke „$\mathcal{K}$“, „$\mathcal{U}$“, „$\mathcal{Z}$“, „$\mathcal{M}$“ gilt Entsprechendes.

8 Der Bereich des Meinbaren (τὸ δοξαστόν), schreibt **ARISTOTELES**, ist weiter als der Umfang des Seienden und Wissbaren; er umfasst das Seiende und das Nichtseiende. Vgl. Top. Δ 1, 121a 20-26, b 1-4.

9 Es gelten deshalb für alle Ereignisse p die Gesetze: $rm(p) \leftarrow \mathcal{N}(p)$; $rm(p) \leftarrow \mathcal{U}(p)$ und $rm(p) \leftarrow \mathcal{K}(p)$: $\mathcal{N}(p)$ bzw. $\mathcal{U}(p)$ bzw. $\mathcal{K}(p)$ gelten nur, wenn $rm(p)$ gilt.

10 Dieses Gesetz bedeutet nicht, dass in einer Situation sowohl p wie $\sim$p vorliegen könnte, sondern nur, dass es relativ zum Vorliegen eines zweiten Ereignisses einerseits Fälle gibt, wo p vorliegt, und andererseits auch *andere* Fälle gibt, wo p nicht vorliegt.

11 „$\mathcal{C}(p)$“ (≡ „p ist jedenfalls nicht relativ notwendig)“ darf nicht mit $\mathcal{Z}(p)$ verwechselt werden.

Bezeichnen „A“ und „B“ irgendwelche Ausdrücke, dann bedeutet „A ≡ B“: A hat dieselbe Bedeutung wie B.

12 Führt von einer Bestimmung ein Pfeil zu einer anderen Bestimmung, dann impliziert die erste Bestimmung die zweite.

13 Die in der Tafel dargelegten logischen Beziehungen dürfen auf keinen Fall den Aussagejunktoren oder „Wahrheitswertfunktionen“ der „modernen Logik“ gleichgestellt werden, sie sind von diesen radikal verschieden, sie haben eine völlig verschiedenen Gehalt und eine ganz andere Struktur. Die Namen (etwa „Implikation“) und Ausdrücke wie „p“ oder „$p \rightarrow q$“ werden auch dort verwandt, haben aber eine ganz andere Bedeutung. Man müsste, zumindest bis die Beziehungen der hier dargelegten Formen zu denen der „modernen Logik“ geklärt sind, eigentlich immer von „bedingungslogischer Implikation“, „bedingungslogischem Form“, „bedingungslogischem Gesetz“ usw. reden; da ich im ersten Teil dieser Arbeit nur bedingungslogische Beziehungen behandle, kann dieser *immer mitgemeinte* Zusatz wegfallen.

14 Zum umgangssprachlichen Ausdruck dieser zweistelligen bedingungslogischen Zusammenhänge:

Bei p kann q vorliegen und umgekehrt.
Alternation: p oder q (oder beides) liegt vor.
Replikation: nur wenn p, dann q
Implikation: wenn p, dann q (und nicht umgekehrt)
Exklusion: p und q liegen jedenfalls nicht beide zusammen vor.
Äquivalenz: Wenn p, genau dann q.
Pränonpendenz: Keinesfalls p, gleichgültig ob q vorliegt oder nicht.
Postnonpendenz: Keinesfalls q, gleichgültig ob p vorliegt oder nicht.
Postpendenz: Jedenfalls q, gleichgültig ob p vorliegt oder nicht.
Präpendenz: Jedenfalls p, gleichgültig ob q vorliegt oder nicht.
Kontravalenz: Entweder liegt p oder q vor.
Konjunktion: Von p und q liegen beide vor.
Postsektion: p liegt ohne q vor.
Präsektion: q liegt ohne p vor.
Rejektion: Weder p noch q liegt vor.

Es gibt immer mehrere Möglichkeit einen solchen zweistelligen Gesetzeszusammenhang umgangssprachlich auszudrücken: die Implikation z. B.: Bei p liegt notwendig auch q vor (aber nicht umgekehrt). Exklusion: von p und q liegt entweder höchsten eines oder keines vor. Bei p ist q unmöglich, während, wenn p nicht vorliegt, q vorliegen kann.

15 Die Normalmatrizen zeigen unmittelbar, dass diese sechs Totalformen den angegebenen Bedingungen genügen: (1001), (1010), (0101), (0110), (1110) und (1101).

16 Die zu jeder n-elementigen (also *endlichen*) Menge M gehörende Potenzmenge (Menge aller möglichen Teilmengen) $\mathfrak{P}$(M) hat genau 2^n Elemente.

17 Jede Teilmenge der Menge der 15 nichtleeren logischen Totalformen bestimmt insofern eine zweistellige logische Relation Θ(p,q), als einem Paar (p,q) diese Relation Θ(p,q) zukommt, wenn ihm eine der der betreffenden Teilmenge zugehörigen Totalformen zukommt. Da jede der 15 nichtleeren Totalformen einer Teilmenge entweder angehört oder nicht angehört, gibt es 2^{15} verschiedene Teilmengen; eine davon ist aber leer und muss abgezogen werden.

18 Wir erhalten die folgenden einstelligen logischen Formen:

1. $\mathcal{K}$(p): (11)(p) – Totalform, elementare Modalität
2. $\mathcal{N}$(p): (10)(p) – Totalform, elementare Modalität
3. $\mathcal{U}$(p): (01)(p) – Totalform, elementare Modalität
4. $\sim\mathcal{N}$(p) = $\mathcal{P}$(p): (1•)(p); entweder (11)(p) oder (10)(p) – Partialform, nicht-elementare Modalität
5. $\sim\mathcal{U}$(p) = $\mathcal{C}$(p): (•1)(p); entweder (11)(p) oder (01)(p) – Partialform, nicht-elementare Modalität
6. $\sim\mathcal{K}$(p) = $\mathcal{A}$(p): entweder (10)(p) oder (01)(p) – Partialform, nicht-elementare Modalität
7. (∘∘)(p): entweder (11)(p) oder (10)(p) oder (01)(p) – Partialform: dieses nichtelementare Modalitäten-Prädikat kommt jedem Sachverhalt/Ereignis relativ zu jedem anderen Sachverhalt/Ereignis zu; es ist ein „Allprädikat“, d.h. ein Prädikat, das allen geeigneten Gegenständen (hier Sachverhalts-/Ereignisklassen) zukommt.

19 Die durch Negation von $\mathcal{K}$ abgeleitete Modalität $\mathcal{A}$ kann durch die Bedingung *entweder ist nur Vorkommenskombination I oder nur Vorkommenskombination II realmöglich* definiert und bezeichnet werden.

I, Kapitel 2. Die Bedeutung der zwei- und dreistelligen Totalformen.

Die dargestellten logischen Formen, gleich welcher Stelligkeit, sind Strukturen der relativen Modalisierung; die Menge dieser Formen ist infinit und zugleich wohlbestimmt. Diese Formen bilden also – wie etwa die natürlichen Zahlen – keine aktuale Gesamtheit, ihre Unendlichkeit ist vielmehr operativer Art: jede bedingungslogische Form, gleich welcher Komplexität und welcher Stelligkeit, lässt sich systematisch konstruieren und logisch mit jeder beliebigen anderen logischen Form vergleichen. *Dem Inhalt nach* sind diese Formen Zusammenhänge zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen, denn es geht um die Gesetzmäßigkeiten des gemeinsamen Vorliegens und Nicht-Vorliegens von Sachverhalten/Ereignissen bestimmter Art; ich spreche daher von ***ereignislogischen*** Formen. *Der Form nach* handelt es sich um ***bedingungslogische*** Zusammenhänge, denn es handelt sich um Beziehungen, bei denen das Vorliegen von Ereignissen bestimmter Art das Vorliegen von Ereignissen anderer Art bedingt oder nicht bedingt. Werden alle hypothetischmöglichen Vorkommenskombinationen von *n* realmöglichen Sachverhalts-/Ereignisklassen jeweils durch eine der beiden unbedingten Modalitäten *rm* oder *nrm* bestimmt, so ergibt sich aus diesen Bestimmungen in ihrem Zusammenhang eine durchgängige relative Modalisierung. An der Basis des Systems der ereignislogischen Formen stehen die einstelligen Totalformen, die sich als die elementaren logischen relativen Modalitäten erwiesen haben. Die Bedeutung der umgangssprachlichen Ausdrücke für die relativen Modalitäten ist uns schon im Alltag vertraut; ein Ereignis ist bezüglich bestimmter Umstände *relativ notwendig, wenn* unter diesen Umständen *immer* ein Ereignis derselben Art vorliegt, ein Ereignis ist bezüglich bestimmter Umstände *relativ unmöglich, wenn* unter diesen Umständen *nie* ein derartiges Ereignis vorliegt, ein Ereignis ist bezüglich bestimmter Umstände *relativ möglich* ($\mathcal{K}$), wenn unter diesen Umständen ein derartiges Ereignis *manchmal* vorliegt und *manchmal* nicht vorliegt. Ausgehend von der Bedeutung dieser elementaren relativen Modalitäten lässt sich die spezifische Bedeutung eines jeden beliebigen derartigen bedingungslogischen Zusammenhanges ohne Bezugnahme auf irgendeine reale, empirische Gesetzmäßigkeit exakt rekonstruieren, mag dieser Zusammenhang auch noch so umfassend und komplex sein.

2.1. Die Bedeutung der zweistelligen logischen Totalformen

In jeder Menge n-stelliger Totalformen gibt es für jedes *n* eine leere Totalform; diese Form kann Sachverhalts-/ Ereignisklassen nicht zugeschrieben werden, denn für diese Sachverhalts-/Ereignisklassen wäre dann jeweils vorausgesetzt, dass sie weder realmöglich noch nicht-realmöglich sind. Alle leeren n-stelligen Totalformen sind jedoch unverzichtbar für die Darstellung von bedingungslogischen Zusammenhängen höherer Stelligkeit als *n*. Hier dienen die leeren Totalformen zum Ausdruck des Tatbestandes, dass bestimmte Bedingungen gar nicht vorkommen, hinsichtlich welcher eine Sachverhalts-/Ereignisklasse modalisiert werden könnte. Die Totalform $p \wedge q$ hat die Normalmatrix (1000); das Modalisierungsfall β ist $O(\sim p, q)$, und dies bedeutet, dass unter den Bedingungen, unter denen $p \wedge q$ gilt $\sim p$ gar nicht vorkommt, q also auch nicht hinsichtlich von $\sim p$ modalisiert werden kann.

Alle *einstelligen* Totalformen sind als *relative* Modalitäten obligatorisch unselbständig und deshalb erst in Zusammenhängen bestimmbar, die zumindest zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen umfassen. Auch unter den *zweistelligen* Totalformen finden wir obligatorisch unselbständige logische Totalformen, d.h. Formen gesetzmäßiger Beziehungen zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen, die ohne *ausdrückliche* Berücksichtigung von mindestens einer weiteren Sachverhalts-/Ereignisklasse gar nicht gelten können. Die zweistelligen obligatorisch unselbständigen Totalformen zerteilen sich in drei Gruppen. Es sind einmal alle Totalformen, die zwei „unvollständige Ereignisse“ aufweisen, und alle Totalformen, die ein „unvollständiges Ereignis“ aufweisen. Da es unbedingt notwendige Ereignisse nicht geben kann, und da zwischen nicht-realmöglichen Ereignissen keine ereignislogischen Beziehungen bestehen können – für das, was gar nicht passieren kann, gibt es kein Gesetz –, sind nur realmögliche Ereignisse zulässige Relata von bedingungslogischen Relationen; wenn in einer Totalform nur solche Vorkommenskombinationen realmöglich sind, in denen ein Ereignis vorliegt bzw. nicht vorliegt, nicht aber zugleich solche Vorkommenskombinationen, in denen dieses Ereignis nicht vorliegt bzw. vorliegt, so ist dieses Ereignis *bezüglich der betreffenden logischen Totalform* unvollständig[1]. Es ist dann nicht möglich, dass das jeweils zweite Ereignis diese relative Notwendigkeit oder relative Unmöglichkeit bedingt; dies kann nur durch zumindest ein weiteres *drittes* Ereignis geschehen. Die Totalformen, die mindestens ein unvollständiges Ereignis enthalten, nenne ich *Totalformen der uneigentlichen Dependenz* (Dependenz: bedingungslogische Abhängigkeit)[2]. Schließlich sind auch jene Totalformen, bei denen diejenigen Fälle nicht-realmöglich sind, in denen beide Ereignisse nicht vorliegen (Vorkommenskombination IV ist nicht-realmöglich – d.h. von beiden Ereignisse muss zumindest eines vorliegen), obligatorisch unselbständig.

In allen vier Beziehungen $\mathbb{K}(p,q)$ (Konjunktion), $\mathbb{L}(p,q)$ (Postsektion), $\mathbb{M}(p,q)$ (Präsektion) und $\mathbb{X}(p,q)$ (Rejektion) sind beide Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q unvollständig. Besteht die *Beziehung* der ***Konjunktion*** $p \wedge q$, so gilt $\mathcal{N}(p,q)$ und $\mathcal{N}(q,p)$; die anderen relativen Modalisierungen sind gar nicht bestimmt, denn in dieser logischen Sachlage tritt weder $\sim p$, noch $\sim q$ auf, was dadurch zum Ausdruck kommt, dass die Modalisierungsfälle β und δ durch die Quasimodalität O bestimmt sind. Da ein zweites Ereignis relativ zu einem ersten Ereignis nur dann notwendig ($\mathcal{N}$) sein kann, wenn beim Nichtvorliegen des zweiten Ereignisses das erste unmöglich ($\mathcal{U}$) ist, ist bei $p \wedge q$ die Notwendigkeit von p und q nicht durch das jeweils andere Ereignis bedingt, sondern durch das Vorliegen oder Nichtvorliegen eines *dritten* Ereignisses r.[3] Die Relation $p \wedge q$ ist deshalb obligatorisch unselbständig und kann für sich alleine noch nicht bestehen, ist aber ein wichtiger Bestandteil umfassenderer bedingungslogischer Zusammenhänge. Sind etwa p und q die beiden einzigen nichtäquivalenten notwendigen Bedingungen eines dritten Ereignisses r, gilt bei $r \vdots\ p \wedge q$, bei $\sim r$ gilt, dass von p und q jedenfalls nicht beide vorliegen können ($p \uparrow q$).

Die *Beziehung der* ***Rejektion*** $p \downarrow q$ ist obligatorisch unselbständig; weder ist die relative Unmöglichkeit des unvollständigen Ereignisses p durch q oder $\sim q$, noch die relative Unmöglichkeit des unvollständigen Ereignisses q durch p oder $\sim p$ bedingt: wäre $\sim p$ bzw. $\sim q$ aufgrund von $\sim q$ bzw. $\sim p$ notwendig, genau dann müsste bei p bzw. bei q q bzw. p unmöglich sein; aber weder p noch q können vorliegen, wenn $p \downarrow q$ gilt. Die Beziehung $\mathbb{X}$ ist ein wichtiger unvollständiger Bestandteil umfassenderer Beziehungen. Sind etwa p und q die einzigen hinreichenden Bedingungen eines dritten Ereignisses r, dann steht fest, dass bei $\sim r$ weder p noch q vorliegen dürfen ($p \downarrow q$), und dass bei r von p und q zumindest eines vorliegen muss (entweder $p \vee q$ oder $p \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail q$, je nachdem, ob p und q verträglich sind).

Im Falle der *Beziehung der* ***Postsektion*** $p \succcurlyeq q$ und der ***Präsektion*** $p \preccurlyeq q$ ist eines der beiden Ereignisse über die ganze Totalform hinweg relativ notwendig, das andere über die ganze Totalform hinweg relativ unmöglich, und auch dies kann nicht durch das jeweils zweite Ereignis bedingt sein. Beide obligatorisch unselbständigen Totalformen sind nur möglich als Bestandteile umfassenderer bedingungslogischer Zusammenhänge. Beispielsweise besteht im Falle des Vorliegens eines dritten Ereignisses r zwischen zwei Ereignissen p und q die Beziehung der Postsektion $\mathbb{L}$, wenn p und q unvereinbar sind, und wenn r hinreichende Bedingung von p ist[4]. – Sind zwei Ereignisse p und q unverträglich, ist q notwendige Bedingung eines dritten Ereignisses r und liegt r vor, so gilt die Präsektion $\mathbb{M}(p,q)$. Die genaue logische Beziehung, deren Bestandteil eine zweistellige logische Totalform mit zwei unvollständigen Ereignissen p und q ist, lässt sich nur erkennen, wenn nicht nur die Sachverhalte/Ereignisse p und q berücksichtigt werden.

In den vier Totalformen: ***Pränonpendenz*** $\mathbb{F}$ (keinesfalls das erste, gleichgültig ob das zweite), ***Postnonpendenz*** $\equiv$ (keinesfalls das zweite, gleichgültig ob das erste)[5], ***Präpendenz*** $\mathbb{I}$ (jedenfalls das erste, gleichgültig, ob das zweite) und ***Postpendenz*** $\mathbb{H}$ (jedenfalls das zweite, gleichgültig ob das erste) erscheint die Quasimodalität O nur einmal in der Modalitätenmatrix; nur eines der beiden Ereignisse ist über die ganze Totalform hinweg notwendig oder unmöglich, und zwar gleichgültig, ob das zweite Ereignis auftritt oder nicht auftritt. Ob zwei in einer derartigen obligatorisch unselbständigen Beziehung stehende Ereignisse independent, d.h. außerhalb jeder bedingungslogischen Abhängigkeit stehen, lässt sich erst in den umfassenderen Zusammenhängen, denen diese Beziehungen jeweils zugehören, beurteilen.

Obwohl bei den Totalformen $\mathbb{A}$ (***Alternation***) und $\mathbb{J}$ (***Kontravalenz***) beide Ereignisse vollständig sind (bei $p \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail q$ und bei $p \vee q$ gibt es jeweils Fälle, in denen q bzw. p vorliegt, und Fälle, in denen q bzw. p nicht vorliegt), ist in beiden Totalformen die Beziehung der beiden Ereignisse stets durch ein drittes Ereignis vermittelt. Die Beziehung $p \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail q$ (oder $p \vee q$) könnte nur dann selbständig sein, wenn alles mögliche Geschehen entweder als p oder q (oder als p oder q oder beides) bestimmbar wäre; zwei alternative Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q sind aber immer Relata mannigfaltiger, spezifischer Gesetzeszusammenhänge, niemals aber zwei dichotome Möglichkeiten, in die alles mögliche Geschehen zerfallen würde, so dass in jeder beliebigen Situation (zumindest) eines von beiden Ereignissen vorliegen würde[6]. Die wohl wichtigsten Gesetzeszusammenhänge, die $p \vee q$ und $p \succ\!\prec q$ als unselbständige Substruktur enthalten, bestehen darin, dass p und q die einzigen hinreichenden Bedingungen eines dritten Ereignisses r sind. Bei $\sim p$ ist dann q, und bei $\sim q$ ist p notwendig, aber nur, falls r vorliegt. Sind p und q verträglich, gilt bei r: $p \vee q$, sind p und q unverträglich, dann besteht bei r die Beziehung $p \succ\!\prec q$.

Es ist möglich, dass zwei Ereignisse p und q hinreichende Bedingungen eines dritten Ereignisses r sind, jedoch nicht die einzigen hinreichenden Bedingungen. Sind in diesem Falle p und q unverträglich, dann gilt bei r die unselbständige, durch r vermittelte Beziehung $p \uparrow q$, wobei die Modalitätenmatrix von $\mathbb{D}$ ($\mathcal{UMUM}$) ist. Liegt bei r eines der beiden Ereignisse p und q nicht vor, dann ist das Auftreten des anderen Ereignisses zwar nicht notwendig, aber auch nicht zufällig, da bei r eine der alternativen hinreichenden Bedingungen von r gegeben sein muss, zu denen ja unter anderen p und q gehören. Soll dagegen von zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q nur behauptet werden, dass sie unverträglich sind, ohne dass irgendein weiteres Ereignis in Betracht gezogen wird, besteht die selbständige Beziehung der ***Exklusion*** $p \uparrow q$ mit der Modalitätenmatrix ($\mathcal{UZUZ}$). Sind p und q schließlich verträgliche, nicht einzige hinreichende Bedingungen von r, dann gilt r: $p \top q$. Es liegt dann keine echte Independenz mit der Modalitätenmatrix ($\mathcal{ZZZZ}$) vor, sondern eine *unechte Independenz* mit der Modalitätenmatrix ($\mathcal{MMMM}$)[7]. In allen diesen vier Fällen sind p und q *Alternativen*, nämlich verschiedene alternative hinreichende Bedingungen eines dritten Ereignisses r. Ich nenne diese Totalformen $\mathbb{A}$, $\mathbb{J}$, $\mathbb{D}$ mit der Matrix ($\mathcal{UMUM}$) und mit der Matrix ($\mathcal{MMMM}$) im Anschluss an den Sprachgebrauch der traditionellen Logik „***Totalformen der Koordination***".

Die drei Totalformen der ***Replikation*** $\mathbb{B}$, der ***Implikation*** $\mathbb{C}$ und der ***Äquivalen***z $\mathbb{E}$ nenne ich „***Totalformen der Konstituenz***". Bei diesen Totalformen ist die Notwendigkeit oder Unmöglichkeit eines der beiden Ereignisse direkt durch das zweite Ereignis bedingt, die drei Relationen können deshalb ganz unabhängig von der Beachtung des Vorliegens und des Nichtvorliegens eines dritten Ereignisses gelten. Eine Beziehung zwischen n Ereignissen, die unabhängig von der Beachtung eines weiteren Ereignisses bestimmt und erkannt werden kann, ist eine ***selbständige Totalform***. Zusammen mit der *echten Independenz* und der *bloßen Unverträglichkeit* – die Totalform $\mathbb{D}$ mit der Matrix ($\mathcal{UZUZ}$) – sind die Konstituenzformen die einzigen zweistelligen selbständigen Totalformen. Die Selbständigkeit einer Totalform ist jedoch nicht wie die Unselbständigkeit obligatorisch, denn die Beziehungen $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{D}$ und $\mathbb{V}$ *können* ebenso nur in Bezug auf das Vorliegen oder Nichtvorliegen eines dritten Ereignisses gelten. Wenn unabhängig von einem dritten Ereignis r gilt $p \leftarrow q$, dann ist p *notwendige Bedingung* von q. Bei $p \rightarrow q$ ist, falls die Beziehung selbständig ist, p *hinreichende Bedingung* von q. Liegt $p \leftrightarrow q$ unabhängig von anderen Ereignissen vor, ist p *notwendige und hinreichende Bedingung* von q.

Ist ein Ereignis r für sich alleine weder notwendige, noch hinreichende Bedingung für ein Ereignis p, so können r und p als Teil umfassenderer bedingungslogischer Zusammenhänge doch in einer Konstitutionsbeziehung stehen. Es gibt in diesem Falle eine Vielzahl von Möglichkeiten; wenn z.B. ein Ereignis r die notwendige Bedingung für die hinreichende Bedingung q eines Ereignisses p ist, ist r alleine weder notwendig noch hinreichend für p, und dennoch besteht zwischen r und p eine Konstitutionsbeziehung; es gilt dann der Zusammenhang [p, q, r $\mathbb{CF}$].

Zwischen den Totalformen $\mathbb{V}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ besteht, sofern sie selbständig sind, ein weiterer logisch bedeutsamer Unterschied. Gelten die selbstständigen Verhältnisse $p \leftarrow q$ oder $p \rightarrow q$, so weiß ich, dass es neben p noch zumindest eine weitere notwendige, bzw. hinreichende Bedingung für q geben muss; dies geht aus den Modalitätenmatrizen von $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ hervor: denn eines der beiden Ereignisse macht das andere nur möglich ($\mathcal{M}$), nicht aber notwendig[8]. Besteht zwischen *n* Ereignissen ein logischer Zusammenhang, aus dem hervorgeht, dass zumindest ein weiteres Ereignis zu den *n* Ereignissen in einer *ganz bestimmten* Beziehung steht, spreche ich von einer *offenen* oder *nicht geschlossenen Totalform*. Die selbständigen Totalformen $p \top q$ und $p \leftrightarrow q$ sind dagegen *geschlossen*; ihre Modalitätenmatrix schließt kein drittes Ereignis ein, das zu den beiden Ereignissen p und q in einer ganz bestimmten logischen Beziehung steht: ist eines der beiden Ereignisse gegeben bzw. nicht gegeben, so ist das andere nicht möglich ($\mathcal{M}$), sondern zufällig (bei $\mathbb{V}$) oder notwendig (bei $\mathbb{E}$). Die selbständige Totalform $\mathbb{D}$ ist offen, denn sie verweist in ihrer Struktur auf einen bestimmten Grund der Unverträglichkeit.

Es ergibt sich die folgende systematische Zusammenstellung der zweistelligen Totalformen:

Obligatorisch unselbstständig	***Nicht obligatorisch unselbstständig***	
Zwei unselbstständige Ereignisse: Konjunktion 𝕂, Postsektion 𝕃, Präsektion 𝕄, Rejektion 𝕏 *Ein unselbstständiges Ereignis*: Pränonpendenz 𝔽, Postnonpendenz ≡, Postpendenz ℍ, Präpendenz 𝕀 *Zumindest eins von beiden*: Verträgliche Alternative 𝔸 Unverträgliche Alternative 𝕁	Selbstständig 𝕍: Independenz (𝒵𝒵𝒵𝒵) 𝔻: Unverträglichkeit (𝒰𝒵𝒰𝒵) 𝔼: Äquivalenz: (𝒰𝒩𝒰𝒩) Implikation ℂ (𝒩𝒵𝒦𝒰) Replikation 𝔹: (𝒦𝒰𝒩𝒵)	Unselbstständig 𝕍 – z.B. (𝒦𝒦𝒦𝒦) 𝔻 – z.B. (𝒰𝒦𝒰𝒦) 𝔼, ℂ, 𝔹

Die geschlossenen Totalformen der Independenz 𝕍 und der Äquivalenz 𝔼 sind in dem Sinne abgeschlossene Verhältnisse, als sie keinen bestimmten Bezug zu weiteren Sachverhalte/Ereignissen involvieren. Die Totalform 𝔼 bringt einmal die Identität der Sachverhalts-/Ereignisklassen zum Ausdruck, zum zweiten ist sie die Grundbeziehung aller zumindest dreistelligen geschlossenen Totalformen. Als Bezeichnung der Identität aller Sachverhalts-/Ereignisklassen erweckt der Ausdruck „p ↔ p" den Anschein der Gehaltlosigkeit: genau dann, wenn es regnet, regnet es; genau dann, wenn ein Kind die Masern hat, hat es die Masern, usw. Diese *einfache Identität* einer Sachverhalts-/Ereignisklasse p ↔ p ist jedoch nicht so trivial, wie es vom Standpunkt des fertigen Wissens erscheinen mag. Sie ist vielmehr notwendige, keineswegs immer problemlose Voraussetzung aller Gesetzeserkenntnis. Die gesetzmäßigen Zusammenhänge, in denen ein Ereignis bestimmter Art p steht, sind nur dann erkennbar, wenn in jeder Situation klar ist, dass wir es genau mit dieser Art von Ereignis und keiner anderen zu tun haben. Nur dann, wenn die einfache Identität der Sachverhalts-/Ereignisklasse, dass ein Kind die Masern, und nicht etwa irgendeine andere Art von Infektionskrankheit hat, ist es möglich, diese Art von Ereignis in seinen gesetzmäßigen Zusammenhängen und Abläufen zu erforschen. Die einfache Identität einer Sachverhalts-/Ereignisklasse bedeutet zugleich die durchgängige *einfache Wohlunterschiedenheit* von *jeder anderen* Sachverhalts-/Ereignisklasse. Dies zeigt sich daran, dass das Gesetz der einfachen Identität p ↔ p dem Gehalte nach dasselbe aussagt wie das Gesetz des Nichtwiderspruchs p >< ~p[9]; Identität (die Beziehung auf sich) und Wohlunterschiedenheit (die negative Beziehung auf alles andere) sind untrennbar. Ein wichtiger Erkenntnisfortschritt besteht oft darin, dass erfasst wird, dass Ereignisse, die zuvor in synkretistischer Weise für identisch gehalten worden sind, in Wirklichkeit wohlunterschieden sind. Das Gesetz p ↔ p bringt die Norm der beliebig wiederholbaren, eindeutigen Identifizierbarkeit von Ereignissen bestimmter Art zum Ausdruck.

Wenn der Ausdruck „p ↔ p" hingegen den Zusammenhang von mehreren nichtidentischen Sachverhalts-/Ereignisklassen bezeichnet, fasst eines der beiden äquivalenten Argumente entweder die Gesamtheit der notwendigen oder die Gesamtheit der hinreichenden Bedingungen der betreffenden Sachverhalts-/Ereignisklasse zusammen. Erst in solchen geschlossenen Gefügen ist die tatsächliche Beziehung zwischen zwei Ereignissen eindeutig festgelegt, und erst in solchen geschlossenen Zusammenhängen wird ein Ereignis in allen seinen wesentlichen bedingungslogischen Bezügen erfasst. Gilt z.B. dass beim Vorliegen eines Ereignisses r zwischen zwei Ereignissen p und q entweder die Beziehung 𝔸 oder die Beziehung 𝕁, dann sind p und q die *einzigen* hinreichenden Bedingungen für r nur dann, wenn bei ~r zugleich p ↓ q gilt. In diesem Falle ist der Zusammenhang der drei Ereignisse geschlossen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, dass bei r ebenfalls p∨q, bei ~r jedoch nicht p ↓ q, sondern p ↑ q gilt; dann haben wir es mit einem nicht-geschlossenen Zusammenhang zu tun; unter anderem besteht dann die Möglichkeit, dass p und q beide notwendige Bedingungen von r sind, die, wenn sie gemeinsam auftreten, auch hinreichende Bedingung von r sind. Es gibt für das Verhältnis r⋮ p∨q und ~r⋮ p ↑ q noch andere Möglichkeiten, weil dieser offene Zusammenhang, wie jeder andere offene Zusammenhang, Bestandteil ganz unterschiedlicher geschlossener Zusammenhänge sein kann. Alle Erkenntnis zielt auf das Erfassen geschlossener bedingungslogischer Zusammenhänge.

2.2. Die Bedeutung einiger drei- und höherstelliger Totalformen

Der Bedeutungsgehalt jedes der 256 dreistelligen Totalformen kann rekonstruiert werden; dies soll an einigen Beispielen skizziert werden.

2.2.1. Zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen sind notwendige Bedingungen eines dritten Ereignisses

Es lässt sich zeigen, dass es genau 7 verschiedene dreistellige Totalformen gibt, in denen die Ereignisse q und r notwendige Bedingungen eines dritten Ereignisses p sind; für alle diese Totalformen gilt, dass bei p sowohl q wie r vorliegen: $p \vdots\ q \wedge r$. Weiterhin gelten für die Bestimmung der Vorkommenskombinationen V bis VII der dreistelligen logischen Relation von p, q, r folgende Restriktionen:

(a) von den Vorkommenskombinationen V und VII ist zumindest einer realmöglich;
(b) von den Vorkommenskombinationen VI und VIII ist zumindest einer realmöglich;
(c) von den Vorkommenskombinationen V und VI ist zumindest einer realmöglich;
(d) von den Vorkommenskombinationen VII und VIII ist zumindest einer realmöglich[10].

Genau die sieben dreistellige Totalformen genügen diesen Bedingungen.

1. $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{V}]$: Die Ereignisse q und r sind nicht die einzigen notwendigen Bedingungen für p. $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{V}]$ ist eine offene Totalform. Bei p müssen q und r vorliegen, bei $\sim p$ können q und r jeweils vorliegen oder auch nicht (bei $\sim p$ besteht also eine nur scheinbare Independenz zwischen q und r).

2. $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{D}]$: Die Ereignisse q und r sind die einzigen notwendigen Bedingungen von p. Bei p müssen q und r beide vorliegen, bei $\sim p$ kann von q und r höchstens ein Ereignis vorliegen. Es liegt ein geschlossener Zusammenhang vor.

Vorkommens-kombination	$[s, p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{J}\mathbb{O}\mathbb{X}]$	
I	$s \frown p \frown q \frown r$	**1**
II	$s \frown p \frown q \frown \sim r$	**0**
III	$s \frown p \frown \sim q \frown r$	**0**
IV	$s \frown p \frown \sim q \frown \sim r$	**0**
V	$s \frown \sim p \frown q \frown r$	**0**
VI	$s \frown \sim p \frown q \frown \sim r$	**1**
VII	$s \frown \sim p \frown \sim q \frown r$	**1**
VIII	$s \frown \sim p \frown \sim q \frown \sim r$	**0**
IX	$\sim s \frown p \frown q \frown r$	0
X	$\sim s \frown p \frown q \frown \sim r$	0
XI	$\sim s \frown p \frown \sim q \frown r$	0
XII	$\sim s \frown p \frown \sim q \frown \sim r$	0
XIII	$\sim s \frown \sim p \frown q \frown r$	0
XIV	$\sim s \frown \sim p \frown q \frown \sim r$	0
XV	$\sim s \frown \sim p \frown \sim q \frown r$	0
XVI	$\sim s \frown \sim p \frown \sim q \frown \sim r$	1

3. $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{J}]$ ist wegen $nrm(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$ anders als die beiden ersten Verhältnisse eine unselbständige dreistellige Totalform und kann nur gelten, wenn zumindest ein weiteres viertes Ereignis s auftritt, bzw. nicht auftritt, welches bedingt, dass von den Ereignissen p, q und r zumindest eines vorliegt. Das Verhältnis $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{J}]$ kann Substruktur ganz unterschiedlicher logischer Gefüge sein kann; es besteht z.B. die Möglichkeit, dass ein viertes Ereignis s vorliegt und q und r die einzigen mit einander verträglichen hinreichenden Bedingungen von s sind. Zugleich sind q und r beide die einzigen notwendigen Bedingungen von p: die Vorkommenskombinationen V und XIII sind beide nichtrealmöglich und wenn q auftritt, tritt p genau dann auf, wenn auch r vorliegt, und wenn r auftritt, gilt ebenfalls $p \leftrightarrow q$. Weil q und r die einzigen hinreichenden Bedingungen von s sind, ist auch s notwendige Bedingung von p. Es liegt dann die nebenstehende vierstellige logische Form $[s, p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{J}\mathbb{O}\mathbb{X}]$[11] vor.

4. $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{C}]$ kann z.B. Bestandteil des folgenden Bedingungsgefüges sein: q und r sind nicht die einzigen notwendigen Bedingungen von p, denn da $\sim p \vdots\ q \rightarrow r$ gilt, können q und r zusammen ohne p auftreten. Zugleich ist r selbst notwendige Bedingung von q (ohne r kommt q nicht vor) und wenn r notwendige Bedingung von q und q notwendige Bedingung von p, ist wegen der Transitivität von $\mathbb{B}$ auch r notwendige Bedingung von p. Es wäre auch möglich, dass q hinreichende Bedingung von r ist.

5. $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{E}]$: q und r sind äquivalent und nicht einzige notwendige Bedingung von p.

6. $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{B}]$ ist dieselbe Relation wie $[p, q, r\ \mathbb{K}\mathbb{C}]$, nur haben q und r die Rollen vertauscht.

7. [p,q, r 𝕂𝔸] ist eine unselbständige logische Form und kann Bestandteil der verschiedensten umfassenderen logischen Strukturen sein. Eine Möglichkeit ist, dass ein viertes Ereignis s vorliegt, dessen einzige verträgliche hinreichende Bedingungen q und r sind; zugleich sind q und r die nicht-einzigen notwendigen Bedingungen von p. Wir erhalten die vierstellige Totalform [s,p,q, r 𝕂𝔸𝕆𝕏]:

Vorkommens-kombination	[s,p,q, r 𝕂𝔸𝕆𝕏]	
I	s⌢p⌢q⌢r	**1**
II	s⌢p⌢q⌢~r	**0**
III	s⌢p⌢~q⌢r	**0**
IV	s⌢p⌢~q⌢~r	**0**
V	s⌢~p⌢q⌢r	**1**
VI	s⌢~p⌢q⌢~r	**1**
VII	s⌢~p⌢~q⌢r	**1**
VIII	s⌢~p⌢~q⌢~r	**0**
IX	~s⌢p⌢q⌢r	0
X	~s⌢p⌢q⌢~r	0
XI	~s⌢p⌢~q⌢r	0
XII	~s⌢p⌢~q⌢~r	0
XIII	~s⌢~p⌢q⌢r	0
XIV	~s⌢~p⌢q⌢~r	0
XV	~s⌢~p⌢~q⌢r	0
XVI	~s⌢~p⌢~q⌢~r	1

Die Sachverhalts-/Ereignisklassen q und r sind *nicht* die einzigen notwendigen Bedingungen von p – Vorkommenskombination V ist realmöglich. Der vierstellige Zusammenhang ist selbständig; er ist offen, denn es steht fest, dass es zumindest ein fünftes Ereignis t gibt, welches wie r und q notwendige Bedingung von p ist. Gibt es nur eine solche zusätzliche notwendige Bedingung t von p, ergibt sich die untenstehende *geschlossene* fünfstelliger Form [s, t, p, q, r 𝕂𝕁𝕆𝔸𝕆𝕏𝕆𝕏].

Wenn etwa s und t vorliegen, nicht aber p, so gilt: q ⋈ r. Die Ereignisse q und r sind aber in diesem Zusammenhang keineswegs die einzigen und unverträglichen hinreichenden Bedingungen eines anderen Ereignisses. Dass q und r in diesem speziellen Zusammenhang unverträglich sind, hat seinen Grund darin, dass zwar t vorliegt, nicht aber q; t, q und r können ohne p nicht zusammen auftreten. Das Ereignis s ist seinerseits notwendige Bedingung von p. Die Beziehung s ← p wird unabhängig von den drei anderen Ereignissen beobachtet.

[s, t, p, q, r 𝕂𝕁𝕆𝔸𝕆𝕏𝕆𝕏]					
I	s⌢t⌢p⌢q⌢r	1	XVII	~s⌢t⌢p⌢q⌢r	0
II	s⌢t⌢p⌢q⌢~r	0	XVIII	~s⌢t⌢p⌢q⌢~r	0
III	s⌢t⌢p⌢~q⌢r	0	XIX	~s⌢t⌢p⌢~q⌢r	0
IV	s⌢t⌢p⌢~q⌢~r	0	XX	~s⌢t⌢p⌢~q⌢~r	0
V	s⌢t⌢~p⌢q⌢r	0	XXI	~s⌢t⌢~p⌢q⌢r	0
VI	s⌢t⌢~p⌢q⌢~r	1	XXII	~s⌢t⌢~p⌢q⌢~r	0
VII	s⌢t⌢~p⌢~q⌢r	1	XXIII	~s⌢t⌢~p⌢~q⌢r	0
VIII	s⌢t⌢~p⌢~q⌢~r	0	XXIV	~s⌢t⌢~p⌢~q⌢~r	1
IX	s⌢~t⌢p⌢q⌢r	0	XXV	~s⌢~t⌢p⌢q⌢r	0
X	s⌢~t⌢p⌢q⌢~r	0	XXVI	~s⌢~t⌢p⌢q⌢~r	0
XI	s⌢~t⌢p⌢~q⌢r	0	XXVII	~s⌢~t⌢p⌢~q⌢r	0
XII	s⌢~t⌢p⌢~q⌢~r	0	XXVIII	~s⌢~t⌢p⌢~q⌢~r	0
XIII	s⌢~t⌢~p⌢q⌢r	1	XXIX	~s⌢~t⌢~p⌢q⌢r	0
XIV	s⌢~t⌢~p⌢q⌢~r	1	XXX	~s⌢~t⌢~p⌢q⌢~r	0
XV	s⌢~t⌢~p⌢~q⌢r	1	XXXI	~s⌢~t⌢~p⌢~q⌢r	0
XVI	s⌢~t⌢~p⌢~q⌢~r	0	XXXII	~s⌢~t⌢~p⌢~q⌢~r	1

2.2.2. Es gilt p∨q und q∨r

Es gibt 7 verschiedene, immer unselbständige dreistellige Totalformen, in denen ein erstes Ereignis p zu einem zweiten Ereignis q, und q zu einem dritten Ereignis r in der Beziehung 𝔸 stehen. Es ist dann möglich, dass die Ereignisse p, q und r in unterschiedlichster Verschränkung hinreichende Bedingungen eines vierten Ereignisses s sind; deshalb kann ~s nur vorliegen, wenn keine dieser hinreichenden Bedingungen gegeben ist. Für die Normalmatrizen dieser 7 Totalformen gelten die folgenden Bedingungen: Die Vorkommenskombinationen IV, VII und VIII sind nichtrealmöglich, Vorkommenskombination III ist realmöglich. Von den zwei Vorkommenskombinationen I und II ist zumindest einer realmöglich; dasselbe gilt für die folgenden Paare von Vorkommenskombinationen: (VI, VII), (I, V) und (II, VI) [12]. Wir erhalten die folgenden Totalformen:

1. $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{I}]$: Dieses Verhältnis kann Bestandteil der verschiedensten Bedingungszusammenhänge sein; es ist möglich, dass die 3 Ereignisse p, q und r in speziellem Zusammenwirken die einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses s sind; q ist mit p und r, sowie mit nur einem der beiden anderen Ereignisse, aber auch alleine hinreichende Bedingung für s. Die Ereignisse p und r dagegen sind jeweils nur zusammen mit zumindest einem der beiden anderen Ereignisse hinreichende Bedingung von s. Bei s gilt $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{I}]$und bei $\sim$s gilt $[p,q,r\ \mathbb{X}\mathbb{F}]$.
2. $[p,q,r\ \mathbb{J}\mathbb{I}]$: Hier kann ein ähnliches Koordinationsverhältnis wie bei $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{I}]$ vorliegen; das vierte Ereignis s liegt genau dann vor, wenn entweder q alleine oder genau zwei der drei Ereignisse p, q, r vorliegen. Nur wenn keine dieser hinreichenden Bedingungen für s gegeben ist, kann $\sim$s vorliegen ($\sim s:\ [p,q,r\ \mathbb{E}\mathbb{F}]$) .
3. $[p,q,r\ \mathbb{J}\mathbb{K}]$: Nur wenn genau zwei der drei Ereignisse p, q, r vorliegen, tritt das vierte Ereignis s ein; bei $\sim$s gilt $[p,q,r\ \mathbb{E}\mathbb{D}]$.
4. $[p,q,r\ \mathbb{H}\mathbb{I}]$: hier liegt eine spezifische Verschränkung von Koordinations- und Konstitutionsverhältnissen vor. Nur zusammen mit r führt das Ereignis p zu s; alleine ist r nicht hinreichende Bedingung für s, sondern nur zusammen mit p oder q oder beiden; q ist auch alleine hinreichende Bedingung von s.
5. $[p,q,r\ \mathbb{H}\mathbb{L}]$: Die Ereignisse p und r sind äquivalent; p (gleich r) und q sind die einzigen verträglichen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses s.
6. $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{L}]$: Es liegt dasselbe Verhältnis vor wie bei $[p,q,r\ \mathbb{J}\mathbb{K}]$, nur haben p und r die Rollen vertauscht.
7. $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{K}]$: es liegt ein Koordinationsverhältnis vor, in dem alle drei Ereignisse p, q, r dieselbe logische Rolle spielen; für das Vorliegen eines vierten Ereignisses s ist einzige hinreichende Bedingung, dass von p, q und r zumindest zwei Ereignisse vorliegen.

2.2.3. Die vollständig symmetrischen dreistelligen Totalformen

Zweistellige logische Relationen von p und q sind symmetrisch, wenn zwischen p und q dieselbe logische Relation besteht wie zwischen q und p. In entsprechenden Sinn können wir dann von *vollständig symmetrischen dreistelligen* logischen Relationen reden, wenn zwischen p, q und r bei jeder Permutation der Reihenfolge dieselbe dreistellige Relation besteht. Eine dreistellige logische Relation $[p,q,r\ \Omega_1\Omega_2]$ ist demnach genau dann *vollständig symmetrisch*, wenn gilt, dass $[p,q,r\ \Omega_1\Omega_2]$, $[p,r,q\ \Omega_1\Omega_2]$, $[q,p,r\ \Omega_1\Omega_2]$, $[q,r,p\ \Omega_1\Omega_2]$, $[r,p,q\ \Omega_1\Omega_2]$ und $[r,q,p\ \Omega_1\Omega_2]$ paarweise äquivalent sind, wobei die Buchstaben Ω_1 und Ω_2 zwei beliebige zweistellige Total- oder Partialformen bezeichnen. *Vollständig nicht-symmetrisch* sind entsprechend jene dreistelligen logischen Relationen, bei denen sich bei jeder Permutation die zweistelligen Totalformen ändern, die der Darstellung der dreistelligen Relationen dienen. Die meisten dreistelligen logischen Relationen sind partiell symmetrisch und zugleich: partiell nicht-symmetrisch.

Genau alle diejenigen dreistelligen Totalformen sind vollständig symmetrisch, die den beiden folgenden Bedingungen genügen: $II = III = V$ und $IV = VI = VII$, d.h. die Vorkommenskombinationen II, III, V und IV, VI, VII müssen jeweils gleich, entweder als *rm* oder als *nrm,* bestimmt sein[13]. Es gibt so genau 16 vollständig symmetrische dreistellige Relationen. Zu allen vollständig symmetrischen dreistelligen Relationen gelangt man über die Potenzmenge der Menge der 16 vollständig symmetrischen dreistelligen Totalformen; es gibt also (2^{16}) -1 vollständig symmetrische dreistellige logische Relationen.

1. $[p,q,r\ \mathbb{V}\mathbb{V}]$: es ist alles möglich; entweder stehen p, q, r in echter Independenz, oder sind drei verträgliche nicht-einzige hinreichende Bedingungen eines vierten Ereignisses s.
2. $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{E}]$: keines oder zumindest zwei der drei Ereignisse müssen vorliegen. Je zwei oder alle drei dieser drei Ereignisse sind die nicht-einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses s; die Beziehung liegt nur dann vor, wenn dieses vierte Ereignis vorliegt, sie kann also nur unter Berücksichtigung dieses vierten Ereignisses festgestellt werden.
3. $[p,q,r\ \mathbb{E}\mathbb{D}]$: Jedenfalls nicht zwei, d.h. keines oder nur eines oder alle drei. Jedes der drei Ereignisse ist alleine oder zusammen mit den beiden anderen nicht-einzige hinreichende Bedingung eines vierten Ereignisses.

4. [p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{X}$]: Alle drei Ereignisse zusammen oder keines. Nur zusammen sind die drei Ereignisse nicht-einzige hinreichende Bedingung eines vierten Ereignisses.
5. [p, q, r $\mathbb{D}\mathbb{V}$]: Keines oder höchstens zwei der drei Ereignisse. Je einzeln oder zusammen mit einem der anderen Ereignisse sind p, q und r nicht-einzige hinreichende Bedingungen eines vierten Ereignisses.
6. [p, q, r $\mathbb{J}\mathbb{E}$]: Keines oder genau zwei der drei Ereignisse. Genau zwei der drei Ereignisse sind die nicht-einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses.
7. [p, q, r $\mathbb{X}\mathbb{D}$]: Höchstens eines der drei Ereignisse. p, q und r sind die paarweise unverträglichen nicht-einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses.
8. [p, q, r $\mathbb{O}\mathbb{X}$]: Keines; entweder sind die drei Ereignisse p, q, r unbedingt unmöglich oder in Bezug auf ein viertes Ereignis s unmöglich.
9. [p, q, r $\mathbb{V}\mathbb{A}$]: Mindestens eines. Die drei paarweise verträglichen Ereignisse p, q, r sind die einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses.
10. [p, q, r $\mathbb{A}\mathbb{K}$]: Mindestens zwei. Je zwei der drei Ereignisse oder alle drei zusammen sind die einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses.
11. [p, q, r $\mathbb{E}\mathbb{J}$]: Entweder je eines oder alle zusammen. Je eines oder alle drei Ereignisse zusammen sind die einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses.
12. [p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{O}$]: Nur alle drei. Zusammen sind die drei Ereignisse die einzige hinreichende Bedingung eines vierten Ereignisses; es ist auch möglich, dass p, q und r identisch und notwendige Bedingung eines vierten Ereignisses sind.
13. [p, q, r $\mathbb{D}\mathbb{A}$]: Mindestens eines oder höchstens zwei. Jedes der drei Ereignisse alleine oder zusammen mit einem der anderen Ereignisse sind einzige hinreichende Bedingungen eines vierten Ereignisses.
14. [p, q, r $\mathbb{J}\mathbb{K}$]: Genau zwei. Jeweils zwei der drei Ereignisse sind die einzigen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses.
15. [p, q, r $\mathbb{X}\mathbb{J}$]: Genau eines; die drei Ereignisse sind die einzigen, paarweise unverträglichen hinreichenden Bedingungen eines vierten Ereignisses.
16. [p, q, r $\mathbb{O}\mathbb{O}$]: die leere dreistellige Totalform.

Diese vollständig symmetrischen dreistelligen Totalformen sind alle obligatorisch unselbständig und stellen – in ihrer wohl wichtigsten logischen Bedeutung – Koordinationsverhältnisse dar. Diese Totalformen gelten nur, sofern ein viertes Ereignis s vorliegt; falls wir es bei diesen dreistelligen Totalformen mit Koordinationsverhältnissen zu tun haben, gilt für alle diese Totalformen, dass bei ∼s keine der hinreichenden Bedingungen für s gegeben sein kann. Die jeweilige tatsächliche Bedeutung dieser Totalformen lässt sich nur in den geschlossenen logischen Zusammenhängen bestimmen, denen sie jeweils angehören. In ähnlicher Weise ließen sich alle vollständig nicht-symmetrischen Totalformen konstruieren; bei diesen handelt es sich um reine Konstitutionsbeziehungen; die partiell symmetrischen Relationen fassen Koordinations- und Konstitutionsverhältnisse zusammen.

Diese Skizzen sollten zeigen, dass grundsätzlich jeder bedingungslogische Zusammenhang beliebiger Komplexität konstruiert und in seinen möglichen logischen Bedeutungen expliziert werden kann. Ich wollte darlegen, wie sich komplexere bedingungslogische Zusammenhänge aus zweistelligen logischen Beziehungen zusammensetzen, und dass sich logische Untersuchungen keinesfalls auf die Untersuchung zweistelliger logischer Relationen beschränken dürfen. Die Ereignislogik konstruiert eine infinite Menge bedingungslogischer Gesetzesbeziehungen. Die Konstruktion beliebiger logischer Relationen und die Explikation ihrer jeweiligen Bedeutung ist völlig unabhängig davon, ob derartige Gesetzeszusammenhänge in der Wirklichkeit je schon entdeckt worden sind oder künftig entdeckt werden; andere bedingungslogische Zusammenhänge sind aber in der Realität nicht auffindbar[14].

2.3. Typen logischer Zusammenhänge

Die dargelegten logischen Formen sind der Form nach bedingungslogisch (d.h. Gefüge notwendiger oder hinreichender Bedingungen), dem Inhalt nach sachverhalts-/ bzw. ereignislogisch, d.h. sie können grundsätzlich nur Sachverhalts-/Ereignisklassen als Relata aufweisen; sie geben ja darüber Auskunft, was wir in *jedem* Falle, da ein Sachverhalt bzw. Ereignis bestimmter Art vorliegt und nicht vorliegt, erwarten müssen und erwarten können. Aus den anfangs angeführten Beispielen – *etwas ist ein Vogel*, *ein Draht erwärmt sich*, *eine Zahl ist größer als zwei* – geht hervor, dass ein *Sachverhalt* oder *Ereignis* bestimmter Art dann vorliegt, wenn einem einzelnen Gegenstand (Ding, System) eine prädikative begriffliche Bestimmung zukommt, d.h. wenn dieser Gegenstand oder dieses System irgendeine dauerhafte und bleibende Beschaffenheit oder einen zeitweiligen und wechselnden Zustand aufweist. Diese Prädikate gehören unterschiedlichen logischen *Kategorien* an; je nachdem, zwischen welcher kategorialen Art von Prädikaten bedingungslogische Beziehungen bestehen, ergeben sich unterschiedliche Typen gesetzmäßiger Beziehungen, die sich logisch in spezifischer Weise unterscheiden. Es gibt einerseits *dauerhafte* prädikative Bestimmungen, die den Gegenständen, denen sie zukommen, immer und jederzeit zukommen; hier ist dann weiterhin zwischen den Art- und Gattungsbegriffen (Kategorie der *Substanz* oder *Ousia*; logische Beziehungen des Typs Ia) und den Bestimmungen von dauerhafter Eigenschaften und Beschaffenheiten zu unterscheiden (Kategorie des *nichttrennbaren Akzidens*; Typ Ib) zu unterscheiden. Daneben gibt es prädikative Bestimmungen, die ihren Subjekten nur zeitweilig zukommen, also dynamische Zustandsbegriffe (Kategorie des *trennbaren Akzidens*; Typ II).

Ein Implikationsgesetz wie *Wenn etwas ein Baum ist, so ist es eine Pflanze* handelt davon, in welcher Weise irgendeinem Gegenstand klassifikatorische Art- oder Gattungsbegriffe zukommen, welche angeben, um was für einen Gegenstand es sich handelt. Wenn durch „x“ ein beliebiger Gegenstand und durch „P“, „Q“ beliebige klassifikatorische Begriffe bezeichnet werden, kann der Sachverhalt, dass irgendeinem Gegenstand *x* ein klassifikatorischer Begriff *P* zukommt, durch den Ausdruck „P(x)“ bezeichnet werden. P(x) ist ein *echtes Ereignis*, das in der einen Situation vorliegen (der Fall sein) und in der anderen Situation nicht vorliegen (nicht der Fall sein) kann. Jedes derartige klassifikatorische Prädikat zerlegt den universellen Bereich, denn von jedem beliebigen Gegenstand muss in Bezug auf jeden gehaltvollen, nicht-leeren klassifikatorischen Begriff entscheidbar sein, ob dieser ihm zukommt – P(x) ist dann der Fall –, oder ob er ihm nicht zukommt – P(x) ist dann nicht der Fall. Zwischen *Ereignissen* wie P(x) und Q(x) bestehen bedingungslogische Relationen, denn es macht für beliebige klassifikatorische Begriffe P und Q Sinn danach zu fragen, ob es notwendig, unmöglich, möglich ($\mathcal{M}$)oder zufällig ($\mathcal{Z}$) ist, dass einem Gegenstand, dem der Begriff P zukommt bzw. nicht zukommt, zugleich auch der Begriff Q zukommt. Die verschiedenen dauerhaften klassifikatorischen Art- und Gattungsbegriffe stehen im Verhältnis einer umfassenden gegenseitigen logischen Abhängigkeit; welcher Art ein Gegenstand ist, erkennen wir nur, wenn wir ihn in ein ganzes Gefüge derartiger Begriffe einordnen. Wir sehen, dass logische Formen/Verhältnisse nichts anderes sind als logische Verhältnisse von Begriffen.

Implikationsaussagen von der Art *Wenn ein Mensch die Blutgruppenzugehörigkeit 0 hat, hat er keinen Antikörper Anti-A im Blut* handeln von Zusammenhängen, die zwischen dauerhaften, unveränderlichen Beschaffenheiten und Qualitäten bestehen. In einer Implikationsaussage wie „Wenn ein Kind Scharlach hat, bekommt es einen Hautausschlag“ ist, haben wir es dagegen nicht mit fixen Qualitäten, sondern mit veränderlichen Zuständen zu tun, die diese Dinge bestimmter Art bald aufweisen, bald nicht aufweisen; wir können von *dynamischen Ereignissen* reden. Der Bereich der Dinge, auf den in Gesetzen des Typs Ib und II Bezug genommen wird, ist nicht mehr der universelle Bereich, sondern *jeweils* ein abgegrenzter Bereich bestimmter Dinge und Systeme, denn sowohl dauerhafte Eigenschaften wie zeitweilige Zustände sind immer auf Dinge ganz bestimmter Art bezogen. Die Negation solcher Prädikate führt nicht mehr wie bei den Zusammenhängen des Typs Ia auf x-Beliebiges, sondern auf näher Bestimmtes – auf eine Menge alternativer Eigenschaften oder Zustände; während etwas, das als *Nicht-Elefant* bestimmt ist, alles mögliche, nur eben kein Elefant sein kann (unbestimmte, unspezifische oder limitative Negation), hat ein Mensch, der nicht die Blutgruppe 0 hat, entweder Blut der Gruppe A, oder B oder AB, und ein Kind, das kein Scharlach hat, ist entweder gesund oder hat eine andere Krankheit (bestimmte oder spezifische Negation).

Ein wichtiger Unterschied zwischen den logischen Zusammenhängen des Typs I und II besteht darin, dass erstere Unterschiede zwischen *verschiedenen* Gegenständen, letztere hingegen unterschiedliche Zustände *ein und desselben* Gegenstandes betreffen. Ein Sachverhalt des Typs I liegt dann vor, wenn einem Gegenstand jederzeit und unter allen Umständen eine prädikative Bestimmung zukommt; dieser Sachverhalt liegt dann *nicht* vor, wenn das betreffende Prädikat einem *anderen* Gegenstand nicht zukommt; ein fixes Prädikat und sein Gegenteil können ja nicht ein und demselben Gegenstand zukommen. Ein Sachverhalt/Ereignis des Typs II liegt vor, wenn ein Gegenstand einen bestimmten Zustand aufweist, das Ereignis liegt nicht vor, wenn *eben dieser* Gegenstand zu anderer Zeit diesen Zustand nicht zeigt.

Die vorgelegten Bestimmungen der logischen Formen/Verhältnisse sind davon unberührt, ob die durch die Formen in Beziehung gesetzten Begriffe/Prädikatoren ein- oder mehrstellig sind. Bei mehrstelligen Prädikaten spricht man auch von Relationen. Dass irgendein Mensch a Vater eines anderen Menschen b ist, ist ein ebenso realmögliches Ereignis bestimmter Art wie das Ereignis, dass a mit b blutsverwandt ist. Zwischen beiden Sachverhalts-/ Ereignisklassen besteht die Beziehung der ereignislogischen Implikation: *wenn ein Mensch a Vater eines Menschen b ist, dann ist a mit b blutsverwandt*. Von den vier möglichen Vorkommenskombinationen sind alle bis auf die zweite Vorkommenskombination (ein Mensch a ist Vater eines Menschen b $\frown$ dieser a ist mit diesem b nicht blutsverwandt) realmöglich. Auch mehrstellige Prädikate sind entweder dauerhafte Beziehungen (z.B. die Relation *...ist Tochter von...*) oder zeitweilige Beziehungen (z.B. *…geht spazieren mit…*); es gibt allerdings keine mehrstelligen Ousiabegriffe (Art- und Gattungsbegriffe).

Die Bestimmung der logischen Formen und Gesetze ist von der Stelligkeit der Prädikate unberührt. Werden durch die Ausdrücke „$^nP_1$“, „$^nP_2$“, „$^nP_3$“, … irgendwelche verschiedenen n-stelligen Prädikate bezeichnet, die nicht einzelnen Gegenständen, sondern n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Gegenständen zukommen, ist jede logische Relation genauso für diese n-stelligen Prädikate definiert; die Ausdrücke „$(P_1x \rightarrow P_2x)$“ und „$(^nP_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (^nP_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$“, die Ausdrücke „$(P_1x \vee P_2x)$“ und „$(^nP_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (^nP_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$“, die Ausdrücke „$[p, q, r\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$“ und „$[^nP_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), {}^nP_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), {}^nP_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$ usw. bezeichnen jeweils immer dieselbe logische Relation. Wenn ich im Folgenden logische Relationen als Beziehungen von einstelligen Prädikaten, die einzelnen Gegenständen zukommen, darstelle, so geschieht dies der Einfachheit wegen. Es muss im Auge behalten werden, dass alle logischen Formen stets als Formen von Prädikaten beliebiger Stelligkeit bestimmt sind.

Hinsichtlich der Begriffe von Ereignissen bzw. hinsichtlich der Sachverhalts-/Ereignisklassen stellen sich insofern terminologische Probleme, als wir meistens nur bei dynamischen Ereignisse von Ereignissen sprechen; wie soll man den Tatbestand, dass irgendein Gegenstand ein Pferd ist, oder dass irgendein bestimmter Mensch die Blutgruppe 0 hat, nennen? Ereignis? Sachverhalt? Sachverhältnis? Sachlage? Für die vorliegende Erörterung kommt es v.a. auf die erste Bedingung der bedingungslogischen Zusammenhänge an, dass es realmöglich sein muss, dass einem Gegenstand ein bestimmtes Prädikat zukommt; ich werde die etwas unhandlichen Termini „Sachverhalts-/Ereignisbegriff“ und „Sachverhalts-/Ereignisklasse“ benutzen, um auf alle Fälle Bezug zu nehmen, dass Dingen/ Systemen (aus dem universellen oder einem abgegrenzten Bereich von Dingen) ein bestimmtes dauerhaftes oder dynamisches Prädikat zukommt, bzw. einem n-Tupel von Gegenständen eine bestimmte dauerhafte oder veränderliche n-stellige Relation zukommt. Die durchaus wichtige logische Unterscheidung der Typen logischer Zusammenhänge wird im Folgenden keine Rolle spielen.

Anmerkungen zu Teil I, Kapitel 2

:1 Die Totalform $p \wedge q$ bestimmt nur die Vorkommenskombination I als realmöglich; es gibt deshalb keine realmögliche Vorkommenskombination, in der $\sim p$ vorliegen würde, aus diesem Grunde ist p bezüglich des Totalform $p \wedge q$ unvollständig; dasselbe gilt bei $p \wedge q$ auch für q. Bei der Totalform $(1100)(p,q) = (p \rfloor q)$ ist keine der Vorkommenskombinationen realmöglich, in denen $\sim p$ gilt; es ist damit p bezüglich dieser logischen Totalform ein unvollständiges Ereignis, während q hinsichtlich dieser Totalform vollständig ist (in Vorkommenskombination I liegt q vor, in Vorkommenskombination II liegt q nicht vor).

2 Damit will ich ausdrücken, dass etwa bei $p \wedge q$ die Notwendigkeit von p und die Notwendigkeit von q nicht vom Vorliegen (bzw. Nichtvorliegen des jeweils anderen der beiden Ereignisse bedingt ist.

3 Drückt 𝒩(p, q) aus, dass die Notwendigkeit des Vorliegens von q tatsächlich durch p und nicht ein drittes Ereignis bedingt ist, genau dann gilt 𝒰(∼q, p); p macht dann q echt notwendig; ich schreibe $\mathcal{N}^{e}$(p, q).

4 Es gilt dann: r p⋟q und ∼r p↑q, also [p, q, r 𝕃𝔻]

5 Die Pränonpendenz, die Postnonpendenz und die Rejektion können unter Umständen *selbständig* sein, sind dann aber keine echten bedingungslogischen Zusammenhänge, sondern bringen die jeweils *unbedingte* Nichtrealmöglichkeit von Ereignissen zum Ausdruck. Zwischen der Sachverhalts-/Ereignisklasse, dass ein Mensch seinen Tod überlebt und der Sachverhalts-/Ereignisklasse. dass ein Mensch seine Geburt überlebt, besteht die Beziehung der selbständigen Pränonpendenz: das erste ist unmöglich (*nrm*), das zweite möglich (*rm*) – ohne dass zwischen beiden Sachverhalten eine Beziehung bestünde. Zwischen dem Sachverhalt, dass für eine natürliche Zahl n gilt: (n+1) < n , und dem Sachverhalt, dass Schnee schwarz ist, besteht die Beziehung der selbständigen Rejektion: weder das eine, noch das andere ist realmöglich – aber jeweils ganz unabhängig von einander. Solche unbedingt-unmöglichen Sachverhalte/Ereignisse bleiben in dieser Abhandlung prinzipiell außer Betracht, da sie nicht Bestandteil echter bedingungslogischer Zusammenhänge sein können. Der Ausschluss aller unbedingt unmöglichen Sachverhalte/Ereignisse aus der logischen Betrachtung und die Realmöglichkeit aller in logischen Zusammenhängen stehenden Sachverhalte/Ereignisse sind Präsuppositionen der Konstruktion aller logischen Formen.

6 Selbständig ist die Totalform der Kontravalenz 𝕁 in den Formulierungen der Prinzips des Nichtwiderspruchs (PNW): Für alle p: p ⋊⋉ ∼p. Das PNW formuliert die Norm der eindeutigen Identifizierbarkeit einer beliebigen *echten* Sachverhalts-/Ereignisklasse und der durchgängigen Wohlunterschiedenheit dieser Sachverhalts-/Ereignisklasse zu allen anderen Sachverhalts-/Ereignisklassen. Der Ausdruck „∼p“ bezeichnet nicht eine ganz bestimmte Sachverhalts-/Ereignisklasse, sondern jeden Fall, da ein von p verschiedenes Ereignis vorliegt. Auch das PNW ist eine *Präsupposition* dafür, dass eine Sachverhalts-/Ereignisklasseüberhaupt in einem bedingungslogischen Zusammenhang stehen kann. Innerhalb solcher bedingungslogischer Zusammenhänge ist der Totalform 𝕁 immer obligatorisch unselbständig.

7 In sehr vielen Fällen, in denen zwischen zwei Ereignissen p und q die Beziehung 𝕍 beobachtet wird, erweist es sich, dass zwischen p und q durchaus irgendeine Art logischer Abhängigkeit besteht, wenn zumindest ein zusätzliches Ereignis berücksichtigt wird. Diese Tatsache zeigt, dass es in den allerwenigsten Fällen genügt, sich auf die Berücksichtigung von zwei Ereignissen zu beschränken, wenn der bedingungslogische Zusammenhang zwischen diesen beiden Ereignisses erfasst werden soll.

8 Bei p→q kann q auch ohne p vorliegen, es gibt also für p noch eine andere hinreichende Bedingung als q; bei p←q kann p ohne q vorliegen, p ist also nicht die einzige notwendige Bedingung von q.

9 Nämlich: bei p ist p notwendig und bei ∼p ist p unmöglich.

10 Dies ergibt sich aus dem unten entwickelten Verfahren (siehe Abschnitt 3.2. Die Verkettungsrelation – das Relationenprodukt von logischen Formen. S. 37). Da q und r jeweils notwendige Bedingungen von p sind, gilt p → q und p → r.

Durch p → q sind für die Bestimmung der Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (p, q, r) folgende Bedingungen gegeben:

(1) Weil (p⌢q) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen I und II zumindest einer realmöglich
(2) Weil (p⌢∼q) nichtrealmöglich ist, sind die Vorkommenskombinationen III und IV beide nichtrealmöglich
(3) Weil (∼p⌢q) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen VI und VII zumindest einer realmöglich
(4) Weil (∼p⌢∼q) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen VII und VIII zumindest einer realmöglich

Durch p → r sind für die Bestimmung der Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (p, q, r) folgende Bedingungen gegeben:

(5) Weil (p⌢r) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen I und III zumindest einer realmöglich
(6) Weil (p⌢∼r) nichtrealmöglich ist, sind die Vorkommenskombinationen II und IV beide nichtrealmöglich
(7) Weil (∼p⌢r) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen V und VII zumindest einer realmöglich
(8) Weil (∼p⌢∼r) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen VI und VIII zumindest einer realmöglich

11 Der Ausdruck [[s, p, q, r 𝕂𝕁𝕆𝕏] besagt, dass bei s⌢p gilt: q∧r; bei s⌢∼p gilt p ⋊⋉ r; bei ∼s⌢p gilt q⊥r und bei ∼s⌢∼p gilt q ↓ r. Die Darstellung fünf- und höherstelliger logischer Formen mit Hilfe der zweistelligen logischen Formen geschieht entsprechend.

12 Durch p ∨ q sind für die Bestimmung der Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (p, q, r) folgende Bedingungen gegeben:

(1) Weil (p⌢q) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen I und II zumindest einer realmöglich
(2) Weil (p⌢∼q) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen III und IV zumindest einer realmöglich
(3) Weil (∼p⌢q) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen VI und VII zumindest einer realmöglich
(4) Weil (∼p⌢∼q) nichtrealmöglich ist, sind die Vorkommenskombinationen VII und VIII beide nichtrealmöglich

Durch q ∨ r sind für die Bestimmung der Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (p, q, r) folgende Bedingungen gegeben:

(5) Weil (q⌢r) realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen I und V zumindest einer realmöglich

(6) Weil $(q \frown \sim r)$ realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen II und VI zumindest einer realmöglich
(7) Weil $(\sim q \frown r)$ realmöglich ist, ist von den Vorkommenskombinationen III und VII zumindest einer realmöglich
(8) Weil $(\sim p \frown \sim r)$ nichtrealmöglich ist, sind die Vorkommenskombinationen IV und VIII beide nichtrealmöglich

Die Vorkommenskombinationen IV, VII und VIII sind nichtrealmöglich, Vorkommenskombination III ist realmöglich; für die restlichen Vorkommenskombinationen gelten die Bedingungen (1), (3), (5) und (6).

13 Sollen die zweistelligen logischen Relationen Ω_1 und Ω_2, die der Darstellung einer dreistelligen logischen Relation dienen, über die Permutationen hinweg unverändert bleiben, dann müssen bestimmte Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (p, q, r) gleich bestimmt sein. Diese Bedingungen lassen sich alle der oben angeführten Tabelle der identischen Vertauschungstransformationen für dreistellige Totalformen entnehmen (Siehe unten Tabelle 8: Die äquivalenten Inversionen der dreistelligen logischen Relationen, S.45).Wenn bei gegebener dreistelliger Relation von (p,q,r) festgestellt werden soll, welche dreistellige Relation zwischen (p,r,q), (q,p,r), usw. – für jede Permutation der Komponenten des Tripels (p,q,r) – besteht, wird die Reihenfolge der Vorkommenskombinationen in ihrer jeweiligen Bestimmtheit jeweils in spezifischer Weise vertauscht; für die vollständig symmetrischen dreistelligen logischen Relationen müssen die ihre Reihenfolge vertauschenden Vorkommenskombinationen gleich bestimmt sein.

Für die Permutation von (p, q, r) zu (p, r, q) gelten die Bedingungen:

(1) II = III
(2) VI = VII

Für die Permutation von (q, p, r) zu (q, r, p) muss gelten:

(1) II = V
(2) VII = IV

Für die Permutation von (r, p, q) zu (r, q, p) muss gelten:

(1) III = V
(2) IV = VI

Zusammenfassend ergeben sich die beiden Bedingungen:

(a) II = III = V
(b) IV = VI = VII

Hinzu kommt, dass bei allen identischen Vertauschungstransformationen die Vorkommenskombinationen I und VIII nicht permutiert werden.

Für die Permutation von (p,q,r) zu (q,p,r) gilt:

(7) Die Vorkommenskombinationen I, II, VII und VIII werden nicht permutiert.
(8) III und V werden mit einander vertauscht; wegen (a) sind III und V gleich bestimmt und ihre Vertauschung verändert Ω_1 und Ω_2 nicht.
(9) IV und VI werden mit einander vertauscht; wegen (b) sind IV und VI jedoch gleich bestimmt und ihre Vertauschung verändert Ω_1 und Ω_2 nicht.

Für die Permutation von (p, q, r) zu (r, p, q) gilt:

(10) III wird durch II, V wird durch III und II wird durch V ersetzt; wegen (a) werden bei diesen Ersetzungen Ω_1 und Ω_2 nicht verändert.
(11) VII wird durch IV, IV wird durch VI und VI wird durch VII ersetzt; wegen (b) ändern sich dabei Ω_1 und Ω_2 nicht.

14 In gleicher Weise lässt sich z.B. im System der natürlichen Zahlen jede Anzahl ganz unabhängig davon bestimmen, ob jemals die Existenz einer Menge mit einer derartigen Anzahl empirisch nachgewiesen wurde oder nachgewiesen werden wird; umgekehrt aber wird niemals empirisch irgendeine Anzahl nachgewiesen werden können, die nicht im rein konstruktiven System der natürlichen Zahlen enthalten wäre.

I, Kapitel 3. Logische Gesetze

In einer logischen Untersuchung gilt das Interesse nicht den Gesetzmäßigkeiten, die zwischen konkreten Sachverhalts-/Ereignisklassen bestehen, sondern es sollen die allgemeinen und notwendigen Bedingungen erkannt werden, die gegeben sein müssen, wenn beliebigen Sachverhalts-/Ereignisklassen eine logische Relation bestimmter Art zugesprochen werden soll. Wir müssen von *beliebigen* Sachverhalts-/Ereignisklassen reden und diese durch *Beliebig-Element-Zeichen* wie „p", „q", „r", „s",… bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass Sachverhalts-/Ereignisklassen und ihre Vorkommenskombinationen eindeutig identifizierbar sind, und dass wir Ereignisklassen und diese Kombinationen korrekt als realmöglich oder nichtrealmöglich bestimmen können, können wir die Gesamtheit aller nur möglichen n-stelligen logischen Relationen für jede beliebige natürliche Zahl *n* konstruieren. Das *konkrete* Implikationsgesetz „Wenn durch einen Draht Strom fließt, erwärmt sich dieser Draht" spricht von jedem beliebigen Draht, durch den Strom fließt, bzw. der erwärmt wird; aber auch bezüglich dieser Implikationsbeziehungen und anderer bedingungslogischer Beziehungen lässt sich sinnvoll über *jeden beliebigen Fall* reden, in dem diese Gesetzesbeziehungen zwischen *irgendwelchen* beliebigen Sachverhalts-/Ereignisklassen gelten bzw. nicht gelten. Wie eine konkrete zweistellige Relation (z.B. *…ist Vater von…*) unbestimmt vielen Paaren einzelner Individuen zukommt, so besteht eine logische Relation wie die Implikation zwischen unbestimmt vielen Paaren konkreter Sachverhalts-/Ereignisklassen. Der Ausdruck „$p \rightarrow q$" bezeichnet eine bestimmte Struktur eines gesetzmäßigen Zusammenhangs, nämlich jeden beliebigen Fall eines Gesetzes, in dem irgendeine Ereignisklasse p irgendeine Ereignisklasse q impliziert, wobei dieser Zusammenhang immer ein und dasselbe Ereignis-Bezugssystem ganz bestimmter Art betrifft. Wie für jedes echte Ereignis p die Realmöglichkeit, also rm(p) vorausgesetzt wird, so gilt auch für $p \rightarrow q$: rm($p \rightarrow q$), denn es ist möglich, dass diese Gesetzesbeziehung zwischen zwei Ereignisklassen gilt, und dass sie zwischen zwei anderen Ereignisklassen nicht gilt; es können für alle Paare von Ereignisklassen die normativen Bedingungen dafür bestimmt werden, die gegeben sein müssen, wenn zwischen ihnen die Relation der Implikation besteht und wenn zwischen ihnen diese Relation nicht besteht. Auch zwischen diesen allgemeinen *logischen Sachverhalten* (*Sachverhaltsklassen*) – zwischen irgendwelchen Ereignisklassen gelten diese oder jene bedingungslogischen Beziehungen – gelten exakt und eindeutig bestimmbare bedingungslogische Beziehungen, und es obliegt der Logik, diese gesetzmäßigen Beziehungen zwischen logischen Sachverhalten in *logischen Gesetzen* zu formulieren und ihre Gültigkeit nachzuweisen. Es gibt verschiedene Typen solcher logischer Gesetze: bedingungslogische Beziehungen zwischen beliebigen ereignislogischen Formen (ich spreche von „elementaren logischen Gesetzen"), Obversions- und Konversionsgesetze, sowie Gesetze der mehrdeutigen und eindeutigen Verkettung solcher ereignislogischer Relationen; alle logischen Gesetze, welche die traditionelle, vorlogistische Logik darstellt, gehören diesen Typen an. Ich werde im Folgenden Verfahren darlegen, durch welche jedes beliebige logische Gesetz dieser Typen auf seine Wahrheit geprüft werden kann.

3.1. Elementare logische Gesetze

Wir haben zwei logische Relationen: Δ und Λ; M_{Δ} ist die Menge der Sachverhalts-/Ereignisklassen, die Relata der Relation Δ sind; ich sage: „die logische Relation Δ bezieht sich auf die Elemente (Sachverhalts-/Ereignisklassen) der Menge M_{Δ}". Für M_{Λ} entsprechend.

Jede logische Relation Δ kann als Prädikatenvereinigung der logischen Totalformen $Ŧ_{\Delta 1}$, $Ŧ_{\Delta 2}$, …, $Ŧ_{\Delta n}$ gefasst werden, die unter sie fallen: $\Delta = Ŧ_{\Delta 1} \Cup Ŧ_{\Delta 2} \Cup \ldots \Cup Ŧ_{\Delta n}$.

Ich sage: „Δ umfasst jede Totalrelation $Ŧ_{\Delta i}$"; und „$Ŧ_{\Delta i}$ ist in Δ enthalten".

Beispielsweise ist $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}(p, q)$ [= (10•1)(p, q)] jene Relation, die zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q genau dann gilt, wenn für (p, q) entweder $p \rightarrow q$ oder $p \leftrightarrow q$ gilt.

$[\mathbb{B}\mathbb{X}] \Cup [\mathbb{A}\mathbb{D}] \Cup [\mathbb{C}\mathbb{V}](p, q, r)$ ist jene logische Relation, die zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p, q, r genau dann gilt, wenn entweder [p, q, r $\mathbb{B}\mathbb{X}$] oder [p, q, r $\mathbb{A}\mathbb{D}$] oder [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{V}$] gilt.

Logische Relationen sind wohlbestimmte logische Sachverhaltsklassen, d.h. die Bedingungen für die Geltung und Nichtgeltung einer logischen Relation stehen definitiv fest. Zwischen zwei beliebigen logischen Relationen gilt somit selbst wieder eine eindeutig bestimmbare logische Totalrelation. Die *elementaren logischen Gesetze* sind jene Aussagen, die besagen, dass zwischen zwei gegebenen logischen Formen eine bestimmte logische Relation gilt.

Die logischen Gesetze sind strikt von den logischen Formen selbst zu unterscheiden: der apophantische Ausdruck „$(p\rightarrow q)\uparrow(p\leftrightarrow q)$“ bezeichnet eine apophantisch-wahrheitswertdefinite Gesetzes*aussage*, der nicht-apophantische Ausdruck „$p\rightarrow q$“ bezeichnet eine logische Sachverhaltsklasse.

Die zwischen zwei beliebigen logischen Formen Δ und Λ geltende logische Totalform lässt sich auf folgende Weise bestimmen[1]:

Es seien irgendeine Relation Δ mit M_Δ und eine logische Relation Λ gegeben mit M_Λ.

Jede logische Form Δ entspricht dann *eineindeutig* einer logischen *Partial*form $\Delta_{\Delta\cup\Lambda}$, die sich auf die Elemente der Menge $M_\Delta\cup M_\Lambda$ bezieht. Entsprechendes gilt für Λ.

Es kommt jede einzelne Vorkommenskombination, die sich aus den Elementen der Menge M_Δ bilden lässt, mehrere Male in den Vorkommenskombinationen vor, die sich aus den Vorkommenskombinationen der Elemente von $M_\Delta\cup M_\Lambda$ bilden lassen. Die Vorkommenskombinationen der Elemente von $M_\Delta\cup M_\Lambda$, in denen eine Vorkommenskombination von Δ vorkommt, nenne ich die durch diese Vorkommenskombination in $M_\Delta\cup M_\Lambda$ *induzierten Vorkommenskombinationen*.

Beispiel 1: M_Δ sei $\{p,q\}$, M_Λ sei $\{q,r\}$; $M_\Delta\cup M_\Lambda = \{p,q,r\}$.

- Die Vorkommenskombination $p\frown q$ kommt in $p\frown q\frown r$ und $p\frown q\frown\sim r$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown\sim q$ kommt in $p\frown\sim q\frown r$ und $p\frown q\frown\sim r$ vor;
- die Vorkommenskombination $\sim p\frown q$ kommt in $\sim p\frown q\frown r$ und $\sim p\frown q\frown\sim r$ vor;
- die Vorkommenskombination $\sim p\frown\sim q$ kommt in $\sim p\frown\sim q\frown r$ und $\sim p\frown\sim q\frown\sim r$ vor.

Beispiel 2: M_Δ sei $\{p,q,r\}$, M_Λ sei $\{s,t\}$; $M_\Delta\cup M_\Lambda = \{p,q,r,s,t\}$.

- Die Vorkommenskombination $p\frown q\frown r$ kommt in $p\frown q\frown r\frown s\frown t$, in $p\frown q\frown r\frown s\frown\sim t$, in $p\frown q\frown r\frown\sim s\frown t$, in $p\frown q\frown r\frown\sim s\frown\sim t$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown q\frown\sim r$ kommt in $p\frown q\frown\sim r\frown s\frown t$, in $p\frown q\frown\sim r\frown s\frown\sim t$, in $p\frown q\frown\sim r\frown\sim s\frown t$, in $p\frown q\frown\sim r\frown\sim s\frown\sim t$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown\sim q\frown r$ kommt in $p\frown\sim q\frown r\frown s\frown t$, in $p\frown\sim q\frown r\frown s\frown\sim t$, in $p\frown\sim q\frown r\frown\sim s\frown t$, in $p\frown\sim q\frown r\frown\sim s\frown\sim t$ vor;
- die Vorkommenskombination $p\frown\sim q\frown\sim r$ kommt in $p\frown\sim q\frown\sim r\frown s\frown t$, in $p\frown\sim q\frown\sim r\frown s\frown\sim t$, in $p\frown\sim q\frown\sim r\frown\sim s\frown t$, in $p\frown\sim q\frown\sim r\frown\sim s\frown\sim t$ vor;
- die Vorkommenskombination $\sim p\frown q\frown r$ kommt in $\sim p\frown q\frown r\frown s\frown t$, in $\sim p\frown q\frown r\frown s\frown\sim t$, in $\sim p\frown q\frown r\frown\sim s\frown t$, in $\sim p\frown q\frown r\frown\sim s\frown\sim t$ vor;
- die Vorkommenskombination $\sim p\frown q\frown\sim r$ kommt in $\sim p\frown q\frown\sim r\frown s\frown t$, in $\sim p\frown q\frown\sim r\frown s\frown\sim t$, in $\sim p\frown q\frown\sim r\frown\sim s\frown t$, in $\sim p\frown q\frown\sim r\frown\sim s\frown\sim t$ vor;
- die Vorkommenskombination $\sim p\frown\sim q\frown r$ kommt in $\sim p\frown\sim q\frown r\frown s\frown t$, in $\sim p\frown\sim q\frown r\frown s\frown\sim t$, in $\sim p\frown\sim q\frown r\frown\sim s\frown t$, in $\sim p\frown\sim q\frown r\frown\sim s\frown\sim t$ vor;
- die Vorkommenskombination $\sim p\frown\sim q\frown\sim r$ kommt in $\sim p\frown\sim q\frown\sim r\frown s\frown t$, in $\sim p\frown\sim q\frown\sim r\frown s\frown\sim t$, in $\sim p\frown\sim q\frown\sim r\frown\sim s\frown t$, in $\sim p\frown\sim q\frown\sim r\frown\sim s\frown\sim t$ vor.

Eine logische Relation Δ mit M_Δ legt die ihr eineindeutig entsprechende Relation, die sich auf $M_\Delta\cup M_\Lambda$ bezieht, in folgender Weise fest.

Die unter Δ fallende Totalrelation $Ŧ_{\Delta 1}$ legt eine logische *Partial*relation in der Menge $M_\Delta\cup M_\Lambda$ in folgender Weise eineindeutig fest (die „durch $Ŧ_{\Delta 1}$ induzierte logische Relation“).

Ist eine Vorkommenskombination von $\text{Ŧ}_{\Delta 1}$ realmöglich, genau dann ist zumindest eine der ihr bezüglich $M_\Delta \cup M_\Lambda$ entsprechenden Vorkommenskombinationen realmöglich.

Ist eine Vorkommenskombination von $\text{Ŧ}_{\Delta 1}$ nichtrealmöglich, genau dann sind alle der ihr bezüglich $M_\Delta \cup M_\Lambda$ entsprechenden Vorkommenskombinationen nichtrealmöglich.

Die durch eine logische Totalform $\text{Ŧ}_{\Delta i}$ induzierte logische Relation, umfasst mehrere Totalformen.

3.1.1 Beispiel

Gegeben sei die logische Form $\Delta = \mathbb{K}\Cup\mathbb{J}(p,q)$, also $\text{Ŧ}_{\Delta 1} = p \wedge q$ und $\text{Ŧ}_{\Delta 2} = p >\!\!< q$.

$p \wedge q$ induziert in der Menge $\{p,q,r\}$ eineindeutig eine logische Relation, die durch die folgenden Bedingungen festgelegt ist:

1. da $p\frown q$ realmöglich ist, ist entweder $p\frown q\frown r$ realmöglich oder $p\frown q\frown\sim r$ oder beide realmöglich: $rm(p\frown q\frown r)\vee rm(p\frown q\frown\sim r)$.
2. da $p\frown\sim q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $p\frown\sim q\frown r$ noch $p\frown\sim q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(p\frown\sim q\frown r)$ & $nrm(p\frown\sim q\frown\sim r)$.
3. da $\sim p\frown q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $\sim p\frown q\frown r$ realmöglich noch $\sim p\frown q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(\sim p\frown q\frown r)$ & $nrm(\sim p\frown q\frown\sim r)$.
4. da $\sim p\frown\sim q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $\sim p\frown\sim q\frown r$ realmöglich noch $\sim p\frown\sim q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(p\frown q\frown r)$ & $nrm(p\frown q\frown\sim r)$.

Die logische Relation $p\wedge q$ induziert in $\{p,q,r\}$ also die logische Relation $[p,q,r\ (\circ\circ 00)\ \mathbb{O}] = [\mathbb{I}\mathbb{O}]\Cup[\mathbb{K}\mathbb{O}]\Cup[\mathbb{L}\mathbb{O}](p,q,r)$.

Die Menge der durch eine logische Relation Θ in einer Menge K von Sachverhalts-/Ereignisklassen induzierten Totalformen stelle ich durch den Ausdruck „$IM_{\Theta,K}$“ dar.

Die Elemente der Menge $IM_{p>\!\!<q,\{p,q,r\}}$ sind durch die folgenden Bedingungen definiert:

1'. da $p\frown q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $p\frown q\frown r$ noch $p\frown q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(p\frown q\frown r)$ & $nrm(p\frown q\frown\sim r)$

2'. da $p\frown\sim q$ realmöglich ist, ist entweder $p\frown\sim q\frown r$ realmöglich oder $p\frown\sim q\frown\sim r$ oder beide realmöglich: $rm(p\frown\sim q\frown r)\vee rm(p\frown\sim q\frown\sim r)$

3'. da $\sim p\frown q$ realmöglich ist, ist entweder $\sim p\frown q\frown r$ realmöglich oder $\sim p\frown q\frown\sim r$ oder beide realmöglich: $rm(\sim p\frown q\frown r)\vee rm(\sim p\frown q\frown\sim r)$

4'. da $\sim p\frown\sim q$ nichtrealmöglich ist, ist weder $\sim p\frown\sim q\frown r$ noch $\sim p\frown\sim q\frown\sim r$ realmöglich: $nrm(\sim p\frown\sim q\frown r)$ & $nrm(\sim p\frown\sim q\frown\sim r)$

Die durch $p >\!\!< q$ auf $\{p,q,r\}$ induzierte Menge $IM_{p>\!\!<q,\{p,q,r\}}$ ist die Menge $\{[p,q,r\ \mathbb{F}\mathbb{I}], [p,q,r\ \mathbb{F}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{F}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{M}\mathbb{I}], [p,q,r\ \mathbb{M}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{M}\mathbb{L}], [p,q,r\ \mathbb{X}\mathbb{I}], [p,q,r\ \mathbb{X}\mathbb{K}], [p,q,r\ \mathbb{X}\mathbb{L}]\}$

Die durch die logische Relation $\mathbb{C}\Cup\mathbb{J}(p,q)$ auf $\{p,q,r\}$ induzierte Menge von dreistelligen logischen Totalformen ist die Menge $IM_{\mathbb{C}\Cup\mathbb{J}(p,q),\{p,q,r\}} = IM_{p\wedge q,\{p,q,r\}} \cup IM_{p>\!\!<q,\{p,q,r\}}$.

Allgemein gilt: Sind zwei beliebige logische Relationen $\Delta = \text{Ŧ}_{\Delta 1}\Cup\text{Ŧ}_{\Delta 2}\Cup \ldots \Cup\text{Ŧ}_{\Delta n}$ und Λ gegeben, dann wird durch Δ in der Menge $M_\Delta\cup M_\Lambda$ eine logische Relation induziert, die die Elemente der Menge $IM_{\text{Ŧ}_{\Delta_1},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta_2},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup \ldots \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta_n},M_\Delta\cup M_\Lambda}$ umfasst. Es gilt also:

$$IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} = IM_{\text{Ŧ}_{\Delta_1},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta_2},M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup \ldots \cup IM_{\text{Ŧ}_{\Delta_n},M_\Delta\cup M_\Lambda}.$$

3.1.2. Die logische Beziehung zwischen 2 beliebigen logischen Formen Δ und Λ:

Gegeben seien zwei logische Relationen Δ und Λ. Es müssen auf die dargelegte Weise die Mengen $IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda}$ und $IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$ gebildet werden. Die Beziehungen, die zwischen diesen beiden Mengen bestehen, entsprechen eineindeutig den logischen Relationen, die den beiden logischen Formen Δ und Λ zukommen.

- Ist die Menge $IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$ nichtleer (es gibt dann logische Formen, die sowohl von Δ wie von Λ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann können Δ und Λ zusammen gelten. Die Vorkommenskombination I der logischen Form von Δ und Λ – also $\Delta \frown \Lambda$ – ist realmöglich.
- Ist die Menge $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ nichtleer (es gibt dann logische Formen, die wohl von Δ, nicht aber von Λ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann kann Δ ohne Λ gelten. Die Vorkommenskombination II der logischen Form von Δ und Λ – also $\Delta \frown \sim\Lambda$ – ist realmöglich.
- Ist die Menge $IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ nichtleer (es gibt dann logische Formen, die wohl von Λ, nicht aber von Δ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann kann Λ ohne Δ gelten. Die Vorkommenskombination III der logischen Form von Δ und Λ – also $\sim\Delta \frown \Lambda$ – ist realmöglich.
- Ist die Menge $\complement(IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda})$[2] nichtleer (es gibt dann logische Formen, die weder von Λ, noch von Δ auf $M_\Delta \cup M_\Lambda$ induziert werden), dann können Λ und Δ beide nicht gelten. Die Vorkommenskombination IV der logischen Form von Δ und Λ – also $\sim\Delta \frown \sim\Lambda$ – ist realmöglich.

Die folgende Tabelle führt alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass zwischen zwei beliebigen logischen Relationen eine der möglichen nichtleeren zweistelligen Totalrelationen besteht.

$IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$	$IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$	$IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$	$\complement(IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda})$	$\Delta \boxplus \Lambda$
nichtleer	nichtleer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \top \Lambda$
nichtleer	nichtleer	nichtleer	leer	$\Delta \vee \Lambda$
nichtleer	nichtleer	leer	nichtleer	$\Delta \leftarrow \Lambda$
nichtleer	leer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \rightarrow \Lambda$
leer	nichtleer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \uparrow \Lambda$
nichtleer	leer	leer	nichtleer	$\Delta \leftrightarrow \Lambda$
leer	leer	nichtleer	nichtleer	$\Delta \rceil \Lambda$
leer	nichtleer	leer	nichtleer	$\Delta \lceil \Lambda$
nichtleer	leer	nichtleer	leer	$\Delta \lfloor \Lambda$
nichtleer	nichtleer	leer	leer	$\Delta \rfloor \Lambda$
leer	nichtleer	nichtleer	leer	$\Delta \rtimes\!\!\!\ltimes \Lambda$
nichtleer	leer	leer	leer	$\Delta \wedge \Lambda$
leer	nichtleer	leer	leer	$\Delta \succcurlyeq \Lambda$
leer	leer	nichtleer	leer	$\Delta \preccurlyeq \Lambda$
leer	leer	leer	nichtleer	$\Delta \downarrow \Lambda$

Da für zwei gegebene logische Formen Δ und Λ sich die Mengen $IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ und $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ immer konstruieren lassen, kann die logische Relation, die zwischen zwei logischen Formen gilt, immer eindeutig bestimmt werden.

3.2. Die Verkettungsrelation – das Relationenprodukt von logischen Formen.

Gibt es zu einer Relation R zwischen einem ersten und zweiten Element, und zu einer Relation S zwischen diesem zweiten und einem dritten Element eine Relation $R \cdot S$, die zwischen dem ersten und dritten Element besteht, heißt die Relation $R \cdot S$ das *Relationenprodukt* von R und S. Man spricht auch von der *Verkettung*, der *Multiplikation* oder der *Komposition* der Relationen R und S. Auch logische Relationen besitzen genau dann ein Relationenprodukt; wenn es beispielsweise bei Geltung von verträglichen logischen Formen $(p \boxplus q)$ und $(q \boxminus r)$ eine zweistellige logische Relation $(p \boxtimes r)$ gilt, wobei die Zeichen ⊞, ⊟ und ⊠ irgendwelche zweistellige (nicht notwendig paarweise verschiedene) logische Relationen bezeichnen sollen. Sind zwei Relationen R_1 und R_2 von jeweils beliebiger Stelligkeit gegeben, so ist das Relationenprodukt $R_1 \cdot R_2$ die Relation, die zwischen den Elementen, die Relata von R_1, aber nicht von R_2 sind, und den Elementen, die Relata von R_2, nicht aber von R_1 sind.

Für zwei beliebige vorgegebene logische Relationen Δ und Λ gibt es genau dann ein Relationenprodukt $\Delta\cdot\Lambda$, wenn die Menge $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}\cap IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ nicht leer ist. Die Menge der Sachverhalts-/Ereignisklassen, auf die sich die Verkettungsrelation $\Delta\cdot\Lambda$ bezieht, ist die Menge der Sachverhalts-/Ereignisklassen, auf die sich Δ oder Λ, aber nicht beide beziehen: $M_{\Delta\cdot\Lambda} = M_\Delta\cup M_\Lambda\backslash M_\Delta\cap M_\Lambda$.

Für zwei logische Relationen Δ und Λ sei die Menge $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}\cap IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ nicht leer. Gilt eine der zu $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}\cap IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ gehörenden Totalformen, dann gelten einerseits zugleich auch Δ und Λ, aber es gilt genau dann auch eine bestimmte Totalform, die zum Relationenprodukt $\Delta\cdot\Lambda$ gehört.

Für jede logische Totalform, die zur Menge $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}\cap IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ lässt sich eineindeutig die logische Relation bestimmen, die zwischen den Elemente der Menge $M_\Delta\cup M_\Lambda\backslash M_\Delta\cap M_\Lambda = M_{\Delta\cdot\Lambda}$ gilt.

Jeder Vorkommenskombination, die sich aus den Elementen der Menge $M_{\Delta\cdot\Lambda}$ bilden lässt, kommt mehrere Male in den Vorkommenskombinationen vor, die sich aus den Elementen von $M_\Delta\cup M_\Lambda$ bilden lassen. Es seien nun $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ die logischen *Total*formen, die zur Menge $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}\cap IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ gehören. Ist zumindest eine der Vorkommenskombinationen von Ψ_1 realmöglich, die einer bestimmten Vorkommenskombination von $\Delta\cdot\Lambda$ entsprechen, genau dann ist auch die betreffende Vorkommenskombination von $\Delta\cdot\Lambda$ realmöglich. Sind alle Vorkommenskombinationen von Ψ_1 nichtrealmöglich, die einer bestimmten Vorkommenskombination von $\Delta\cdot\Lambda$ entsprechen, genau dann ist auch die betreffende Vorkommenskombination von $\Delta\cdot\Lambda$ nichtrealmöglich. Gilt also Ψ_1, genau dann gilt eine logische Totalform $\text{Ŧ}_{(\Delta\cdot\Lambda)1}$. Es gilt: $\Psi_1 \leftrightarrow \text{Ŧ}_{(\Delta\cdot\Lambda)1}$; $\Psi_2 \leftrightarrow \text{Ŧ}_{(\Delta\cdot\Lambda)2}$; … $\Psi_k \leftrightarrow \text{Ŧ}_{(\Delta\cdot\Lambda)k}$. Die Verkettungsrelation $\Delta\cdot\Lambda$ ist dann die Relation $\text{Ŧ}_{(\Delta\cdot\Lambda)1} \Cup \text{Ŧ}_{(\Delta\cdot\Lambda)2} \Cup \ldots \Cup \text{Ŧ}_{(\Delta\cdot\Lambda)k}$.

Dieses Vorgehen möchte ich am Beispiel der Verkettung zweistelliger Totalformen illustrieren.

Gegeben seien die beiden Relationen $p\rightarrow q$ und $p >\!\!< q$. Es sind einerseits die logischen Totalformen zu bestimmen, die zur Menge $IM_{p\rightarrow q,\{p,q,r\}}$ gehören, andererseits die logischen Totalformen, die zur Menge $IM_{p>\!<q,\{p,q,r\}}$ gehören; gelten $p\rightarrow q$ und $p >\!\!< q$ zusammen, genau dann gilt eine der Totalformen, die zur Menge $IM_{p\rightarrow q,\{p,q,r\}}\cap IM_{p>\!<q,\{p,q,r\}}$ gehören. Die Totalformen, die der Menge $IM_{p\rightarrow q,\{p,q,r\}}\cap IM_{p>\!<q,\{p,q,r\}}$ angehören, müssen sowohl den Bedingungen genügen, die durch $p\rightarrow q$ für $IM_{p\rightarrow q,\{p,q,r\}}$ und die durch $p>\!\!<q$ $IM_{p>\!<q,\{p,q,r\}}$ festgelegt sind.

Durch $p \rightarrow q$ sind die ersten vier Bedingungen der der Menge $IM_{p\rightarrow q,\{p,q,r\}}\cap IM_{p>\!<q,\{p,q,r\}}$ angehörenden logischen Totalformen festgelegt.

1. Bei $p\rightarrow q$ ist $p\frown q$ realmöglich, und so ist entweder $p\frown q\frown r$ (Vorkommenskombination I der dreistelligen Relation) realmöglich, oder $p\frown q\frown\sim r$ (Vorkommenskombination II) realmöglich, oder beide Fälle sind realmöglich; diese Bedingung bezeichne ich durch „rm(I) $\vee$ rm(II)“, was bedeutet: zumindest einer der beiden Vorkommenskombinationen I und II ist realmöglich.
2. Bei $p\rightarrow q$ ist $p\frown\sim q$ nichtrealmöglich, und so ist sowohl $p\frown\sim q\frown r$ (Vorkommenskombination III) wie $p\frown\sim q\frown\sim r$ (Vorkommenskombination IV) nichtrealmöglich; ich bezeichne diese Bedingung durch „nrm(III) & nrm(IV)“, was bedeutet: sowohl Vorkommenskombination II wie Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich.

In entsprechender Weise werden die restlichen Bedingungen der der Menge $IM_{p\rightarrow q,\{p,q,r\}}\cap IM_{p>\!<q,\{p,q,r\}}$ angehörenden logischen Totalformen festgelegt:

3. rm($\sim p\frown q$), also: rm(V) $\vee$ rm(VI).
4. rm($\sim p\frown\sim q$), also: rm(VII) $\vee$ rm(VII).

Durch die Beziehung $q >\!\!< r$ sind weitere vier Bedingungen der der Menge $IM_{p\rightarrow q,\{p,q,r\}}\cap IM_{p>\!<q,\{p,q,r\}}$ angehörenden logischen Totalformen determiniert:

5. nrm($q\frown r$), also: nrm(I) & nrm(V); aus dieser Bedingung und den Bedingungen (1) und (3) folgt: rm(II) & rm(VI).
6. rm($q\frown\sim r$), also: rm(II) $\vee$ rm(VI).
7. rm($\sim q\frown r$), also: rm(III) $\vee$ rm(VII); aus dieser Bedingung und der Bedingung (2) folgt: rm(VII).
8. nrm($\sim q\frown\sim r$), also: nrm(IV) & nrm(VIII).

Die beiden Beziehungen $p \rightarrow q$ und $q \succ\!\prec r$ legen somit eindeutig eine dreistellige Totalform fest: $(0100\ 0110)(p, q, r)$; $IM_{p \rightarrow q, \{p,q,r\}} \cap IM_{p \succ\!\prec q, \{p,q,r\}} = \{[p, q, r\ \mathbb{L}\mathbb{J}]$ und es gilt also das logische Äquivalenzgesetz: Für alle p, q und r: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \succ\!\prec r)] \leftrightarrow [p\ , q, r\ \mathbb{L}\mathbb{J}]$.

Aus $[p, q, r\ \mathbb{L}\mathbb{J}]$ kann – gewissermaßen durch die „Umkehrung“ des eben durchgeführten Verfahrens – die Beziehung abgelesen werden, die unabhängig von q zwischen p und r besteht: $p \frown r$ ist nur dann realmöglich, wenn von $p \frown q \frown r$ (Vorkommenskombination I) oder $p \frown {\sim} q \frown r$ (Vorkommenskombination II) zumindest einer realmöglich ist; dies ist hier nicht der Fall. $p \frown {\sim} r$ ist nur realmöglich, wenn von $p \frown q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination II) oder von $p \frown {\sim} q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination IV) zumindest einer realmöglich ist; dies trifft hier zu. Der Vorkommenskombination ${\sim} p \frown r$ ist realmöglich nur dann, wenn von ${\sim} p \frown q \frown r$ (Vorkommenskombination V) oder ${\sim} p \frown {\sim} q \frown r$ (Vorkommenskombination VII) mindestens einer realmöglich ist, was hier zutrifft. ${\sim} p \frown {\sim} r$ ist nur realmöglich, wenn von ${\sim} p \frown q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination VI) oder ${\sim} p \frown {\sim} q \frown {\sim} r$ (Vorkommenskombination VIII) wenigstens einer realmöglich ist, was hier zutrifft. Aus $[p, q, r\ \mathbb{L}\uparrow]$ folgt also implikativ $p \uparrow r$, und es gilt das Verkettungsgesetz: Für alle p, q, r: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \succ\!\prec r)] \rightarrow (p \uparrow r)$. Umfasst das Relationenprodukt $\Delta \cdot \Lambda$ zweier logischer Relationen Δ und Λ nur eine einzige Totalform spreche ich von einer *eindeutigen Verkettung*. Es kann gezeigt werden, dass es für die zweistelligen logischen Totalformen genau 82 eindeutige Verkettungen gibt. In einem solchen Verkettungsgesetz $[(p \boxplus q) \wedge (q \boxminus r)] \rightarrow (p \boxtimes r)$ nenne ich $p \boxplus q$ das erste Oberglied (O_1) und $q \boxminus r$ das zweite Oberglied (O_2) und $p \boxtimes r$ das Unterglied (U).

Besteht zwischen p und q die logische Totalform Ω_1, zwischen q und r die Totalform Ω_2 und ist das eindeutige Relationenprodukt $\Omega_3(p,r)$, dann stelle ich das Verkettungsgesetz durch den Ausdruck „$\Omega_1\Omega_2\Omega_3$“ dar; das Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ durch den Ausdruck „$\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}$“, das Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (q \succ\!\prec r)] \rightarrow (p \uparrow r)$ durch den Ausdruck „$\mathbb{C}\mathbb{J}\mathbb{D}$“, usw.

Die Oberglieder können je einzeln oder beide durch ihre äquivalenten Konversen ersetzt werden; dies führt dann auf Verkettungs-„Figuren“ $[(q \boxplus p) \wedge (q \boxminus r)] \rightarrow (p \boxtimes r)$, $[(p \boxplus q) \wedge (r \boxminus q)] \rightarrow (p \boxtimes r)$ und $[(q \boxplus p) \wedge (r \boxminus q)] \rightarrow (p \boxtimes r)$. Die „Figuren“ unterscheiden sich nach der Stellung der Sachverhalts-/Sachverhalts-/Ereignisklasse, die in beiden Obergliedern vorkommt. Diese Verkettungsgesetze lassen sich auf der Basis der Konversionsgesetze für zweistellige logische Relationen und der untenstehenden Tabelle der eindeutigen Verkettungen zweistelliger logischer Totalformen leicht bestimmen.

Tabelle 5: Die eindeutigen Verkettungen der zweistelligen logischen Totalformen

1.Oberglied	2.Oberglied	Unterglied
p ⊤ q	q ↔ r	p ⊤ r
	q >< r	p ⊤ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
p ∨ q	q → r	p ∨ r
	q ↑ r	p ← r
	q ↔ r	p ∨ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q >< r	p ← r
p ← q	q ∨ r	p ∨ r
	q ← r	p ← r
	q ↔ r	p ← r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q >< r	p ← r
p → q	q → r	p → r
	q ↑ r	p ↑ r
	q ↔ r	p → r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q >< r	p ↑ r
p ↑ q	q ∨ r	p → r
	q ← r	p ↑ r
	q ↔ r	p ↑ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q >< r	p ↑ r

1.Oberglied	2.Oberglied	Unterglied
p ↔ q	q ⊤ r	p ⊤ r
	q ∨ r	p ∨ r
	q ← r	p ← r
	q → r	p → r
	q ↑ r	p ↑ r
	q ↔ r	p ↔ r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q >< r	p >< r
p ⌉ q	q ⊤ r	p ⊤ r
	q ∨ r	p ⌉ r
	q ← r	p ⌉ r
	q → r	p ⌉ r
	q ↑ r	p ⌉ r
	q ↔ r	p ⌉ r
	q ⌈ r	p ↓ r
	q ⌊ r	p ≽ r
	q >< r	p >< r
p ⌋ q	q ⊤ r	p ⌋ r
	q ∨ r	p ⌋ r
	q ← r	p ⌋ r
	q → r	p ⌋ r
	q ↑ r	p ⌋ r
	q ↔ r	p ⌋ r
	q ⌈ r	p ≽ r
	q ⌊ r	p ∧ r
	q >< r	p ⌋ r

1.Oberglied	2.Oberglied	Unterglied
p >< r	q ⊤ r	p ⊤ r
	q ∨ r	p → r
	q ← r	p ↑ r
	q → r	p ∨ r
	q ↑ r	p ← r
	q ↔ r	p >< r
	q ⌈ r	p ⌈ r
	q ⌊ r	p ⌊ r
	q >< r	p ↔ r
p ⌈ q	q ⌉ r	p ⊤ r
	q ≼ r	p ⌊ r
	q ↓ r	p ⌈ r
p ⌊ q	q ⌋ r	p ⊤ r
	q ∧ r	p ⌊ r
	q ≽ r	p ⌈ r
p ∧ q	q ⌋ r	q ⌋ r
	q ∧ r	p ∧ r
	q ≽ r	p ≽ r
p ≽ q	q ⌉ r	p ⌋ r
	q ≼ r	p ∧ r
	q ↓ r	p ≽ r
p ≼ q	q ⌋ r	p ⌉ r
	q ∧ r	p ≼ r
	q ≽ r	p ↓ r
p ↓ q	q ⌉ r	p ⌉ r
	p ≼ r	p ≼ r
	q ↓ r	p ↓ r

Für die beiden Beziehungen $p\wedge q$ und $q\vee r$ ist die Menge $IM_{p\wedge q,\{p,q,r\}}\cap IM_{p\vee q,\{p,q,r\}}$ leer: es gibt kein Relationenprodukt, da sich die Bedingungen für $IM_{p\wedge q,\{p,q,r\}}$ und $IM_{p\vee q,\{p,q,r\}}$ widersprechen. Bei $p\wedge q$ ist der Fall $p\frown\sim q$ nichtrealmöglich, und es gilt für die Bestimmung der Normalmatrix der Elemente von $IM_{p\wedge q,\{p,q,r\}}$: **nrm(III)** & nrm(IV). Bei $p \wedge q$ gilt außerdem nrm($\sim p\frown\sim q$), folglich: **nrm(VII)** & nrm(VIII). Bei $q\vee r$ ist $\sim q\frown r$ realmöglich, es gilt also: rm(III) ∨ rm(VII); dies steht im Widerspruch zu nrm(III) & nrm(VII).

Für die beiden Beziehungen $p\vee q$ und $q\vee r$ bestehen mehrere Relationenprodukte. Die beiden Beziehungen legen mit acht Restriktionen eine dreistellige logische Relation fest, die mehrere logische Totalformen umfasst.

Bei $p \vee q$ gilt:

1. $rm(p \frown q)$, also: $rm(I) \vee rm(II)$.
2. $rm(p \frown {\sim}q)$, also $rm(III) \vee rm(IV)$.
3. $rm({\sim}p \frown q)$, also $rm(V) \vee rm(VI)$.
4. $nrm({\sim}p \frown {\sim}q)$, also $nrm(VII) \,\&\, nrm(VIII)$.

Bei $q \vee r$ gilt:

5. $rm(q \frown r)$, also $rm(I) \vee rm(V)$.
6. $rm(q \frown {\sim}r)$, also $rm(II) \vee rm(VI)$.
7. $rm({\sim}q \frown r)$, als $rm(III) \vee rm(VII)$; aus dieser Bedingung und aus der Bedingung (4) folgt III=1.
8. $nrm({\sim}q \frown {\sim}r)$, also $nrm(IV) \,\&\, nrm(VII)$; aus dieser Bedingung und der Bedingung (2) folgt III=1.

Diese acht Bedingungen legen keine dreistellige Totalform, sondern eine dreistellige Partialform fest, deren Vorkommenskombinationen noch nicht alle definitiv bestimmt sind. Den 8 Bedingungen entsprechen genau 7 verschiedene dreistellige Totalformen: $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{I}]$ mit $p \top r$, $[p,q,r\ \mathbb{J}\mathbb{I}]$ mit $p \top r$, $[p,q,r\ \mathbb{J}\mathbb{K}]$ mit $p \vee r$, $[p,q,r\ \mathbb{H}\mathbb{I}]$ mit $p \rightarrow r$, $[p,q,r\ \mathbb{H}\mathbb{L}]$ mit $p \leftrightarrow r$, $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{L}]$ mit $p \rightarrow r$ und $[p,q,r\ \mathbb{A}\mathbb{K}]$ mit $p \vee r$. Es liegt ein mehrdeutiges Verkettungsgesetz vor, das folgendermaßen formuliert werden kann:

Für beliebige p, q und r: $[(p \vee q) \wedge (q \vee r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \vee r), (p \leftarrow r), (p \rightarrow r), (p \leftrightarrow r)]$,

wobei der Ausdruck „$\mathbb{J}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$“ bedeuten soll, dass von den Ereignissen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nur eines und genau eines vorliegt.

Auch die Geltung der folgenden mehrdeutigen Verkettungsgesetze lässt sich leicht nachweisen:

- $[(p \rightarrow q) \wedge (q \leftarrow r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \uparrow r), (p \leftarrow r), (p \rightarrow q)]$
- $[(p \vee q) \wedge (q \leftarrow r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \vee r), (p \leftarrow r), (p \uparrow r), (p \succ\!\prec q)]$
- $[(p \leftarrow q) \wedge (q \uparrow r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \leftarrow r), (p \vee r), (p \succ\!\prec r), (p \uparrow q)]$
- $[(p \leftarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \vee r), (p \leftarrow r), (p \rightarrow r), (p \leftrightarrow q)]$
- $[(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \vee r), (p \rightarrow r), (p \uparrow r), (p \succ\!\prec q)]$
- $[(p \uparrow q) \wedge (q \uparrow r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \leftarrow r), (p \rightarrow r), (p \uparrow r), (p \leftrightarrow q)]$
- $[(p \uparrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow \mathbb{J}[(p \top r), (p \vee r), (p \rightarrow r), (p \uparrow r), (p \succ\!\prec q)]$.

3.2.1 Die Verkettungsrelation für zweistellige logische Totalformen

Die Beziehung, die in Verkettungsgesetzen der Form $[(p \boxplus q) \wedge (p \boxminus q)] \rightarrow (p \boxtimes q)$ zwischen O_1, O_2 und U besteht ist selbst wieder eine dreistellige logische Relation, die *Verkettungsrelation* $\mathfrak{S}^*(O_1,O_2,U)$. Für diese Verkettungsrelation gilt zunächst, dass, falls O_1 und O_2 vorliegen, notwendig auch U gilt. Es gilt also $\mathcal{N}(O_1 \& O_2, U)$ und – wegen des Obversionsgesetzes: für alle p und q: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ({\sim}q \rightarrow {\sim}p)$ – gilt auch $\mathcal{U}({\sim}U, O_1 \& O_2)$. Dies ist der besondere Fall einer dreistelligen logischen Relation von (p,q, r), die durch die beiden Bedingungen $\mathcal{N}(p \& q, r)$ und $\mathcal{U}({\sim}r, p \wedge q)$ definiert ist; in der Normalmatrix dieser Relation von (p,q, r) sind die Vorkommenskombinationen I und VIII mit 1 und der Vorkommenskombination II mit 0 bestimmt; diese dreistellige logische Relation bezeichne ich durch „$\mathfrak{R}^*(p,q,r)$“.

Die Verkettungsgesetze werden i.R. in folgender Form dargestellt: „$(O_1 \wedge O_2) \rightarrow (U)$“; dies ist ein Sonderfall von $(p \wedge q) \rightarrow r$[3]. Für diese Relation schreibe ich „$\mathfrak{T}^*(p,q,r)$“. Gegenüber $\mathfrak{R}^*(p,q,r)$ gelten bei $\mathfrak{T}^*(p,q,r)$ noch zusätzliche Bedingungen: zusammen implizieren p und q den Sachverhalt r, und für die Implikation gilt: $\mathbb{C}/\beta = \mathcal{K}$. Ist $p \frown q$ nicht der Fall, liegt also von den Sachverhalten p und q höchstens eines vor, muss r möglich ($\mathcal{K}$) sein. Von den Vorkommenskombinationen III, V und VII, bei denen von p und q höchsten eines, r aber immer vorliegt, muss demnach zumindest einer realmöglich sein: $(III=1) \vee (V=1) \vee (VII=1)$[4]. Wegen $\mathbb{C}/\beta = \mathcal{K}$ muss beim Nichtvorliegen von $p \frown q$ der Sachverhalt r auch nicht möglich sein können, es muss deshalb gelten: $(IV=1) \vee (VI=1) \vee (VIII=1)$. Diese Bedingung ist schon von $\mathfrak{R}^*(p,q,r)$, wegen VIII=1, erfüllt. Endlich muss wegen $\mathbb{C}/\gamma = \mathcal{K}$ r mit $p \frown q$ möglich sein; dies ist schon bei $\mathfrak{R}^*(p,q,r)$ wegen I=1 der Fall. Wegen $\mathbb{C}/\gamma = \mathcal{K}$ muss bei r auch $p \frown q$ nicht vorliegen können: $(III=1) \vee (V=1) \vee (VII=1)$; diese Bedingung ist schon wegen $\mathbb{C}/\beta$ erfüllt. Wir haben für $\mathfrak{T}^*(p,q,r)$ also im Vergleich zu $\mathfrak{R}^*(p,q,r)$ die zusätzliche Bedingung : $(III=1) \vee (V=1) \vee (VII=1)$. Wegen dieser zusätzlichen Restriktion gehören zu $\mathfrak{T}^*(p,q,r)$ genau vier Funktoren weniger als zu $\mathfrak{R}^*(p,q,r)$.

Aber auch mit $\mathfrak{T}^*(p,q, r)$, d.h. $(p \wedge q) \rightarrow r$, ist die Verkettungsrelation $\mathfrak{S}^*(p,q, r)$ noch nicht exakt bestimmt; für diese gilt darüber hinaus die Restriktion IV = VI = VII. Der Grund liegt in folgendem Umstand: Für jedes O_1 ist es möglich, dass weder O_2 noch U vorliegt, also ist Vorkommenskombination IV realmöglich. Ebenso kann jedes O_2 vorliegen, ohne dass zugleich O_1 und U gilt: Vorkommenskombination VI ist realmöglich. Schließlich ist jedes U möglich, ohne dass ein O_1 und O_2 vorliegt. In der Verkettungsrelation sind damit alle Vorkommenskombinationen der Beziehung von (O_1,O_2,U) bis auf zwei definitiv bestimmt: $[O_1,O_2,U\ (10\bullet1)(\bullet111)]$. Es kommen also 2^2 dreistellige Funktoren für die Verkettungsrelation in Frage, und es gibt deshalb 4 verschiedene Arten von Verkettungen. Diese logischen Unterschiede werden bei der Darstellung der Verkettungsgesetze in der Form „$(p \wedge q) \rightarrow r$" nicht ausgedrückt.

1. $[O_1, O_2,U\ \mathbb{CV}] = [O_1,U,O_2\ \mathbb{BV}] = [O_2,O_1,U\ \mathbb{CV}] = [O_2,U,O_1\ \mathbb{BV}] = [U,O_1,O_2\ \mathbb{VD}] = [U,O_2,O_1\ \mathbb{VD}]$[5]. Wenn bei diesen Verkettungen die beiden Oberglieder vertauscht werden ergibt sich wieder eine eindeutige Verkettung. Der Ausdruck „$[(p \rightarrow q),(q \rightarrow r),(p \rightarrow r)\ \mathbb{CV}]$" ist genauer und vollständiger als der Ausdruck „$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$".
2. $[O_1,O_2,U\ \mathbb{EV}] = [O_1,U,O_2\ \mathbb{EV}] = [O_2,O_1,U\ \mathbb{EV}] = [O_2,U,O_1\ \mathbb{BD}] = [U,O_1,O_2\ \mathbb{CD}] = [U,O_2,O_1\ \mathbb{BD}]$. Bei diesen Verkettungen ergibt sich beim Vertauschen der beiden Oberglieder, beim Vertauschen des Untergliedes mit dem zweiten Oberglied, nicht aber beim Vertauschen des Untergliedes mit dem ersten Oberglied wieder eine eindeutige Verkettung. Das Verkettungsgesetz $\uparrow\mathbb{CA}$ wird am exaktesten durch den Ausdruck „$[(p >\!< q), (q \rightarrow r), (p \vee r)\ \mathbb{EV}]$" dargelegt.
3. $[O_1,O_2,U\ \mathbb{ED}] = [O_1,U,O_2\ \mathbb{ED}] = [O_2,O_1,U\ \mathbb{ED}] = [O_2,U,O_1\ \mathbb{ED}] = [U,O_1,O_2\ \mathbb{ED}] = [U,O_2,O_1\ \mathbb{ED}]$. Die Vertauschung der beiden Oberglieder und die Vertauschung des Untergliedes mit einem der Oberglieder führt wieder auf eine eindeutige Verkettung; es liegt ein vollständig symmetrischer Funktor vor. Das Verkettungsgesetz 70 lautet vollständig: $[(p >\!< q), (q >\!< r), (p \leftrightarrow r)\ \mathbb{ED}]$
4. $[O_1,O_2,U\ \mathbb{CD}] = [O_1,U,O_2\ \mathbb{BD}] = [O_2,O_1,U\ \mathbb{EV}] = [O_2,U,O_1\ \mathbb{EV}] = [U,O_1,O_2\ \mathbb{BD}] = [U,O_2,O_1\ \mathbb{CD}]$. Hier führen die Vertauschung der beiden Oberglieder und die Vertauschung des Untergliedes mit dem ersten Oberglied auf eine eindeutige Verkettung.

3.3 Logische Obversions- und Konversionsgesetze

Gilt von zwei logischen Relationen, dass die Mengen $IM_{\Delta,M\Delta\cup M\Lambda} \cap IM_{\Lambda,M\Delta\cup M\Lambda}$ und $\complement(IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \cup IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda})$ nichtleer, die Mengen $IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ und $IM_{\Lambda,M_\Delta\cup M_\Lambda} \setminus IM_{\Delta,M_\Delta\cup M_\Lambda}$ aber leer sind, dann sind Δ und Λ äquivalent. Diese Äquivalenz besagt, dass jede logische Form identisch ist, d.h. wohlunterschieden von jeder anderen logischen Form. Wenn zwei für dieselben Sachverhalts-/Ereignisklassen geltenden logischen Relationen auch nur eine einzige Vorkommenskombination unterschiedlich bestimmen, sind sie nicht-identisch. Jede logische Form gilt genau dann, wenn sie gilt: $\Gamma(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \Gamma(p_1, \ldots, p_n)$ und gleichbedeutend $\Gamma(p_1, \ldots, p_n) >\!< {\sim}\Gamma(p_1, \ldots, p_n)$.

3.3.1 Die Äquivalenzbeziehungen der Obversionsgesetze

Irgendein Sachverhalt/Ereignis p liegt genau dann vor, wenn p nicht nicht vorliegt; deshalb ist durch einen Funktor, der zwischen n Sachverhalts-/Ereignisklassen besteht, auch derjenige Funktor schon festgelegt, der genau dann zwischen diesen Ereignissen besteht, wenn eines, mehrere oder alle diese Sachverhalts-/Ereignisklassen „negiert" werden. Dies bedeutet, dass beispielsweise durch den Ausdruck „$p \rightarrow q$" auch eineindeutig der Funktor bestimmt ist, der genau dann zwischen p und $\sim q$, oder zwischen $\sim p$ und q oder zwischen $\sim p$ und $\sim q$ besteht, wenn $p \rightarrow q$ gilt. Es gibt ein einfaches Verfahren, um solche Äquivalenzbeziehungen zwischen beliebigen n-stelligen Relationen aufzuspüren.

Für die zweistelligen logischen Relationen habe ich – willkürlich – für die vier möglichen Vorkommenskombinationen folgende normale Reihenfolge festgelegt: Vorkommenskombination I: $p \frown q$; Vorkommenskombination II: $p \frown {\sim} q$; Vorkommenskombination III: ${\sim} p \frown q$; Vorkommenskombination IV: ${\sim} p \frown {\sim} q$. Wenn ich nun in einer Beziehung zwischen p und q eine oder beide Sachverhalts-/Ereignisklassen, etwa p negiere, sind in der Darstellung der Vorkommenskombinationen p mit ~p, und ~p mit p zu vertauschen; das Entsprechende gilt für q, wenn q negiert wird.

Wir gehen z.B. aus von der Beziehung p→ ~ q, in welcher q zu ~q verändert ist; auch die Implikation p→ ~ q hat die Normalmatrix (1011), nur ist jetzt nach Vertauschung von q und ~q die „normale Reihenfolge" der Vorkommenskombinationen verändert: Vorkommenskombination I ist p⌢~q (Vorkommenskombination II in der normalen Anordnung), Vorkommenskombination II ist jetzt p⌢q (Vorkommenskombination I in der normalen Anordnung), Vorkommenskombination III ist jetzt ~p⌢~q (Vorkommenskombination IV in der normalen Anordnung), und Vorkommenskombination IV ist jetzt ~p⌢q (Vorkommenskombination IV in der normalen Anordnung). Wenn ich nun wissen möchte, welcher Funktor genau dann zwischen p und q besteht, wenn p→~ q gilt, muss ich nur die veränderte Anordnung der Vorkommenskombinationen mitsamt ihrer jeweiligen Bestimmung als realmöglich oder nichtrealmöglich in die normale Reihenfolge bringen, also in die Reihenfolge nrm(p⌢q), rm(p⌢~q), rm(~q⌢p) und rm(~p⌢~q); ich muss also die nichtnormale Anordnung (1011) für den Funktor p→ ~ q in die normale Anordnung (0111) für den Funktor von (p,q) verändern und erhalte so die Beziehung p↑q, welche äquivalent ist mit p → ~ q; es ergibt sich somit das ereignislogische Äquivalenzgesetz – in Anlehnung an die traditionelle Logik kann von einem „Obversionsgesetz" gesprochen werden[6] –: Für alle p und q: (p → ~ q) ↔ (p↑q).

In der folgenden Tabelle sind diese Operationen für alle möglichen Obversionsgesetze zweistelliger ereignislogischer Relationen dargelegt.

Tabelle 6: Die äquivalenten Negationen der zweistelligen logischen Relationen

normale Anordnung bei p – q		(2) ~p – q	(3) p – ~q	(4) ~p – ~q
p⌢q	I	III	II	IV
p⌢~q	II	IV	I	III
~p⌢q	III	I	IV	II
~p⌢~q	IV	II	III	I

Um denjenigen Funktor von (p,q) zu finden, der genau dann gilt, wenn ein bestimmter Funktor für ~p⌢~q – zum Beispiel für ~p∨~q – gilt, muss ich in der Normalmatrix des Funktors von (~p,~q) – im Beispiel: (1110) – den Vorkommenskombination I mit IV, II mit III, III mit II und IV mit I vertauschen, wie es in der 4.Spalte der Tabelle angegeben ist; ich erhalte dann die Normalmatrix des Funktors der zwischen p und q besteht, wenn von jenem Funktor zwischen ~p und ~q ausgegangen wird – im Beispiel die Matrix (0111). Es gilt also das Gesetz: Für alle p und q: (~p∨~q) ↔ (p↑q).

Um zu einem Funktor von (~p,q) – Beispiel ~p←q – den Funktor zu finden, der für (p,q) gilt, muss ich in der Normalmatrix des Funktors von (~p, q) – im Beispiel: (1101) – den Vorkommenskombination I mit III, II mit IV, III mit I und IV mit II vertauschen, wie in der 2. Spalte der Tabelle angegeben; ich erhalte dann die Normalmatrix des Funktors der zwischen p und q besteht, wenn von jenem Funktor zwischen ~p und q ausgegangen wird – im Beispiel die Matrix (0111). Es gilt so das Gesetz: Für alle p und q: (~p←q) ↔ (p↑q). Mit der Tabelle lassen sich zu jeder beliebigen zweistelligen logischen Relation drei äquivalente Beziehungen auffinden: äquivalent sind etwa die logischen Totalformen p↑q, ~p←q, p→~q und ~p∨~q oder die Totalformen p↔q, ~p ≻≺ q, p≻≺ ~q und ~p↔~q.

Entsprechendes gilt für die einstelligen Funktoren, die logischen Modalitäten: Ist Mod(p) irgendeine einstellige Modalität, so werden durch Mod(~p) die beiden Vorkommenskombinationen vertauscht; gilt also Mod(~p), dann erhalte ich die Modalität, die bei Mod(~p) für p gilt, wenn ich die Matrix von Mod(~p) mit ihrer jeweiligen Bestimmtheit als rm oder nrm vertausche. Gilt $\mathcal{N}$(~p), gilt (10)(~p) und daher (01)(p), d.i. $\mathcal{U}$(p); gilt (01)(~p), dann gilt (10)(p); gilt (11)(~p), dann auch (11)(p). Es gibt die folgenden Äquivalenzen: Für alle p: $\mathcal{N}$(~p)↔$\mathcal{U}$(p), $\mathcal{U}$(~p)↔$\mathcal{N}$(p), $\mathcal{K}$(~p)↔$\mathcal{K}$(p), $\mathcal{P}$(~p)↔$\mathcal{C}$(p), $\mathcal{C}$(~p)↔$\mathcal{P}$(p), $\mathcal{A}$(~p)↔$\mathcal{A}$(p).

Unter Zuhilfenahme dieser Äquivalenzgesetze für einstellige Funktoren lassen sich die Obversionsgesetze für die zweistelligen logischen Relationen auch durch eine Transformation der Modalitätenmatrix bestimmen. Die Beziehung $p \vee q$ besitzt die Modalitätenmatrix ($\mathcal{K}\mathcal{N}$); die beiden Positionen bezeichnen die Vorkommensfallgesetze α und β, die eine zweistellige logische Totalform jeweils ebenso wie die Vorkommensfallgesetze γ und δ eindeutig festlegen. Will ich bei $p \vee q$ den äquivalenten Funktor von $(p, \sim q)$ bestimmen, muss ich in der Modalitätenmatrix von $p \vee q$ Mod(q) durch das äquivalente Mod($\sim$q) ersetzen und erhalte ($\mathcal{K}\mathcal{U}$) – die Modalitätenmatrix des Funktors $\mathbb{B}$; es gilt so bei $p \vee q$ auch $p \leftarrow \sim q$ und umgekehrt. Gilt $p \vee q$ und ich will die äquivalente Beziehung von $(\sim p, q)$ entscheiden, so wird q zuerst für $\sim$p und dann für p modalisiert; ich muss so die Komponenten der Matrix ($\mathcal{K}\mathcal{N}$) nur vertauschen und ich erhalte ($\mathcal{N}\mathcal{K}$), die Matrix von $\mathbb{C}$; es gilt so für alle p und q: $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$. Um bei $p \vee q$ schließlich den Funktor von $(\sim p, \sim q)$ zu bestimmen, muss ich beide Operationen hintereinander ausführen: Vertauschung der Komponenten ($\mathcal{N}\mathcal{K}$) und Ersetzung von Mod(q) durch Mod($\sim$q), also ($\mathcal{U}\mathcal{K}$), und ich erhalte für beliebige p und q das Äquivalenzgesetz: $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \uparrow \sim q)$.

Auch für die dreistelligen logischen Relationen lassen sich die Bedingungen der Obversion auf die entsprechende Weise erkennen; um beispielsweise die Relation aufzufinden, die für $(\sim p, q, r)$ genau dann gilt, wenn eine bestimmte Relation für (p, q, r) gilt, muss in der Normalmatrix der Relation von (p, q, r) jeder Vorkommenskombination bei dem p bzw. $\sim$p vorkommt, durch jene Vorkommenskombination ersetzt werden, bei dem $\sim$p bzw. p vorkommt, während sonst alles gleich ist; es muss I mit V, II mit VI, III mit VII und IV mit VIII vertauscht werden. Soll bestimmt werden, welche dreistellige logische Relation für $(p, \sim q, \sim r)$ genau dann gilt, wenn für (p, q, r) eine ganz bestimmte logische Relation gilt, dann muss in der Normalmatrix der Relation von (p, q, r) jede Vorkommenskombination, in dem q (bzw. $\sim$q) vorkommt, und wo r (bzw. $\sim$r) vorkommt, mit der Vorkommenskombination vertauscht werden, wo $\sim$q (bzw. q) und wo $\sim$r (bzw. $\sim$r) vorkommt; Vorkommenskombination I $(p \frown q \frown r)$ wird mit Vorkommenskombination IV $(p \frown \sim q \frown \sim r)$, Vorkommenskombination II $(p \frown q \frown \sim r)$ wird mit Vorkommenskombination III $(p \frown \sim q \frown r)$, Vorkommenskombination III $(p \frown \sim q \frown r)$ wird mit Vorkommenskombination II $(p \frown q \frown \sim r)$, Vorkommenskombination IV $(p \frown \sim q \frown \sim r)$ wird mit Vorkommenskombination I $(p \frown q \frown r)$, Vorkommenskombination V $(\sim p \frown q \frown r)$ wird mit Vorkommenskombination VIII $(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$, Vorkommenskombination VI $(\sim p \frown q \frown \sim r)$ wird mit Vorkommenskombination VII $(\sim p \frown \sim q \frown r)$m Vorkommenskombination VII $(\sim p \frown \sim q \frown r)$ wird mit Vorkommenskombination VI $(\sim p \frown q \frown \sim r)$, und Vorkommenskombination VIII $(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$ wird schließlich mit Vorkommenskombination V $(\sim p \frown q \frown r)$ vertauscht. In der folgenden Tabelle sind die Vertauschungen für alle möglichen Negationen angeführt.

Tabelle 7: Die äquivalenten Negationen der dreistelligen logischen Relationen

normale Anordnung bei $p \frown q \frown r$		(2) $\sim p \frown q \frown r$	(3) $p \frown \sim q \frown r$	(4) $p \frown q \frown \sim r$	(5) $\sim p \frown \sim q \frown r$	(6) $\sim p \frown q \frown \sim r$	(7) $p \frown \sim q \frown \sim r$	(8) $\sim p \frown \sim q \frown \sim r$
$p \frown q \frown r$	I	V	III	II	VII	VI	IV	VIII
$p \frown q \frown \sim r$	II	VI	IV	I	VIII	V	III	VII
$p \frown \sim q \frown r$	III	VII	I	IV	V	VIII	II	VI
$p \frown \sim q \frown \sim r$	IV	VIII	II	III	VI	VII	I	V
$\sim p \frown q \frown r$	V	I	VI	VI	III	II	VIII	IV
$\sim p \frown q \frown \sim r$	VI	II	V	V	IV	I	VII	III
$\sim p \frown \sim q \frown r$	VII	III	VIII	VIII	I	IV	VI	II
$\sim p \frown \sim q \frown \sim r$	VIII	IV	VII	VII	II	III	V	I

Aus dieser Tabelle sind für jede dreistellige logische Relation 7 verschiedene Obversionsgesetze ablesbar. Äquivalent sind etwa folgende Beziehungen: $[p, q, r\ \mathbb{A}\mathbb{X}]$, $[\sim p, q, r\ \mathbb{X}\mathbb{A}]$, $[p, \sim q, r\ \mathbb{C}\mathbb{M}]$, $[p, q, \sim r\ \mathbb{B}\mathbb{M}]$, $[\sim p, \sim q, r\ \mathbb{L}\mathbb{C}]$, $[\sim p, q, \sim r\ \mathbb{M}\mathbb{B}]$, $[p, \sim q, \sim r\ \mathbb{D}\mathbb{K}]$, $[\sim p, \sim q, \sim r\ \mathbb{K}\mathbb{L}]$. Für jede beliebige n-stellige logische Relation lassen sich mit dem skizzierten Verfahren in entsprechender Weise alle 2^n Obversionsgesetze auffinden.

Dieses Vorgehen kann auf logische Relationen beliebiger Stelligkeit ausgeweitet werden. Auch für logische Partialrelation kann das Verfahren angewandt werden: gilt beispielsweise $\Delta(p,q) \leftrightarrow \Delta'(\sim p,q)$ und $\Lambda(p,q) \leftrightarrow \Lambda'(\sim p,q)$, genau dann gilt $\Delta \Cup \Lambda(p,q) \leftrightarrow \Delta'(\sim p,q) \Cup \Lambda'(\sim p,q)$.

3.3.2 Die Äquivalenzbeziehungen der Konversionsgesetze

Durch jede zweistellige Relation ist eindeutig eine *konverse Relation* festgelegt; welche zweistellige logische Relation zwischen q und p besteht, falls eine bestimmte zweistellige logische Relation zwischen p und q gegeben ist, lässt sich wiederum durch ein allgemeines Verfahren feststellen. Werden in einer zweistelligen logischen Relation von p und q die beiden Relata vertauscht, so führt dies zu einer Veränderung der normalen Anordnung der Vorkommenskombinationen: an die erste Stelle rückt $q\frown p$, an die zweite Stelle rückt $\sim q\frown p$, an die dritte Stelle $q\frown\sim p$ und an die vierte Stelle $\sim q\frown\sim p$. In einem zweiten Schritt muss diese nicht-normale Anordnung in die normale Reihenfolge verändert werden, wobei q vor p steht: $q\frown p$, $q\frown\sim p$, $\sim q\frown p$ und $\sim q\frown\sim p$. Um so von einer zweistelligen Relation zwischen p und q zu ihrer konversen Relation zwischen q und p zu gelangen, muss ich in der Normalmatrix der Relation von p und q nur die Vorkommenskombinationen II und III vertauschen[7]. Ich erhalte dann zu jeder zweistelligen ereignislogischen Relation ihre Konverse:

$(p \top q) \leftrightarrow (q \top p)$ $\quad$ $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftarrow p)$ $\quad$ $(p \rceil q) \leftrightarrow (q \lceil p)$
$[(10\bullet 1)(p,q) \leftrightarrow (1\bullet 01)(q,p)$ $\quad$ usw.

Von allen Obversionen lassen sich die Konversen bilden, und es ergeben sich so für jede beliebige zweistellige Relation 7 äquivalente Beziehungen; gilt etwa $p\uparrow q$, genau dann gelten auch $p\vee\sim q$, $\sim p\leftarrow q$, $\sim p\rightarrow\sim q$, $q\uparrow p$, $q\rightarrow\sim p$, $\sim q\vee p$, und $\sim q\leftarrow\sim p$.

Um die Konversen einer zweistelligen ereignislogischen Relation zu bestimmen, kann ich auch in der Modalitätenmatrix das Vorkommensfallgesetz α mit γ, und das Vorkommensfallgesetz β durch δ ersetzen; zuerst wird dann p bezüglich q und dann q bezüglich p modalisiert. Der Funktor $p\rceil q$ hat die Modalitätenmatrix $(\mathcal{OKUU})$, der äquivalente Funktor von (q, p) hat dann die Matrix $(\mathcal{UUOK})$, es gilt so für alle p und q: $(p\rceil q) \leftrightarrow (q\lceil p)$.

Für drei Sachverhalts-/Ereignisklassen (p, q, r) gibt es nicht nur eine, sondern genau 5 Konversen, und zwar für jede Permutation der Elemente von (p, q, r). Durch eine dreistellige Relation von (p, q, r) sind die dreistelligen Relationen von (p, r, q), (q, p, r), (r, q, p), usw. eindeutig festgelegt. Um diese konversen Äquivalenzen zu bestimmen, kann man auf dieselbe Weise vorgehen wie bei den zweistelligen logischen Relationen; Permutation der Anordnung der drei Ereignisse, dann Herstellung der normalen Anordnung der Vorkommenskombinationen für diese neue Anordnung. Diese Operationen sind in der folgenden Tabelle für alle möglichen Permutationen von (p, q, r) dargelegt.

Tabelle 8: Die äquivalenten Inversionen der dreistelligen logischen Relationen

normale Reihenfolge bei $p\frown q\frown r$		(2) $p\frown r\frown q$	(3) $q\frown p\frown r$	(4) $q\frown r\frown p$	(5) $r\frown p\frown q$	(6) $r\frown q\frown p$
$p\frown q\frown r$	I	I	I	I	I	I
$p\frown q\frown\sim r$	II	III	II	V	III	V
$p\frown\sim q\frown r$	III	II	V	II	V	III
$p\frown\sim q\frown\sim r$	IV	IV	VI	VI	VII	VII
$\sim p\frown q\frown r$	V	V	III	III	II	II
$\sim p\frown q\frown\sim r$	VI	VII	IV	VII	IV	VI
$\sim p\frown\sim q\frown r$	VII	VI	VII	IV	VI	IV
$\sim p\frown\sim q\frown\sim r$	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII	VIII

Um etwa von der Relation (1110 0001) von (p, q, r) zur äquivalenten Relation von (r, q, p) zu gelangen, muss ich in der ersten Normalmatrix das erste Zeichen 1 bzw. 0 an seiner Stelle belassen, das 5. Zeichen an die zweite Stelle rücken, das dritte Zeichen an seiner Stelle belassen, das 7. Zeichen an die 4. Stelle, das 2. Zeichen an die 5., das 4. Zeichen an die 6., und das 4. Zeichen an die 7. Stelle bringen, das 8. Zeichen bleibt an seiner Stelle; ich erhalte so die Normalmatrix des Funktors von (r, q, p), die durch [p, q, r $\mathbb{A}\mathbb{X}$] festgelegt ist. Bei der Bestimmung der anderen Konversen geht man entsprechend vor. Äquivalent sind dann z.B. die folgenden Beziehungen:

[p, q, r $\mathbb{A}\mathbb{X}$], [p, r, q $\mathbb{A}\mathbb{X}$], [q, p, r $\mathbb{I}\mathbb{E}$], [q, r, p $\mathbb{H}\mathbb{E}$], [r, p, q $\mathbb{I}\mathbb{E}$] und [r, q, p $\mathbb{H}\mathbb{E}$] und die Beziehungen [p, q, r $\mathbb{D}\mathbb{A}$], [p, r, q $\mathbb{D}\mathbb{A}$], [q, p, r $\mathbb{D}\mathbb{A}$], [q, r, p $\mathbb{D}\mathbb{A}$], [r, p, q $\mathbb{D}\mathbb{A}$] und [r, q, p $\mathbb{D}\mathbb{A}$].

Die Konversenbildung kann wiederum mit der Bildung der Obversionen kombiniert werden. Für alle n-stelligen logischen Relationen ($n \geqslant 2$) lassen sich die entsprechenden Verfahren zur Bestimmung aller n! Konversen und aller 2^n Obversionen eindeutig entscheiden (es sind immer ganz bestimmte Permutationen der Normalmatrix des Ausgangsfunktors). Für jede n-stellige Relation gibt es so $n! \cdot 2^n$ eindeutig entscheidbare äquivalente Beziehungen.

Das Verfahren lässt sich auf logische Partialrelationen übertragen. Gilt beispielsweise $\Delta(p, q) \leftrightarrow \Delta^*(q, p)$ und $\Lambda(p, q) \leftrightarrow \Lambda^*(q, p)$, genau dann gilt $\Delta \Cup \Lambda(p, q) \leftrightarrow \Delta^* \Cup \Lambda^*(q, p)$.

3.4 Die Schemata des Schließens

Unser Wissen muss uns immer über unterschiedlichste *einzelne* Dinge und Vorgänge orientieren, denn die objektive Wirklichkeit, mit welcher es alles realitätsbezogene Denken zu tun hat, ist ein gesetzmäßiger Zusammenhang von Einzelnem. Damit das in den jeweiligen Situationen vorliegende Einzelne erkannt werden kann, muss es seiner allgemeinen Art und Gesetzmäßigkeit nach erfasst werden. Diese Bezugsetzung des Einzelnen auf das Allgemeine hin, diese Operation der Subsumtion eines einzelnen oder besonderen Falles unter ein allgemeines Gesetz und die Übertragung der allgemeinen Gesetzmäßigkeit auf den einzelnen oder besonderen Fall ist das *Schließen*.

Das Implikationsgesetz „Wenn ein Stück Zucker ins Wasser geworfen wird, löst es sich auf", macht eine zeitübergreifende Gesetzesaussage über jeden beliebigen Fall, da Zucker in Wasser geworfen wird. Der Sachverhalts-/Ereignisklasse „ein Stück Zucker wird ins Wasser geworfen" kann dann der einzelne Fall subsumiert werden, dass ich jetzt dieses Stück Zucker ins Wasser werfe; ist diese Subsumtion korrekt und das betreffende Gesetz gültig, also die beiden Prämissen wahr, dann ergibt sich aus der Übertragung der Gesetzes auf den angesprochenen Einzelfall, dass dieses Stück Zucker hier sich notwendigerweise auflöst. Wir haben zwei Sätze (die Prämissen), aus denen ein dritter Satz (der Schlusssatz oder die Konklusion) folgt: aus einer Gesetzesprämisse und aus einer Subsumtionsprämisse folgt, *wenn sie beide wahr sind*, der Schlusssatz „Dieses Stück Zucker löst sich auf"[8].

Solche schließenden Anwendungen sind für jedes (bedingungslogische) Gesetz möglich; für jede bedingungslogische Form können wir deshalb alle möglichen Schemata ihrer Anwendung – Schlussgesetze oder Schlussregeln – rekonstruieren. Diese Schlussschemata sind spezielle *logische* Implikationsgesetze: Für die bedingungslogische Form $p \rightarrow q$ lautet ein solches implikatives Schlussschema beispielsweise: **Wenn** das Vorliegen eines Ereignisses bestimmter Art p das Vorliegen eines anderen Ereignisses bestimmter Art q impliziert, und wenn in einem Einzelfall ein Ereignis der ersten Art p* vorliegt, **dann** liegt auch in diesem Einzelfall notwendig ein Ereignis der zweiten Art q* vor.

Es gibt für jeden Modalisierungsfall einer *jeden* logischen Relation ein entsprechendes Schlussschema: es kann also nicht nur auf das notwendige, es kann auch auf das unmögliche und das mögliche Vorliegen von Sachverhalten/Ereignissen geschlossen werden Die Darstellung dieser Schlussschemata dieser Schlussschemata muss unbedingt den Unterschied zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen (von denen die Bezugsgesetze handeln) und den Einzelereignissen (welche von den Subsumtionsprämissen konstatiert werden) berücksichtigen; wenn dieser Unterschied ignoriert wird, kommt es unvermeidlich zu Verwechslungen unterschiedlicher logischer Zusammenhängen.

Es muss also strikt zwischen

1. den bedingungslogischen Gesetzen,
2. den diesen entsprechenden Schlussschemata
3. und den Schlüssen nach diesen Schlussschemata

unterschieden werden. Die Implikation beispielsweise ist eine bedingungslogische Relation (Gesetzesbeziehung) zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen; sie wird in aller Regel mithilfe der Partikel *Wenn* zum Ausdruck gebracht; ein Schluss hingegen ist eine Relation zwischen Sätzen; ein Schlussschema ist wiederum eine spezielle Implikation zwischen speziellen logischen Sachverhalten.

Ein Gesetz wie $p \rightarrow q$ gilt immer für alle Dinge (Ereignis-Bezugsysteme) von bestimmter Art und diesem Gesetz kann ich den einzelnen Fall subsumieren, dass ein einer der beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen p oder q angehörendes Ereignis aktuell vorliegt oder nicht vorliegt. Den einzelnen, aktuellen und an eine Raum- und Zeitstelle gebundenen Fall, dass ein Ereignis p vorliegt bzw. nicht vorliegt, bezeichne ich mit „p*" bzw. mit „~p*". Gilt die Implikation $p \rightarrow q$ und ist p* gegeben, so weiß ich aufgrund des Modalisierungsfalles α der logischen Form $\mathbb{C}$, dass im gegebenen aktuellen Fall das Eintreten eines Ereignisses q* notwendig ist: $\mathcal{N}$(q*). Gilt $p \rightarrow q$ und ist ~p* aktuell gegeben, so weiß ich aufgrund des Modalisierungsfalles β der logischen Form $\mathbb{C}$, dass ein Auftreten von q* möglich ist: $\mathcal{K}$(q*). Entsprechend folgt bei $p \rightarrow q$ und q*: $\mathcal{K}$(p*). Bei $p \rightarrow q$ und ~q* folgt $\mathcal{U}$(p*).

Jeder Schluss ist eine solche Anwendung von allgemeinen bedingungslogischen Gesetzen auf aktuell vorliegende einzelne Ereignisse gemäß eines zum bedingungslogischen Gesetz gehörenden Schlussschemas; jeder Schluss ist damit eine bestimmte Relation zwischen einer *Gesetzesprämisse*, dem bedingungslogischen Gesetz selbst als dem *Bezugsgesetz* des Schlusses, einer feststellenden *Subsumtionsprämisse*, die das aktuelle Vorliegen eines oder mehrerer der Ereignisse konstatiert, von denen das Bezugsgesetz in allgemeiner Weise handelt[9], und der *Konklusion*, die das Ergebnis der Übertragung der allgemeinen Gesetzmäßigkeit auf den subsumierten Einzel- oder Besonderfall ist.

Aus genau jedem Modalisierungsfall, aus dem sich eine n-stellige logische Totalform zusammensetzt, lässt sich ein Schlussschema gewinnen, sofern eine Vorkommenskombinationgesetz nicht durch *O* bestimmt ist. Entsprechend den vier Modalisierungsfällen von zweistelligen logischen Relationen unterscheide ich bei zweistelligen logischen Relationen die Schlussschemata α, β, γ und δ. Das Schlussschema α mit einer Gesetzesprämisse $p \rightarrow q$ bezeichne ich mit dem Ausdruck „$\mathbb{C}/\alpha$", das Schlussschema β mit der Gesetzesprämisse $p \rtimes q$ bezeichne ich mit dem Ausdruck „$\mathbb{J}/\beta$", usw. Hier einige Beispiele solcher allgemeiner Schemata von Vorkommensfallschlüssen:

Schlussschema	$\mathbb{C}/\alpha$	$\mathbb{A}/\alpha$	$\mathbb{D}/\beta$	$\mathbb{A}/\gamma$	$\mathbb{J}/\gamma$	$\mathbb{C}/\delta$	$\mathbb{D}/\delta$
Gesetzesprämisse	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \uparrow q$	$p \vee q$	$p \rtimes q$	$p \rightarrow q$	$p \uparrow q$
Subsumtionsprämisse	p*	p*	~p*	q*	q*	~q*	~q*
Konklusion	$\mathcal{N}$(q*)	$\mathcal{K}$(q*)	$\mathcal{K}$(q*)	$\mathcal{K}$(p*)	$\mathcal{U}$(p*)	$\mathcal{U}$(p*)	$\mathcal{K}$(p*)

Solche Schemata der Anwendung allgemeiner bedingungslogischer Gesetze auf einen einzelnen Fall bestehen natürlich auch für logische Relationen, die keine Totalformen sind; es gilt etwa:

Schlussschema	**(•110)/α**	**(•110)/β**	**(11•0)/γ**	**(•110)/δ**
Gesetzesprämisse	(•110)(p,q)	(•110)(p,q)	(11•0)(p,q)	(•110)(p,q)
Subsumtionsprämisse	p*	~p*	q*	~q*
Konklusion	~$\mathcal{N}$(q*) ≡ $\mathcal{C}$(q*)	$\mathcal{N}$(q*)	~$\mathcal{U}$(p*) ≡ $\mathcal{P}$(p*)	$\mathcal{N}$(p*)

Auch für drei- und mehrstellige Relationen gibt es derartige Vorkommensfallschlüsse; sie können direkt aus den Modalitätenmatrizen abgelesen werden. Für die Gesetzesprämisse [p, q, r $\mathbb{CX}$] gibt es etwa folgende Schlussschemata:

Gesetzesprämisse	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$][10]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]
Subsumtionsprämisse	q*	r*	~r*	p*	~p*
Konklusion	$\mathcal{N}$(q*), $\mathcal{N}$(r*)	$\mathcal{N}$(p*), $\mathcal{K}$(q*)	$\mathcal{U}$(q*), $\mathcal{K}$(p*)	$\mathcal{K}$(q*), $\mathcal{K}$(r*)	$\mathcal{U}$(q*), $\mathcal{U}$(r*)

oder

Gesetzesprämisse	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]	[p,q,r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]
Subsumtionsprämisse	p*, q*	p*, ~q*	~p*, ~q*	p*, r*	~q*, r*
Konklusion	$\mathcal{N}$(r*)	$\mathcal{K}$(r*)	$\mathcal{U}$(r*)	$\mathcal{K}$(q*)	$\mathcal{N}$(p*)

usw.

Es gibt infinit viele logische Relationen, die sich aus verschiedenen Modalisierungsfällen entsprechend infinit viele Schlussschemata.

3.4.1. Logische Gesetze – Schlussschemata – Schlüsse

Jeder Schluss ist eine Beziehung zwischen Sätzen, die folgende Struktur aufweist: einer Gesetzesaussage, der *Gesetzesprämisse* (P_G) oder dem *Bezugsgesetz* des Schlusses wird in einer geeigneten Feststellungsaussage, der *Subsumtionsprämisse* (P_S), ein bestimmter einzelner oder besonderer Fall subsumiert, und auf diesen Einzel- oder Besonderfall wird in der *Konklusion* (K), dem *Schlusssatz* die Gesetzmäßigkeit übertragen; diese Subsumtion unter das Gesetz wird stets nach einem bestimmten *Schlussschema*, einem speziellen implikativen logischen Gesetz SS_G vorgenommen, das die Bedeutung jener logischen Form expliziert, der die von P_G behauptete Gesetzmäßigkeit angehört. Die Gesetzesprämisse und Subsumtionsprämisse kann jeweils auch aus mehreren in der Regel durch Konjunktion verbundenen Gesetzesaussagen bzw. Feststellungen bestehen. Die allgemeine Form der Folgerungs- oder Schlussrelation ist vierstellig und lautet: ***Aus*** P_G ***und*** P_S ***folgt gemäß*** SS_G ***notwendig (***$\mathcal{N}$***) die Konklusion*** *K*. Die Quelle der *Schlussnotwendigkeit*[11], d.h. die zwingende Geltung (Unmöglichkeit der Nichtgeltung) der Konklusion bei Wahrheit der beiden Prämissen, ist dabei das implikative Schlussschema. Die Schlussnotwendigkeit (d.h. die apodiktische Geltung der Konklusion) besteht nicht darin, dass auf das notwendige Vorliegen eines Ereignisses geschlossen wird, denn es gibt ja auch ein Schließen auf die Möglichkeit (etwa nach dem Schlussschema $\mathbb{C}/\beta$ oder $\mathbb{A}/\alpha$). Es wird auch deutlich, dass die Folgerungsrelation (im Gegensatz zur Implikation) nicht verkettbar, also nicht transitiv ist, denn eine Aussage über Einzelnes oder Besonderes, die Konklusion eines Schlusses, kann ja nicht zugleich Gesetzesprämisse und Subsumtionsprämisse eines Schlusses sein.

Während ein *Schluss* eine derart strukturierte Relation von Aussagen ist, ist ein *Gesetz* eine bedingungslogische Beziehung zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen, und ein *logisches Gesetz* ist eine bedingungslogische Beziehung zwischen logischen Sachverhaltsklassen (in der Regel zwischen logischen Formen). Aus der unzureichenden Unterscheidung von Aussagen und Sachverhalts-/Ereignisklassen resultieren deshalb bereits in der traditionellen, vorlogistischen Logik unvermeidlich umfassende Verwechslungen von Gesetzen, logischen Gesetzen, Schlüssen und Schlussschemata.

Konkrete, gegenständliche[12] **Implikationsgesetze:**

- Wenn ein durch einen Metallstab Strom geleitet wird, erwärmt er sich.
- Wenn sich ein Metallstab erwärmt, dehnt er sich aus.

Diese Implikationen sind Relationen, die zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen bestehen: die Ausdrücke „Durch irgendein Stück Draht wird Strom geleitet“, „Ein Stück Draht erwärmt sich“, „Ein Stück Draht dehnt sich aus“ sind keine Sätze, die Aussagen ausdrücken, sondern Sachverhaltsausdrücke, die Ereignisse bestimmter Art benennen und weder wahr noch falsch sind.

Logisches Gesetz ℂℂℂ:

- $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
- $[(Sx \to Mx) \wedge (Mx \to Px)] \to (Sx \to Px)$[13]

Hier liegt eine Relation zwischen logischen Sachverhaltsklassen vor; die Ausdrücke „$p \to q$“ „$q \to r$“ sind keine Aussagen, sondern benennen die logischen Sachverhalte, dass zwischen irgendeiner ersten Sachverhalts-/Ereignisklasse p und einer zweiten Sachverhalts-/Ereignisklasse q, zwischen dieser zweiten Sachverhalts-/Ereignisklasse q und einer dritten Sachverhalts-/Ereignisklasse r die Beziehung der Implikation besteht.

Schlussschema: ℂ/α:

$p \to q$
p^*
——
$\mathcal{N}(q^*)$

Auch hier liegt ein logisches Gesetz als eine Beziehung von logischen Sachverhaltsklassen vor, den Sachverhalten, dass zwischen irgendwelchen Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q die Beziehung der Implikation gilt, dass ein einzelner/s Sachverhalt/Ereignis p*, das der Sachverhalts-/Ereignisklasse p angehört, das notwendig ein der Sachverhalts-/Ereignisklasse q angehörender/s Sachverhalt/Ereignis vorliegt.

Diese drei Sachverhalten wird eine bedingungslogische Gesetzesrelation zugesprochen, das Schlussschema ℂ/α ist kein Schluss, sondern eine logische Gesetzesaussagen. Mit Schlüssen haben wir es erst dann zu tun, wenn solchen Gesetzen geeignete Einzelfälle subsumiert werden. Ist die Gesetzesprämisse gegenständlich, dann haben wir **„konkrete“, gegenständliche Schlüsse**, beispielsweise:

1)
Aus der Gesetzesprämisse: Wenn ein durch einen Metallstab Strom geleitet wird, erwärmt er sich
und der Subsumtionsprämisse: Durch dieses Stück Draht wird hier und jetzt Strom geleitet
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas ℂ/α[14]: Notwendigerweise ($\mathcal{N}$) erwärmt sich dieses Stück Draht.

2)
Aus der Gesetzesprämisse: Wenn ein durch ein Stück Draht Strom geleitet wird, erwärmt es sich.
und der Subsumtionsprämisse: Dieses Stück Draht erwärmt sich
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas ℂ/γ: Möglicherweise ($\mathcal{K}$) wird durch dieses Stück Draht Strom geleitet.

3)
Aus der Gesetzesprämisse: Wenn ein durch ein Stück Draht Strom geleitet wird, erwärmt es sich.
und der Subsumtionsprämisse: Dieses Stück Draht erwärmt sich nicht
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas ℂ/δ: Unmöglich ($\mathcal{U}$) wird durch dieses Stück Draht Strom geleitet.

Ist die Gesetzesprämisse ein logisches Gesetz, können wir von einem **logischen Schluss** sprechen, z.B. :

1)
Aus der logischen Gesetzesprämisse: $[(Sx \to Mx) \wedge (Mx \to Px)] \to (Sx \to Px)$

und der Subsumtionsprämisse: Mit den Gesetzen *Alle Antilopen sind Säugetiere* und *Alle Säugetiere sind Wirbeltiere* liegen logische Beziehungen der Art $(Sx \to Mx)$ und $(Mx \to Px)$ vor

folgt notwendig gemäß des Schlussschemas $\mathbb{C}/\alpha$:	Notwendig ($\mathcal{N}$) gilt das Gesetz *Alle Antilopen sind Wirbeltiere* – ein Gesetz der Form $Sx \rightarrow Px$

2)

Aus der logischen Gesetzesprämisse:	$[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
und der Subsumtionsprämisse:	Mit den Gesetz *Wenn ein Mensch Lungenentzündung hat, hat er Fieber* liegt eine bedingungslogische Gesetzesbeziehung der Form $p \rightarrow q$ vor
folgt notwendig gemäß des Schlussschemas $\mathbb{C}/\alpha$:	Notwendig ($\mathcal{N}$) gilt das Gesetz *Wenn ein Mensch kein Fieber hat, hat er keine Lungenentzündung* – ein Gesetz der Form $\sim q \rightarrow \sim p$

3.4.2. Schließen in der traditionellen Logik

In der traditionellen (vorlogistischen) Logik werden die logischen Gesetze, Schlussschemata und Schlüsse nicht strikt und eindeutig voneinander abgegrenzt; es konnte deshalb kein exakter Begriff des Schließens entwickelt werden. Logische Gesetze werden vielfach als Schlüsse missdeutet; so werden insbesondere Obversions-, Konversions- und Kontrapositions*gesetze* als „*unmittelbare Schlüsse*" verkannt; bestimmte logische Verkettungs*gesetze* werden als „mittelbare *Schlüsse*" missdeutet. Auch Schlussschemata, die etwa als *Modus ponendo ponens*, *Modus tollendo ponens*, usw. oder als diverse „*Dilemmata*" mehr oder weniger korrekt dargestellt werden, gelten als „mittelbare Schlüsse". Diese Verwechslungen resultieren vor allem daraus, dass logische Sachverhaltsausdrücke wie $SaP \equiv (Sx \rightarrow Px)$, die eine bestimmte logische Form benennen, als Sätze, d.h. als Ausdrücke wahrheitswertdefiniter Urteile (Aussagen) missverstanden werden.

3.4.2.1. Verwechslung von Schlüssen mit logischen Gesetzen

Die Unterscheidung „unmittelbarer" und „mittelbarer Schlüsse" wurde in der Logik des 17. Jahrhunderts entwickelt und insbesondere durch **Kant** propagiert[15]. Ein „unmittelbarer Schluss" soll dabei ein Schluss von einer einzigen Prämisse auf die Konklusion sein[16]. Die Behauptung angeblicher „unmittelbarer Schlüsse", welche der von mir vertretenen These, dass *jeder* Schluss neben einer Gesetzesprämisse stets auch eine Subsumtionsprämisse aufweist, widerspricht, ist falsch – die „unmittelbaren Schlüsse" erweisen sich durchweg als elementare logische Gesetze. Es handelt sich dabei insbesondere um die elementaren logischen Gesetze, die im so genannten „**logischen Quadrat**" dargestellt sind (logische Beziehungen der Subalternation, der Kontradiktion, der Kontrarietät, der Subkontrarietät); das „logische Quadrat" stellt keine Schlüsse dar, sondern die logischen Beziehungen, die zwischen den vier logischen Relationen $SaP \equiv (Sx \rightarrow Px)$, $SeP \equiv (Sx \uparrow Px)$, $SiP \equiv (1 \bullet\bullet 1)(Sx, Px)$ und $SoP \equiv (\bullet 1 \bullet 1)(Sx, Px)$, deren logische Beziehungen und Verkettungen den Gegenstand der traditionellen assertorischen Syllogistik bilden[17].

Die Ausdrücke „$SaP \rightarrow SiP$", „$SeP \rightarrow SoP$" bezeichnen ebenso wenig Schlüsse[18], wie die Ausdrücke „$SeP \uparrow SaP$" und „$SeP \rtimes\!\!\ltimes SiP$"[19], oder der Ausdruck des Kontrapositionsgesetzes $(SaP \leftrightarrow \sim Pa \sim S)$[20] und der Ausdruck eines Konversionsgesetzes wie $(SeP) \leftrightarrow (PeS)$; die Ausdrücke „SaP", „SeP" usw. bezeichnen ja keine Urteile, sondern logische Sachverhalte bestimmter Art, die nicht durch die Folgerungsrelation verbunden sind, sondern durch logische Relationen. Diese logischen Gesetze können freilich Bezugsgesetz eines Schlusses sein, z.B.:

Aus der logischen Gesetzesprämisse	$SaP \rtimes\!\!\ltimes SoP$
und der Subsumtionsprämisse	Das wahre Gesetzesurteil „Einige Griechen sind keine Philosophen" hat die logische Form SoP
folgt nach den Schlussschema $\mathbb{J}/\gamma$	Es ist unmöglich, dass das Gesetzesurteil „alle Griechen sind Philosophen" wahr ist

Diese Schlüsse weisen wie alle Schlüsse zumindest zwei Prämissen auf – eine Gesetzesprämisse (der angebliche unmittelbare „Schluss") und eine Subsumtionsprämisse.

Vielfach werden die eindeutigen Verkettungen der Syllogismusrelationen SaP, SeP, SiP und SoP als „mittelbare" *Schlüsse* missdeutet, etwa das logische Verkettungsgesetz: $(SaM)\wedge(MaP) \rightarrow (SaP)$ – der „syllogistische Modus" *Barbara*; hier solle aus den beiden „Prämissen" (SaM) und (MaP) die „Konklusion " (SaP) folgen; die die Ausdrücke „SaM", „MaP", „SaP" und „SaM $\wedge$ MaP" bezeichnen jedoch keine Urteile, sondern logische Sachverhalte. Diese syllogistischen Verkettungsgesetze können wiederum Gesetzesprämisse eines logischen Schlusses sein. Aus dem syllogistischen Verkettungsgesetz $(SaM)\wedge(MaP) \rightarrow (SaP)$ und den Subsumtionsprämissen *Alle Antilopen sind Säugetiere* und *Alle Säugetiere sind Wirbeltiere* folgt nach den Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$, dass notwendig gilt: *Alle Antilopen sind Wirbeltiere*[21].

3.4.2.2. Verwechslung von Schlüssen und Schlussschemata

Als „mittelbare Schlüsse" werden neben den syllogistischen Modi, die jedoch Verkettungsgesetze, d.h. spezielle logische Gesetze und keine Schlüsse sind, auch der „hypothetische Syllogismen" wie der so genannte „modus (ponendo) ponens" und der „modus (tollendo) tollens", „disjunktive Syllogismen" und verschiedene Arten von so genannten „Dilemmata" aufgeführt. Auch hier haben wir es nicht mit Schlüssen zu tun, sondern in der Regel mit Schlussschemata; diese werden generell inkorrekt dargestellt: das für jeden Schluss wesentliche Verhältnis zwischen dem Allgemeinen (dem Bezugsgesetz) und dem Besonderen/Einzelnen (der Subsumtionsprämisse) erscheint nicht in der Darstellung der Schlussschemata.

Der *Modus ponendo ponens* wird beispielsweise durch den Ausdruck „Wenn A, dann B, nun A; also B" oder einen entsprechenden Ausdruck dargestellt[22]. Der Ausdruck „Wenn A, dann B" ist in der traditionellen Logik durchweg zweideutig; mit diesem Ausdruck wird gleichermaßen die logische Beziehung der Implikation bezeichnet wie auch das so genannte problematische Konditional, dessen Struktur ich im nächsten Kapitel darstellen werde. Falls mit „Wenn A, dann B" die Implikation gemeint ist, sind A und B Bezeichnungen beliebiger, auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogene Sachverhalts-/Ereignisklassen; der Teilausdruck „nun A" ergibt im diesem Falle nur dann einen Sinn, wenn das Vorliegen eines *einzelnen* Sachverhalts/Ereignisses, das zur Sachverhalts-/Ereignisklasse A gehört; das „also B" kann nur bedeuten, dass ein zur Sachverhalts-/Ereignisklasse B gehörender/s Einzelsachverhalt/-ereignis vorliegt. Wir haben dann das Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$: wenn p, dann q, nun p*; also q*; der Unterschied von der Sachverhalts-/Ereignisklasse p bzw. q und den einzelnen Sachverhalt/Ereignis p* bzw. q* muss einen expliziten Ausdruck erhalten. Ebenso bezeichnet, falls mit „Wenn A, dann B" die Implikation gemeint ist, der „modus (tollendo) tollens" „Wenn A, dann B; nun nicht B, also nicht A" das Schlussschema $\mathbb{C}/\delta$, wobei wiederum der Unterschied der Sachverhalts-/Ereignisklassen mit den ihnen zu subsumierenden Einzelsachverhalten/Einzelereignissen kenntlich gemacht werden müsste.

Dass als *modus ponens/tollens* oft die Schlussschemata $\mathbb{C}/\alpha$ und $\mathbb{C}/\delta$ gemeint sind, geht eindeutig aus den Verbeispielungen dieser Schlussschemata hervor. **Kondakow** führt für den *modus ponens* die Beispiele „Wenn man ein Geweht abschießt, knallt es." {allgemeine Gesetzesprämisse} „Ein Geweht wurde abgeschossen." {Subsumtionsprämisse, die ein Einzelereignis betrifft} „Also: es hat geknallt." {Konklusion, die ein Einzelereignis betrifft} (**Kondakow**, Wörterbuch der Logik, S. 354). Beispiel eines *modus tollens* ($\mathbb{C}/\delta$) ist: „Wenn ein Flugzeug mit mehr als 1288 km/h fliegt, hat es die Schallmauer durchbrochen" {Gesetzesprämisse}. „Dieses Flugzeug hat die Schallmauer nicht durchbrochen." {feststellende Subsumtionsprämisse} Also: „Dieses Flugzeug fliegt nicht mehr als 1288 km/h."[23]

Für die so genannten „disjunktiven Syllogismen" gilt dasselbe. Disjunktive „Syllogismen/Schlüsse" sollen durch die Ausdrücke „p oder q, nun nicht p, also q", „p oder q, nun nicht q, also p" (*modi tollendo ponens*) bzw. bei ausschließendem *entweder-oder* „Entweder p oder q, nun p, also nicht q", „Entweder p oder q, nun q, also nicht p" (*modi ponendo tollens*), und „Entweder p oder q, nun nicht p, also q", „Entweder p oder q, nun nicht q, also p" (*modi tollendo ponens*) zum Ausdruck gebracht werden[24]. Bezeichnen die Teilausdrücke „(Entweder) p oder q" die bedingungslogischen Totalformen $p\vee q$ bzw. $p \rtimes\!\!\ltimes q$, dann können die Teilausdrücke „nun (nicht) p" bzw. „nun (nicht) q" nur das aktuelle (Nicht-)Vorliegen von Einzelereignissen p* und q* konstatieren; wir haben es nicht mit Schlüssen, sondern mit den Schlussschemata $\mathbb{A}/\beta$, $\mathbb{A}/\delta$ bzw. $\uparrow/\alpha$, $\uparrow/\beta$, $\uparrow/\gamma$ und $\uparrow/\delta$ zu tun. Dass diese Schemata gemeint sind, zeigt das Beispiel **Kodakow**s für einen Schluss nach dem Schlussschema $\uparrow/\delta$: „Gesellschaften sind entweder Klassengesellschaften oder klassenlose Gesellschaften" (Gesetzesprämisse); „diese Gesellschaft ist keine klassenlose Gesellschaft" (Subsumtionsprämisse), also: „diese Gesellschaft ist eine Klassengesellschaft"[25].

Auch die Strukturen, die in der traditionellen Logik unter dem Namen *Dilemma* dargelegt werden, können nur dann richtig erfasst werden, wenn strikt zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen und den unter diese zu subsumierenden Einzelereignissen unterschieden wird. Ein so genanntes „*einfaches konstruktives Dilemma*“ wird folgendermaßen formuliert: „Wenn p, so r. Wenn q, so r. p oder q. Folglich r.“[26] Unter der Voraussetzung, dass „Wenn p, so r“ und „Wenn q, so r“ Implikationen bedeuten, hängt die Bedeutung des gesamten Ausdrucks davon ab, ob der Teilausdruck „p oder q“ die Geltung einer bedingungslogischen $\mathbb{A}$-Beziehung zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q behauptet, oder die Feststellung, dass in einem gegebenen Einzelfall von den Einzelereignissen p* und q* zumindest eines vorliegt. In der kondakowschen Darstellung (eigentlich in allen Darstellungen dieser Zusammenhänge in der traditionellen wie „modernen“ Logik) wird die Beziehung zwischen dem Einzelnen/Besonderen und dem Allgemeinen unterschlagen; diese Beziehung ist aber wesentlich, denn auf ihr beruht die Notwendigkeit, die jedem Schließen eignet. Bedeuten „p oder q“, dass von den Einzelsachverhalten/-ereignissen im gegebenen Falle zumindest eines vorliegt, haben wir es mit folgendem Schlussschema zu tun:

Gesetzesprämissen:	$p \rightarrow r;\ q \rightarrow r$
Subsumtionsprämisse:	von p* und q* liegt mindestens eines vor
Konklusion:	$\mathcal{N}(r^*)$

Die Gültigkeit des Schlussschemas ergibt sich aus der Gültigkeit von $\mathbb{C}/\alpha$. Die Formen $p \rightarrow r$ und $q \rightarrow r$ müssen verträglich sein[27].

Wenn jedoch der Teilausdruck „A oder B“ im Ausdruck „Wenn A, so C. Wenn B, so C. A oder B. Folglich C“ die Geltung der logischen $\mathbb{A}$-Beziehung zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklasse*n* A und B behauptet, resultiert ein Widerspruch, denn die drei Relationen $p \rightarrow r$; $q \rightarrow r$ und $p \vee q$ sind unverträglich; die logischen Formen $p \rightarrow r$ und $q \rightarrow r$ legen die Normalmatrix der Relation von (p, q, r) in der folgenden Weise fest:

bei $p \rightarrow r$ gilt:	bei $q \rightarrow r$ gilt:
1. $rm\,(p \frown r)$, also $rm(p \frown q \frown r) \vee rm(p \frown \sim q \frown r)$	5. $rm\,(q \frown r)$, also $rm(p \frown q \frown r) \vee rm(\sim p \frown q \frown r)$
2. $nrm(p \frown \sim r)$, also $nrm(p \frown q \frown \sim r)\ \&\ \vee nrm(p \frown \sim q \sim r)$	6. $nrm(q \frown \sim r)$, also $nrm(p \frown q \frown \sim r)\ \&\ nrm(\sim p \frown q \frown \sim r)$
3. $rm(\sim p \frown r)$, also $rm(\sim p \frown q \frown r) \vee rm(\sim p \frown \sim q \frown r)$	7. $rm(\sim q \frown r)$, also $rm(p \frown \sim q \frown r) \vee rm(\sim p \sim q \frown r)$;
4. $rm(\sim p \frown \sim r)$, also $rm(\sim p \frown q \frown \sim r) \vee rm(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$	8. $rm(\sim q \frown \sim r)$, also $rm(p \frown \sim q \frown \sim r) \vee rm(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$; **VIII=1**

Weil bei Geltung von $p \rightarrow r$ und $q \rightarrow r$ bestimmt ist, dass $rm(\sim p \frown \sim q \frown \sim r)$ gilt, gilt auch $rm(\sim p \frown \sim q)$, und deshalb kann zugleich nicht auch die Alternation $p \vee q$ gelten; für die Beziehung von (p, q) ergeben sich nur die Möglichkeiten: $p \top q$, $p \uparrow q$, $p \rightarrow q$, und $p \leftarrow q$. Das „einfache konstruktive Dilemma“ „Wenn p, dann r; wenn q dann r; (entweder) p oder q“ ist nicht korrekt, wenn der Ausdruck „p oder q“ eine bedingungslogische Alternationsbeziehung bezeichnet; was nun tatsächlich gemeint ist, geht aus den üblichen Darstellungen nicht hervor – diese Darstellung sind deshalb durchweg irreführend. Der Ausdruck „p oder q“ kann nur bedeuten, dass in einem Einzelfalle von den Einzelereignissen p* und q* zumindest eines vorliegt. Als Konklusion ergibt sich dann, dass notwendigerweise r* vorliegt.

Der Ausdruck „Wenn A, so B; wenn C, so D; A oder C: folglich B oder D“ soll das *zusammengesetzte konstruktive Dilemma* ausdrücken[28]. Aus dem Wortlaut geht gar nicht hervor, ob das Verkettungsgesetz

$$\text{Für alle } p, q, r, s\text{: } [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$$

oder das Schlussschema:

Gesetzesprämissen:	$p \rightarrow q,\ r \rightarrow s$
Subsumtionsprämisse:	von p^* und r^* zumindest eines
Konklusion:	$\mathcal{N}$(von q^* und s^* zumindest eines)

gemeint ist.

1) Überprüfen wir, ob das Verkettungsgesetz „*Für alle* p, q, r, s: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$“ gültig ist: Wie ist die logische Relation von (p, q, r, s)[29] durch die logischen Totalformen $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)$ festgelegt und sind diese drei Formen überhaupt verträglich? Wenn dies der Fall ist, gilt dann bei $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)$ notwendig auch $(q \vee s)$?

bei $(p \rightarrow q)$ gilt:	bei $r \rightarrow s$ gilt:	bei $p \vee r$ gilt:
1. rm($p \neg q$), also: rm($I \vee II \vee III \vee IV$)	5. rm($r \neg s$), also rm($I \vee V \vee IX \vee XIII$))	9. rm($p \neg r$), also rm($I \vee II \vee V \vee VI$)
2. nrm($p \frown {\sim} q$), also nrm(V&VI&VII&VIII))	6. nrm($r \frown {\sim} s$), also nrm(II&VI&X&XIV)	10. rm($p \frown {\sim} r$), also rm($III \vee IV \vee VII \vee VIII$)
3. rm(${\sim} p \neg q$), also rm($IX \vee X \vee XI \vee XII$))	7. rm(${\sim} r \neg s$), also rm($III \vee VII \vee XI \vee XV$)	11. rm(${\sim} p \neg r$), also rm($IX \vee X \vee XIII \vee XIV$)
4. rm(${\sim} p \frown {\sim} q$), also rm($XIII \vee XIV \vee XV \vee XVI$)	8. rm(${\sim} r \frown {\sim} s$), also rm($IV \vee VIII \vee XII \vee XVI$)	12. nrm(${\sim} p \frown {\sim} r$), also nrm(XI&XII&XV&XVI)

Die drei Totalformen erweisen sich als verträglich; die 12 Bedingungen legen die Normalmatrix der vierstelligen logischen Totalform von (p, q, r, s) vollständig fest; es gilt das Äquivalenzgesetz :

Für alle p, q, r, s: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \leftrightarrow [p, q, r, s\ \mathbb{C}\mathbb{O}\mathbb{K}\mathbb{K}]$.

Aus der Normalmatrix dieser vierstelligen logischen Totalform lassen sich folgende Beziehungen ablesen:

$p \vee s$; $q \vee r$; $q \vee s$. Es gilt also das logische Verkettungsgesetz:

Für alle p, q, r, s: $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow [(p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)]$,

damit auch das Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$

Nicht nur die Schlussschemata $\mathbb{C}/\alpha$ und $\mathbb{C}/\delta$ werden als „hypothetische Syllogismen“ angesehen, auch das logische Verkettungsgesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ wird „hypothetischer Syllogismus“ genannt[30]. Es fehlt in der traditionellen Logik jedoch nicht nur eine klare und durchgehende Unterscheidung von logischen Gesetzen, Schlussschemata und Schlüssen, die unterschiedlichen Sachverhalte werden zusätzlich auch ungenügend von der Struktur der problematischen Konditionale und verwandter Formen abgegrenzt. Eine Untersuchung dieser Formen soll im nächsten Kapitel vorgenommen werden.

Anmerkungen zu Teil I, Kapitel 3

1 Dieses Verfahren wurde in seiner vollen Allgemeinheit von Hannes Predan entdeckt.

2 Ist M eine Menge, dann ist ∁M ist das Komplement der Menge M im Bezugsbereich der Menge M. Im vorliegenden Fall ist der Bezugsbereich immer die Gesamtheit *aller* nichtleeren logischen Totalformen von der Stelligkeit $|M_{\Delta} \cup M_{\Lambda}|$. Der Ausdruck „|N|“ bezeichnet die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge N.

3 Ein Sonderfall, weil bei $(O_1 \wedge O_2) \rightarrow (U)$ nicht beliebige Sachverhalts-/Ereignisklassen, sondern logische Relationen, d.h. spezielle Sachverhaltsklassen verkettet sind.

4 Da das Zeichen „$\vee$“ nach Festlegung eine zweistellige logische Totalform bezeichnet, sei zusätzlich festgesetzt, dass „$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n$“ bedeuten soll, dass von den Ereignissen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ zumindest eines vorliegt.

5 Vgl. zu diesen Äquivalenzen den unten stehenden Abschnitt zu den Konversionsgesetzen.

6 Vgl. **A. Menne**: Obversion, HWP 6, Sp.1089f

7 Denn die Vorkommenskombinationen I ($q\frown p$) und IV ($\sim q\frown\sim p$) der nicht-normalen Anordnung sind identisch mit den Vorkommenskombinationen I ($p\frown q$) und IV ($\sim p\sim\sim q$) der normalen Anordnung, wohingegen die Vorkommenskombinationen II ($q\frown\sim p$) bzw. III ($\sim q\frown p$) der nicht-normalen Anordnung den Vorkommenskombinationen III ($\sim p\frown q$) bzw. II ($p\frown\sim q$) entsprechen.

8 Auch für andere bedingungslogische Gesetzmäßigkeiten gibt es solche Schlüsse: Aus dem $\mathbb{A}$-Gesetz „Ein Auto hat Trommel- oder Scheibenbremsen oder beides“ (Gesetzesprämisse) und der Feststellung „Das Auto von Hans hat keine Trommelbremsen“ (Subsumtionsprämisse) folgt die Aussage „Das Auto von Hans hat (notwendigerweise) Scheibenbremsen“.

Dies sind Beispiele von Schlüssen, die in einer Subsumtion eines *Einzel*falles unter ein Gesetz bestehen; die Subsumtionsprämisse konstatiert das Vorliegen eines Sachverhalts/Ereignisses an einer bestimmten Raum- und Zeitstelle. Es gibt dann noch Schlüsse, die in der Subsumtion von *Besonder*fällen unter ein Gesetz bestehen: die Konklusion besteht dann in einem zeitübergreifenden Gesetz:

Beispiel einer Subsumtion eines Besonderfalles unter ein Gesetz:

> Wenn ein Metallstab erhitzt wird, dehnt er sich aus.
> Wenn etwas ein Eisenstab ist, dann ist es ein Metallstab
> $\therefore$ Wenn ein Eisenstab erhitzt wird, dehnt er sich aus.

9 Die Gültigkeit der Subsumtionsprämisse ergibt sich selbst wieder aus einem *Schluss des Dass*, aus dem hervorgeht, dass ich es im aktuellen Fall genau mit einem Ding oder Zustand derjenigen Art zu tun habe, über die das Bezugsgesetz eine allgemeine Gesetzesaussage macht; die Subsumtionsprämisse resultiert so aus der Subsumtion des gegebenen Vorliegenden unter ein Gesetz, das die Bedingungen dafür angibt, dass Derartiges vorliegt.

10 Gilt $[p, q, r\ \mathbb{C}\mathbb{X}]$, dann gelten $(p \leftarrow q)$, $(p \leftarrow r)$ und $(q \rightarrow r)$.

11 „Jede gültige Schlussregel scheint nicht nur einen gerechtfertigten Übergang von Prämissen zur Conclusio zu erlauben, sondern eine gewisse Notwendigkeit bei sich zu führen: Wenn dies, das und das gilt, dann muss dies oder jenes der Fall sein.“ (**PATZIG**, G.: Schluss, HPG 5, 1253)

12 Das Attribut „gegenständlich“ soll besagen, dass die Sachverhalte/Ereignisse, deren Gesetzmäßigkeit bestimmt wird, der gegenständlichen Lebenswirklichkeit angehören; ihre Kenntnis resultiert aus dem praktischen Umgang mit den Gegenständen der Lebenswelt; es sind keine logischen Sachverhalte, deren Kenntnis in der logisch verallgemeinernden Reflexion von gegenständlichem Wissen gewonnen wird.

13 „Sx“ bezeichnet den logischen Sachverhalt, dass irgendeinem Gegenstand ein Prädikat S zukommt; „$Sx \rightarrow Mx$“ bezeichnet den logischen Sachverhalt (die logische Form), dass wenn einem Gegenstand ein Prädikat S zukommt, ihm ein Prädikat P zukommt, aber nicht umgekehrt; dieser kann auch formuliert werden durch: „Allen Gegenständen, denen ein Prädikat S zukommt, kommt ein Prädikat P zu, aber und umgekehrt“; diese Form wird in der traditionellen Logik durch den Ausdruck „SaP“ ausgedrückt und deshalb haben die Ausdrücke „$[(Sx\rightarrow Mx) \wedge (Mx\rightarrow Px)] \rightarrow (Sx\rightarrow Px)$“ und „$(SaM \wedge MaP) \rightarrow SaP$“ dieselbe Bedeutung; der so genannte Syllogismus (oder „syllogistische Modus“) *Barbara* $(SaM \wedge MaP) \rightarrow SaP$ ist ein logisches, implikatives Verkettungsgesetz und kein Schluss.

14 Die Gesetzesprämisse ist ein Implikationsgesetz, demnach muss das Schlussschema aus einem Modalisierungsmodus der Implikation $\mathbb{C}$ abgeleitet sein.

15 **KANT I./JÄSCHE, G.B.**, Logik, in: Werke Band 5 (Schriften zur Metaphysik und Logik), hrsg. von **W.WEISCHEDEL**, Sonderausgabe, Darmstadt 1983

16 **KANT/JÄSCHE**, §§ 43-55; **A.PFÄNDER**, Logik, S. 253ff; **KONDAKOW**, S. 439f

17 Die Gesetze der „Logischen Quadrats“ sind in folgender Relationenmatrix dargestellt:

	SaP (Sx → Px)	SeP (Sx↑Px)	SiP (1••1)(Sx,Px)	SoP (•1•1)(Sx,Px)
SaP (Sx → Px)	$\mathbb{E}$ Äquivalenz	$\mathbb{D}$ Kontrarietät	$\mathbb{C}$ Subalternation	$\mathbb{J}$ Kontradiktion
SeP (Sx↑Px)	$\mathbb{D}$ Kontrarietät	$\mathbb{E}$ Äquivalenz	$\mathbb{J}$ Kontradiktion	$\mathbb{C}$ Subalternation
SiP (1••1)(Sx,Px)	$\mathbb{B}$ Konverse der Subalternation	$\mathbb{J}$ Kontradiktion	$\mathbb{E}$ Äquivalenz	$\mathbb{A}$ Subkontrarietät
SoP (•1•1)(Sx,Px)	$\mathbb{J}$ Kontradiktion	$\mathbb{B}$ Konverse der Subalternation	$\mathbb{A}$ Subkontrarietät	$\mathbb{E}$ Äquivalenz

18 „Der unmittelbare Schluss von a auf i, und der von e auf o ist immer folgerichtig. – Diese beiden gültigen Schlüsse heißen die unmittelbaren Schlüsse der Subalternation.“ (**Pfänder**, S. 257)

19 „Der unmittelbare Schluss … von der Wahrheit des allgemein bejahenden Urteils … auf die Falschheit des partikular und des universal verneinenden Urteils ist also immer folgerichtig.“ (**Pfänder**, S. 262)

20 „Aus dem *allgemein bejahenden Urteil* ›Alle S sind P‹ folgt unmittelbar das *allgemein verneinende Urteil* ›Alle Gegenstände, die nicht P sind, sind nicht S‹.“ (**Pfänder**, S. 278)

21 Die gebräuchliche Darstellung dieses Schlusses

Alle Antilopen sind Säugetiere
Alle Säugetiere sind Wirbeltiere

∴ Alle Antilopen sind Wirbeltiere

ist enthymematisch – die für die Gültigkeit des Schlusses unverzichtbare Gesetzesprämisse ist nicht ausdrücklich aufgeführt. Auch der Ausdruck „Wenn alle Antilopen Säugetiere sind und wenn alle Säugetiere Wirbeltiere sind, dann sind alle Antilopen Wirbeltiere“ wird für eine Darstellung dieses Schlusses gehalten; hier handelt es sich jedoch um einen ganz andersgearteten Zusammenhang – um ein *problematisches Konditional*, auf das ich im nächsten Kapitel näher eingehen werde.

22 „Die klassische Logik lehrt vor allem zwei Schlüsse, in denen hypothetische Urteile mitspielen, den modus ponens und den modus tollens. Der modus ponens lautet: ‚Wenn H, dann K; nun ist H; also ist K.‘ “(**von Freytag-Löringhoff**, Logik I, S.86) – Als Modus ponens werde ein Argument der folgenden Form bezeichnet: „Wenn p, dann q. p. ∴ {ergo} q“ (**Salmon**, S. 52f)

23 Wörterbuch der Logik, S. 354f

24 **Kondakow**, S. 355, **Salmon**, S. 84.

25 **Kondakow**, S. 355

26 **Kondakow**, S.133; statt p, q, r bei **Kondkow** A, B, C.

27 Es wird auch die Geltung des folgenden „Dilemmas“ überliefert: (Entweder) p oder nicht-p. Wenn p, dann r. Wenn nicht-p, dann r. Also r. (**Salmon**, S.70; **J.Mau**: Dilemma, in: HWP 2, Sp-247f). Der behauptete Zusammenhang ist jedoch widersprüchlich, denn es kann nicht zugleich gelten p → r und ∼p→ r: bei p→r gilt: rm(∼p⌢∼r), bei (∼p→ r), äquivalent mit (p ∨ r) gilt hingegen nrm(∼p⌢∼r) – das ist ein Widerspruch. Wenn sowohl bei p wie ∼p notwendig r, dann gilt eine scheinbare Dependenz, nämlich die Postpendenz: p⌊ r jedenfalls r, ob nun p oder ∼p.

28 **Kondakow**, S. 135; **Salmon**, S.69

29 Für (p,q,r, s) erhalten wir die Vorkommenskombinationen:
I: p⌢q⌢r⌢s; II: p⌢q⌢r⌢∼s; III: p⌢q⌢∼r⌢s; IV: p⌢q⌢∼r⌢∼s;
V: p⌢∼q⌢r⌢s; VI: p⌢∼q⌢r⌢∼s VII: p⌢∼q⌢∼r⌢s VIII: p⌢∼q⌢∼r⌢∼s;
IX: ∼p⌢q⌢r⌢s; X: ∼p⌢q⌢r⌢∼s; XI: ∼p⌢q⌢∼r⌢s; XII: ∼p⌢q⌢∼r⌢∼s;
XIII: ∼p⌢∼q⌢r⌢s; XIV: ∼p⌢∼q⌢r⌢∼s; XV: ∼p⌢∼q⌢∼r⌢s; XVI: ∼p⌢∼q⌢∼r⌢∼s.

30 **Salon**, S. 85, **Elfenhans**, S. , **K.Lorenz**, Schluss, HWP 8, Sp.1305; **G.Patzig**, Logik, S. 154, **Freytag-Löringhoff**, Logik I, S.87

I, Kapitel 4. Das Konditional

Bei der Formulierung notwendiger gesetzmäßiger Zusammenhänge und bestimmter Schlussfolgerungen spielt die umgangssprachliche Partikel *Wenn* und ihre Synonyme eine unersetzliche Rolle; die Darstellung notwendiger und folgerichtiger Zusammenhänge in Alltag und Wissenschaft, oft zusammen mit ihrer subjektiven Bewertung, macht in sehr differenzierter Weise von diesem Wort Gebrauch. Von Anfang an wurde die Analyse dieses Gebrauchs zu den Aufgaben der Logik gerechnet. Der Gebrauch des umgangssprachlichen *Wenn* ist nicht eindeutig, oberflächlich betrachtet mag er sogar unübersichtlich erscheinen; in unterschiedlichen grammatischen Kontexten drückt das Wort *wenn* ganz unterschiedliche Sachverhalte aus – neben objektiven implikativen Gesetzeszusammenhängen auch Aspekte der subjektiven Stellungnahme, Grade der subjektiven Gewissheit, rhetorische Absichten usw. Die Logik muss diese verschiedenen Aspekte und Verwendungsweisen, die etwaigen Mehrdeutigkeiten im Gebrauch des Wenn klären und in ihrer Allgemeinheit bewusst machen und die für die Logik bedeutungslosen von den logisch relevanten Aspekten sondern.

Ich werde in diesem Abschnitt versuchen, die wichtigsten Verwendungen der Partikel *Wenn* in ihrer allgemeinen logischen und grammatischen Struktur darzulegen. In all ihrer Differenziertheit zeigen *Wenn*-Sätze unverkennbare sprachübergreifende Regelmäßigkeiten. Es zeigt sich, dass erst die im Vorhergehenden erarbeitete Erkenntnis der bedingungslogischen Formen und der Struktur der Schlussschemata eine sachlich befriedigende und vollständige Erklärung der beiden wichtigsten umgangssprachlichen Verwendungen dieser Partikeln ermöglichen. Das umgangssprachliche *Wenn* dient einmal dem Ausdruck von Implikationsgesetzen, zum zweiten dem Ausdruck von speziellen, zumeist enthymematischen Schlüssen mit einem üblicherweise nicht explizit angeführten implikativen Bezugsgesetz.

4.1. Grundbedeutung des *Wenn* als Ausdruck implikativer Gesetzeszusammenhänge

Die Beispielsätze, an denen ich die Struktur der Implikation, und hiervon ausgehend die Struktur der bedingungslogischen Formen überhaupt aufgezeigt habe, drücken bedingungslogische, meist implikative Gesetzeszusammenhänge aus; die Beispiele stellen schon eine gezielte Auswahl aus den möglichen Verwendungen des *Wenn* dar. Mithilfe des *Wenn* wird in allen derartigen Fällen dargelegt, dass bei jedem beliebigen Vorliegen eines wiederholbaren, realmöglichen, und wiedererkennbaren Ereignisses bestimmter Art (Sachverhalts-/Ereignisklasse) – wann immer dies geschieht – notwendig auch ein anderes wiederholbares, realmögliches Ereignis bestimmter Art vorliegt: das Vorliegen des einen Ereignisses bestimmter Art impliziert (d.h. macht notwendig) das Vorliegen des anderen Ereignisses bestimmter Art. Ein *Wenn*-Satz formuliert nur dann eine Implikation, wenn der Satz weder von einem einzelnen Gegenstand oder Vorgang noch von geltenden Gesetzen spricht, sondern wenn er von Sachverhalts-/Ereignisklassen handelt, wenn er also über *jedes beliebige* Ereignis bestimmter Art, nicht aber über ein ganz bestimmte *Einzel*ereignis urteilt. Durch Wenn-Sätze ausgedrückte implikative Gesetze und Regelmäßigkeiten haben in der Regel eine zeitübergreifende Geltung[1]. Ob ein *Wenn*-Satz diese Bedingung erfüllt ist, lässt sich in jedem Falle eindeutig entscheiden, denn sowohl Sprecher wie Hörer sind sich darüber im klaren, ob ein *Wenn*-Satz von allen Sachverhalten/Ereignissen einer bestimmter Art, wo und wann auch immer sie der Fall sein und vorliegen mögen, oder von einem ganz bestimmten einzelnen Sachverhalt/Ereignis an einer ganz bestimmten Raum- und Zeitstelle spricht. Das *Wenn*, das dem Ausdruck von Implikationsgesetzen dient, bezeichne ich im Folgenden durch „Wenn_I“.

Wenn_I-Aussagen sind weder Satzgefüge, noch Aussagen über Aussagen, noch „Aussageverknüpfungen“. Sätze – genauer: die durch Sätze jeweils bezeichneten Aussagen/Urteile – sind entweder wahr oder falsch; die Teilausdrücke der Wenn_I-Sätze (die Relata, zwischen denen das Wenn-Gesetz eine Gesetzesbeziehung behauptet) wie beispielsweise „ein Metallstab erhitzt wird“ und „ein Metallstab dehnt sich aus“ im Satz „Wenn ein Metallstab erhitzt wird, so dehnt er sich aus“ stellen keine *behauptenden* Sätze dar, denen ein Wahrheitswert zugeordnet werden könnte, sondern sie *benennen* allgemeine Sachverhalte/Ereignisse, d.h. beliebige Fälle, da Ereignisse bestimmter Art vorliegen. Dasselbe gilt auch für die logischen Wenn-Gesetze: das logische Gesetz $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ betrifft nicht Sätze, sondern eine Beziehung zwischen dem allgemeinen logischen Sachverhalt, dass irgendeine Ereignisklasse p eine Ereignisklasse q impliziert $(p \to q)$, und dem allgemeinen logischen Sachverhalt, dass eine Ereignisklasse $\sim q$ eine Ereignisklasse $\sim p$ impliziert $(\sim q \to \sim p)$; dass irgendeine beliebige Ereignisklasse p eine Ereignisklasse q impliziert, ist keine wahre oder falsche Behauptung, sondern ein realmöglicher Sachverhalt. Das *Wenn* bezeichnet in einer fundamentalen Verwendung also keine Verbindung von Sätzen, wie **FREGE** ohne sachliche Begründung postuliert hat.

Das ein Gesetz ausdrückende umgangssprachliche *Wenn₁* ist insofern mehrdeutig, als mit seiner Hilfe neben ℂ-Gesetzen auch 𝔼-Gesetze oder (10•1)-Zusammenhänge (d.h. entweder ℂ oder 𝔼) bezeichnet werden; das *Wenn* drückt im letzten Falle aus, dass das Vorliegen bestimmter Ereignisse das Vorliegen anderer Ereignisse echt notwendig macht und es offen bleibt, ob auch das zweite das erste Ereignis echt notwendig macht. In der Logik müssen die drei Relationen strikt geschieden und eindeutig bezeichnet werden (etwa durch die verschiedenen Normalmatrizen (1011), (1001) und (10•1), die Bezeichnungen „ℂ" „𝔼" und „ℂ⋓𝔼" und durch eine Normierung des Sprachgebrauchs[2]), und ihr gesetzmäßiger Zusammenhang muss bestimmt werden[3].

In der Umgangssprache drücken wir Implikationen nicht nur mithilfe des *Wenn₁*, sondern auch auf vielerlei andere Weise aus. Der implikative Wenn-Satz „Wenn sich jemand das Bein bricht, [dann/so][4] kann er nicht Fußball spielen" lässt sich etwa paraphrasieren durch den Stirnsatz „Bricht sich jemand das Bein, [dann/so] kann er nicht Fußball spielen", durch ein präpositionales Satzglied „Mit gebrochenem Fuß kann niemand Fußball spielen", durch einen Allsatz „Jeder, der sich das Bein gebrochen hat, kann nicht Fußball spielen" oder „Wer sich [auch immer] das Bein gebrochen hat, (der) kann nicht Fußball spielen". In Haupt- und Nebensatz (wobei nur in grammatischer Hinsicht von zwei Sätzen geredet werden kann) stehen das Präsens und der Indikativ. Das Präsens dient in diesem Fall dem Ausdruck von Gesetzmäßigkeiten und von allgemeingültigem, zeitübergreifendem oder dauerhaftem, regelmäßigem Geschehen; der Indikativ drückt aus, dass der Sprecher die Geltung dieser Gesetzmäßigkeit als wirklich, gegeben und unzweifelhaft hinstellt. Logische Struktur und Bedeutung der Implikation bleiben von diesen unterschiedlichen Ausdrucksmöglichkeiten ganz unberührt. Der Gehalt der Wenn-Sätze kann also nie an den Ausdrucksmitteln als solchen festgemacht werden; denn es gibt verschiedenartige Wenn-Sätze, und es besteht stets die Möglichkeit, derartige Sachverhalte und Zusammenhänge auch ohne Hilfe des *Wenn₁* zu formulieren.

4.2. Implikationsgesetz und Schluss

Das umgangssprachliche *Wenn₁* dient zunächst dem Ausdruck von Implikationsgesetzen; daneben werden mithilfe des *Wenn* auch zwei spezielle Typen von Schlüssen dargestellt. Implikationsgesetze sind kategorische Aussagen, die Paaren von Sachverhalts-/Ereignisklassen ein spezielles zweistelliges Prädikat, eben die implikative Gesetzesbeziehung, zusprechen. Eine Implikation ist kein Schluss, denn ein Schluss ist, anders als eine Implikation, ein Zusammenhang von Sätzen. In einem Implikationsgesetz wird nichts geschlossen, es wird nicht gesagt, dass bestimmte Sätze wahr sind, und aus diesen wahren Sätzen die Wahrheit anderer Aussagen folgt. Implikationen können aber Gesetzesprämissen (Bezugsgesetze) von Schlüssen sein: aus der Wahrheit der implikativen Gesetzesprämisse „Wenn ein Metallstab erhitzt wird, so dehnt er sich aus" und aus der Wahrheit der feststellenden Subsumtionsprämisse „Dieser Metallstab hier wird jetzt erhitzt" folgt die Wahrheit der feststellenden Konklusion „Dieser Metallstab hier dehnt sich jetzt aus". Dieser Schluss nach dem Schlussschema ℂ/α ist eine Beziehung zwischen drei Sätzen. ***Jeder*** **Schluss ist eine solche Subsumtion eines einzelnen oder eines besonderen Falles unter ein Gesetz und die Übertragung der Gesetzmäßigkeit auf den einzelnen oder besonderen Fall.**

Es gibt verschiedene umgangssprachliche Möglichkeiten, Schlüsse zu formulieren. Man kann z.B. die Gesetzesprämisse(n) P_G und Subsumtionsprämisse(n) P_S in behauptender Weise aussprechen, und dann mithilfe von adverbialen Ausdrücken wie „also", „daher", „deshalb", „folglich", „demnach", „so", „deswegen", usw. darlegen, dass die Konklusion K aus diesen Prämissen folgt; das verbale Schema lautet: *P_G [gilt] und P_S [gilt], also [gilt] K.* Man kann zuerst die Konklusion K anführen, und dann, verbunden durch die begründende Konjunktion „denn" die Prämissen: *K [gilt], denn P_G und P_S.* Ein Schluss kann in einem begründenden Satzgefüge (in einem *Weil*-Satz) ausgesprochen werden: *Weil/da P_G und [weil/da] P_S, [deshalb] K.* Es lässt sich die Folgerungsbeziehung direkt formulieren: *Aufgrund von P_G und P_S gilt K*; *Aus P_G und P_S folgt K.* Eine Schlussrelation kann durch präpositionale Ausdrücke mit „aufgrund", „wegen", „infolge", „dank" usw. bezeichnet werden. In der traditionellen Logik hat sich die „Zeilendarstellung" von Schlüssen eingebürgert: Jede Prämisse wird in eine eigene Zeile geschrieben; die Prämissen sind von der/den Zeile(n) der Konklusion durch einen waagrechten Strich getrennt, der die Folgerungsrelation (das „also", das „daher" usw.) bezeichnet[5]. Implikationsgesetze können auf diese Weise nicht dargestellt werden: die Implikation *Wenn ein beliebiger Metallstab erhitzt wird, dehnt er sich aus* kann nicht ausgedrückt werden durch den sinnlosen Ausdruck „Ein beliebiger Metallstab wird erhitzt; also dehnt er sich aus", weil das Implikans ja nichts behauptet, sondern eine Klasse von Ereignissen als Relatum einer Implikationsrelation benennt, und deshalb nicht als Prämisse eines Schlusses in Frage kommt.

Durch das *Wenn* werden nicht nur Implikationsgesetze, sondern auch wie durch das umgangssprachliche *Weil* spezielle Schlüsse ausgedrückt; die unzureichende oder sogar völlig fehlende Unterscheidung dieser beiden Verwendungsweisen des *Wenn* ist bis heute eines der ernsthaftesten Hemmnisse der Analyse der logischen Formen.

4.3. Enthymematische Schlüsse

4.3.1 Assertorische Enthymeme; *Weil*-Sätze, „kausale", begründende Sätze

Mithilfe des *Weil* oder *Da* können wir im Deutschen Schlüsse formulieren; in den meisten Fällen werden in einem solchen begründenden Satzgefüge nur zwei Sätze explizit angesprochen und verbunden – eine Prämisse P und die Konklusion K. Sätze gemäß des sprachlichen Ausdrucksschemas

Da P, [deshalb] K
Weil P, [deshalb] K
K, denn P
P, daher [deshalb/so/also/deswegen] K

formulieren Schlüsse, bei welchen zumindest eine Prämisse unausgesprochen bleibt. Solche Schlüsse, bei denen nicht alle Prämissen ausdrücklich dargelegt, sondern teilweise nur implizit mitbedacht und berücksichtigt sind, nennt man ***enthymematische Schlüsse*** oder ***Enthymeme***[6]; der komplexe Gehalt eines Schlusses, der Gesetzesprämisse(n), Subsumtionsprämisse(n) und Konklusion(en) umfasst, wird in einem einzigen Satz ausgedrückt, wobei entweder die Gesetzesprämisse(n) oder die Subsumtionsprämisse(n) nicht ausdrücklich formuliert werden. Bei Enthymemen muss zwischen den *ausgesprochenen* oder *expliziten* und den *unausgesprochenen* oder *impliziten* Prämissen unterschieden werden; beide sind für die Gültigkeit des Schlusses unverzichtbar.

In Enthymemen, die in begründenden Weil-Sätzen formuliert sind, behauptet der Sprecher sowohl die expliziten wie die impliziten Prämissen in assertorischer Weise, d.h. mit dem Anspruch auf Wahrheit[7]; ich spreche von *assertorischen Enthymemen*. In den folgenden assertorischen Enthymemen bleibt die **Gesetzesprämisse unausgesprochen**:

„Da/weil wir in diesem Jahr unseren Boden intensiv bearbeiten, erhalten wir in diesem Jahr höhere Erträge". Implizit bleibt die Gesetzesprämisse *Wenn der Boden intensiv bearbeitet wird, sind die Erträge höher*; es wird nach dem Schema $\mathbb{C}/\alpha$ geschlossen. In vollständiger Darstellung lautet dieser Schluss:

Gesetzesprämisse: Wenn der Boden intensiv bearbeitet wird, sind die Erträge höher.
Subsumtionsprämisse: Wir bearbeiten (in diesem Jahr) den Boden intensiv.
Konklusion: Nach $\mathbb{C}/\alpha$ gilt: In diesem Jahr erhalten wir höhere Erträge.

„Da [weil] die Schwalben heute sehr niedrig fliegen, wird das Wetter schlecht". Die Gesetzesprämisse *Wenn die Schwalben sehr niedrig fliegen, wird das Wetter schlecht* bleibt unausgesprochen; es wird nach dem Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$ geschlossen.

„Müller starb, weil er Fisch mit Speiseeis aß"[8]. Der Sprecher setzt implizit die (fragwürdige) Gültigkeit des Implikationsgesetzes *Wenn jemand Fisch mit Speiseeis isst, dann stirbt er* voraus; es wird nach dem Schema $\mathbb{C}/\alpha$ geschlossen.

Das allgemeine verbale Schema lautet „Weil A, [deshalb] B". Die *einzelnen* Ereignisse, auf welche die beiden Teilsätze A und B verweisen bezeichne ich durch e_A und e_B; diese Einzelereignisse gehören jeweils den Ereignis*klassen* E_A und E_B an, zwischen denen eine bedingungslogische Beziehung gilt (etwa die Implikation $E_A \rightarrow E_B$). Den Ausdruck „Weil A, [deshalb] B" kürze ich ab durch „$A \rightrightarrows B$".

In vollständiger Darstellung lautet das Enthymem „Weil A, deshalb B" ($A \rightrightarrows B$):

Gesetzesprämisse: Wenn E_A, dann E_B.
Subsumtionsprämisse: e_A liegt vor
Konklusion: $\mathcal{N}$(e_B liegt vor).

In den assertorischen Enthymemen mit impliziter Gesetzesprämisse, die dem sprachlichen Schema „Weil/da A, [deshalb] B“ folgen, ist von zwei Einzelereignissen e_A und e_B die Rede; dabei wird das im Weil-Nebensatz A angesprochene Vorliegen des Ereignisses e_A als die Bedingung oder als der Grund für das Vorliegen des anderen einzelnen, im Hauptsatz B erwähnten Ereignisses e_B ausgegeben[9]; dieser Grund-Folge-Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Einzelereignissen, weil zwischen allen Gliedern der Ereignisklassen E_A und E_B das Verhältnis der Implikation $E_A \rightarrow E_B$ bzw. $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ besteht; auf ein solches Bezugsgesetz wird in allen diesen Fällen auch dann Bezug genommen, wenn es unausgesprochen bleibt; denn nur dieser Bezug verleiht dem Schluss Notwendigkeit und Gültigkeit.

Es ist auch möglich, dass die **Subsumtionsprämisse** in einem solchen Enthymem **unausgesprochen** bleibt; dies trifft für das begründende Satzgefüge „Weil die Erträge höher sind, wenn man den Boden intensiv bearbeitet, [deshalb] erzielt Fritz höhere Erträge“ zu. Zu ergänzen ist jetzt die unausgesprochene Subsumtionsprämisse: „Fritz hat seinen Boden intensiv bearbeitet“; der Sprecher setzt voraus, dass dies dem Hörer bekannt ist. Die allgemeine Form ist: *Weil E_B, wenn E_A, [deshalb] B.* Zu ergänzen ist die unausgesprochene Aussage „A“, welche das Vorliegen von e_A feststellt; der Sprecher setzt voraus, dass der Hörer weiß, dass A wahr ist. Erst aufgrund der Ergänzung der ausgesprochenen Gesetzesprämisse durch die implizite Subsumtionsprämisse A besteht zwischen der Gesetzesprämisse $E_A \rightarrow E_B$, bzw. $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ und der Konklusion B die Folgerungsnotwendigkeit.

Die Partikeln „weil/da…, [deshalb]…“ weisen in den begründenden enthymematischen Satzgefügen[10] auf zwei verschiedene Aspekte hin: erstens darauf, dass die Prämissen und damit auch die Konklusion *assertorisch behauptet* werden, dass also nach Auffassung des Sprechers die explizite(n) und die implizite(n) Prämisse(n) sowie die Konklusion wahr sind; das Verb in Haupt- und Nebensatz steht deshalb im Modus des Indikativs. Zweitens besteht zwischen den Prämissen und der Konklusion Folgerungsnotwendigkeit: das im Hauptsatz (Konklusion B) erwähnte Eintreten des Ereignisses e_B ist Folge (ist bedingt) durch das Eintreten eines anderen Ereignisses e_A, auf welches die explizite oder implizite Subsumtionsprämisse A verweist; das Vorliegen von e_B ist bezüglich des Vorliegens von e_A als notwendig modalisiert. Bleibt in einem assertorisch-enthymematischen Schluss die Gesetzesprämisse implizit, wird die allgemeine Gesetzmäßigkeit in den Einzelfällen e_A und e_B ausgedrückt, auf welche die Sätze A und B verweisen: die Verwendung des „da/weil… [deshalb]“ zeichnet die beiden Einzelereignisse e_A und e_B als Glieder zweier Ereignisklassen E_A und E_B aus, zwischen denen ein bedingungslogischer Gesetzeszusammenhang gilt[11].

Anders als die Implikationssätze sind diese begründenden Weil-Sätzen Satzgefüge oder Satzverknüpfungen; die verknüpften Sätze sind entweder wahr oder sie sind falsch, d.h. das betreffende Gesetz gilt oder es gilt nicht, und das in den Subsumtionsprämissen festgestellte Vorliegen von Ereignissen trifft entweder zu oder es trifft nicht zu.

> Ein begründendes Enthymem $A \rightrightarrows B$ ist genau dann wahr, wenn ein implizit angesprochenes Gesetz $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ gilt, und A wahr ist; es ist dann auch B wahr.

4.3.2 Das problematische Konditional oder Enthymem; das „hypothetische Urteil“

Das *Wenn₁* verbindet keine Sätze, sondern Sachverhalts-/Ereignisklassen; der Teilausdruck „jemand ist ein Mörder“ im Satz „Wenn jemand ein Mörder ist, ist er ein Verbrecher“ bezeichnet keinen Satz, dem ein Wahrheitswert zugeordnet werden könnte. Hingegen enthält der *Wenn*-Satz „Wenn Hans ein Mörder ist, ist er ein Verbrecher“ Teilausdrücke, die als wahrheitswertdefinite Sätze formuliert werden können: „Hans ist ein Mörder“ und „er (nämlich besagter Hans) ist ein Verbrecher“ konstatieren das Vorliegen einzelner Sachverhalte/Ereignisse und sind somit wahrheitswertdefinite Feststellungssätze.

Solche nicht auf Sachverhalts-/Ereignisklassen, sondern auf Einzelereignisse verweisenden Wenn-Sätze sind wie die Weil-Sätze enthymematische Schlüsse; nur teilt jetzt der Sprecher, anders als in einem assertorischen Begründungssatz, auch mit, dass er sich über die Wahrheit der ausgesprochenen Prämisse nicht gewiss ist; die ausgesprochene explizite Prämisse – im Beispiel die Feststellung „Hans ist ein Mörder“ – ist *problematisch*, sie steht unter Wahrheitsvorbehalt. Dieser Wahrheitsvorbehalt überträgt sich auf die Konklusion; die Wahrheit der Konklusion kann nur dann als erschlossen gelten, wenn sich der Vordersatz als wahr herausstellen sollte. Dass aus dem Vordersatz der Nachsatz folgt (wenn auch unter Wahrheitsvorbehalt) hat seinen Grund in der Geltung des unausgesprochenen Gesetzes „Wenn jemand ein Mörder ist, ist er ein Verbrecher“; ohne die Bezugnahme auf diese assertorische Gesetzesaussage bestünde der behauptete notwendige Bedingungszusammenhang zwischen dem vom Sprecher nicht auszuschließenden Mördersein und Verbrechersein von Hans nicht. Ein anderes Beispiel für einen solchen Wenn-Satz ist der Satz „Wenn Hans in diesem

Jahr seinen Boden intensiv bearbeitet hat, dann erzielt er höhere Erträge“; die explizite Subsumtionsprämisse besagt, dass Hans in diesem Jahr seinen Boden intensiv bearbeitet hat, aber dieser Sachverhalt ist für den Sprecher problematisch, die entsprechende Aussage steht unter Wahrheitsvorbehalt, und dieser Wahrheitsvorbehalt überträgt sich auf die Konklusion, welche besagt, dass Hans höhere Erträge erzielt. Dieser unter Wahrheitsvorbehalt stehende problematische Schluss setzt implizit die assertorische Geltung des Gesetzes „Wenn der Boden intensiv bearbeitet wird, sind die Erträge höher“ voraus.

Das allgemeine Ausdrucksschema für solche problematischen Enthymeme ist „Wenn A, dann B“ – wobei die Teilausdrücke „A“ und „B“ wahrheitswertdefiniten Sätzen entsprechen, die konstatieren, dass die Sachverhalte/Ereignisse e_A und e_B der Fall sind. Das *Wenn* dieser problematischen Enthymeme bezeichne ich durch „Wenn_2“. Ich kürze den Ausdruck „Wenn_2 A, dann_2 B“ durch den Ausdruck „$A \Rightarrow B$ ab. *Problematische Enthymeme* nenne ich auch *problematische Konditionale*.

Jedes derartige problematische Konditional setzt ein Gesetz voraus, welches die Gesetzesbeziehung $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ in sich einschließt, denn nur weil in *allen* Fällen, in denen ein Glied der Ereignisklasse E_A vorliegt, notwendig ein Glied der Ereignisklasse E_B vorliegt, kann behauptet werden, dass *falls* e_A in einem *einzelnen*, aktuellen Fall *vorliegen sollte*, auch ein Ereignis e_B vorliegt. Wie bei den assertorischen Enthymemen mit impliziter Gesetzesprämisse wird auf die allgemeine implikative Gesetzmäßigkeit in den subsumierten Einzelfällen hingewiesen. **Eine Behauptung $A \Rightarrow B$ setzt also voraus, dass die Einzelfälle e_A und e_B, von denen die Sätze A und B sprechen, als Glieder von Ereignisklassen E_A und E_B gefasst sind, zwischen denen eine bestimmte Gesetzesbeziehung gilt, welche die Beziehung $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ involviert.**

In einem problematischen Enthymem kann auch die Gesetzesprämisse problematisch sein; in diesem Falle wird die entsprechende Subsumtionsprämisse implizit und assertorisch vorausgesetzt. So ist sich der Sprecher des Satzes „Wenn bei intensiver Bodenbearbeitung die Erträge steigen (steigen sollten), dann werden wir dieses Jahr höhere Erträge haben“[12] nicht sicher, ob das Implikationsgesetz gilt; er setzt jedoch die implizite assertorische Subsumtionsprämisse „Hans hat in diesem Jahr seinen Boden intensiv bearbeitet“ als bekannt und wahr voraus; bezüglich dieser als gewiss angesehenen Tatsache und der für problematisch charakterisierten Gesetzesprämisse, gilt die Konklusion „Hans erzielt in diesem Jahr höhere Erträge“, auf welche sich allerdings der Wahrheitsvorbehalt überträgt, unter dem jetzt die Gesetzesprämisse steht. Wenn der Sprecher im vorliegenden Beispiel alle Prämissen seiner Schlussfolgerung explizit kundgeben will, zeigt sich der assertorische Charakter der Subsumtionsprämisse darin, dass sie mit dem begründenden *Weil* oder *Da* verbunden sein muss: „Weil Hans in diesem Jahr seinen Boden intensiv bearbeitet hat, erzielt er dann höhere Erträge, wenn (es zutreffen sollte, dass) die Erträge steigen, wenn der Boden intensiv bearbeitet wird“.

Bei allen problematischen Enthymemen ist die explizite Prämisse problematisch, die unausgesprochene Prämisse jedoch immer assertorisch. Sind für den Sprecher Gesetzesprämisse und Subsumtionsprämisse problematisch, muss er beide Sätze explizit formulieren, wie z.B. im problematischen Schluss *Wenn bei intensiver Bearbeitung des Bodens die Erträge zunehmen/zunehmen sollten, und [wenn] Hans seinen Boden intensiv bearbeitet hat/bearbeitet haben sollte, dann wird er höhere Erträge erzielen*.

Wenn in einem indikativischen Wenn_2-Satz von Einzelfällen die Rede ist, liegt in der Regel ein problematisches Konditional vor. Die einzige Ausnahme sind **assertorische Prognosen von Einzelereignissen**; im Satz „Wenn sich morgen der Mond vor die Sonne schiebt (der Sprecher geht davon aus, dass dieses Ereignis sicher eintreten wird), wird es dunkel“ wird in assertorischer und enthymematischer Weise auf zukünftige sich bedingende Einzelereignisse Bezug genommen. Diese Prognose kann, da kein Wahrheitsvorbehalt besteht, nicht durch den Konjunktiv von *sollen* paraphrasiert werden (siehe nächster Abschnitt). Das *Wenn* der assertorischen Prognose hat eine sehr starke temporale Betonung. Mit *Wenn_2* wird nie assertorisch auf gegenwärtige und vergangene Einzelereignisse verwiesen, von denen der Sprecher weiß, dass sie gegenwärtig stattfinden oder stattgefunden haben; wenn sich jetzt oder gestern der Mond vor die Sonne geschoben hat, kann ich nicht sagen „wenn sich jetzt bzw. gestern der Mond vor die Sonne schiebt bzw. geschoben hat, wird bzw. wurde es dunkel“, sondern ich kann nur sagen „Weil sich jetzt (bzw. gestern) der Mond vor die Sonne schiebt (bzw. geschoben hat), wird (bzw. wurde) es dunkel“.

4.3.2.1 Die Struktur der problematischen Enthymeme

4.3.2.1.1 In einem Satz A⇨B ist B auf zweifache Weise durch A bedingt

Die Bedingtheit, die durch das *Wenn2* des problematischen Konditionals A⇨B zum Ausdruck gebracht wird (und nach der das Konditional benannt ist), hat zwei Aspekte. Zum einen drückt die Partikel *Wenn* wie das *Weil* des begründenden Satzes aus, dass das *im Vordersatz* A konstatierte Einzelereignis e_A das Vorliegen des im Nachsatz konstatierten Ereignisses e_B notwendig macht, dass *e_A eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen des Ereignisses e_B* ist, also dafür, dass B aus A folgt. Diese Schlussnotwendigkeit setzt in beiden Fällen – A⇉B und A⇨B – den impliziten Bezug auf ein als wahr betrachtetes, also assertorisches Gesetzesurteil voraus, welches die Gesetzesbeziehung $\mathcal{N}^e(E_A, E_B) \equiv (10\bullet1)(E_A, E_B)$ in sich schließt. In beiden Fällen wird die gesetzmäßige Beziehung zwischen den Ereignisklassen E_A und E_B dadurch in den Einzelfällen e_A und e_B angesprochen, dass zwischen e_A und e_B die Beziehung von Bedingung und Folge vorausgesetzt wird.

Der zweite Aspekt der Bedingtheit von B durch A liegt im Wahrheitsvorbehalt, der in einem problematischen Konditional A⇨B – anders als im begründenden *Weil*-Satz – gesetzt ist; der Wahrheitsvorbehalt, unter dem der *Wenn2*-Nebensatz A steht, wird auf die im *Dann2*-Hauptsatz angesprochene Konklusion B übertragen: unter der Voraussetzung, dass $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ gilt, ist darüber hinaus *B nur unter der Bedingung wahr, dass A wahr ist* (was der Sprecher erklärtermaßen nicht sicher weiß). Das Attribut „problematisch“ oder „hypothetisch“, das den Konditionalen A⇨B beigelegt wird, verweist auf dieses Aspekt des Schließens unter Wahrheitsvorbehalt[13]. Diese (im Sinne einer subjektiven Ungewissheit) „modale“ Bedeutung des problematischen Konditionals A⇨B äußert sich auch darin, dass die Problematisierung der Wahrheit des Wenn-Nebensatzes aufgrund einer subjektiven Ungewissheit, im Deutschen unmissverständlich durch den Konjunktiv II von *sollen* dargelegt und dadurch deutlicher zum Ausdruck gebracht werden kann. Im Satz „Wenn es heute regnen sollte, dann ist der Boden nass“ wird der Wahrheitsvorbehalt im Vergleich zum bedeutungsgleichen Satz „Wenn es heute regnet, ist der Boden nass“ stärker herausgestellt.

> Wenn dies oder jenes in der Vergangenheit gewesen sein/stattgefunden oder gegolten haben sollte, oder wenn dies oder jenes in Gegenwart oder Zukunft sein/stattfinden/gelten sollte, dann ist dies oder jenes gewesen/hat stattgefunden oder gegolten, oder wird dies oder jenes in Gegenwart oder Zukunft sein/stattfinden/gelten[14].

Der Wahrheitsvorbehalt ist spezifisches Charakteristikum für das problematische Konditional, und er lässt sich durch die Papraphrasierbarkeit durch den Konjunktiv von *sollen* nachweisen; dadurch unterscheidet sich das problematische Konditional schon auf der grammatischen Ebene klar von den *Wenn1*-Sätzen, die eine Implikation ausdrücken. Da nur ein Satz wahr sein kann, kann nur ein Satz unter Wahrheitsvorbehalt stehen; da die Relata eines *Wenn1*-Satzes keine Sätze sind, drückt das *Wenn1* der Implikation keinen solchen Wahrheitsvorbehalt aus, sondern nur die bedingungslogische Beziehung zwischen Implikans und Implikat.[15]

Der strukturelle Unterschied zwischen einem *Wenn1*- und *Wenn2*-Satz zeigt sich auf grammatischer Ebene auch darin, dass sich ein *Wenn2*-Satz A⇨B in zwei eigenständige Sätze A und B auflösen lässt; allerdings muss dann die angegebene zweifache Bedingtheit des problematischen Konditionals (Beziehung der hinreichenden Bedingung zur notwendigen Folge, Übertragung des Wahrheitsvorbehalt vom Vorder- auf den Nachsatz), durch andere sprachliche Ausdrucksmittel, etwa bestimmte Adverbialen, bezeichnet werden. So kann das problematische Enthymem „Wenn sich Hans den Fuß gebrochen hat/gebrochen haben sollte, kann er nicht Fußball spielen“ durch die beiden Hauptsätze „Hans hat sich vielleicht/möglicherweise/mutmaßlich/eventuell den Fuß gebrochen“ und „In diesem Falle/dann kann er nicht Fußball spielen“ paraphrasiert werden. Der Wahrheitsvorbehalt wird durch das Adverb vielleicht (möglicherweise, usw.) ausgedrückt, die Folgebeziehung durch das Adverb „in diesem Falle“ usw. Für einen implikativen *Wenn1*-Satz ist eine solche Paraphrasierung nicht möglich, denn hier haben wir es nicht mit einer Beziehung von Aussagen (ob diese nun assertorisch oder problematisch behauptet werden) zu tun. Das Implikationsgesetz „Wenn sich jemand den Fuß bricht, kann er nicht Fußball spielen“ kann nicht durch die beiden Sätze „Irgendjemand bricht sich (vielleicht, eventuell, usw.) den Fuß“, „Daher kann er nicht Fußball spielen“ paraphrasiert werden; denn der Teilausdruck „jemand bricht sich den Fuß“ konstatiert hier nicht das problematische Stattfinden eines Einzelereignisses, sondern benennt eine Ereignisklasse (jeden beliebigen Fall, dass sich jemand den Fuß bricht), behauptet also nichts (auch nicht unter Wahrheitsvorbehalt) und kann nicht als Satz formuliert werden.

Obwohl beim Konditional „A⇨B“ die Wahrheit von A (deshalb auch die Wahrheit von B) problematisch ist, ist die *ganze* Aussage A⇨B assertorisch; sie drückt kategorisch aus, dass B wahr ist, *falls* A wahr sein sollte; es wird assertorisch behauptet, dass B unter Wahrheitsvorbehalt aus A folgt. Eine Behauptung „Wenn A, dann B“ ist demnach wahrheitswertdefinit, entweder wahr oder falsch. Nur A und im Gefolge davon B, nicht aber „A⇨B“ ist problematisch.[16] Da zur Bedeutung eines Konditional A⇨B der aktuelle Wissensstand des Sprechers gehört, nämlich der Umstand, dass er nicht weiß, ob A wahr oder falsch ist, ist die Wahrheit des Konditionals immer an die Zeitstelle seiner Kundgabe gebunden – wie etwa jede Feststellung, in der ein Sprecher seine aktuelle psychische Befindlichkeit mitteilt[17]. Dieser Zeitbezug hebt den Aussagecharakter natürlich nicht auf; wenn die Ungewissheit des Sprechers sich im nachhinein ändert, bleibt das vorher geäußerte Konditional immer noch wahr – wenn es jetzt wegen der geänderten Umstände auch nicht mehr korrekt geäußert werden könnte[18].

4.3.3 Kontrafaktische Konditionale

Mithilfe des *Wenn*$_2$ werden auch Enthymeme ausgedrückt, die als explizite Prämisse einen falschen Satz aufweisen; solche Schlüsse geben kund, was aus diesem Satz und der dazugehörenden impliziten Prämisse folgen *würde*, wenn er wahr *wäre*, wenn also ein bestimmtes unwirkliches Ereignis in Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft der Fall (gewesen) wäre oder eine bestimmtes in Wirklichkeit ungültiges Gesetz gelten würde. Diese Konditionale haben also zumindest eine kontrafaktische Prämisse. Auch sie haben meistens einen enthymematischen Charakter, wobei nur die nicht-kontrafaktische Prämisse unausgesprochen bleiben kann. Ich spreche von „kontrafaktischen Enthymemen“ oder von „kontrafaktischen Konditionalen“.

Der Satz „Wenn Fritz sich den Fuß gebrochen hätte {dies ist, wie der Sprecher annimmt und ausdrücklich kundgibt, in Wirklichkeit nicht der Fall}, könnte er nicht Fußball spielen“ nimmt implizit auf das assertorisch aufgefasste Implikationsgesetz „Wenn sich jemand den Fuß gebrochen hat, kann er nicht Fußball spielen“ Bezug; der konjunktivische Nebensatz formuliert die Subsumtionsprämisse jetzt als irreale, kontrafaktische Gegebenheit und dadurch erhält auch die Konklusion einen irrealen, kontrafaktischen Charakter[19]. Die allgemeine sprachliche Form ist „Wenn A wahr wäre, wäre B wahr“, bzw. „Wenn e_A der Fall wäre, dann wäre e_B der Fall.“; unausgesprochen bleibt in diesem Fall die assertorische Gesetzesprämisse „Wenn E_A, dann E_B“ bzw. „Bei E_A notwendig E_B ($\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$)“. Den Ausdruck „Wenn A wahr wäre, dann wäre B wahr“ kürze ich ab durch „A➲B“.

Ein kontrafaktisches Konditional mit einer kontrafaktischen Gesetzesprämisse ist der Satz „Wenn Reichtum glücklich machen würde, wäre Fritz ein glücklicher Mensch“; das Konditional sagt aus, was aus dem vom Sprecher für ungültig erachteten Gesetz „Reichtum macht glücklich“ und aus der unausgesprochenen assertorischen Prämisse, dass Fritz reich ist, folgen würde, wenn jenes Gesetz gelten würde[20]. Die unausgesprochene(n) Prämisse(n) wird/werden wie beim problematischen Enthymem stets assertorisch aufgefasst. Wenn alle Prämissen irreal sind, müssen auch alle explizit ausgesprochen werden; Beispiel: Wenn Reichtum glücklich machen würde (irreale Gesetzesprämisse; der Sprecher verneint die Gültigkeit des Gesetzes), und wenn Fritz reich wäre (kontrafaktische Subsumtionsprämisse; der Sprecher verneint diese Behauptung), dann wäre Fritz glücklich (kontrafaktische Konklusion). Der kontrafaktische Charakter der ausgesprochenen Prämisse A überträgt sich auf die Konklusion; der kontrafaktische Charakter der Schlussfolgerung wird im Deutschen eindeutig mit dem Konjunktiv II zum Ausdruck gebracht. Die Zusammenhänge in einem Implikationsgesetz können hingegen nie im Konjunktiv ausgedrückt werden. Die kontrafaktischen Konditionale unterscheiden sich also dadurch, ob die Gesetzesprämisse oder die Subsumtionsprämisse oder beide kontrafaktisch als wahr unterstellt werden. In allen diesen Fällen wird ausgesagt, dass der Nachsatz (die Konklusion) aus den assertorischen impliziten Prämissen und den kontrafaktischen expliziten Prämissen folgen würde, wenn letztere wahr wären.[21]

Da ein Konditional A➲B wie das problematische Konditional A⇨B eine Beziehung zwischen Sätze ist, kann es wie dieses in zwei Hauptsätze aufgespalten werden, wobei der spezielle Gehalt des Wenn-dann des kontrafaktischen Konditionals durch andere sprachliche Mittel ausgedrückt wird. Das Konditional „Wenn Hans den Fuß gebrochen hätte, dann könnte er nicht Fußball spielen“ kann durch die beiden Sätze „Hans hat den Fuß nicht gebrochen. Anderenfalls könnte er nicht Fußball spielen“ ausgedrückt werden. Der Schluss „Wenn Reichtum glücklich machen würde, dann wäre Hans glücklich“ kann durch die beiden Sätze „Reichtum macht nicht glücklich. Ansonsten wäre Hans glücklich“ paraphrasiert werden. „A➲B“ kann also ausgedrückt werden als „∼A; anderenfalls wäre B wahr“. Ein konjunktivischer Ausdruck wie „Hans hätte den Fuß gebrochen“ kann aber nicht als selbständiger Satz stehen[22], sondern steht immer in einem irrealen, kontrafaktischen Zusammenhang.

Für jedes kontrafaktische Konditional A➲B ergibt sich als Wahrheitsbedingung: A➲B ist genau dann wahr, wenn A falsch ist und es ein Gesetz gibt, welches involviert, dass gilt $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$. Da bei A⇨B dem Sprecher die Wahrheit von A unbekannt sein muss, können A⇨B und A➲B nicht zugleich wahr sein[23].

Die assertorischen Weil-Sätze A⇉B, die assertorischen Prognosen („[Zum dem Zeitpunkt,] wenn zukünftig e_A stattfinden wird, wird e_B stattfinden"), die problematischen und kontrafaktischen Konditionale A⇨B und A➲B sind nur gültig, wenn sie auf ein Gesetz $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ bezogen werden; dieses Gesetz ist der Grund, dass das Ereignis e_B als (notwendig) bedingt durch das Ereignis e_A angesehen wird, bzw. dass B aus A folgt, wobei dieses Bedingtsein bzw. Folgen entweder assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch ist. Dieses Bedingungsverhältnis zwischen e_A und e_B kann nicht nur in einer **objektiven Gesetzmäßigkeit**, sondern auch in **subjektiven Entschlüssen** begründet sein. Es lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

1. Es gibt Implikationsgesetze, die alle in ihrer Geltung vom Willen der Subjekte unabhängig, d.h. nicht willentlich durch Menschen gesetzt und vereinbart sind; es kann sich dabei um implikative Naturgesetze (Beispiel: *Wenn ein Metallstab erhitzt wird, so dehnt er sich aus*), um logische und mathematische Implikationsgesetze (Beispiel: *Wenn die Seiten von zwei Dreiecken gleich lang sind, dann sind auch die Innenwinkel der beiden Dreiecke gleich groß*) oder auch um implikative soziale und verhaltensmäßige Regelmäßigkeiten handeln (Beispiel: *Wenn Menschen müde sind, dann vermindert sich ihre Reaktionsgeschwindigkeit*).

2. Es gibt institutionalisierte Verhaltensregeln von implikativer Struktur, z.B. sprachliche Konventionen, rechtliche Vereinbarungen, Vorschriften, Gebräuche, bedingte Rechte und Pflichten usw.; diese Regelmäßigkeiten sind von Menschen gesetzt und durch Sanktionen verbindlich gemacht und auch veränderbar, aber sie entziehen sich doch der Willkür der Einzelnen. Beispiele für solche implikativen Zusammenhänge sind: *Wenn die Ampel vor einer Kreuzung auf Rot steht, dann ist es verboten, in die Kreuzung einzufahren*. *Wenn jemand ein Verbrechen begeht, so muss er bestraft werden. Wenn jemand das 18. Lebensjahr erreicht, darf er wählen*. Es handelt sich um generelle, zeitübergreifende implikationsanaloge Verhaltensregeln. Es sind zeitliche Begrenzungen möglich[24].

3. Es gibt schließlich implikative Regelmäßigkeiten, Vorschriften, Gewohnheiten u.ä., die in einem Entschluss, in einer willkürlichen Festsetzung ihren Grund haben; hier ist die Verhaltensregelmäßigkeit abhängig von Willensakten, Festsetzungen von Subjekten, von Gruppen bis zu einzelnen Individuen, z.B.: *Wenn ich frühstücke, dann lese ich die Zeitung*. *Wenn unsere Kinder gegessen haben, müssen sie sich die Zähne putzen*. *Wenn Hans in einer Klassenarbeit eine Eins schreibt, erhält er 5 Euro*. Im Grenzfall kann der durch den Entschluss konstituierte Zusammenhang auf eine einzelne Situation beschränkt sein[25].

Kontrafaktisch aus einer falschen Aussage A zu schließen, bedeutet, dass man wohl weiß, dass A falsch ist, dass man aber A in der Überlegung – *eben kontrafaktisch* – als wahr unterstellt und prüft, was daraus folgt. In der logistischen Literatur stoßen wir auf ein verbreitetes Missverständnis dieser Kontrafaktizität. Um zu vermeiden, dass aus einer falschen Aussage etwas erschlossen wird – was in Wirklichkeit beim kontrafaktischen Schließen nicht der Fall ist, da aus einer kontrafaktisch für wahr unterstellten Aussage eine Konklusion gefolgert wird, deren Falschheit nicht bestritten wird – wird die logisch absurde *Konzeption der fiktiven Welten*[26] ins Spiel gebracht. **NUTE** schlägt vor, ein Konditional A➲B genau dann für wahr zu halten, wenn B in allen „Welten" wahr sei, in denen dieselben Naturgesetze gelten würden, wie in der wirklichen, aktuellen Welt (er nennt diese „Welten" „physical alternatives"), und in denen, im Gegensatz zur tatsächlichen Welt, A wahr sei[27]. Ähnlich postuliert **STALNAKER**, das counterfactual A➲B sei wahr in der der wirklichen Welt am ähnlichsten fiktiven „Welt". Diese Konzeption ist falsch, denn wir können weder über nicht-reale, nur in leerem Gerede anzutreffende „Welten" nachprüfbare Aussagen treffen (etwa ob in einer unwirklichen anderen „Welt" dieselben Naturgesetze gelten wie in der wirklichen Welt – über Fiktives kann alles und jedes behauptet werden), noch ob A in diesen Welten wahr ist (die Frage danach ist logisch schon deshalb unzulässig, weil sich A auf eine ganz bestimmte Raum- und Zeitstelle in der wirklichen und einzigen Welt bezieht).

Zusammenfassend erhalten wir die folgenden Wahrheitsbedingungen für die drei unterschiedlichen Enthymeme:

Das begründende Enthymem A⇉B ist genau dann wahr, wenn die Gesetzesbeziehung $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ gilt, und wenn A wahr ist.
Das problematische Konditional A⇨B ist genau dann wahr, wenn die Gesetzesbeziehung $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ gilt, und wenn dem Sprecher die Wahrheit von A nicht bekannt ist.

Das kontrafaktische Konditional A ⊃ B ist genau dann wahr, wenn die Gesetzesbeziehung $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ gilt, und wenn A falsch ist.[28]

4.4 Implikation – assertorisches, problematisches und kontrafaktisches Enthymem

Es ist unabdingbar, begrifflich klar zwischen den Implikationsgesetzen und den besprochenen drei Arten von Enthymem zu unterscheiden. Auf der Grundlage der dargelegten Begriffe dieser Formen kann von jedem sinnvollen Wenn-Satz unschwer entschieden werden, ob er ein Implikationsgesetz, ein problematisches oder ein kontrafaktisches Konditional bezeichnet. Ebenso lassen sich für jeden der drei Typen von Enthymemen die implizite Prämissen eindeutig rekonstruieren.

In der traditionellen wie auch „modernen" Logik stoßen wir auf eine systematische Verwechslung von (logischen) Implikationsgesetzen und problematischen Enthymemen. So soll etwa der *Wenn*-Satz „Wenn alle Antilopen Säugetiere, und wenn alle Säugetiere Wirbeltiere sind, dann sind alle Antilopen Wirbeltiere" ein Beispiel für den Syllogismus *Barbara*, der ein logisches Implikationsgesetz darstellt, sein[29]. Die Relata dieses Wenn-Satzes sind eindeutig Sätze, nämlich die Gesetzesaussagen „alle Antilopen sind Säugetiere und alle Säugetiere (sind) Wirbeltiere" und „alle Antilopen sind Wirbeltiere". Der *Wenn*-Satz ist daher keine Implikation, sondern ein problematisches Enthymem; dieses ist nur unter der Bedingung wahr, dass der zoologisch wenig gebildete Sprecher sich über die Wahrheit der expliziten Prämisse „alle Antilopen sind Säugetiere und alle Säugetiere Wirbeltiere" im Ungewissen ist und er sich implizit auf ein geeignetes Gesetz stützt; als dieses Gesetz kommt nur das logische Verkettungsgesetz (eben das logische Verkettungsgesetz *Barbara*) „Wenn jedem Gegenstand, dem ein Prädikat S zukommt, ein Prädikat M zukommt, und wenn jedem Gegenstand, dem dieses Prädikat M zukommt, auch ein Prädikat P zukommt, dann kommt jedem Gegenstand, dem das Prädikat S zukommt, auch das Prädikat P zu" in Frage. Unter diesen Bedingungen liegt ein korrekter problematischer enthymematischer Schluss vor; er ist paraphrasierbar als „Wenn alle Antilopen Säugetiere sein sollten und alle Säugetiere Wirbeltiere sein sollten, so sind alle Antilopen Wirbeltiere". Wenn der Sprecher jedoch weiß, dass alle Antilopen Säugetiere und alle Säugetiere Wirbeltiere sind, ist nur das *assertorische* Enthymem „Weil alle Antilopen Säugetiere sind, und weil alle Säugetiere Wirbeltiere sind, deshalb sind alle Antilopen Wirbeltiere" korrekt (in beiden Fällen wird implizit auf dasselbe logische Gesetz, den Modus *Barbara*, Bezug genommen).

Ein komplexeres Beispiel für ein Enthymem, das als seine beiden Subsumtionsprämissen Implikationsgesetze aufweist, von denen eines irreal ist, führt **Kurt Joachim Grau** in seinem traditionell orientierten „Grundriss der Logik" im Anschluss an **Heraklit** an: „Bestände das Glück in körperlichen Lustgefühlen, so müsste man die Ochsen glücklich nennen, wenn sie Erbsen fressen". Hier liegt eine Verflechtung von fünf verschiedenartigen Wenn-Sätzen vor. Man kann das Enthymem auch formulieren: „Wenn$_{i}$ dann$_{ii}$ ein Wesen immer glücklich wäre, wenn$_{ii}$ es körperliche Lustgefühle spürt {dieses Gesetz hält der Sprecher für falsch}, dann$_{i}$ wären die Ochsen dann$_{iii}$ glücklich, wenn$_{iii}$ sie Erbsen fressen."

Es liegt hier ein Enthymem mit einer unausgesprochenen assertorischen Gesetzesprämisse, mit einer ausgesprochenen kontrafaktischen und einer unausgesprochenen assertorischen Subsumtionsprämisse vor. Dem implizit bleibenden logischen Verkettungsgesetz ℂℂℂ

> $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ – *Wenn*$_{iv}$ *ein erstes Ereignis ein zweites, und dieses zweite ein drittes Ereignis impliziert, dann*$_{iv}$ *impliziert dieses erste Ereignis dieses dritte Ereignis*

werden zwei konkrete Implikationsgesetze subsumiert, von denen eines irreal ist; nur diese irreale Subsumtionsprämisse wird im grauschen Konditionalsatz explizit ausgesprochen. *Das Wenn*$_{i}$*-dann*$_{i}$ drückt die umfassende kontrafaktische Folgerungsbeziehung (und kein Implikationsgesetz) aus, welches die expliziten Prämissen und die Konklusion (also Sätze) verknüpft. Wäre auch das implizite logische Implikationsgesetz – die Wenn$_{iv}$-dann$_{iv}$-Beziehung – explizit, müsste sie ihres assertorischen Charakters wegen mit *Weil* eingeleitet werden. Das *Wenn*$_{ii}$*-dann*$_{ii}$ ist das *Wenn* des kontrafaktischen Implikationsgesetzes, welches eine der Subsumtionsprämissen darstellt; *das Wenn*$_{iii}$*-dann*$_{iii}$ drückt das irreale Implikationsgesetz in der Konklusion aus. Vollständig stellt sich dieser enthymematische Schluss wie folgt dar:

logische *Gesetzesprämisse* assertorisch, implizit	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ *Wenn*$_{iv}$ *ein erstes Ereignis ein zweites, und dieses zweite ein drittes Ereignis impliziert, dann*$_{iv}$ *impliziert dieses erste Ereignis dieses dritte Ereignis*	
1. Subsumtionsprämisse assertorisch, implizit	Wenn$_{v}$ die Ochsen Erbsen fressen, dann$_{v}$ spüren sie körperliche Lustgefühle.	Diese drei Sätze sind durch das Wenn$_{i}$-dann$_{i}$ des kontrafaktischen Enthymems verbunden
2. Subsumtionsprämisse irreal-kontrafaktisch, explizit	Wenn$_{ii}$ ein Wesen körperliche Lustgefühle spürt, dann$_{ii}$ ist es glücklich (gilt in Wirklichkeit nicht).	
Konklusion irreal-kontrafaktisch	Wenn$_{iii}$ die Ochsen Erbsen fressen, dann$_{iii}$ sind sie glücklich (gilt in Wirklichkeit nicht).	

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass es einerseits immer möglich ist, die ganz unterschiedlichen Bedeutungen des umgangssprachlichen *Wenn* auseinander zu halten, und dass andererseits die unausgesprochenen Prämissen eines jeden Enthymems expliziert werden können.

4.5 Konditionale, bei denen das Bezugsgesetz keine Implikation ist.

Wenn den meisten Begründungs- und Konditionalenthymemen auch implizit ein Implikationsgesetz zu Grunde liegen dürfte, so kann doch jede Art von bedingungslogischem Zusammenhang, der die Beziehung $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ involviert, Bezugsgesetz eines Begründungsenthymems $A \rightrightarrows B$ oder eines Konditionals A⇨B und A➲B sein. Gilt etwa ein Exklusionsgesetz $E_A \uparrow E_B$, und weiß ein Sprecher, dass in einer bestimmten Situation e_A vorliegt, dann kann er den *Weil*-Satz formulieren „Weil A, deshalb nicht-B"; weiß der Sprecher nicht genau ob e_A vorliegt, kann er sagen, „Wenn A wahr sein sollte, dann ist ~B wahr"; weiß er, dass A falsch ist, kann er das kontrafaktische Konditional „Wenn A wahr wäre, dann wäre ~B wahr"; es wird unter unausgesprochener Bezugnahme auf das Gesetz assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch nach $\mathbb{D}/\alpha$ geschlossen. Es kommen die Schlussschemata $\mathbb{D}/\alpha$ und $\mathbb{D}/\gamma$ in Frage, weil diese besagen $\mathcal{N}^e(E_A,\sim E_B)$ und $\mathcal{N}^e(E_B, \sim E_A)$.

Ein Beispiel für ein $\mathbb{D}$-Enthymem mit dem (unausgesprochenen) Gesetzesprämisse *Eine Person darf im gleichen Prozess nicht zugleich Ankläger und Richter sein* ist der Satz: *Wenn Hans in diesem Prozess Ankläger bzw. Richter ist/sein sollte, darf er nicht Richter bzw. Ankläger sein*. Ist dem Sprecher nicht bekannt, ob Hans in einem Prozess Ankläger bzw. Richter ist, kann er nach $\mathbb{D}/\alpha$ bzw. $\mathbb{D}/\gamma$ problematisch schließen. Ist dem Sprecher bekannt, dass Hans in einem Prozess Ankläger bzw. Richter ist, kann er nach $\mathbb{D}/\alpha$ bzw. $\mathbb{D}/\gamma$ nur assertorisch schließen: *Weil Hans in diesem Prozess Ankläger bzw. Richter ist, darf er nicht Richter bzw. Ankläger sein*. Ist dem Sprecher bekannt, dass Hans in einem Prozess nicht Ankläger bzw. nicht Richter ist, kann er nach $\mathbb{D}/\alpha$ bzw. $\mathbb{D}/\gamma$ kontrafaktisch schließen: *Wenn Hans in diesem Prozess Ankläger bzw. Richter wäre, dürfte er nicht Richter bzw. Ankläger sein*.

Es kann auch ein Alternationsgesetz $E_A \vee E_B$ implizites Bezugsgesetz des Begründungssatzes „Weil nicht-A, deshalb B", des problematischen Konditionals „Wenn A falsch sein sollte, dann ist B wahr" oder des kontrafaktischen Konditionals „Wenn A falsch wäre, wäre B wahr" sein. Die Enthymeme „Weil Hans' Auto keine Scheibenbremsen hat, hat es Trommelbremsen", „Wenn Hans' Auto keine Scheibenbremsen hat (haben sollte), hat es Trommelbremsen" und „Wenn Hans' Auto keine Trommelbremsen hätte, dann hätte es Scheibenbremsen" nehmen alle implizit auf das $\mathbb{A}$-Gesetz „Ein Auto hat Scheiben- oder Trommelbremsen oder sowohl Scheiben- wie Trommelbremsen" Bezug. Für solche Enthymeme kommen die Schlussschemata $\mathbb{A}/\beta$ und $\mathbb{A}/\delta$ in Frage, wegen $\mathcal{N}^e(\sim E_A,E_B)$ bzw. $\mathcal{N}^e(\sim E_B,E_A)$.

Die Partikel *Oder* drückt, wenn er sich nicht auf Aussagen, sondern auf Ereignisklassen bezieht, die *bedingungslogische Gesetzesbeziehung der einzigen Alternativen* aus, wobei oft offen bleibt, ob die Alternativen verträglich sind oder nicht. Ein Beispiel für ein solches Gesetz ist „Ein Auto hat Scheiben- oder Trommelbremsen oder sowohl Scheiben- wie Trommelbremsen". Die Formen der verträglichen ($\mathbb{A}$) und unverträglichen einzigen Alternativen ($\mathbb{J}$) sind in aller Regel unselbständige Formen: nur unter Bedingungen bestimmter Art kann gelten, dass von 2 (oder mehr) Sachverhalten/Ereignissen mindestens eines oder genau eines vorliegt[30]. Sind die Sachverhalte/Ereignisse q und r unverträgliche einzige Alternativen, dann in Bezug auf einen dritten Sachverhalt p; es gilt p∶ q >< r, genauer [pqr ⟦𝕏].

Wenn die Partikel *oder* jedoch Sätze verbindet, drückt er einen enthymematischer Schluss – ein **Oder-Enthymem** – aus, bei dem nur die Konklusion explizit angesprochen wird. Wird „A oder B" („In einer bestimmten Situation liegt e_A oder e_B vor") behauptet, dann wird implizit die Gesetzesprämisse E_C∶ $E_A \vee E_B$ und die implizite Subsumtionsprämisse C („e_C liegt vor") behauptet; nur dann kann begründet gesagt werden, dass in der gegebenen Situation e_A oder e_B vorliegt. „A oder B (oder beide)" kürze ich durch „A ⊻ B", „A oder B (aber nicht beide)" durch „A ≍ B" ab.

Das vollständige Schema eines solchen Schlusses wäre:

(implizite) Gesetzesprämisse	[E_C,E_A,E_B ⟦𝕏] (bei E_C liegt von E_A und E_B genau eines vor)
(implizite) Subsumtionsprämisse)	C (in der gegebenen Situation ist liegt e_C vor)
explizite Konklusion	entweder A oder B (es liegt entweder e_A oder e_B vor)

Wenn ich also weiß, dass Hans ein Auto hat, kann ich in Bezug auf das 𝔸 - Gesetz „Ein Auto hat Scheiben- oder Trommelbremsen oder beides" schließen und das Oder-Enthymem behaupten „Hans' Auto hat Scheiben- oder Trommelbremsen oder beides". Auch wenn in einem Oder-Enthymem nur die Konklusion explizit ausgesprochen wird, so können doch die unausgesprochenen Prämissen unschwer rekonstruiert werden; es sind die beiden Fragen zu beantworten: Unter welcher Art von Bedingung sind derartige Ereignisse Alternativen? Liegt im vorliegenden Falle diese Bedingung vor? Ein bekanntes Beispiel aus der Literatur ist das Oder-Enthymem „Either the butler or the gardener did it"[31]. Nehmen wir an, es geht um eine Mordtat. Implizit ist eine Gesetzmäßigkeit der Form (E_C∶ $E_A \vee E_B$) vorausgesetzt, aus der hervorgeht, dass als Mörder nur entweder der Butler oder der Gärtner (oder beide) in Frage kommen (weil etwa beide als einzige am Tatort waren); das implizite Gesetz ist dann: Wenn zwei Personen als einzige am Tatort sind, dann ist entweder die eine oder die andere (oder beide) der Täter; die implizite Subsumtionsprämisse besagt, dass der Gärtner und der Butler beide am betreffenden Tatort waren.

Wer ein Oder-Enthymem formuliert, teilt mit, dass er sich sicher ist, dass eine der Alternativen vorliegt, dass er jedoch nicht weiß, welche der Alternativen tatsächlich vorliegt. Da die von A ⊻ B vorausgesetzte Gesetzesbeziehung $E_A \vee E_B$ einerseits $\mathcal{N}^e$(~E_A,E_B), andererseits $\mathcal{N}^e$(~E_B,E_A) beinhaltet, sind genau dann, wenn A ⊻ B korrekt ist, ebenfalls die problematischen Konditionale ~A⇨B und ~B⇨A korrekt. Ist A ≍ B korrekt, sind, weil bei E_A >< E_B gilt $\mathcal{N}^e$(E_A,~E_B), $\mathcal{N}^e$(~E_A,E_B), $\mathcal{N}^e$(E_B,~E_A) und $\mathcal{N}^e$(~E_B,E_A), die vier problematischen Konditionale A⇨~B, ~A⇨B, B⇨~A und ~B⇨A richtig. Voraussetzung dafür, dass dem Enthymem A ⊻ B zwei, dem Enthymem A ≍ B vier problematische Konditionale entsprechen, ist, dass der Sprecher nicht sicher ist, welche der Alternativen vorliegt. Deshalb werden zuweilen Oder-Enthymeme und problematische Konditionale miteinander identifiziert[32]. Die impliziten Voraussetzungen des Oder-Enthymems sind allerdings komplexer als jene des problematischen Konditionals. Während A⇨B einen enthymematischen problematischen Schluss ausdrückt, und dabei die problematische Prämisse(n) und die problematische Konklusion explizit anführt, drückt ein Oder-Enthymem A ⊻ B die Konklusion eines assertorischen Schlusses aus: dass von beiden Aussagen A und B Aussagen zumindest eine wahr ist, ist die kategorische, ohne Wahrheitsvorbehalt behauptete Folgerung aus der Geltung des Gesetzes E_C∶ $E_A \vee E_B$ und der Wahrheit von C[33]. Problematisch bleibt dabei nur, welche der beiden Aussagen wahr sind.

Auch ein Replikationsgesetz $E_A \leftarrow E_B$ kann (implizites) Bezugsgesetz eines Enthymems sein. **J.Kim** führt das Konditional „Wenn ich den Fenstergriff nicht gedreht hätte, hätte ich das Fenster nicht geöffnet" an[34]. Implizit liegt das 𝔹 - Gesetz zu Grunde „Nur wenn man den Fenstergriff dreht, kann man das Fenster öffnen"; der Sprecher weiß, dass er den Fenstergriff gedreht hat, unterstellt kontrafaktisch das Gegenteil und schließt dann nach dem Schlussschema 𝔹/β, dass es unter dieser Voraussetzung unmöglich gewesen wäre, das Fenster zu öffnen. Es lässt sich assertorisch von ~A auf ~B schließen: „Weil ich den Fenstergriff nicht gedreht habe, habe ich das Fenster nicht geöffnet"; der problematische Schluss von ~A auf ~B lautet „Wenn ich den Fenstergriff nicht gedreht haben sollte, habe ich das Fenster nicht geöffnet". Auf diese drei Weisen lässt sich auch von A auf B schließen; da unter Voraussetzung $E_A \leftarrow E_B$ bei E_A E_B nicht notwendig, sondern nur möglich ($\mathcal{K}$) ist, ist dies ein Schluss auf die Möglichkeit ($\mathcal{K}$):

assertorisch:	Weil ich den Fenstergriff gedreht habe, konnte ich das Fenster öffnen (was es möglich ($\mathcal{K}$), dass ich das Fenster öffne)
problematisch:	Wenn ich den Fenstergriff gedreht haben sollte, konnte ich das Fenster öffnen

kontrafaktisch: Wenn ich den Fenstergriff geöffnet hätte, hätte ich das Fenster öffnen können.

Sätze des Ausdrucksschemas „Weil A, deshalb B“, „Wenn A wahr sein sollte, dann ist B wahr“ und „Wenn A wahr wäre, wäre B wahr“ behaupten zwischen den in A und B angesprochenen Ereignissen e_A und e_B einen notwendigen Zusammenhang: das Vorliegen von e_A macht das Vorliegen von e_B notwendig; es ist überflüssig, dieser Notwendigkeit einen gesonderten Ausdruck zu geben, indem etwa gesagt würde „Weil/wenn e_A vorliegt, deshalb/dann liegt notwendig e_B vor“. In diesen Fällen wird enthymematisch auf $\mathcal{N}$ geschlossen, etwa nach den Schlussschemata $\mathbb{C}/\alpha$, $\mathbb{A}/\beta$, $\mathbb{A}/\delta$, $\mathbb{E}/\gamma$, $\mathbb{J}/\beta$, $\mathbb{B}/\gamma$, usw.

Es können jedoch auch alle anderen Schlussschemata als Grundlage der drei Arten von Enthymemen werden, etwa das Schlussschema $\mathbb{C}/\delta$. Gilt das Implikationsgesetz „Wenn der Boden intensiv bearbeitet wird, sind die Erträge höher“, und ist einem Sprecher klar, dass dieses Jahr die Erträge von Hans nicht höher ausfallen, kann er nach dem Schlussschema $\mathbb{C}/\delta$ das assertorische Enthymem formulieren „Weil die Erträge von Hans diese Jahr nicht höher ausfallen, ist es unmöglich, dass Hans den Boden intensiv beackert hat“. Wegen der Äquivalenz $\mathcal{N}(\sim p) \leftrightarrow \mathcal{U}(p)$ kann jeder Notwendigkeitsschluss als Unmöglichkeitsschluss und jeder Unmöglichkeitsschluss als Notwendigkeitsschluss formuliert werden. Die beiden apodiktischen Modalitäten müssen keinen gesonderten expliziten Ausdruck erhalten[35].

Ist der Sprecher sich nicht sicher, ob Hans’ Erträge diese Jahr höher sind, kann er den problematischen Schluss nach $\mathbb{C}/\gamma$ ziehen „Wenn Hans’ Erträge höher ausfallen (ausfallen sollten), dann ist es möglich ($\mathcal{K}$), dass er seinen Boden intensiver bearbeitet hat“. Wenn der Sprecher weiß, dass die Erträge von Hans nicht höher ausgefallen sind, kann er den kontrafaktischen Schluss nach $\mathbb{C}/\gamma$ aussprechen „Wenn Hans’ Erträge höher ausgefallen wären, dann wäre es möglich ($\mathcal{K}$), dass er seinen Boden intensiver bearbeitet hätte“. Beim Schließen auf die nicht-apodiktische Modalität $\mathcal{K}$ muss die Modalität einen ausdrücklichen, gesonderten Ausdruck erhalten[36].

Jedes Schlussschema einer logischen Relation kann in einer solchen enthymematischen und problematischen Weise vollzogen werden. Generell gilt, wenn **Mod** eine beliebige Modalität bezeichnet:

Bezugsgesetz:	**Mod**(E_A,E_B)
Subsumtionsprämisse:	A (es liegt vor e_A) (assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch)
Konklusion:	**Mod**(e_B) (assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch

Die Enthymeme, in denen auf die Möglichkeit $\mathcal{K}$ geschlossen wird, sind genauso stringent und wichtig wie die Schlüsse auf die Notwendigkeit. Alle drei Arten von Enthymemen sind relative Modalisierungen. Es ist natürlich auch ein Schluss auf die nicht-elementaren Modalitäten möglich: *Wenn A, dann ist e_B jedenfalls nicht unmöglich* ($\sim\mathcal{U} = \mathcal{P}$); *Wenn A, dann ist e_B jedenfalls nicht notwendig* ($\sim\mathcal{N} = \mathcal{C}$). Da jedes Konditional, und jedes begründende Enthymem auf ein bedingungslogisches Gesetz Bezug nimmt und gemäß eines bestimmten Schlussschemas vorgenommen wird, ist jeder dieser Schlüsse ein assertorischer, oder problematischer, oder kontrafaktischer Schluss auf die Notwendigkeit $\mathcal{N}$, oder die Unmöglichkeit $\mathcal{U}$, oder die Möglichkeit $\mathcal{K}$.

Da ein Konditional, in dessen Formulierung ein explizites Modalitätenwort fehlt, immer auf eine apodiktische Modalität schließt, müssen nicht-apodiktische Modalitäten, auf die geschlossen wird, immer explizit und ausdrücklich ausgesprochen werden. KNEALE und KNEALE sehen das anders[37]; sie schlagen vor, zwischen **conditionals of primitive kind** einerseits und **modal conditionals**, bei denen zum Nachsatz (consequent), ein modales Wort beigefügt wird, andererseits zu unterscheiden. Dieses Modalwort bringe den besonderen Zusammenhang zwischen dem Antezedens und dem Konsequens, damit die Gründe zum Ausdruck, die die Behauptung des Konditionals rechtfertigen. Um etwa seine Gründe für das Konditional „Oxford will win the boat race if the water is calm“ mitzuteilen, könnte der Sprecher sagen „Oxford cannot fail to win if the water is calm“. „If the speaker is pressed to give his reason, he may say that it is impossible for the antecedent to be true while the consequent is false.“[38] Die Autoren meinen deshalb, die Paraphrase $A \Rightarrow \mathcal{U}(\sim e_B)$ von $A \Rightarrow B$ sei „not a mere repetition of his original assertion.“ (137) $A \Rightarrow B$ und $A \Rightarrow \mathcal{U}(\sim e_B)$ haben jedoch genau dieselbe Bedeutung. Diese zusätzliche, redundante Kennzeichnung der Modalität stellt auch nicht die Explikation der impliziten Gründe des jeweiligen Schlusses dar; diese unausgesprochenen Gründe können nur in einer generellen Gesetzmäßigkeit bestehen, etwa der Art, dass die Mannschaft von Oxford einer solchen Art von Mannschaft angehört, die bei Windstille ausnahmslos den Sieg davon trägt. Die Modalisierung (notwendig = unmöglich nicht) resultiert aus der Subsumtion des Einzelfalls (die derzeitige Oxforder Mannschaft) unter jenes Gesetz, und sie gehört ganz wesentlich zum Gehalt des

Satzes „Oxford will win the boat race if the water is calm". Bei den „conditionals of primitive kind" soll den **KNEALEs** zufolge diese notwendige Beziehung von Antezedens und Konsequens fehlen; dies zeigten v.a. die Konditionale, die bedingte Absichten, bedingte Aufforderungen usw. ausdrücken. Aber auch diese Konditionale stellen immer eine Modalisierung dar, die freilich im Entschluss der Handelnden gründet. Dass die Unterscheidung der „primitive" und der „modal conditionals" ungültig ist, geht schon daraus hervor, dass es auch bedingte Versprechen, bedingte Aufforderungen usw. gibt, die eine nicht dem $\mathcal{N}$ entsprechende Konditionalisierung beinhalten. Es gibt die dem $\mathcal{N}$ entsprechende Modalisierung: „Wenn es morgen regnen sollte, gehe ich ins Kino (dann ist es ausgeschlossen, dass ich nicht ins Kino gehe)"; es gibt die $\mathcal{K}$ entsprechende Modalisierung: „Wenn es morgen regnet, gehe ich vielleicht ins Kino". Der Sprecher gibt im ersten Fall kund, dass es auf jeden Fall ins Kino geht, im zweiten Fall, dass er möglicherweise ins Kino geht, möglicherweise auch nicht ins Kino geht.

4.6 Konditionale und bedingte Wahrscheinlichkeit

Es ist im Rahmen der „modernen Logik" vielfach versucht worden, die Struktur der Konditionale auf der Basis des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit zu klären. Es gibt in der Tat wichtige Zusammenhänge und Überschneidungen zwischen den Konditionalen und den Beziehungen der bedingten Wahrscheinlichkeit. Die bedingungslogischen Gesetze, auf welche Konditionale Bezug nehmen, sind Beziehungen relativer Modalisierung. Die Struktur der relativen Modalisierung für die Implikation $E_A \rightarrow E_B$ setzt sich beispielsweise aus vier „Modalisierungsfällen " zusammen, die in der Modalitätenmatrix ($\mathcal{NKKU}$) aufgeführt sind[39]. Zumindest teilweise können diese relativen Modalisierung als bedingte Wahrscheinlichkeiten gekennzeichnet werden. Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_B unter der Voraussetzung des Vorliegens des Ereignisses E_A wird durch den Ausdruck „$p\,(E_B/E_A)$" bezeichnet und durch den Quotienten $|E_A \cap E_B|/|E_A|$ bzw. $p(E_A \cap E_B)/p(E_A)$ berechnet[40], der eine rationale Zahl zwischen 0 und 1 ergibt.

Modalisierungsfall α: Gilt $E_A \rightarrow E_B$ so ist es bei E_A notwendig ($\mathcal{N}$), dass E_B vorliegt; dies entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(E_B/E_A) = 1$; da E_A nur mit E_B vorkommt, gilt $E_A \cap E_B = E_A$, also $|E_A \cap E_B| / |E_A| = 1$.

Modalisierungsfall δ: Gilt $E_A \rightarrow E_B$, so ist es bei $\sim E_B$ unmöglich ($\mathcal{U}$), dass E_A vorliegt, die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(E_A/{\sim}E_B) = |E_A \cap {\sim}E_B| / |E{\sim}B|$ hat den Wert 0, weil $E_A \frown {\sim}E_B$ nicht-realmöglich ist und deshalb gilt $|E_A \cap {\sim}E_B| = 0$.

Modalisierungsfall β: Gilt $E_A \rightarrow E_B$, so ist bei $\sim E_A$ E_B möglich im Sinne von $\mathcal{K}$; dabei dürfte in den meisten Fällen $\mathcal{K}$ die Modalität $\mathcal{Z}$ darstellen: liegt bei $\sim E_A$ nämlich E_B *nicht* vor, so bleibt es in der Regel ganz unbestimmt, was vorliegt – irgendetwas, nur eben nicht E_B; es gibt keine Gesamtheit wohlbestimmter Alternativen, von denen zumindest eine vorliegt, falls E_B nicht vorliegt (wir haben eine unbestimmte oder limitative Negation von E_B). Aus diesem Grunde kann in diesem Falle den Ereignissen E_B prinzipiell keine bedingte Wahrscheinlichkeit $p(\sim E_A/E_B)$ zugeordnet werden.

Modalisierungsfall γ: Gilt $E_A \rightarrow E_B$, so ist bei E_B das Vorliegen von E_A möglich ($\mathcal{K}$) – jetzt freilich im Sinne der Modalität $\mathcal{M}$; denn liegt bei E_B E_A *nicht* vor, dann liegt eine andere hinreichende Bedingung für E_B vor; E_A gehört zu einer bestimmten Menge alternativer hinreichender Bedingungen für E_B. Wenn alle Alternativen und ihre relativen Vorkommenshäufigkeiten bekannt sind, kann die Möglichkeit $\mathcal{M}$ durch einen Wahrscheinlichkeitswert $p(E_A/E_B)$ näher bestimmt werden.

Nicht nur „Notwendigkeitsgesetze" (d.h. Gesetze, die $\mathcal{N}^e(E_A, E_B)$, d.h. $p(E_B/E_A) = 1$ und $p(E_{\sim A}/E_{\sim B}) = 0$ involvieren), auch Gesetze bedingter Wahrscheinlichkeit können zu (impliziten) Bezugsgesetzen enthymematischer Schlüsse werden. Wenn eine bedingte Wahrscheinlichkeitsbeziehung Bezugsgesetz eines Schlusses wird, kann dieser Schluss assertorisch oder problematisch oder kontrafaktisch sein – der problematische Charakter des Konditionals $A \Rightarrow B$ darf also nie an dem zu Grunde gelegten Gesetz einer bedingten Wahrscheinlichkeit festgemacht werden. Ob ein enthymematischer Schluss assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch ist, hängt nicht davon ab, ob das Bezugsgesetz ein Notwendigkeits- oder ein Wahrscheinlichkeitsgesetz ist, sondern einzig davon, ob der Vordersatz A wahr, ungewiss oder falsch ist.

Es gelte das Gesetz $p(E_B/E_A) = k$; weiß ein Sprecher, dass A wahr ist (dass in gegebenen Einzelfall also e_A vorliegt), kann er unter Bezug auf dieses Gesetz *assertorisch* schließen: „Weil A, deshalb liegt e_B mit einer Wahrscheinlichkeit von k vor"; man kann schreiben „$A \rightrightarrows p(e_B) = p(E_B/E_A)$". Ist dem Sprecher nicht bekannt, ob A wahr ist, bzw. dass A falsch ist, kann er *problematisch* bzw. *kontrafaktisch* schließen: „Wenn A wahr sein sollte, dann liegt e_B mit einer

Wahrscheinlichkeit von k vor“ – „A ⇨ $p(e_B) = p(E_B/E_A)$“, bzw. „Wenn A wahr wäre, dann würde e_B mit einer Wahrscheinlichkeit von k vorliegen“ – „A ➲ $p(e_B) = p(E_B/E_A)$“.

Die *subjektive* Ungewissheit oder „Möglichkeit“, die mit der Wahrheit von A verbunden ist, und auf der der problematische Charakter eines Konditional A ⇨ B basiert, muss strikt von der *objektiven* Möglichkeit $\mathcal{M}$ unterschieden werden, auf der die durch E_A bedingte Wahrscheinlichkeit von E_B beruht. Deshalb darf auch die Tatsache, dass man von einem Ereignis e_A weiß, dass es mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit m (mit $0 < m < 1$) vorliegt, nicht mit der subjektiven Ungewissheit konfundieren, die der Aussage A im problematischen Konditional A ⇨ B eignet. Die Aussage, dass e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegt, ist nicht problematisch, sondern assertorisch. Wird diese Aussage „$p(e_A) = m$“ dem Notwendigkeitsgesetz $E_A \rightarrow E_B$ subsumiert, resultiert das assertorische Enthymem „Weil das Ereignis e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegt, liegt auch das Ereignis e_B mit der Wahrscheinlichkeit m vor“. Wird diese Aussage dem Wahrscheinlichkeitsgesetz $p(E_B/E_A) = k$ subsumiert, resultiert das Enthymem „Weil das Ereignis e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegt, liegt das Ereignis e_B mit der Wahrscheinlichkeit $p(E_A) \cdot p(E_B/E_A)$ vor“[41].

Der Sprecher kann freilich auch subjektiv darüber im Ungewissen sein, ob e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegt oder nicht; in diesem Falle ist nur eine problematische Subsumtion unter das Gesetz $E_A \rightarrow E_B$ bzw. $p(E_B/E_A) = k$ möglich; bezüglich des Gesetzes $E_A \rightarrow E_B$ gilt dann „Wenn das Ereignis e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegen sollte, liegt auch das Ereignis e_B mit der Wahrscheinlichkeit m vor“, bezüglich des Gesetzes $p(E_B/E_A) = k$ gilt „Wenn das Ereignis e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegen sollte, liegt das Ereignis e_B mit der Wahrscheinlichkeit $p(E_A) \cdot p(E_B/E_A)$ vor“. Weiß der Sprecher, dass e_A nicht mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegt, kann er kontrafaktisch bezüglich $E_A \rightarrow E_B$ schließen „Wenn das Ereignis e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegen würde, würde auch das Ereignis e_B mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegen“. Er kann kontrafaktisch bezüglich $p(E_B/E_A) = k$ schließen „Wenn das Ereignis e_A mit der Wahrscheinlichkeit m vorliegen würde, läge das Ereignis e_B mit der Wahrscheinlichkeit $p(E_A) \cdot p(E_B/E_A)$ vor“. Der problematische Charakter des Konditionals kann nicht durch eine bedingte Wahrscheinlichkeit erklärt werden, denn sowohl wenn das Bezugsgesetz eine bedingte Wahrscheinlichkeit ist, als auch wenn das Vorliegen von e_A als wahrscheinlich angesehen wird, kann der enthymematische Schluss assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch sein.

Dieser Zusammenhang von Konditionalen und dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit wird von Vertretern der „modernen Logik“ verkannt, wenn sie versuchen, die generelle Bedeutung des Konditionals A ⇨ B ausgehend von der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(E_B/E_A)$ zu bestimmen. Der problematische Aspekt des Konditionals A ⇨ B, der doch nur den Vordersatz A, und dadurch bedingt den Nachsatz B betrifft, wird dem Konditional als Ganzem zugeschrieben, und dann mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(E_B/E_A)$ verwechselt. Für **E.W.ADAMS** besagt die grundlegende Annahme der Konditionallogik, dass die Wahrscheinlichkeit eines indikativischen (problematischen) Konditionals der Ausdrucksform „If A is the case, then B is“ eine bedingte Wahrscheinlichkeit sei[42]. Der Grad der Behauptbarkeit (assertability) eines Konditionals *if A, then B* hängt **DAVID LEWIS** und **FRANK JACKSON** zufolge von der Wahrscheinlichkeit $p(B/A)$ ab[43]; dabei wird der Aspekt des Problematischen, der zum Konditional A ⇨ B gehört, auf das Konditional als Ganzes übertragen und als Wahrscheinlichkeit bestimmt. „The truthful speaker … is willing to assert what he takes to be very probably true. He deems it permissible to assert A only if $p(A)$ is sufficiently close to 1.“ Der Wahrscheinlichkeitswert des Konditionals würde den jeweils aktuellen subjektiven Grad der Überzeugung (belief) bestimmen.[44] Das Konditional A ⇨ B bringe zum Ausdruck, dass die Wahrscheinlichkeit, dass e_A zusammen mit e_B vorliege, sehr viel größer sei. als die Wahrscheinlichkeit, dass e_A ohne e_B vorliege[45].

Jener angebliche Fundamentalsatz der Konditionallogik, wonach ein Konditional A ⇨ B von sich selbst ausdrückt, seine Geltung sei nur wahrscheinlich (hochwahrscheinlich, nahe beim Wert 1, größer als $p(\sim E_B/E_A)$, etc.) oder selber problematisch, ist falsch. Jedes Enthymem A ⇉ B, A ⇨ B und A ➲ B stellt die *assertorische* Behauptung auf, dass bei e_A der Sachverhalt/das Ereignis e_B notwendig vorliegt, und je nachdem, ob der Vordersatz A als wahr, ungewiss oder falsch gilt, wird dieser Zusammenhang definitiv als tatsächlich, als unter Wahrheitsvorbehalt stehend oder als kontrafaktisch ausgegeben. Ein Konditional A ⇨ B *selber* kann nur dann unter Wahrheitsvorbehalt gestellt bzw. durch eine Wahrscheinlichkeit gekennzeichnet werden, wenn es als untergeordneter Nachsatz eines übergeordneten Wahrscheinlichkeitsenthymems oder Wahrscheinlichkeitskonditionals auftritt; das übergeordnete assertorische Konditional macht eine Aussage über das untergeordnete Konditional. Dies ist der Fall, wenn nicht nur der Vordersatz A, sondern auch das Gesetz $E_A \rightarrow E_B$, dem e_A subsumiert wird, durch einen Wahrheitsvorbehalt oder eine Wahrscheinlichkeit gekennzeichnet ist. Aus einem unter Wahrheitsvorbehalt stehenden Gesetz $E_A \rightarrow E_B$ wird A ⇨ B gefolgert, wobei der Wahrheitsvorbehalt auf dieses Konditional übertragen wird; $E_A \rightarrow E_B$ ist der problematische Vordersatz, A ⇨ B der problematische

Nachsatz eines übergeordneten *assertorischen* Konditionals „Wenn $E_A \rightarrow E_B$ gelten sollte, dann ist B wahr, wenn A wahr sein sollte“ – das Schema dieses Konditionals lässt sich so darstellen: „$(E_A \rightarrow E_B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“. Wir haben hier eine spezielle Form eines enthymematischen Konditionals, für den der Satz „Wenn es zutreffen sollte, dass jemand seine Gesundheit schädigt, wenn er raucht, dann schädigt Hans seine Gesundheit, wenn er rauchen sollte“ ein Beispiel darstellt; auch für dieses Enthymem müssen sich alle notwendigen Prämissen rekonstruierbar sein, die sicherstellen, dass aus dem Vordersatz $E_A \rightarrow E_B$ der Nachsatz $A \Rightarrow B$ folgt; die vollständige Darstellung des Schlusses lautet:

implizites assertorisches Bezugsgesetz:	Genau dann, wenn ein Gesetz $E_A \rightarrow E_B$ gilt und die Wahrheit der Aussage A ($\equiv \mathcal{B}(e_A)$) unter Wahrheitsvorbehalt steht, gilt das Konditional $A \Rightarrow B$
explizite, problematische Subsumtionsprämisse:	Wenn jemand raucht, schädigt er seine Gesundheit (ein Gesetz der Form $E_A \rightarrow E_B$)
implizite, problematische Subsumtionsprämisse:	Hans raucht (eine entsprechende Aussage der Form $A \equiv \mathcal{B}(e_A)$)
explizite problematische Konklusion:	Wenn Hans rauchen sollte, schädigt er seine Gesundheit (ein Konditional der Form $A \Rightarrow B$)

Für den Fall, dass das Gesetz $E_A \rightarrow E_B$ falsch ist, gilt das kontrafaktische Konditional „Wenn $E_A \rightarrow E_B$ gelten würde, dann wäre B wahr, wenn A wahr sein sollte“; Nachsatz ist hier ein problematisches Konditional, dessen Geltung kontrafaktisch ist.

Die Geltung eines Gesetze $E_A \rightarrow E_B$ kann wahrscheinlich sein; in diesem Falle gibt es (unter der zusätzlichen Voraussetzung der Ungewissheit von A) das assertorische Enthymem „Weil die Geltung von $E_A \rightarrow E_B$ wahrscheinlich ist, ist es wahrscheinlich, dass , wenn e_A vorliegen sollte, e_B vorliegt“[46]. Diese Wahrscheinlichkeit gilt nicht für den übergeordneten Weilsatz als Ganzen, sondern nur für die Teilsätze; der Nachsatz ist ein als wahrscheinlich gekennzeichnetes Konditional. Wenn es ungewiss ist, dass die Geltung von $E_A \rightarrow E_B$ eine bestimmte Wahrscheinlichkeit hat, gilt unter der zusätzlichen Voraussetzung der Ungewissheit von A das Konditional „Wenn die Geltung von $E_A \rightarrow E_B$ wahrscheinlich sein sollte, ist es wahrscheinlich, dass e_B vorliegt, wenn e_A vorliegen sollte“; Nachsatz ist das Konditional $A \Rightarrow B$, das unter Wahrheitsvorbehalt als wahrscheinlich charakterisiert wird. Das umfassende Konditional selbst steht nicht unter Wahrheitsvorbehalt. Schließlich kann die Wahrscheinlichkeit der Geltung von $E_A \rightarrow E_B$ unzutreffend sein: korrekt ist dann ein kontrafaktisches Konditional, mit dem Konditional $A \Rightarrow B$ als kontrafaktisch erschlossenem Nachsatz: „Wenn die Geltung von $E_A \rightarrow E_B$ wahrscheinlich wäre, wäre es wahrscheinlich, dass e_B vorliegt, wenn e_A vorliegen sollte“.

Es ist also möglich, dass ein Konditional $A \Rightarrow B$ wahrscheinlich oder problematisch ist – aber doch niemals aufgrund einer bedingten Wahrscheinlichkeit $p(E_A / E_B)$, wie von den zitierten Vertretern der „modernen Logik“ unterstellt wird, sondern nur, wenn die Geltung des gesetzmäßigen Zusammenhangs zwischen E_A und E_B wahrscheinlich, problematisch oder kontrafaktisch ist. Das wahrscheinlich, problematisch oder kontrafaktisch gültige Konditional ist dabei stets Nachsatz eines übergeordneten Konditionals, das selber nicht problematisch, noch wahrscheinlich, noch kontrafaktisch, sondern immer assertorisch ist.

4.6 Wenn-auch-Sätze

Hält man sich an den unverfälschten Gehalt der Umgangssprache, macht auch die logische Analyse der *Wenn-auch*-Sätze keine Mühe. Wie beim *Wenn* finden wir einen problematischen und kontrafaktischen Gebrauch, und wie dem *Wenn₁* das assertorische *Weil* entspricht, entspricht dem *Wenn-auch* das assertorische *Obwohl*. Wie das *Wenn* dient das *Wenn-auch* einerseits dem Ausdruck gesetzmäßiger allgemeiner Beziehungen (das Satzgefüge verbindet dann keine wahrheitswertdefiniten „Sätze“, sondern Sachverhaltsausdrücke), andererseits dem Ausdruck von enthymematischen Schlüssen, die einzelne oder besondere Fälle unter *Wenn-auch*-Gesetze subsumieren (das Satzgefüge verbindet dann wahrheitswertdefinite Sätze). Synonym sind mit der Partikel *Wenn-auch* die Wörter „auch – wenn“, „selbst wenn“, „sogar – wenn“; synonym zum *Obwohl* sind „obgleich“, „wenngleich“, „wiewohl“, „obzwar“, „obschon“, „ob auch“.

4.6.1 Die Relata der Konzessivsätze sind Ereignisklassen. Generelle Ausnahmegesetze

Sind Sachverhalts-/Ereignisklassen die Relata der *Auch-wenn*-Beziehung, dann drückt der *Auch-wenn*-Satz den folgenden generellen Zusammenhang aus: in allen Fällen, da Dingen oder Personen bestimmter Art ein bestimmtes Prädikat (eine Eigenschaft, ein Zustand usw.) zukommt, hat dies notwendigerweise oder möglicherweise ($\mathcal{K}$) einen Sachverhalt, ein Ereignis bestimmter Art zur Folge; es tritt jedoch, wenn andersartigen Dingen oder andersartigen Personen dasselbe Prädikat zukommt, diese Folge in aller Regel nicht ein. Es wird auf diese Weise eine Regelmäßigkeit als eine Ausnahme einer noch allgemeineren Regel dargestellt. Diese allgemeinere Regel bleibt implizit, muss aber ohne weiteres explizierbar sein, wenn der Satz einen Sinn besitzen soll. Die Ausdrucksform ist „Selbst wenn/sogar wenn/auch wenn A-Dingen das Prädikat P zukommt, kommt ihnen das Prädikat Q zu"; dieser Zusammenhang wird als Ausnahme gekennzeichnet: denn wenn anderen Dingen P zukommt, kommt ihnen immer oder in aller Regel Q nicht zu.

Diese Struktur lässt sich an folgenden Beispielsätzen aufzeigen:

> Auch wenn ein König schlecht regiert, sind ihm seine Untertanen zum Gehorsam verpflichtet[47].

Die Ausdrücke „ein König schlecht regiert" und „seine Untertanen sind ihm zum Gehorsam verpflichtet" bezeichnen keine wahrheitswertdefiniten Behauptungssätze, sondern Ereignisklassen, die durch ein Ereignis-Bezugsystem verbunden sind; der Sprecher hält Ereignisse dieser Art für realmöglich. Der ganze Satz drückt aus, dass *wenn* ein Ereignis der ersten Art der Fall ist, *dann* stets auch der Sachverhalt der zweiten Art gilt (eine $\mathcal{N}$-Modalisierung). Im Gegensatz zum *Wenn-dann* drückt das *Auch-wenn* zusätzlich aus, dass diese Gesetzesbeziehung einen Ausnahmecharakter besitzt. Die Beziehung zwischen dem König und seinen Untertanen ist ein Sonderfall einer sozialen Beziehung, und für eine solche ist im Normalfall eine Ausgeglichenheit von Leistung und Gegenleistung zu fordern; für das Regieren des Königs und den Gehorsam der Untertanen ist eine solche Ausgeglichenheit nicht erforderlich, wodurch der Ausnahmecharakter entsteht, der durch die Worte „auch", „selbst" oder „sogar" ausgedrückt wird.

> Auch wenn/selbst wenn/sogar wenn ein Mörder minderjährig und schwachsinnig ist, kann er in den USA hingerichtet werden.

Die Relata dieser Auch-wenn-Beziehung sind wiederum keine wahrheitswertdefinite Sätze, sondern realmögliche, durch ein Ereignis-Bezugsystem verbundene Ereignisklassen; es wird gesagt, dass, wenn das erste der Fall ist, auch das zweite der Fall sein kann ($\mathcal{K}$-Modalisierung); diese Beziehung wird aber als Ausnahme vom Rechtsprinzip charakterisiert, wonach schwachsinnige Täter aufgrund der stark verminderten Schuldfähigkeit nicht zum Tode verurteilt werden dürfen[48].

Es kommt vor, dass in derartigen *Auch-wenn*-Sätzen nicht der Indikativ, sondern der Konjunktiv von *sollen* gebraucht wird; ob die Sachverhalte, die dem Ausnahmegesetz unterliegen, überhaupt vorliegen, bleibt dann *problematisch*: Auch wenn/sogar wenn/selbst wenn E_A der Fall sein sollte, wird E_B notwendig bzw. möglicherweise der Fall sein; auch hier sind keine wahrheitswertdefiniten Aussagen verbunden, sondern irgendwelche Fälle von Ereignissen bestimmter Art; der Konjunktiv II von *sollen* drückt aus, dass sich der Sprecher nicht sicher ist, ob derartige Fälle jemals schon aufgetreten sind bzw. jemals eintreten werden; wenn dies jedoch sein sollte, dann haben sie gegen die Regel E_B zur Folge. Wir können also die nicht-problematische von der problematischen Ausnahmeregel unterscheiden.

> Auch wenn ein König schlecht regieren sollte (der Sprecher weiß nicht, ob Derartiges überhaupt vorkommt), sind seine Untertanen ihm (ohne Ausnahme) zum Gehorsam verpflichtet.

Die Ausnahmeregel wird in *kontrafaktischer* Weise behauptet, wenn der Sprecher verneint, dass Fälle E_A überhaupt vorkommen, aber urteilt, selbst wenn dies der Fall wäre, würde entgegen der Regel stets E_B eintreten. Es wird jeder beliebige kontrafaktische Fall charakterisiert; es steht der Konjunktiv II.

> Auch wenn ein König schlecht regieren würde (der Sprecher schließt aus, dass Derartiges vorkommt), wären seine Untertanen ihm zum Gehorsam verpflichtet.

Während sich diese Ausnahmegesetze auf alle Gegenstände einer bestimmten zeitübergreifenden Klasse (etwa auf alle Könige) beziehen, gibt es entsprechende Ausnahmeregeln, die sich auf einzelne Gegenstände oder Personen beziehen: es ist jeder beliebige Fall angesprochen, da diesem Gegenstand oder dieser Person eine Bestimmung (Zustand) bestimmter Art zukommt.

> Auch wenn Hans nur ein Glas Wein trinkt, ist er betrunken.

Die Ausdrücke „Hans trinkt nur ein Glas Wein", „er ist betrunken" bezeichnen in diesem Kontext keine Sätze, sondern jeden beliebigen realmöglichen Fall, da Hans nur ein Glas Wein trinkt bzw. betrunken ist; es wird gesagt, dass wenn immer das eine der Fall ist, dann auch das andere der Fall ist ($\mathcal{N}$- Modalisierung); zugleich wird diese Regelmäßigkeit als eine Ausnahme einer allgemeineren Regelmäßigkeit gekennzeichnet: normalerweise ist jemand, der nur ein Glas Wein trinkt, nicht betrunken. Im Unterschied zu den Sätzen (1) – (3) charakterisiert diese Ausnahmeregelmäßigkeit nicht eine Klasse von Gegenständen, sondern einen einzelnen Gegenstand.

Auch wenn ich ernsthaft krank bin, verzichte ich nicht auf meinen täglichen Spaziergang.

Auch hier wird eine personenbezogene Ausnahme von der Regel zum Ausdruck gebracht, dass man bei Krankheit nicht spazieren geht.

4.6.2. Die Relata von Konzessivsätzen sind Feststellungen

Werden in einem *Auch-wenn*-Satz Feststellungsaussagen mit einander verknüpft, liegt ein Bezug auf ein unausgesprochenes Meistenteils-Gesetz[49] vor; der einzelne Fall werden dem impliziten Gesetz jedoch nicht subsumiert, sondern als Ausnahmefälle gekennzeichnet. Die Bezugsetzungen sind entweder assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch.

Ein Satz „Auch wenn A, dennoch B", der die Feststellungen A und B, die das Vorliegen von Einzelereignissen e_A und e_B konstatieren, verbindet, kennzeichnet den aktuellen Fall als Ausnahme zu einem Meistenteils-Gesetz; logisch liegt die folgende Struktur vor: der Sprecher setzt assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch voraus, dass e_A der Fall ist; gleichzeitig liegt nicht e_B vor, obwohl in der Regel bei E_A meistens E_B vorliegt. Bezugsgesetz: In der Regel (in den meisten Fällen) bei E_A auch E_B: obwohl/auch wenn im aktuellen Fall e_A, dennoch nicht e_B. Für den *assertorischen* Fall (A ist wahr) stehen die folgenden Beispiele:

Obwohl/auch wenn Hans letzten Montag hohes Fieber hatte, ist er zur Schule gegangen.

Hans hatte am Montag tatsächlich hohes Fieber; dass er zur Schule gegangen ist, wird als Ausnahme von der unausgesprochenen Regel „Wenn man hohes Fieber hat, geht man üblicherweise nicht in die Schule" charakterisiert.

Obgleich/auch wenn es morgen regnet/regnen sollte, werden wir eine Wanderung unternehmen.

Der Sprecher ist sich sicher, dass es morgen regnet; dass unter diesen Umständen gleichwohl die Wanderung stattfindet, wird als Ausnahme von der implizit bleibenden Regel, dass man bei Regen normalerweise nicht wandert, gekennzeichnet. Dieser assertorische Fall wird eindeutig durch die Partikel *obgleich* ausgedrückt. Der Gebrauch des *Auch-wenn* ist zweideutig; es könnte auch der problematische Fall gemeint sein; der Sprecher weiß dann nicht, ob A wahr ist.

Beispiele für problematische *Auch-wenn*-Sätze sind:

Auch wenn Hans letzten Samstag hohes Fieber gehabt hat/gehabt haben sollte, ist er zur Schule gegangen.

Auch wenn es morgen regnet/regnen sollte, werden wir eine Wanderung unternehmen.

Der Gebrauch des *Obgleich* ist im problematischen Fall nicht möglich, was ein eindeutiges grammatisches Unterscheidungskriterium von assertorischem und problematischem *Auch-wenn* ist.

Ein Beispiel für den *kontrafaktischen* Fall ist der Satz:

Selbst wenn/sogar wenn/ auch wenn Hans letzten Samstag hohes Fieber gehabt hätte, wäre er zur Schule gegangen.

Ein Sonderfall dieser Struktur – bei E_A meistenteils E_B, im gegebenen Fall dennoch e_A ohne e_B – ist es, wenn mit e_A zwar eine notwendige Bedingung für e_B vorliegt, jedoch nicht alle notwendigen Bedingungen gegeben sind. Beispiele für diese Art von *Auch-wenn*-Enthymemen sind:

assertorisch: Obwohl/auch wenn Hans nicht vorbestraft ist, kann er nicht zur Polizei

problematisch: Auch wenn Hans nicht vorbestraft ist/sein sollte, kann er nicht zur Polizei[50]

kontrafaktisch: Auch wenn Hans nicht vorbestraft wäre, könnte er nicht zur Polizei.

Ein anderer Sonderfall dieser Struktur – bei E_A meistenteils E_B, im gegebenen Fall dennoch e_A ohne e_B – haben wir, wenn zwar ein Ereignis bestimmter Art vorliegt, aber eine seiner möglichen hinreichenden Bedingungen nicht vorliegt:

Wenn Hans die Prüfung auch bestanden hat, so hat er doch keine 13 Punkte.

Bezugsgesetz ist: „Wenn jemand 13 Punkte erreicht, besteht er die Prüfung“ (die 13 Punkte sind nicht die einzige hinreichende Bedingung).

Auch bei der Analyse der Wenn-auch-/even-if-Sätze herrscht in der gegenwärtigen logistischen Diskussion eine uneinheitliche Situation vor. Diese Sätze werden auf uneinheitliche Weise gegen die kontrafaktischen Konditionale (die subjunctive conditionals) abgegrenzt[51]. **RODERICK M. CHISHOLM** und andere haben versucht, die Bedeutung der (kontrafaktischen) Auch-wenn-Sätze durch den Unterschied zum kontrafaktischen Konditional zu bestimmen. Ein kontrafaktischer Auch-wenn-Satz beinhaltet, dass ein kontrafaktisch als vorliegend unterstelltes Ereignis e_A das Ereignis e_B bedingt, obwohl bei E_A in aller Regel E_B nicht vorliegt. **CHISHOLM** behauptet nun, der Satz „Auch wenn A wahr wäre, so wäre B (trotzdem) wahr“ besage genau dasselbe wie die Negation des kontrafaktischen Konditionals $\sim(A \supset \sim B)$ – es trifft nicht zu, dass wenn e_A vorliegen würde, e_B nicht vorläge. „›Even if you were to sleep all morning you would still be tired‹. This type of statement is what one gets by negating the consequent of an ordinary subjunctive conditional and then denying the whole thing: ‚It is false that if you were to sleep all morning you would not be tired‘. The ‚even if‘ conditionals must be reduced to this form.“[52]

Bei „Auch wenn A, B“ soll also die Negation von $A \supset \sim B$ gelten; wäre $A \supset \sim B$ richtig, müsste $\mathcal{N}^e(E_A, \sim E_B)$ gelten – und **CHISHOLM** will ja gerade betonen, dass der Satz „Auch wenn A, B“ diesen gesetzmäßigen Zusammenhang negiert. Ein Satz „Auch wenn A, B“ negiert jedoch kein Gesetz $\mathcal{N}^e(E_A, \sim E_B)$, sondern verweist nur auf eine Ausnahme. Ein Notwendigkeitsgesetz $\mathcal{N}^e(E_A, \sim E_B)$ lässt aber keine Ausnahme zu; es geht beim Wenn-auch um eine Abweichung von einem Meistenteils-Gesetz „Bei E_A meistens/normalerweise E_B“. Nur bei einem Bezug auf ein Meistenteils-Gesetz gilt die von **CHISHOLM** behauptete Bedeutungsgleichheit von negiertem kontrafaktischem Konditional „Es trifft nicht zu, dass, wenn du morgens ausschlafen würdest, du nicht müde wärest (wie es meistenteils der Fall ist)“ und Wenn-auch-Satz „Auch wenn du morgens ausschlafen würdest, wärest du müde (im Gegensatz zum Üblichen)“.

4.7 Das rhetorische Schema der Rücknahme des Wahrheitsvorbehalt eines problematischen Konditionals

In der traditionellen Logik ist die Bedeutung des verbalen Schemas „Wenn p, dann q“ durchweg zweideutig; dem Ausdrucksschema werden zugleich die Bedeutung der Implikation und des problematischen Konditionals gegeben. Je nachdem, ob man das Verbalschema „Wenn A, dann B“ als Ausdruck einer Implikation oder eines Konditionals fasst, erhalten die Ausdrücke „Wenn p, dann q; nun p, also q“ und „Wenn p, dann q; wenn q, dann r; also: p dann r“ – in beiden Fällen wird von „hypothetischen Syllogismen“ gesprochen – unterschiedene Bedeutung.

Drückt das Verbalschema „Wenn p, dann q“ ein Implikationsgesetz aus, sind p und q Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen und der Ausdruck „nun p“ besagt, dass ein einzelnes Ereignis p* mit $p^* \in p$ vorliegt; das Verbalschema muss korrigiert werden, damit der Unterschied zwischen Sachverhalts-/Ereignisklasse p und den Einzelereignis p* zum Ausdruck kommt: „Wenn p, dann q; nun p*, also q*“; wir haben das Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$, das seinerseits von den Schlüssen, die nach diesem Schema vollzogen werden, zu unterscheiden ist. Ist der Wenn-Satz jedoch ein problematisches Konditional liegt ein spezieller Zusammenhang vor: das *rhetorische Schema der Rücknahme des Wahrheitsvorbehalts in einem problematischen Konditionals*.

Ich versuche dieses Schema mit Hilfe eines Beispiels von **SALMON** zu erläutern.

(1) „Wenn die Summe der Ziffern von 288 durch 9 ohne Rest teilbar ist, dann ist 288 durch 9 ohne Rest teilbar.“

(2) „Die Summe der Ziffern von 288 ist durch 9 ohne Rest teilbar.“

(3) Also: „288 ist durch 9 ohne Rest teilbar.“[53]

Satz (1) ist, da die Teilausdrücke „die Summe der Ziffern von 288 durch 9 ohne Rest teilbar ist“ und „288 {ist} durch 9 ohne Rest teilbar“ Sätze sind, keine Implikation, sondern ein Konditional, das nur korrekt ist, wenn dem Sprecher nicht bekannt ist, ob die Quersumme von 288 tatsächlich durch 9 ohne Rest teilbar ist; unter dieser Voraussetzung folgert er bei implizitem Bezug auf das $\mathbb{E}$-Gesetz „Genau dann, wenn die Quersumme einer Ziffer ohne Rest durch 9 teilbar ist,

ist die durch diese Ziffer benannte Zahl ohne Rest durch 9 teilbar“ unter Wahrheitsvorbehalt die Aussage „288 ist ohne Rest durch 9 teilbar“. Satz (2) nimmt den Wahrheitsvorbehalt zurück: Die Quersumme von 288 ist tatsächlich durch 9 teilbar, in Satz (3) wird der Wahrheitsvorbehalt von der Konklusion des Enthymems (1) genommen.

Im Schema „Wenn A, dann B; nun A, also B“ wird also zunächst A als problematisch hingestellt und unter Voraussetzung von $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ mit Wahrheitsvorbehalt auf B geschlossen; dann wird der Wahrheitsvorbehalt zurückgenommen, und assertorisch auf B geschlossen. Rhetorisch ist dieses Schema, weil durch die rhetorische Antithese von problematischer Subsumtion (Satz 1) und assertorischer Subsumtion (Satz 2 und 3) von A unter $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ die Wirkung der Konklusion beim Zuhörer verstärkt wird. Logisch betrachtet liegt ein assertorisches Enthymem $A \rightrightarrows B$ vor. Diese ganze Figur ist also nur rhetorisches Beiwerk, welches für die Logik ohne jedes Interesse ist[54]. In der traditionellen Logik werden dem Begriff des *modus ponens* unterschiedslos das Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$ und dieses völlig andersartige Schema der Rücknahme des Wahrheitsvorbehalt in einem problematischen Enthymem subsumiert.

4.8 Das rhetorische Schema der Rücknahme der kontrafaktischen Unterstellung

Auch für das kontrafaktische Konditional A➲B gibt es eine entsprechende rhetorische Figur mit der Ausdrucksform „A➲B, (nun aber) ~B, also ~A“; in einem ersten Satz A➲B wird die Wahrheit von A kontrafaktisch unterstellt und unter Bezug auf $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ auf B geschlossen; ein zweiter Satz stellt antithetisch ausdrücklich die Falschheit der kontrafaktischen Konklusion B fest und schließt nach $\mathbb{C}/\delta$ unter Bezug auf $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ auf die Falschheit von A; durch dieses rhetorische Stilmittel wird die Falschheit von A, die ja schon von A➲B vorausgesetzt wird, besonders betont.

Eine solche Argumentation führt **SALMON** an:

(1) „Wenn Cäsar herrschsüchtig gewesen wäre, dann hätte der die Krone genommen.“
(2) „Er nahm die Krone nicht.“
(3) „Cäsar war nicht herrschsüchtig.“[55]

Das implizite Bezugsgesetz des kontrafaktischen Konditionals (1) ist: Wenn jemand herrschsüchtig ist, dann macht er sich zum Kaiser; diesem unausgesprochenen Gesetz wird der kontrafaktische Sachverhalt subsumiert, dass Cäsar herrschsüchtig war. Im Satz (2) aber wird die kontrafaktische Konklusion zurückgenommen und in (3) nach $\mathbb{C}/\delta$ geschlossen, dass Cäsar nicht herrschsüchtig war. Ohne rhetorisches Beiwerk lautet die Aussage vollständig: Weil wer herrschsüchtig ist, die Krone nimmt und weil Cäsar die Krone nicht genommen hat, war er nicht herrschsüchtig. (assertorischer Schluss nach dem Schlussschema nach $\mathbb{C}/\delta$)[56].

4.9 Die Verkettung des problematischen Konditionals

Das Verbalschema (Verbalschema S) sollen *hypothetische Schlüsse* sein, bei welchen beide Prämissen „*hypothetische Gefüge*“ sind[57]:

Wenn A, dann B Wenn B, dann C	Relatum 1
Wenn A, dann C	Relatum 2

Für das Verbalschema S ergeben sich wiederum ganz unterschiedliche Bedeutung, je nachdem, ob A, B und C beliebige oder konkrete Ereignisklassen, oder ob diese Buchstaben beliebige bzw. konkrete Sätze bezeichnen; zwischen diesen Fällen wird bislang ganz unzureichend unterschieden.

Wenn die Buchstaben A, B und C beliebige Sachverhalts-/Ereignisklassen bezeichnen, liegt das logische Verkettungsgesetz $\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}$ vor; die Beziehung von Relatum 1 und 2 wird durch das implikative *Wenn*$_1$ ausgedrückt; der Strich unter Relatum 1 bezeichnet nicht die Folgerungsrelation, sondern die Implikation: *Wenn* gilt: wenn p, dann q, und wenn q dann r, *dann* gilt: wenn p, dann r. Das Schema drückt das Verkettungsgesetz $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ aus.

Bezeichnen die Teilausdrücke in Verbalschema S „Wenn A, dann B“ und „Wenn B, dann C“ konkrete Implikationsgesetze, drückt das Verbalschema eine **enthymematische Subsumtion unter** $\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}$ aus. Die Buchstaben $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ sollen *Abkürzungen* für die konkreten Sachverhalts-/Ereignisklassen; $\mathfrak{p}$: *etwas ist eine Antilope*, $\mathfrak{q}$: *etwas ist ein Säugetier*, $\mathfrak{r}$: *etwas ist ein Wirbeltier* sein. Wir erhalten dann den Zusammenhang:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Relatum 1:} & \begin{array}{l} \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{q} \\ \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{r} \\ \hline \end{array} \\ \textbf{Relatum 2:} & \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{r} \end{array}$$

Die beiden Implikationsgesetze „Wenn etwas eine Antilope ist, dann ist es ein Säugetier“ und „Wenn etwas ein Säugetier ist, dann ist es ein Wirbeltier“ bilden einen bedingungslogischen Zusammenhang, der der logischen Sachverhaltsklasse *Wenn p, dann q und wenn q dann r* angehört – einer Klasse von bedingungslogischen Zusammenhängen bestimmter Art – und kann deshalb dem Gesetz $\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}$ subsumiert werden; aus dieser Subsumtion ergibt sich dann nach dem Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$ die Gültigkeit von Relatum 2, der Konklusion dieses Schlusses; Relatum 1 sind die Subsumtionsprämissen, die Gesetzesprämisse $\mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}$ bleibt implizit. Der Ausdruck „$\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{r}$, also $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{r}$“ bezeichnet einen assertorischen enthymematischen Schluss; der Strich zwischen Relatum 1 und 2 bezeichnet nicht die Implikation, sondern die Folgerungsrelation „Aus …, folgt …“ ≡ „Weil …, deshalb …“[58].

Ein solches Enthymem kann auch problematisch oder kontrafaktisch sein. Wenn beispielsweise ein Sprecher nicht sicher weiß, ob die beiden Implikationsgesetze „Wenn die dritte Potenz einer Zahl durch 7 teilbar ist, dann ist die Zahl selbst durch 7 teilbar“ und „Wenn eine Zahl durch 7 teilbar ist, dann ist sie durch 14 teilbar“ gültig sind, kann er diese beiden Implikationen gleichwohl in problematischer Weise unter das logische Gesetz $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ subsumieren: Wenn gelten sollte, dass eine Zahl durch 7 teilbar ist, wenn ihre 3. Potenz durch 7 teilbar ist, und wenn gelten sollte, dass eine Zahl durch 14 teilbar ist, wenn sie durch 7 teilbar ist, dann ist eine Zahl durch 14 teilbar, wenn ihre dritte Potenz durch 7 teilbar ist.

Wenn der Sprecher weiß, dass diese beiden Gesetze ungültig sind, kann er nur kontrafaktisch schließen: Wenn gelten würde, dass eine Zahl durch 7 teilbar ist, wenn ihre 3. Potenz durch 9 teilbar ist, und wenn gelten würde, dass eine Zahl durch 14 teilbar ist, wenn sie durch 7 teilbar ist, dann wäre eine Zahl durch 14 teilbar, wenn ihre dritte Potenz durch 9 teilbar ist. Es gibt auch assertorisch - kontrafaktische Enthymeme wie „Weil eine Zahl durch 7 teilbar ist, wenn ihre 3.Potenz durch 7 teilbar ist, wäre eine Zahl durch 14 teilbar, wenn ihre 3.Potenz durch sieben teilbar ist, wenn eine Zahl durch 14 teilbar wäre, wenn sie durch 7 teilbar ist“.[59]

Das Verkettungsgesetz $(A \Rightarrow B \;\&\; B \Rightarrow C) \rightarrow (A \Rightarrow C)$: Wenn im Verbalschema S die Buchstaben Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen sind, bezeichnen, bezeichnen die Ausdrücke „Wenn A, dann B“ und „wenn B, dann C“ zwei beliebige verkettbare Konditionale, und das ganze Verbalschema behauptet die eindeutige Verkettung dieser beiden Relationen, d.h. die Gültigkeit des Implikationsgesetzes $(A \Rightarrow B \;\&\; B \Rightarrow C) \rightarrow (A \Rightarrow C)$. Diese Gültigkeit lässt sich leicht erweisen: Gilt ein Konditional $A \Rightarrow B$, dann ist die Wahrheit von A für den Sprecher problematisch und es gilt ein (implizites) Gesetz $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$; bei $B \Rightarrow C$ ist B problematisch und es gilt das Gesetz $\mathcal{N}^e(E_B,E_C)$; da nun bei Geltung von $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ und $\mathcal{N}^e(E_B,E_C)$ notwendig auch $\mathcal{N}^e(E_A,E_C)$ gilt[60], und die Wahrheit von A problematisch ist, gilt auch $A \Rightarrow C$. Die Darstellung der Beziehung

$$\begin{array}{l} \text{Wenn A, dann B} \\ \text{Wenn B, dann C} \\ \hline \text{Wenn A, dann C} \end{array}$$

durch den Strich bezeichnet hier keine Folgerungsbeziehung, sondern eine Implikation. Manche Vertreter der „modernen Logik“ bestreiten die eindeutige Verkettbarkeit des problematischen Konditionals; auf ihre Argumente werde ich weiter unten eingehen.

Unter dieses Verkettungsgesetz können natürlich konkrete Konditionale subsumiert werden; **W.Salmon** führt ein Beispiel dafür an[61]:

Konditional (1): „Wenn Sie das Buch gelesen haben, dann kennen sie die Handlung“[62]
Konditional (2): „Wenn sie die Handlung kennen, dann wird Sie der Film langweilen“[63]
Konklusion: „also: Wenn Sie das Buch gelesen haben, dann wird sie der Film langweilen“

Der Schluss, so wie **SALMON** ihn darstellt, ist enthymematisch, die Gesetzesprämisse „(A⇨B & B⇨C) → (A⇨C“ bleibt unausgesprochen.[64]

4.10 Zur Problematik der Transitivität und Kontraposition der Konditionale

Es gibt im Rahmen der „modernen Logik“ endlose, unentschiedene Streitereien, ob dies oder jenes Gesetz der Konditionale gültig ist; dies ist wohl unvermeidlich, denn solange keine exakte begriffliche Rekonstruktion der Wahrheitsbedingungen und Bedeutung der Konditionale durchgeführt ist, entscheidet über die Gültigkeit die Intuition: was dem einen intuitiv richtig vorkommt, wird ein anderer aus intuitiven Gründen ebenso bestreiten.

Heftig umstritten ist die Frage, ob die verschiedenen Konditionale verkettet werden können, ob sie also transitive Relationen sind. Die Transitivität des problematischen Konditionals habe ich oben nachgewiesen[65]; dieser Nachweis erstreckt sich auch auf die assertorischen Enthymeme A ⇉ B und B ⇉ C und auf die kontrafaktischen Konditionale A ➲ B und B ➲ C: in beiden Fällen gilt $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ und $\mathcal{N}^e(E_B,E_C)$, demnach auch $\mathcal{N}^e(E_A,E_C)$; da bei A ⇉ B die Aussage A wahr ist, bei A ➲ B die Aussage A falsch ist, erhalten wir die Verkettungsgesetze

[(A ⇉ B) & (B ⇉ C)] → (A ⇉ C)
[(A ➲ B) & (B ➲ C)] → (A ➲ C).

Kontraposition

Ebenso heftig umstritten ist, ob für die Beziehungen für A⇉B, A⇨B und A➲B die Kontraposition gilt[66]; die Frage ist leicht zu beantworten, wenn man sich an den dargelegten Wahrheitsbedingungen für diese Enthymeme orientiert. In allen drei Fälle ist die Geltung von $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ vorausgesetzt; damit ist auch die Kontraposition $\mathcal{N}^e(\sim E_B,\sim E_A)$ vorausgesetzt. Da **bei A⇨B** die Wahrheit von A, und deshalb auch die Wahrheit von B für den Sprecher ungewiss ist, ist auch die Wahrheit von ~B ungewiss, und deshalb gilt wegen $\mathcal{N}^e(\sim E_B,\sim E_A)$ auch ~B⇨~A; bei A⇨B gilt weder ~B➲~A (dies würde die Falschheit von ~B voraussetzen), noch gilt ~B⇉~A (dies würde die Wahrheit von ~B voraussetzen). **Bei A⇉B** sind sowohl A wie B wahr; da ~B demnach falsch ist, kann bei A⇉B nicht auch ~B⇉~A behauptet werden; wohl aber gilt bei A⇉B immer ~B➲~A. **Bei A➲B** ist A und B falsch; da B falsch ist, ist ~B richtig, und deshalb ist, wenn A➲B richtig ist, nicht zugleich ~B➲~A richtig; wohl aber gilt bei A➲B stets das assertorische Enthymem ~B⇉~A. Nur für das problematische Konditional gibt es also ein Kontrapositionsgesetz.

(A⇉B) ↔ (~B➲~A)
(A⇨B) ↔ (~B⇨~A)
(A➲B) ↔ (~B⇉~A)

Anmerkungen zu Teil I, Kapitel 4

1 Bei sozialen und verhaltensmäßigen Regelmäßigkeiten kommt es auch vor, dass die Geltung solcher Regelmäßigkeiten auf einen bestimmten Zeitraum beschränkt ist, etwa in den Sätzen „Wenn die Griechen in den Krieg gezogen sind, haben sie das Orakel befragt“, „Immer wenn im nächsten Jahr sonntags schönes Wetter ist, werden wir eine Wanderung unternehmen“; innerhalb dieses begrenzten Zeitraumes jedoch gilt die Regelmäßigkeit in zeitübergreifender Weise und deshalb sprechen diese Sätze von einem Verhältnis zwischen Ereignis*klassen*, nicht von einer Beziehung zwischen *einzelnen*, an eine ganz bestimmte Raum- und Zeitstelle gebundenen Ereignissen. Solche Regelmäßigkeiten können auf bestimmte Menschengruppen, sogar auf einzelne Individuen beschränkt sein; an der implikativen Struktur ändert dies nichts.

2 Es kann vereinbart werden, dass die Implikation stets durch „wenn…, dann…“, die Äquivalenz durch „wenn…, genau dann…“ oder „genau wenn…, dann…“, die Relation ℂ⋓𝔼 etwa durch die verbalen Schemata „Wenn *p*, dann *q*, wobei offen bleibt, ob auch bei *q* notwendig

p“ oder „bei *p q*, aber möglicherweise nicht umgekehrt“ usw. auszudrücken sind. Die Mehrdeutigkeit des umgangssprachlichen Gebrauchs des *Wenn* ist also schon mit umgangssprachlichen Mitteln prinzipiell behebbar.

3 Der Zusammenhang dieser drei Formen ist im folgendem elementaren logischen Gesetz zusammengefasst: *Für beliebige Ereignisklassen p,q gilt:* $[(10\bullet1)(p,q)] \leftrightarrow [(p\rightarrow q) \succ\!\prec (p\leftrightarrow q)]$ bzw. genauer: $[((10\bullet1)(p,q)), (p\rightarrow q), (p\leftrightarrow q)\ \mathbb{J}\mathbb{X}]$. Dieses elementare logische Gesetz besagt, dass bei Geltung von $(10\bullet1)(p,q)$ entweder $p\rightarrow q$ oder $p\leftrightarrow q$ gilt und dass bei Nichtgeltung von $(10\bullet1)(p,q)$ weder $p\rightarrow q$ noch $p\leftrightarrow q$ gilt.

4 Die in eckigen Klammern eingeschlossenen Ausdrücke sind fakultativ, sie können weggelassen werden. Zwei durch Schrägstrich verbundene Ausdrücke sind Alternativen.

5 Beispiel:
$((Sx \rightarrow Mx) \wedge (Mx \rightarrow Px)) \rightarrow (Sx \rightarrow Px)$ (Gesetzesprämisse)
(Kommt jedem Gegenstand, dem ein erstes Prädikat S zukommt, auch ein zweites Prädikat M zu, und kommt jedem Gegenstand, dem das zweite Prädikat M zukommt, auch ein Prädikat P zu, dann kommt jedem Gegenstand, dem das Prädikat S zukommt, auch das Prädikat P zu).

Alle Griechen sind Menschen. (1. Subsumtionsprämisse)
Alle Menschen sind sterblich. (2. Subsumtionsprämisse)

Notwendig gilt nach dem Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$: Alle Griechen sind sterblich. (Konklusion)

Das logische Gesetz, welches Gesetzesprämisse dieses Schlusses ist, darf nicht schon für einen Schluss ausgegeben werden, wie es häufig geschieht. Ein Implikationsgesetz (also eine wahrheitswertdefinite Aussage) ist kein Schluss (eine Beziehung zwischen Aussagen).

6 „Ein Enthymem {ist} ein im Geist vollkommener, aber im Ausdruck unvollständiger Schluss…, weil in ihm ein Satz verschwiegen wird, indem er als zu klar und zu bekannt und infolgedessen als leicht ergänzbar durch den Geist derjenigen, zu denen man spricht, angesehen wird.“ (**Arnauld**, Die Logik oder die Kunst des Denkens, S.216)

7 Ein *assertorisches Urteil* behauptet, dass etwas (nicht) der Fall ist oder dass eine Gesetzmäßigkeit gilt; der Gegensatz dazu ist das *problematische Urteil*, bei welchem sich der Sprecher über die Wahrheit des Urteils im Ungewissen ist. Die Unterscheidung assertorischer (= nicht-problematischer) und problematischer (nicht-assertorischer) Aussage ist wichtig; die von **Kant** eingeführte Dreiteilung assertorisch-problematisch-apodiktisch vermengt heterogene Gesichtspunkte und ist fehlerhaft.

8 Ein Beispiel von **Quine**, Grundzüge der Logik, S.34

9 Dass das Ereignis e_A das Vorliegen des Ereignisses e_B bedingt, bedeutet nicht in jedem Fall, dass e_A das Ereignis e_B *verursacht*; das assertorische Enthymem „Weil die Straße nicht nass ist, hat es nicht geregnet“ behauptet nicht, dass die Nicht-Nassheit der Straße das Wetter verursacht, sondern dass das Nicht-Nasssein der Straße ein untrügliches Indiz dafür ist, dass es nicht geregnet haben kann. Es ist deshalb nicht richtig, wenn man diese Weil-Satzgefüge *generell* „Kausalsätze“ nennt; die Bezeichnung „Begründungssätze“, „begründende Satzgefüge“ ist treffender.

10 Wohl in den meisten Fällen werden Schlussfolgerungen in der Umgangssprache enthymematisch ausgedrückt; mithilfe der Weil-Konjunktion kann ein Schluss aber auch vollständig ausgedrückt werden: *Weil das Wetter schlecht wird, wenn die Schwalben sehr niedrig fliegen* {Gesetzesprämisse}, *und [weil] heute die Schwalben niedrig fliegen* {Subsumtionsprämisse}, *[deshalb] wird heute das Wetter schlecht* {Konklusion}: *Weil* $(E_A\rightarrow E_B)$ *und [weil] A, [deshalb] ist B.*

11 **Joachim Ballauf** hat diese Struktur des begründenden Weil-Satzes richtig bestimmt: der Kausalsatz „Das Knallgas ist explodiert, *weil* ihm ein Zündfunken zugeführt wurde“ wird auf das Implikationsgesetz („Gesetzeshypothese“) „Wenn man in ein Knallgasgemisch einen Funken einbringt, dann explodiert dieses Gemisch“ bezogen. Der „partikulare Kausalsatz“ ist eine „Instantiation des allgemeinen Gesetzes“ (Experimenteller und alltagssprachlicher Ursache-Wirkung-Begriff, S.147f).

12 Das problematische Enthymem ließe sich auch wie folgt formulieren: „Wenn$_i$ dann$_{ii}$ die Erträge steigen [sollten], wenn$_{ii}$ der Boden intensiv bearbeitet wird, dann$_i$ erzielt Hans in diesem Jahr höhere Erträge“. Hier verschachteln sich zwei Wenn-Sätze; das erste übergeordnete *wenn$_i$-dann$_i$* gehört zum übergeordneten problematischen konditionalen Gesamtsatz und drückt den Wahrheitsvorbehalt aus, unter welchem die untergeordnete Gesetzesprämisse steht, das *wenn$_i$-dann$_i$* verbindet Sätze; das *wenn$_{ii}$-dann$_{ii}$* bezeichnet die unter Wahrheitsvorbehalt stehende implikative Gesetzesprämisse und verknüpft Ereignisklassen; dieser untergeordnete *wenn$_{ii}$-dann$_{ii}$*-Satz ist der problematische Vordersatz (Gesetzesprämisse) des übergeordneten Konditionals.

13 „Als Hypothese wird nach dem gegenwärtig üblichen Sprachgebrauch ein Satz verwendet, wenn er als Prämisse einer Schlussfolgerung vorgebracht wird, ohne dass die Frage, ob er wahr oder falsch ist, diskutiert wird. Hypothesen haben daher den Status einer *Annahme* …, und die verschiedenen Annahmearten lassen sich auch bei Hypothesen unterscheiden. Entsprechend ist ein Schluss genau genommen nicht deswegen *hypothetisch*, weil er eine konditionale ‚wenn – so‘-Form hat, sondern wegen des ‚Wenn–Seins‘, des Annahmecharakters, seiner Antecedentien.“ (**N. Rescher**, Hypothese III, in: HWP 3, 1266) Im problematischen, durch *Wenn$_2$* bezeichneten Konditional, drückt das *Wenn* allerdings sowohl den Wahrheitsvorbehalt (den Annahmecharakter) wie die implikative Beziehung hinreichenden Bedingens aus.

14 Diese klare Betonung des Wahrheitsvorbehalts durch den Konjunktiv II von *sollen* ist im Deutschen fakultativ. Andere Sprachen sind hier noch restriktiver, indem der Wahrheitsvorbehalt eindeutig und obligatorisch grammatisch über den Gebrauch des dem *Wenn* entsprechenden Partikels hinaus markiert wird.

15 Zur Bedingtheit des Nachsatzes B durch den Vordersatz A im problematischen Konditional A⇨B schreibt **V.WRIGHT**: „If we assert the proposition B conditionally, we consider it conditional on or ‚relative to' some other proposition A"; *B* solle dann als asserted aufgefasst werden, wenn sich das A als erfüllt herausstelle (On conditionals, in: Logical Studies, London, 127-165, hier S.130; bei **V.WRIGHT** statt A und B die Buchstaben p und q). Hier ist der Wahrheitsvorbehalt gemeint: es gilt B, falls A gelten sollte. Diese Bedingtheit setzt jedoch voraus, dass $\mathcal{N}^e(E_A, E_B)$ gilt, nur deshalb kann e_A, so es vorliegen sollte, hinreichende Bedingung von e_B sein; beide Arten der Bedingtheit sind nicht klar geschieden. Auch in der traditionellen Logik bleibt der doppelte Charakter der Bedingtheit von B durch A unbeachtet; in dieser zweifachen Bedingtheit aber besteht der spezifische Gehalt der problematischen Konditionale.

QUINE hat die zweifache Bedingtheit von B durch A recht deutlich ausgeführt: „Wer in der Praxis 'Wenn A, dann B' sagt, ist sich für gewöhnlich nicht sicher über die Wahrheit oder Falschheit von ‚A' und ‚B' für sich; er hat bloß Gründe, nicht an die Kombination ‚A und nicht B' zu glauben. Wir sagen:

Wenn Müller Malaria hat, dann braucht er Chinin,

weil wir über Malaria Bescheid wissen, uns aber weder im Klaren über Müllers Krankheit sind, noch, ob er Chinin braucht. Nur diejenigen Konditionale sind wert, behauptet zu werden, die sich ergeben, weil das Vorderglied in irgendeiner Weise für das Hinterglied relevant ist – weil es vielleicht irgendein Gesetz gibt, dass die Sachverhalte verknüpft, die diese zwei Teilsätze beschreiben…" (Grundzüge der Logik, 42; bei **QUINE** statt A und B die Buchstaben p und q) Es gibt nicht „vielleicht" ein solches Gesetz, sondern jedes korrekte Konditional setzt ein solches Gesetz implizit voraus. Die Konditionale können nur begriffen werden, wenn dieser Bezug klar erkannt und bestimmt ist.

16 Unter Vertretern der „modernen Logik" ist umstritten, ob Aussagen A⇨B selber problematisch sind oder nicht. **G. V.WRIGHT** behauptet, weil in einem Konditional A⇨B Aussagen nicht als wahr hingestellt würden, „therefore the *whole* of what we do in asserting B on the condition A is not that we assert some propositions (or combinations of propositions) categorically" (On Conditionals, in: Logical Studies, London, 127-165, S.135; auch S.161 – statt A und B benutzt **V.WRIGHT** die Buchstaben p und q). Es wird zwar weder A noch B behauptet, aber es wird ein vorbehaltlicher Zusammenhang behauptet – und zwar assertorisch und kategorisch. Offensichtlich lässt sich **V.WRIGHT** durch seine Orientierung am Konzept der fregeschen Gedankengefüge (Junktoren) irreleiten. Für das von **FREGE** mit der Implikation verwechselte Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ gilt nämlich, dass, wenn die Wahrheit von A und B problematisch (ungewiss) ist, auch die Wahrheit der Aussage $A \Rightarrow B$ problematisch bleiben muss.

17 Wenn ein Sprecher zurecht äußert, er habe Hunger, so betrifft diese Behauptung seinen Zustand zur Zeit der Äußerung; wenn sich dieser Zustand später ändert, so ändert sich nicht der Wahrheitswert dieser Behauptung; diese betrifft ja den Zustand des Sprechers zu jenem Zeitpunkt.

18 Aus der Tatsache, dass Konditionale A⇨B „conditional beliefs" ausdrücken, die sich jederzeit ändern können, wird oft irrigerweise geschlossen, dass A und B keine wahrheitswertdefiniten Aussagen sind (vgl. **PENDLEBURY MICHAEL**: The Projection Strategy and the Truth Conditions of Conditional Statements, Mind 100, 1989, 179-205). – **QUINE** schreibt über das Konditional A⇨B: „Haben wir eine solche Behauptung gemacht und es stellt sich heraus, dass das Vorderglied wahr ist, dann fühlen wir uns auf das Hinterglied festgelegt und sind bereit, einen Fehler zuzugeben, wenn es sich als falsch erweist. Wenn sich andererseits das Vorderglied als falsch herausstellt, ist es, als hätten wir die bedingte Behauptung nie gemacht." (**QUINE**, Grundzüge der Logik, S.38) „An einem gewöhnlichen Konditional … verliert man das Interesse und behauptet oder bestreitet es nicht mehr, sobald man sich vom Wahrheitswert seines Antezedens überzeugt hat." (Wort und Gegenstand, S.383) Ein korrektes Konditional A⇨B wird nicht falsch noch verliert die Beziehung zwischen A und B an Interesse, wenn der Sprecher später erfährt, dass A wahr oder falsch ist; denn er hat ja unter einem Wahrheitsvorbehalt, der auf seinen damaligen Wissenstand bezogen ist, behauptet, dass B aus A folgt; die Behauptung von A⇨B wäre nur bezüglich seines jetzigen Wissensstande unrichtig; hat der Sprecher erfahren, dass A wahr ist, kann er rechtens nur den Begründungssatz $A \rightrightarrows B$ behaupten; weiß er, dass A falsch ist, kann er jetzt nur ein kontrafaktisches Konditional „Wenn A wahr wäre, wäre B wahr" (siehe unten!) behaupten.

19 Die vollständige umgangssprachliche Formulierung des Schlusses könnte lauten: „Weil man dann_{ii} nicht Fußball spielen kann, wenn_{ii} man sich den Fuß bricht, könnte Hans nicht Fußball spielen, wenn_{i} er sich den Fuß gebrochen hätte." Das wenn_{i} gehört zum kontrafaktischen Schluss, dass wenn_{ii} drückt ein Implikationsgesetz aus, das durch das *Weil* als die assertorische Gesetzesprämisse gekennzeichnet ist.

20 Nicht-enthymematisch könnte der Schluss umgangssprachlich wie folgt formuliert werden: „Weil Hans reich ist, wäre er glücklich, wenn_{i} jemand dann_{ii} glücklich wäre, wenn_{ii} er reich ist." Das wenn_{i} gehört zum kontrafaktischen Schluss, das wenn_{ii} gehört zur kontrafaktischen Gesetzesprämisse, das *Weil* zur assertorischen Subsumtionsprämisse.

21 **O'CONNOR, D.J.** (The Analysis of Conditional Sentences ‚*Mind*, 60, 1951, S.351-362) unterscheidet recht klar zwischen den „universalen Konditionalen" (Implikationsgesetzen wie *for all x, if x is a mammal, then x has twelve pairs of cranial nerves*), die auf alle Mitglieder einer bestimmten Klasse verwiesen, und den partikulären Konditionalen, die sich nicht auf alle, sondern nur auf bestimmte Glieder der Klasse beziehen als „particular cases of a corresponding general hypothetical. We say for instance, ‚if this piece of sugar were to put in water, it would be dissolved', because we believe that the truth of the particular hypothetical is guaranteed by the corresponding general statement ‚for all x, if x is a piece of sugar and is put to water, x will dissolve'. " (355) Dies sind in der Tat die wichtigsten Verwendungen des *Wenn*: Ausdruck von Gesetzen einerseits und Ausdruck von problematischen oder kontrafaktischen Subsumtionen von Einzel- oder

Besonderfällen unter solche Gesetze andererseits. Allerdings meint **O'CONNOR** dann, es gebe auch **general contrary-to-fact conditionals;** als Beispiel dient ihm der Satz „If frogs were mammals, they would have 12 pairs of cranial nerves" (356). Hier liegt in Wirklichkeit ein gewöhnliches kontrafaktisches Konditional vor; es gibt kein „universelles kontrafaktisches Konditional". Ein (problematisches oder kontrafaktisches) Konditional ist immer ein (enthymematischer) Schluss, kein Gesetz. In **O'CONNORs** Beispiel ist allerdings die kontrafaktische explizite Subsumtionsprämisse ein Gesetz, das als Sonderfall kontrafaktisch unter das unausgesprochene allgemeinere Gesetz „Wenn etwas ein Säugetier ist, dann hat es 12 Schädelnerven" subsumiert wird – es liegt also eine Subsumtion eines besonderen (kontrafaktischen) Falles unter einen allgemeineren vor. Aber auch dann, wenn die Gesetzesprämisse eines Enthymems kontrafaktisch für wahr genommen wird, bleibt die Struktur des kontrafaktischen Konditionals erhalten. Als Beispiel kann der Satz dienen „Wenn$_{i}$ etwas, wenn$_{ii}$ es Säugetier ist, drei Köpfe hätte, dann$_{i}$ hätte der Affe Bimbo (oder: dann hätten alle Affen) drei Köpfe" – In diesem Satz drückt das *wenn$_{i}$* das kontrafaktische Enthymem aus, das wenn$_{ii}$ drückt das in kontrafaktischer Weise zu Grunde gelegte Bezugsgesetz aus; die Subsumtionsprämisse, dass Bimbo bzw. alle Affen Säugetiere sind, bleibt unausgesprochen. Weil zumindest eine der Prämissen kontrafaktisch als wahr unterstellt ist, ist die Wahrheit der Konklusion ebenfalls nur kontrafaktisch als wahr anzunehmen. Es geht bei den Konditionalen A⇨B und bei A➲B immer um die Folgerungsbeziehung von Sätzen, nicht um die Gesetzesbeziehung von Ereignisklassen. – **O'CONNOR** behauptet, das kontrafaktische Konditional sei eine Paraphrase des impliziten Gesetzes, dessen Geltung es voraussetzt. „A particular contrary-to-fact conditional has exactly the same meaning as the corresponding universal indicative statement… The two verbal forms are merely two different ways of saying the same thing." (360f) „The use of subjunctive is often intended to affirm, for example, that a certain natural connexion between certain classes of events or properties does hold in nature so that if a certain antecedent event, A, which admittedly will not take place, were to occur, it would be followed by a certain occurrence, C." (352) Wenn ein kontrafaktisches Konditional A➲B auch die Geltung eines Gesetzes $\mathcal{N}^{e}(E_A,E_B)$ voraussetzt, so ist es doch keine Paraphrase dieses Gesetzes wie **O'CONNOR** behauptet, denn A➲B verweist in den Sätzen A und B auf die Einzelereignisse e_A und e_B, nicht auf die Ereignisklassen E_A und E_B. Ein Konditional A➲B besagt immer mehr als das Gesetz $\mathcal{N}^{e}(E_A, E_B)$, das nur Teil der von A➲B ausgedrückten Folgerungsbeziehung ist.

22 **SANFORD** (If P then Q, S.78): „The ‚would'-clause standing by itself … is grammatically unacceptable as a complete sentence."

23 **FRANZ VON KUTSCHERA** schreibt, zwischen dem problematischen Konditional „Wenn Hans sich zur Wahl stellt, dann wird er sie gewinnen" und dem kontrafaktischen Konditional „Wenn Hans sich zur Wahl stellen würde, dann würde er sie gewinnen" könnten keine „semantischen" Unterschiede ausgemacht werden; das problematische (indikativische) könne immer auf das kontrafaktische (irreale) Konditional „reduziert" werden (Einführung in die intensionale Semantik, S.50f). Diese auch von anderen Autoren behauptete Reduzierbarkeit trifft nicht zu, denn der erste Satz lässt es offen, ob sich Hans zur Wahl stellt, während es der zweite Satz definitiv ausschließt.

24 Die Regelmäßigkeit ist in einem abgeschlossenen Zeitraum gültig; Beispiel: Wenn die Athener vor einer wichtigen politischen Entscheidung standen, haben sie das Orakel befragt.

25 Beispiel: Wenn morgen schönes Wetter ist, arbeite ich im Garten. Hier sind die Einzelereignisse e_a und e_B keine Glieder von Ereignisklassen E_A und E_B, zwischen denen eine implikative oder implikationsanaloge Gesetzesbeziehung besteht; der Zusammenhang zwischen den Einzelereignissen liegt alleine im Entschluss. Der Sprecher weiß nicht, ob das Bedingungsereignis eintreten wird, falls es aber eintritt, wird die Folgehandlung ausgeführt werden, und dieses Verhältnis ist nur für diesen Einzelfall gültig. Auch dieses Verhältnis kann Bezugspunkt eines assertorischen Enthymems (Weil morgen schönes Wetter ist, arbeite ich im Garten), eines problematischen Enthymems (Wenn morgen schönes Wetter sein sollte, arbeite ich im Garten) oder eines kontrafaktischen Enthymems sein (Wenn morgen schönes Wetter wäre, würde ich im Garten arbeiten).

26 Vgl. 5.4.1. Die Fiktive-Welten-Semantik und das Prinzip des zugelassenen Widerspruchs, S.293

27 Conditional Logic, S.393

28 **WOLFGANG WALETZKI** hat korrekt die Struktur der begründenden Weil-Sätze und der problematischen und kontrafaktischen Konditionale herausgearbeitet (Der Irrealis (‚Counterfactual') im Rahmen der Konditionallogik, Inauguraldissertation in der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg, Dezember 1992).

- Der Autor erkennt, dass die Teilsätze A und B dasselbe Objekt a betreffen (dasselbe Ereignis-Bezugsystem); es wird eine Aussage über einen einzelnen Gegenstand gemacht: A = F(a) und B = G(a). Er hat erkannt, dass die Aussagen A und B Feststellungen über Einzelsachverhalte F(a) und G(a) sind.
- Diese Einzelsachverhalte F(a) und G(a) sind als Glieder der Klassen F(x) und G(x) zu fassen (**WALETZKI** spricht von „Satzfunktionen"; es sind Bezeichnungen von Sachverhaltsklassen): der Gegenstand a gehört der Klasse $\{x|F(x)\}$ und $\{x|G(x)\}$ an (die Extensionen der Prädikatoren F(x) und G(x)).
- Den meist unausgesprochen zu Grunde gelegten Zusammenhang $\mathcal{N}^{e}(E_A, E_B)$ – das „innere Band" zwischen den Sätzen A und B – drückt **WALETZKI** dadurch aus, dass er fordert, dass die beiden Klassen $\{x|F(x)\}$ und $\{x|G(x)\}$ in der Beziehung der Inklusion $\{x \mid F(x)\} \subseteq \{x \mid G(x)\}$ stehen; die ℂ𝕌𝔼-Beziehung zwischen den Sachverhaltsklassen F(x) und G(x) besteht ja genau dann, wenn gilt $\{x \mid F(x)\} \subseteq \{x \mid G(x)\}$.
- Das Konditional ist klar geschieden von der durch die Inklusion $\{x \mid F(x)\} \subseteq \{x \mid G(x)\}$ dargestellten implikativen Beziehung zwischen F(x) und G(x); das Implikationsgesetz ist als unausgesprochene Voraussetzung des Konditional erfasst.
- Klar wird dann der Unterschied zwischen A⇉B, A⇨B und A➲B erkannt: bei A⇉B muss A wahr sein, bei A⇨B darf die Einheit von A nicht bekannt sein, bei A➲B ist A falsch.

Zu Recht verweist **WALETZKI** darauf, dass er als erster die korrekte Bestimmung der Verbindung der Teilsätze dieser drei Arten von Satzgefügen veröffentlicht hat; er erhebt nicht den Anspruch auf die „einzig richtige Erklärung des Konditionals" – aber genau dies hat er geleistet. Diese Leistung ist sehr bemerkenswert, wenn man sich die heillose Ratlosigkeit der Anhänger des fregeschen Logikentwurfs hinsichtlich der Bedeutung der Konditionale vor Augen hält; erklärbar ist diese Leistung nicht zuletzt dadurch, dass der Autor allenfalls unwesentlich in den irreführenden Konzepten **FREGE**s befangen ist.

29 **MENNE**, Einführung in die Logik, S.7f.

30 Im eben angeführten Beispiel ist die Bedingung dafür, dass etwas Scheiben- oder Trommelbremsen (oder beides) aufweist, dass es ein Auto ist.

31 **HANSON, WILLIAM H.**: Indicative conditionals are Truth-Functional, S.56.

32 „Die Unbestimmtheit der Wahl zwischen den als sich gegenseitig ausschließend gesetzten beiden Prädikatsbestimmtheiten gibt hier der Behauptungsfunktion das eigentümliche Verbleiben in der Schwebe. Dass diese Bedingtheit, dieses ‚in der Schwebe bleiben' der Behauptungsfunktion beim disjunktiven und beim hypothetischen Urteil gleichartig vorkommt und es deshalb berechtigt, beide Urteile als bedingte dem kategorischen als dem unbedingten gegenüberzustellen, ergibt sich auch daraus, dass jedes disjunktive Urteil einer bestimmten Anzahl hypothetischer Urteile äquivalent ist." (**ALEXANDER PFÄNDER**, Logik, S.107) *Entweder A oder B* ist äquivalent: *Wenn ~A, dann B*; *wenn A, dann ~B*; *wenn B, dann ~A*; *wenn ~B, dann A* (S.108). An *dieser* Stelle wird unter „disjunktivem" bzw. „hypothetischem Urteil" also das ausschließende Oder-Enthymem bzw. das problematische Konditional verstanden. Ansonsten wird weder in der traditionellen, noch in der „modernen" Logik durchgehend und generell zwischen den Wenn_1- bzw. Oder_1-Gesetzen und den Wenn_2, bzw. Oder_2-Enthymemen unterschieden.

33 Die vollständige Darstellung des Oder-Enthymems $A \veebar B$ ist: Weil „$E_C \vdots\ E_A \vee E_B$" gilt, und weil „C" wahr ist, deshalb gilt „A oder B ist wahr (oder beide sind wahr)".

34 **J. KIM**, Nichtkausale Beziehungen, S.133

35 Das Konditional „Wenn Hans den Boden intensiver bearbeitet haben sollte, hat er höhere Erträge" hat dieselbe Bedeutung wie der Satz „Wenn Hans den Boden intensiver bearbeitet haben sollte, hat er *notwendig* höhere Erträge"; dasselbe gilt für die Konditionale „Wenn Hans keine höheren Erträge haben sollte, dann hat er seinen Boden nicht intensiver bearbeitet" und „Wenn Hans keine höheren Erträge haben sollte, dann ist es unmöglich, dass er seinen Boden intensiver bearbeitet hat". Auch wenn nicht Worte wie *notwendig*, *unmöglich* usw. gebraucht werden, ist klar, dass ein Konditional „Wenn A, dann B" darauf beruht, dass das Auftreten eines Ereignisses e_A das Auftreten eines Ereignisses e_B notwendig macht, bzw. das Nichtauftreten eines Ereignisses e_B das Auftreten eines Ereignisses e_A unmöglich macht, weil bei E_A immer E_B auftritt, und weil bei $\sim E_B$ nie E_A vorliegt.

36 In der Literatur werden solche enthymematischen Möglichkeitsschlüsse der Ausdrucksform

> Wenn e_A eintritt/eintreten würde, dann tritt möglicherweise e_B ein/würde möglicherweise e_B eintreten (dann könnte e_B eintreten usw.)

oft unter dem Namen „might-Konditionale" angesprochen.

37 The Development of Logic, S. 76f

38 S.136f

39 vgl. 1.2. Die logischen Formen als Verhältnisse relativer Modalisierung, S. 10!

40 Ist M eine endliche Menge, dann bezeichnet der Ausdruck „|M|" die Anzahl der Elemente der Menge M.

41 Dies ist die Wahrscheinlichkeit $p(E_A \cap E_B)$, denn aus der Beziehung $p(E_B / E_A) = p(E_A \cap E_B) / p(A)$ folgt die Gleichung $p(A) \cdot p(E_B / E_A) = p(E_A \cap E_B)$.

42 **E.W. ADAMS**, The Logic of Conditionals, S.3. Dieses „Prinzip" wird als *Adams' Hypothesis* gehandelt (**SANFORD**, If P, then Q, S.93, Anmerkung 20, S.246). Die das kontrafaktische Konditional betreffende *Stalnaker's Hypothesis* besage, dass $p(A \supset B) = p(B/A)$, wobei $p(A \supset B)$ des Sprechers „degree of belief in the conditional" und $p(B/A)$ sein „conditional degree of belief in B given A" sei (**SANFORD**, S.89).

43 **SANFORD**, S.98. **D. EDGINGTON** meint: „A person's degree of confidence in a conditional, if A, B, is the conditional probability he assigns to B given A." (Do Conditionals Have Truth-Conditions?, S.188)

Bei der Erläuterung der Struktur eines Konditional, das den Zusammenhang zweier Aussagen A und B betrifft, ist stets – ob das Bezugsgesetz nun ein Notwendigkeitsgesetz „$\mathcal{N}^e(E_A, E_B)$" oder Wahrscheinlichkeitsgesetz „$p(E_B / E_A) = k$" ist – nachdrücklich zwischen den Feststellungsaussagen A, B, den Einzelereignissen e_A und e_B, deren Vorliegen die Aussagen A und B konstatieren, und den Sachverhalts-/Ereignisklassen E_A und E_B zu unterscheiden, deren Zusammenhang das (implizite) Bezugsgesetz bestimmt, und deren Glieder e_A bzw. e_B sind; Wahrscheinlichkeitswerte kommen nicht den Aussagen A und B, sondern nur dem Vorliegen der Ereignisse e_A und e_B zu. Wahrscheinlichkeitswerte graduieren nie den Wahrheitswert einer Aussage. Siehe Abschnitt 5.2.1. Die Modalitäten sind keine Modifikationen der Wahrheitswerte – weder hinsichtlich der „faktischen Notwendigkeit" noch der bedingungslogischen Modalisierung, S. 283

44 **DAVID LEWIS**: Probabilities of Conditionals and Conditional Probabilities, S.76

45 **D.EDGINGTON**, S.188; **D.LEWIS**, S.76; **E.W.ADAMS**, A Logic of Conditionals, Inquiry, vol 8, S.166-197, S.176f, zit **SANFORD**, S.92, **F.JACKSON**, Conditionals, 1987, S.37

46 Das unausgesprochene Bezugsgesetz dieses assertorischen Enthymems lautet: „Wenn die Geltung eines Gesetzes $E_A \rightarrow E_B$ die Wahrscheinlichkeit k hat, und wenn die Wahrheit der Aussage $A \equiv \mathcal{B}(e_A)$ ungewiss ist, hat das Konditional $A \Rightarrow B$ die Wahrscheinlichkeit k".

47 Eine mögliche Paraphrase ist: „Wenn ein König schlecht regiert, sind seine Untertanen ihm dennoch/trotzdem zum Gehorsam verpflichtet". Diese Art der Paraphrasierung besteht für alle derartigen Sätze.

48 Im Satz „Auch wenn Männer bei einer Bewerbung weniger gut für die betreffende Stelle qualifiziert sind als die sich mitberwerbenden Frauen, werden sie meist bevorzugt" wird die Tatsache, dass höherqualifizierte Frauen bei Bewerbungen den Männern gegenüber meistens benachteiligt werden, als Ausnahme von der Regel, dass der besser qualifizierte Bewerber vorgezogen wird, gekennzeichnet.

49 Ein Meistenteils-Gesetz ist eine $\mathcal{M}$-Modalisierung $\mathcal{M}(E_A.E_B)$; bei E_A ist E_B möglich ($\mathcal{M}$), und zwar tritt bei E_A E_B öfter auf als $\sim E_B$; es ist ein nähere quantitative, wenn auch nicht zahlenmäßige Bestimmung.

50 Der Satz „Auch wenn Hans nicht vorbestraft ist, kann er nicht zur Polizei" ist also zweideutig, er kann assertorisch und problematisch sein; beide Fälle können jedoch umgangssprachlich unzweideutig ausgedrückt werden.

51 vgl. etwa **NUTE**, Conditional Logic, S.427

52 The Contrary-to-Fact Conditional, S.301. Auch **LEWIS** und **POLLOCK** schlagen vor, dass „English sentences having the form ›If φ were the case, then ψ might the case‹ should be symbolized as $\neg(\varphi \supset \neg\psi)$" (s. **NUTE**, Conditional Logic, S. 427).

„This denial of a ‚connexion' between the truth of *q* and the simultaneous falsehood of *p* we may then express by saying that *even if p* had been true, *q* would have been true. Here the *even if* denies something, viz. a ‚connexion', the existence of which we assert when asserting conditionally contrary-to-fact." (**VON WRIGHT**, On conditionals, S.146) **GOODMAN** schreibt in diesem Sinne über das *even-if,* das er „semifactual" nennt: „Full counterfactuals affirm, while semifactuals deny, that a certain connection obtains between antecedent and consequent." (Fact, Fiction and Forecast, S.6) Auch **HAZEN /SLOTE** verweisen auf den Aspekt des Überraschenden und Unüblichen: Das *even – sogar –* stehe vor einem Satzteil, um auszudrücken, dass der Satz, obwohl für wahr gehalten, is felt to be more unexpected or less evident that some other sentence, differing from it only in the marked constituent, suggested by the context." (‚Even If', S.35).

53 Logik, S.54

54 Ein anderes Beispiel dieser rhetorischen Figur stammt von **J.GRAU**: „Wenn Cäsar ein Römer war, war er kriegerisch; Cäsar war ein Römer; also war Cäsar kriegerisch." (Grundriss der Logik, S. 79) In diesem angeblichen *Modus ponens* ist der Satz „Wenn Cäsar ein Römer war, war er kriegerisch" ein Konditional mit der unausgesprochenen Gesetzesprämisse „Wenn jemand ein Römer ist, ist er kriegerisch", und dem rhetorisch motivierten Wahrheitsvorbehalt hinsichtlich des Römerseins Cäsars; im Satz „Cäsar war ein Römer" wird der Wahrheitsvorbehalt zurückgenommen, im Ausdruck „also war Cäsar kriegerisch " wird diese Rücknahme auf die Konklusion des problematischen Konditionals übertragen.

55 Logik, S. 55

56 Ein anderes, nicht ganz korrektes Beispiel findet sich bei **ARNAULD** (Logik, oder die Kunst des Denkens, S. 209)

> „Wenn die Troer nach Italien gegen den Willen der Götter gekommen wären, wären sie zu strafen.
> Sie sind aber nicht gegen ihren Willen gekommen.
> Also sind sie nicht zu strafen."

Der Obersatz ist ein enthymematisch - kontrafaktischer $\mathbb{C}/\alpha$ mit dem nicht ausgesprochenen Bezugsgesetz „Wenn jemand gegen den Willen der Götter nach Italien fährt, ist er zu strafen"; der Sprecher weiß, dass die Troer nicht gegen den Willen der Götter nach Italien gekommen sind, er unterstellt dies jedoch kontrafaktisch. Im zweiten Satz wird die irreale Aussage zurückgenommen, und die kontrafaktische Konklusion widerrufen. Dies stellt einen Schluss nach dem Schlussschema $\mathbb{C}/\gamma$ dar, also einen Schluss auf $\mathcal{K}$; deshalb lautet die Widerrufskonklusion korrekt: die Troer sind jedenfalls nicht deshalb, weil sie nach Italien gefahren sind, zu strafen (die Möglichkeit bleibt offen, dass sie aus anderen Gründen zu strafen sind).

57 **KURT JOACHIM GRAU**, Grundriss der Logik, S.85); dieses Verbalschema auch bei **PRANTL** I, 383, Fn.62

58 Weil gilt „Wenn $\mathfrak{p}$, dann $\mathfrak{q}$" und „Wenn $\mathfrak{q}$, dann $\mathfrak{r}$" gilt auch „Wenn $\mathfrak{p}$, dann $\mathfrak{r}$".

59 **A.MENNE** schreibt, der Ausdruck „Wenn alle Studenten Nichtschwimmer sind und alle Nichtschwimmer blauäugig sind, so sind alle Studenten blauäugig" sei ein alleine auf Grund seiner Form wahrer Satz (Einführung in die Logik, S. 9); unter der Voraussetzung, dass wir wissen – wie auch **A.MENNE** –, dass die Implikationsgesetze „Alle Studenten sind Nichtschwimmer" und „Alle Nichtschwimmer sind blauäugig" falsch (und nicht ungewiss) sind, ist *nur* der Satz „Wenn alle Studenten Nichtschwimmer wären und alle Nichtschwimmer blauäugig wären, so wären alle Studenten blauäugig" richtig – eine kontrafaktische Subsumtion zweier falscher verketteter Implikationsgesetze unter das logische Gesetz $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

60 Dies folgt aus der Geltung der Verkettungsgesetze $\mathbb{CCC}$, $\mathbb{EEE}$, $\mathbb{CEC}$ und $\mathbb{ECC}$, sowie daraus dass bei $\mathcal{N}^e(p,q)$ entweder $p \rightarrow q$ oder $p \leftrightarrow q$ gilt.

61 S. 85

62 Implizites Bezugsgesetz des Konditionals ist „Wenn man das Buch, das einem Film zu Grunde liegt, gelesen hat, kennt man die Handlung des Films“.

63 Implizites Bezugsgesetz des Konditional ist „Wenn man die Handlung eines Films kennt, findet man den Film langweilig“.

64 Dieses Argument – der „hypothetische Syllogismus“, so **SALMON**, besitze die „Form“

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

Diese Darstellung ist jedoch bei **SALMON** mehrdeutig, er stellt mit Hilfe der Zeichengestalt „$p \rightarrow q$“ völlig verschiedene Zusammenhänge, nämlich Implikation, Konditional und die von **FREGE** konstruierte so genannte „materiale Implikation“.

65 Siehe oben S. 74ff!

66 Ist für zwei Elemente a und b die Negation definiert und besteht zwischen diesen Elementen eine Relation $\mathfrak{R}_1$, dann ist die Kontraposition zu $a\mathfrak{R}_1b$ die Relation $\mathfrak{R}_2$, die zwischen ~b und ~a besteht, also $\sim b\mathfrak{R}_2{\sim}a$.

Teil II: Kritik des fregeschen Logikentwurfs

II, Kapitel 1. Das System der fregeschen Gedankengefüge ("Aussagenlogik").

Ausgehend von der Einsicht, dass das umgangssprachliche *Wenn-dann* bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge ausdrückt, die nicht zwischen Aussagen, sondern zwischen Klassen von Sachverhalten/Ereignissen bestehen, habe ich ein infinites System bedingungslogischer Formen konstruiert, und Verfahren aufgestellt zur Entscheidung der Gültigkeit beliebiger logischer Gesetze, d.h. der Gesetzeszusammenhänge, die zwischen diesen Formen bestehen. Das System dieser Formen werde ich nun systematisch mit jenen Konzepten vergleichen, die von **FREGE** und seinen Nachfolgern konstruiert und als logische Formen ausgegeben wurden. Das von mir dargelegte System logischer Formen ist keine der vielen Erweiterungen, die **FREGE**s Logikentwurf im Laufe der Zeit erfahren hat; es handelt sich um ein konkurrierendes Projekt; sowohl für die im ersten Teil dieser Arbeit dargelegten Formen wie diejenigen des Logikentwurfs **FREGE**s wird der Anspruch erhoben, dass sie das System aller nur möglichen logischen Formen bilden, und den logischen Gehalt des umgangssprachlichen Ausdrucks logischer Zusammenhänge aufgreifen, präzisieren und vervollständigen. Diese sich gegenseitig ausschließenden Prätentionen sind sorgfältig zu bewerten.

Die wesentlichen Begriffsbildungen der „modernen Logik“ gehen auf **GOTTLOB FREGE** zurück. Der entscheidende Schritt bei **FREGE**s Versuch einer Neugestaltung der Logik bestand in der Konstruktion der so genannten *Aussagejunktoren*[1]. Das System dieser „Aussagejunktoren“, die sog. *Aussagenlogik*, ist das Alles tragende Fundament der gesamten „modernen Logik“, auch in ihren verschiedenen Erweiterungen und Differenzierungen. **FREGE** nennt die Aussagejunktoren „*Gedankengefüge*“; er gibt sie als „Denkformen“ und als „logische Verhältnisse“ aus (WBB 113f [55f]), er hält sie für zwischen „Urteilsinhalten“ bestehende „logische Beziehungen“ (ZB 104 [8]; auch BRL 15). Alle nur möglichen logischen Formen sollen in diesem System erfasst sein[2]. Nach anfänglichem Zögern sind **FREGE**s Neuerungen, insbesondere die Konstruktion der Gedankengefüge/Junktoren, vorbehaltlos und allgemein akzeptiert worden, sie bilden mittlerweile den selbstverständlichen, „klassischen“ und, wie meist unterstellt wird, keiner Klärung und Rechtfertigung bedürftigen Bezugspunkt aller gegenwärtigen theoretischen Logik; als Logik gilt nur, was an **FREGE**s System der Gedankengefüge anknüpft[3]. – Das System der fregeschen Gedankengefüge wird als die „Aussagenlogik“ bezeichnet; ich werde vom „*System der fregeschen Gedankengefüge*“ (abgekürzt: SFG) sprechen, denn es handelt sich dabei, wie ich zeigen werde, keineswegs um ein System logischer Formen oder um eine „Logik der Aussagen“. Um unmissverständlich auf den fregeschen Logikentwurf und die an **FREGE** anknüpfende theoretische Logik Bezug zu nehmen, benutze ich neben dem in distanzierende Anführungszeichen gesetzten Namen „moderne Logik“ die mittlerweile ungebräuchlichen Namen „Logistik“ und „logistisch“.

Zunächst werde ich die Prinzipien vorstellen, die **FREGE**s Versuch einer Rekonstruktion der logischen Formen zu Grunde liegen. Resultieren diese Prinzipien aus einer sachgerechten verallgemeinernden und präzisierenden Reflexion des vortheoretischen, intuitiven Verständnisses logischer Zusammenhänge, welches noch untrennbar an die jeweiligen besonderen Inhalte gebundenen ist und sich ausschließlich umgangssprachlicher logischer Ausdrucksmittel bedient? Was genau bedeuten die Gedankengefüge gemäß den fregeschen Festsetzungen? Kann von **FREGE**s Gedankengefügen gezeigt werden, dass sie echte, gehaltvolle logische Formen und damit unabdingbare Bedingung jeder Art von Erkenntnis und Schlussfolgerung sind?

1.1. Die Postulate der Aussagenbezogenheit und Wahrheitsfunktionalität der Gedankengefüge

FREGE fordert, dass *die Gedankengefüge Beziehungen von Aussagen* sein sollen. Diese für sein System wesentliche Forderung steht im Widerspruch zu seiner eigenen Einsicht, dass in Wenn-Sätzen wie „Wenn jemand ein Mörder ist, ist er ein Verbrecher“, deren Gehalt er doch zu rekonstruieren vorgibt, gar keine Aussagen in Beziehung stehen; das Postulat ist ein von **FREGE** nicht näher begründeter Einfall. „Aber nehmen wir erst einmal an“, schreibt **FREGE** über Äußerungen der Gestalt *Wenn A, dann B*, „dass die Buchstaben ›A‹ und ›B‹ eigentliche Sätze vertreten.“ (Briefe XIX/3, 42) „Es ist da zunächst denkbar, dass der Bedingungssatz einen Gedanken ausdrückt, und dass der Folgesatz einen Gedanken ausdrückt.“ (Briefe IX/4, 104). Ich nenne im Folgenden die Aussagen, welche als Relata von Gedankengefügen fungieren, *prädizierte Aussagen*[4].

FREGE postuliert des Weiteren, dass *jedes Gedankengefüge selbst wieder eine Aussage* sein soll: „Das Gedankengefüge soll selbst ein Gedanke sein, nämlich etwas, von dem gilt: es ist entweder wahr oder falsch.“ (Gef 73 [37]) Eine Aussage kann sich auf *n* andere Aussagen nur in der Weise beziehen, dass sie eine Aussage *über* diese Aussagen darstellt, diesen Aussagen also ein *n*-stelliges Prädikat zuspricht; Gedankengefüge sind also den ersten beiden Forderungen FREGEs entsprechend *Aussagen über Aussagen*; als logische Formen müssten sie logisch bedeutsame Beziehungen zwischen diesen prädizierten Aussagen beinhalten.

Im ersten Teil dieser Arbeit ist die Folgerungsrelation „aus …folgt …“ als ein solches logisches, *Aussagen betreffendes* Prädikat erklärt; dieses Prädikat wird durch die Angabe aller Bedingungen definiert, die erfüllt sein müssen, wenn zwischen irgendwelchen *n*-Tupeln gegebener Aussagen diese logische Relation besteht: zwischen Aussagen besteht diese Folgerungsrelation genau dann, wenn eine oder mehrere dieser Aussagen die Form von Bezugsgesetzen, andere dieser Aussagen die Form von geeigneten Subsumtionsprämissen haben, und wenn in den restlichen Aussagen, den Konklusionen oder Schlusssätzen, die Gesetzmäßigkeiten der Bezugsgesetze korrekt – gemäß einem geeigneten, durch das Bezugsgesetz vorgegebenen Schlussschema – auf die besonderen und einzelnen Fälle übertragen sind, die in den Subsumtionsprämissen den Bezugsgesetzen untergeordnet sind. Wie jede andere Relation nimmt die Folgerungsrelation Bezug auf bestimmte Beschaffenheiten der in Relation stehenden Relata; im Falle der Folgerungsrelation sind dies die logischen Formen der in Beziehung stehenden Aussagen.

Auf welche Eigenschaften der prädizierten Aussagen nehmen nun die Gedankengefüge als Aussagen über Aussagen Bezug – was sagen die Gedankengefüge demgemäß über den Zusammenhang diese Aussagen? FREGE legt – ohne dies jemals in irgendeiner Weise zu begründen – fest, „dass von dem Gedanken nur in Betracht kommen soll, ob er wahr oder falsch ist, gar nicht eigentlich der Gedankeninhalt selbst.“ (EL 76)[5] Weil die Gedankengefüge alleine die vorgegebenen Wahrheitswerte der prädizierten Aussagen berücksichtigen, werden sie als „Wahrheitsfunktionen“ bezeichnet; dabei besagt diese Charakterisierung zunächst nichts anderes, als dass die Wahrheit der Gedankengefüge allein von den vorausgesetzten Wahrheitswerten dieser Aussagen *abhängt*[6]. Diese „Wahrheitsfunktionalität“ bedeutet nicht, dass es sich hier um *echte* Abbildungen im Sinne der Algebra handelt; Gedankengefüge sind Prädikate, keine Funktionen oder Abbildungen[7].

1.2. Die aus den Postulaten der Aussagenbezogenheit und Wahrheitsfunktionalität resultierenden Konstruktionsprinzipien der Gedankengefüge

Die Forderungen, dass Gedankengefüge sich erstens auf Aussagen beziehende Aussagen sein sollen und zweitens nur die Wahrheitswerte der in Relation gesetzten Aussagen berücksichtigen sollen, bestimmen vollständig und unverrückbar die Konstruktionsprinzipien und damit die Bedeutungen der Gedankengefüge – nichts liegt in den Gedankengefügen, das nicht schon durch diese beiden fregeschen Forderungen gesetzt wäre. Ausgehend von diesen Postulaten ergeben sich für die Konstruktion der Gedankengefüge die folgenden drei Prinzipien.

1.2.1. Das Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit

Für die Wahrheitswerte der durch Gedankengefüge prädizierten Aussagen gilt das *Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit*; aufgrund des Prinzips des Nichtwiderspruchs (PNW) gilt für jede beliebige Aussage A: „Entweder A ist wahr oder A ist falsch; tertium non datur.“ (BFH 43) Den Tatbestand, dass irgendeine Aussage A als wahr behauptet wird, bezeichnet FREGE durch den Ausdruck „├── A“; dass irgendeine Aussage A als falsch bestritten („verneint“) wird, bezeichnet er durch „├┬ A“. Ich schreibe im Folgenden für „├── A“ auch „A“, und für „├┬ A“ auch „¬A“[8]. Im fregeschen Logikentwurf wird der Stellenwert der Bestimmungen *wahr* und *falsch* für eine Theorie logischer Formen allerdings nicht weiter untersucht; das unreflektiert-intuitive, vortheoretische Verständnis von Wahrheit und Falschheit wird einfach, ohne näher theoretisch bestimmt zu werden, aufgenommen und vorausgesetzt. Die umgangssprachlichen Bezeichnungen der Wahrheitswerte werden, ohne dass das mit ihnen verbundene intuitive Verständnis in irgendeiner Weise vertieft würde, durch begriffsschriftliche Symbole ersetzt[9].

1.2.2. Das Prinzip der Zusammenhanglosigkeit

Da es bei der Prädizierung von Aussagen durch Gedankengefüge nur auf deren Wahrheitswerte ankommt, ist nicht erforderlich, dass zwischen verschiedenen Aussagen, denen eines der Gedankengefüge zugesprochen wird, irgendein inhaltlicher und logischer Zusammenhang besteht – dadurch, dass Aussagen einen Wahrheitswert aufweisen, ist noch keinerlei Zusammenhang zwischen ihnen gestiftet. Aus dem Postulat der „Wahrheitsfunktionalität" folgt das *Prinzip der Zusammenhanglosigkeit oder Irrelevanz*: durch die Prädikation von Gedankengefügen wird keinerlei inhaltlich-logischer Zusammenhang ausgedrückt. (BS 5f; Gef 80, 84 [42, 46]; EL 76). Durch dieses Prinzip der Zusammenhanglosigkeit ist die Bedeutung der Gedankengefüge vollständig festgelegt, und – man mag es drehen, wie man wolle – es resultiert aus diesem Prinzip unvermeidlich die logische Irrelevanz der Gedankengefüge selbst: die Konstruktion der grundlegenden Konzepte des fregeschen Logikentwurfs basiert auf einem fundamentalen und unheilbaren Widerspruch – einerseits gründet die Konstruktion und Bedeutung der Gedankengefüge auf dem Grundsatz der Beziehungslosigkeit, auf der anderen Seite meinen **Frege** und seine Anhänger im Widerspruch dazu darauf bestehen zu können, dass Gedankengefüge logische *Beziehungen* darstellen. Dieser Widerspruch äußert sich dann darin, dass **Frege** einerseits die Bedeutung der Gedankengefüge auf der Basis der erwähnten Postulate und Prinzipien klar und präzise bestimmt, dann aber im Nachhinein den Gedankengefüge logische Deutungen gibt, die seinen *eigenen* Definitionen krass widersprechen.

1.2.3. Die kombinatorische Bildung der Wahrheitswertprädikate und der Gedankengefüge; die Festsetzung der Bedeutungen der Gedankengefüge mit Hilfe umgangssprachlicher Ausdrucksmittel

Ausgehend vom *Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit* und vom *Prinzip der Zusammenhanglosigkeit* lassen sich für beliebige, zufällig zu Paaren verknüpfte Aussagen A und B vier *Wahrheitswertkombinationen* bilden:

> „Wenn man zwei Gedanken hat, so sind nur vier Fälle möglich:
> 1. der erste ist wahr und desgleichen der zweite;
> 2. der erste ist wahr, der zweite falsch;
> 3. der erste ist falsch, der zweite wahr;
> 4. beide sind falsch." (EL 76; auch BS 5; Briefe XIX/3, 43; ZB 101f [5f]; KÜL 215; BRL 39f; BLF 54f)[10]

Es gibt für zwei Aussagen genau diese vier Kombinationen ihrer Wahrheitswerte, und jede dieser *Wahrheitswertkombinationen* besteht im Zusprechen eines von vier disjunkten *Wahrheitswertprädikaten*: „…ist wahr und …ist wahr"; „…ist wahr und … ist falsch"; „… ist falsch und … ist wahr" und „… ist falsch und … ist falsch". Als unmittelbare Konsequenz des Prinzips der Wahrheitswertdefinitheit ergibt sich die *Vollständigkeit und durchgängige Disjunktivität der Wahrheitswertprädikate*: zwei beliebigen wahrheitswertdefiniten Aussagen kommt *genau eines und nur eines* dieser Wahrheitswertprädikate zu.

Frege konstruiert die zweistelligen Gedankengefüge auf der Basis dieser Vollständigkeit und Disjunktivität der Wahrheitswertprädikate, indem er Paaren von Aussagen entweder vier, drei, zwei, eines oder keines der vier Wahrheitswertprädikate *ausdrücklich abspricht* – dies bedeutet dann, dass dem Aussagenpaar genau eines und nur eines der restlichen (nicht ausdrücklich abgesprochenen) Wahrheitswertprädikate zukommt; auf diese Weise ergeben sich genau 16 verschiedene zweistellige Gedankengefüge, darunter das leere, widersprüchliche Gedankengefüge ◐[11]. Man sagt oft ungenau, ein Gedankengefüge werde für eine Wahrheitswertkombination entweder wahr oder falsch. „Um die zweistelligen Verknüpfungszeichen zu *definieren*, brauchen wir bloß den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage für jede der möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten der zwei Teilaussagen anzugeben." (**W.C. Salmon**, Logik, 76) Zwei Aussagen, denen ein bestimmtes Gedankengefüge zugesprochen werden kann, kommt von den Wahrheitswertprädikaten, für die das Gedankengefüge wahr ist, genau eines und nur eines zu; dass ein Gedankengefüge für eine Wahrheitswertkombination wahr ist, bedeutet also, dass dieses Wahrheitswertprädikat *nicht ausdrücklich ausgeschlossen* ist – es können mehrere Wahrheitswertkombinationen nicht ausdrücklich ausgeschlossen sein, aber nur eine Wahrheitswertkombination kann tatsächlich zutreffen („wahr sein"); dass ein Gedankengefüge für eine Wahrheitswertkombination falsch wird, bedeutet, dass diese Wahrheitswertkombination *ausdrücklich ausgeschlossen* ist. Gehören Wahrheitswerte zweier Aussagen einer Wahrheitswertkombination an, die durch ein Gedankengefüge nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird, so kommt den zwei Aussagen das betreffende Gedankengefüge zu; es ist aber unmöglich, dass zwei Aussagen, denen ein bestimmtes Gedankengefüge zukommt, allen Wahrheitswertkombinationen angehört, für die das Gedankengefüge wahr ist.

1.2.4. Die drei aufeinander aufbauenden Schritte bei der Bildung der Gedankengefüge

Ein sachgerechtes und unvoreingenommenes Verständnis des fregeschen Logikentwurfs ist nur dann möglich, wenn beachtet wird, dass die Gedankengefüge nur in einer bestimmten Reihenfolge von aufeinander aufbauenden Schritte konstruiert werden können – und in eben dieser Reihenfolge von **FREGE** konstruiert worden sind. In einem **ersten Schritt** werden auf der Grundlage der dargelegten Prinzipien alle Gedankengefüge mit Hilfe einiger weniger umgangssprachlicher Partikeln, die in ihrer gebräuchlichen, unreflektiert-intuitiven Bedeutung einfach aufgenommen werden, eindeutig und unmissverständlich definiert und ausgedrückt; dafür erforderlich sind neben der Bezeichnung von konkreten und beliebigen Aussagen einzig das Adjektiv „wahr“ und die Partikeln „nicht“, „und“, und „entweder – oder“ („nicht wahr“ kann durch „falsch“ ersetzt werden). Ohne auf *diese* vorgegebenen umgangssprachlichen Ausdrucksmittel zurückzugreifen, können die Gedankengefüge erst gar nicht gebildet werden.

Alle Gedankengefüge außer ▼ und ◐ können umgangssprachlich auf zwei Weisen ausgedrückt und gebildet werden. Entweder werden die ausdrücklich ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate („negativ“) dargelegt (zum Ausdruck sind dann nur die Wörter „wahr“, „nicht“ und „und“ erforderlich) oder es werden die nicht ausdrücklich ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate („positiv“) dargelegt (zum Ausdruck ist zusätzlich die Partikeln „entweder–oder“ erforderlich, falls mehr als ein Wahrheitswertprädikat nicht ausdrücklich ausgeschlossen ist). Werden z.B. zwei Aussagen für falsch gehalten, so kann dies positiv ausgedrückt werden als „Die erste Aussage ist nicht wahr und die zweite Aussage ist nicht wahr“ und negativ als „Es ist nicht wahr, dass die erste Aussage wahr und die zweite Aussage wahr ist, *und* es ist nicht wahr, dass die erste Aussage wahr und die zweite nicht wahr ist, *und* es ist nicht wahr, dass die erste Aussage nicht wahr und die zweite Aussage wahr ist“. Soll etwa ausgedrückt werden, dass zwei Aussage nicht denselben Wahrheitswert haben, so kann man positiv sagen „*Entweder* ist die erste Aussage wahr und die zweite Aussage nicht wahr, *oder* es ist die erste Aussage nicht wahr und die zweite Aussage wahr“ oder negativ „Es ist nicht wahr, dass beide Aussagen wahr sind *und* es ist nicht wahr, dass beide Aussagen nicht wahr sind“. *Zuerst müssen die Gedankengefüge mit diesen umgangssprachlichen Ausdrucksmitteln definiert werden; ihre Bedeutungen liegen dadurch bereits klar und unmissverständlich fes und, es gibt keinerlei Spielraum für zusätzliche und andere „Deutungen“.*

In einem **zweiten Schritt**, der auf dem ersten aufbaut, können für die konstitutiven umgangssprachlichen Ausdrucksmittel zum Zwecke einer besseren Übersichtlichkeit Abkürzungen festgelegt werden; zur Bezeichnung beliebiger Aussagen können die Buchstabe A, B, C, … verwendet werden; dass eine Aussage A wahr behauptet wird, kann durch „A“, dass eine Aussage A als nicht-wahr (falsch) behauptet wird, kann durch „¬A“ ausgedrückt werden; die Partikeln „und“ und „entweder – oder“ können durch die Zeichen „&“ und „⋈“ abgekürzt werden. Dass zwei Aussagen falsch sind, lässt sich dann z.B. einmal „positiv“ durch „¬A&¬B“ oder „negativ“ durch „¬(A&B) & ¬(A & ¬B) & ¬(¬A&B)“ ausdrücken. Dass zwei Aussagen denselben Wahrheitswert haben, kann durch „(A&B) ⋈ (¬A&¬B)“ oder durch „¬(A&¬B) & ¬(¬A&B)“ formuliert werden. Die umgangssprachlichen Ausdrücke werden jetzt zum Zwecke der Übersichtlichkeit und Kürze durch „künstliche“ (d.h. nicht umgangssprachliche) *abkürzende* Symbole ersetzt, ohne dass dadurch die Bedeutung der umgangssprachlichen Wörter irgend verändert (vertieft oder präzisiert) würde: es wird die umgangssprachliche Ausdruck nur symbolisch abgekürzt ausgedrückt.

In einem **dritten Schritt** können dann für die primären Abkürzungen selbst wieder (sekundäre) Abkürzungen festgesetzt werden; *dieser Schritt setzt die ersten beiden voraus*. Die bedeutungsgleichen Ausdrücke „(A&B) ⋈ (¬A&¬B)“ und „¬(A&¬B) & ¬(¬A&B)“ können etwa durch den Ausdruck „A⇔B“ abgekürzt werden. Alle zweistelligen Gedankengefüge sind in ihrer exakten, von **FREGE** festgesetzten umgangssprachlichen Bedeutung und ihren primären und sekundären Abkürzungen in der folgenden Tabelle angeführt:

Tabelle 9: Die zweistelligen fregeschen Gedankengefüge

Gedankengefüge (Benennung, sekundäre Abkürzung)	*ursprünglicher umgangssprachlicher Ausdruck der Gedankengefüge*	*primäre Abkürzung des umgangssprachlichen Ausdrucks der Gedankengefüge*[12]
O: A △ B	Es ist falsch, dass A und B beide wahr, dass A wahr und B falsch ist, dass A falsch und B wahr ist, dass A und B beide falsch sind[13].	¬(A&B) & ¬(A & ¬B) & ¬(¬A&B) & ¬(¬A&¬B)
K: A & B	*A ist wahr und B ist wahr* ≣ Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist, und es ist falsch, dass A falsch und B wahr ist, und es ist falsch, dass A falsch und B falsch ist	A & B ≣ ¬(A & ¬B) & ¬(¬A&B) & ¬(¬A&¬B)
L: A ⊧ B	*A ist wahr und B ist falsch* ≣ Es ist falsch, dass A wahr und B wahr ist, und es ist falsch, dass A falsch und B wahr ist, und es ist falsch, dass A falsch und B falsch ist	A & ¬B ≣ ¬(A&B) & ¬(¬A&B) & ¬(¬A&¬B)
M: A ⫤ B	*A ist falsch und B ist wahr* ≣ Es ist falsch, dass A wahr und B wahr ist, und es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist, und es ist falsch, dass A falsch und B falsch ist	¬A & B ≣ ¬(A&B) & ¬(A & ¬B) & ¬(¬A&¬B)
X: A ⇓ B	*A ist falsch und B ist falsch* ≣ Es ist falsch, dass A wahr und B wahr ist, und es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist, und es ist falsch, dass A falsch und B wahr ist	¬A & ¬B ≣ ¬(A&B) & ¬(A & ¬B) & ¬(¬A&B)
E: A ⇔ B	Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist, und es ist falsch, dass A falsch und B wahr ist ≣ *Entweder ist A wahr und B wahr, oder es ist A falsch und B falsch.*	¬(A&¬B) & ¬(¬A&B) ≣ (A&B) ⋈ (¬A&¬B)
J: A ⋈ B	Es ist falsch, dass A und B beide wahr sind, und es ist falsch, dass A und B beide falsch sind ≣ *Entweder ist A wahr und B falsch oder es ist A falsch und B wahr*[14]	¬(A&B) & ¬(¬A&¬B) ≣ (A&¬B) ⋈ (¬A&B)[15]
I: A ⇙ B	Es ist falsch, dass A falsch und B wahr ist, und es ist falsch, dass A und B beide falsch sind ≣ *Entweder ist A wahr und B wahr oder es ist A wahr und B falsch*[16]	¬(¬A&B) & ¬(¬A&¬B) ≣ (A&¬B) ⋈ (A&¬B)
F: A ⇖ B	Es ist falsch, dass A und B beide wahr sind, und es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist ≣ *Entweder ist A falsch und B wahr oder es ist A falsch und B falsch*[17]	¬(A&B) & ¬(A&¬B) ≣ (¬A&B) ⋈ (¬A&¬B)
H: A ⇘ B	Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist, und es ist falsch, dass A und B beide falsch sind ≣ *Entweder es ist A wahr und B wahr oder es ist A falsch und B wahr*[18]	¬(A&¬B) & ¬(¬A&¬B) ≣ (A&B) ⋈ (¬A&B)
G: A ≣ B	Es ist falsch, dass A und B beide wahr sind, und es ist falsch, dass A falsch und B wahr ist ≣ *Entweder ist A wahr und B falsch oder es ist A falsch und B falsch*[19]	¬(A&B) & ¬(¬A&B) ≣ (A&¬B) ⋈ (¬A&¬B)
D: A ⇑ B	Es ist falsch, dass A und B beide wahr sind[20] ≣ *Entweder ist A wahr und B falsch oder es ist A falsch und B wahr oder es sind A und B beide falsch*	¬(A&B) ≣ (A&¬B) ⋈ (¬A&B) ⋈ (¬A&¬B)
C: A ⇒ B	Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist[21] ≣ *Entweder es ist A wahr und B wahr, oder es ist A falsch und B wahr, oder es ist A falsch und B falsch*	¬(A&¬B) ≣ (A&B) ⋈ (¬A&B) ⋈ (¬A&¬B)
B: A ⇐ B	Es ist falsch, dass A falsch und B wahr ist[22] ≣ *Entweder es ist A wahr und B falsch, oder es ist A wahr und B falsch, oder es ist A falsch und B falsch*	¬(¬&B) ≣ (A&B) ⋈ (A&¬B) ⋈ (¬A&¬B)
A: A ⊽ B	Es ist falsch, dass A und B beide falsch sind[23] ≣ *Entweder es ist A wahr und B wahr, oder es ist A wahr und B falsch, oder es ist A falsch und B wahr*	¬(¬A&¬B) ≣ (A&B) ⋈ (A&¬B) ⋈ (¬A&B)
V: A ▽ B	*Entweder sind A und B beide wahr, oder A ist wahr und B ist falsch, oder A ist falsch und B ist wahr, oder A und B sind beide falsch*[24].	(A&B) ⋈ (A&¬B) ⋈ (¬A&B) ⋈ (¬A&¬B)

Die zweite Spalte führt die Bedeutungen auf, die **FREGE** zunächst für die Gedankengefüge eindeutig und unmissverständlich ausschließlich mit Hilfe umgangssprachlicher Ausdrucksmittel festgelegt hat, einmal (negativ) als Angabe der *ausdrücklich ausgeschlossenen* Wahrheitswertprädikate, und einmal (positiv) als Angabe der disjunkten *nicht ausdrücklich ausgeschlossenen* Wahrheitswertprädikate (kursiv). Ein Ausdruck „X ≡ Y“ drückt die Bedeutungsgleichheit aus; X und Y sind dann irgendwelche *verschiedenen* Ausdrücke *gleicher* Bedeutung. Die dritte Spalte enthält *primäre* abkürzende Bezeichnungen dieser umgangssprachlichen Ausdrücke: „¬“ für „nicht wahr“, „&“ für „und“ sowie „⋈“ für entweder–oder“; „A“ und „B“ bezeichnen beliebige (als wahr behauptete) Aussagen. In der ersten Spalte, sind für diese primären Abkürzungen, dann *sekundäre* abkürzende Bezeichnungen verwendet: Die primäre Abkürzung „¬(A&¬B)“ bzw. „(A&B) ⋈ (¬A&B) ⋈ (¬A&¬B)“ wird z.B. selbst noch einmal durch „A ⇒ B“ abgekürzt; diese sekundären Abkürzungen setzen immer schon die primären Abkürzungen, und damit auch die konstitutiven, ursprünglichen umgangssprachlichen Festlegungen voraus; man kann mit diesen sekundären Ausdrücken nur operieren, wenn sie auf die primäre Bezeichnung und damit auf den umgangssprachlichen Ausdruck zurückgeführt werden. Ob Abkürzungssymbole wie „$\overline{\nabla}$“, „⇔“ oder „⇒“, „⇑“ in der dargelegten Weise sekundär sind, und deshalb zu ihrer Festlegung und zu ihrem Ausdruck keine anderen als die angegebenen umgangssprachlichen Fügungen in Frage kommen, ist für die Beurteilung der logischen Ambitionen, die **FREGE** mit den Gedankengefügen verbindet, *von höchster Relevanz*, und wir werden diese Frage eingehend erörtern müssen.

Ich spreche vom Gedankengefüge **C**, vom Gedankengefüge **A**, vom Gedankengefüge **E** usw. (erste Spalte der obigen Tabelle). Die in der „modernen Logik“ üblichen Namen der Gedankengefüge vermeide ich – etwa den Namen „(materiale) Implikation“, „Subjunktion“ oder „(materiales) Konditional“ für das Gedankengefüge **C**, den Namen „Alternative“, „Disjunktion“, „Adjunktion“ usw. für das Gedankengefüge **A**, den Namen „Bikonditional“ oder „Äquivalenz“ für das Gedankengefüge **E**, usw. –, denn alle diese Benennungen beinhalten eine *nachträgliche* logische Deutung der Gedankengefüge, die durch die unmissverständlichen, *allein maßgeblichen* fregeschen Festsetzungen, die in der zweiten Spalte der obigen Tabelle aufgeführt sind, nicht abgedeckt sind, sondern diesen widersprechen. Die Gedankengefüge dürfen auf keinen Fall mit den bedingungslogischen Relationen verwechselt werden; deshalb benütze ich – auch in Zitaten – grundsätzlich die in der obigen Tabelle aufgeführten Bezeichnungen; z.B. für das Gedankengefüge „Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ die Zeichen „**C**“ oder „A ⇒ B“, auch dann, wenn dieses Gedankengefüge in einem zitierten Text durch „→“, „⊃“ oder andere Symbole bezeichnet wird; „→“ bezeichnet bei mir *immer* die bedingungslogische Implikation $\mathbb{C}$. **Für die folgenden Erörterungen setze ich voraus, dass den Gedankengefügen keine andere Bedeutung zugeschrieben werden darf, als jene, die aus den eindeutigen fregeschen Festsetzungen resultiert** (angeführt in der zweiten Spalte der obigen Tabelle).

Diese originär-unverfälschte Bedeutung der Gedankengefüge wird oft mit Hilfe von so genannten „*Wahrheitstafeln*“ dargestellt. Für jedes Gedankengefüge geben diese Wahrheitstafeln von jedem Wahrheitswertprädikat an, ob es ausgeschlossen oder nicht ausgeschlossen ist. Der Ausdruck „$\mathcal{W}$“ bedeute den Wahrheitswert *wahr*, „$\mathcal{F}$“ bedeute den Wahrheitswert *falsch*.

	A, B	A & B	$\neg$(A & $\neg$B) $\equiv$ A $\Rightarrow$ B	$\neg$(A & $\neg$B) & $\neg$($\neg$A & B) $\equiv$ A $\Leftrightarrow$ B	usw.
Wahrheits-wertkombination I	$\mathcal{W}$(A) & $\mathcal{W}$(B)	$\mathcal{W}$ (nicht ausgeschlossen)	$\mathcal{W}$ (nicht ausgeschlossen)	$\mathcal{W}$ (nicht ausgeschlossen)	
Wahrheits-wertkombination II	$\mathcal{W}$(A) & $\mathcal{F}$(B)	$\mathcal{F}$ (ausdrücklich ausgeschlossen)	$\mathcal{F}$ (ausdrücklich ausgeschlossen)	$\mathcal{F}$ (ausdrücklich ausgeschlossen)	
Wahrheits-wertkombination III	$\mathcal{F}$(A) & $\mathcal{W}$(B)	$\mathcal{F}$ (ausdrücklich ausgeschlossen)	$\mathcal{W}$ (nicht ausgeschlossen)	$\mathcal{F}$ (ausdrücklich ausgeschlossen)	
Wahrheits-wertkombination IV	$\mathcal{F}$(A) & $\mathcal{F}$(B)	$\mathcal{F}$ (ausdrücklich ausgeschlossen)	$\mathcal{W}$ (nicht ausgeschlossen)	$\mathcal{W}$ (nicht ausgeschlossen)	

Diese „Wahrheitstafeln" drücken übersichtlich die *umgangssprachliche* Festlegung der Bedeutungen der Gedankengefüge, und damit die *Bedingungen der Wahrheit* für die Prädikation der Gedankengefüge[25] aus. Sind z.B. z.B. zwei Aussagen A und B wahr, so ist dies eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass (A&B) wahr ist, es ist eine hinreichende, nicht notwendige Bedingung dafür, dass (A$\Rightarrow$B) wahr ist. Ist es z.B. falsch, dass eine Aussage A wahr, eine Aussage B falsch, so ist dies eine notwendige, nicht hinreichende Bedingung dafür, dass (A&B) falsch ist, es ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass (A$\Rightarrow$B) falsch ist. Die Bedingungen der Wahrheit von Gedankengefügen liegt so *ausschließlich* im vorgegebenen Wahrheitswert der durch das betreffende Gedankengefüge prädizierten Aussage – um die Wahrheit eines Gedankengefüges zu beurteilen, müssen die Wahrheitswerte der prädizierten Aussagen schon bekannt sein – *auf andere Gegebenheiten darf nicht zurückgegriffen werden*.

Man muss sich vor dem Missverständnis hüten, die Bedeutung der Gedankengefüge, die durch die „Wahrheitstafeln" festgelegt werden, könne eine andere sein, als jene, die aus den angeführten Ausdrucksmitteln der Umgangssprache (und *nur* aus diesen) hervorgeht; die „Wahrheitstafeln" stellen die umgangssprachlich festgelegte Bedeutung der Gedankengefüge nur besonders übersichtlich dar. Die Wahrheitstafel von **C** drückt aus, dass von zwei Aussagen jedenfalls nicht die erste wahr und die zweite falsch ist – keinen Deut mehr. Die Gedankengefüge haben keinerlei Gehalt, der über ihre durch **Frege** mit umgangssprachlichen Ausdrucksmitteln festgelegten Bedeutungen hinausgeht[26].

Man darf beispielsweise nicht annehmen das Gedankengefüge $\neg$ (A & $\neg$ B) [$\equiv$ A$\Rightarrow$B] behaupte, das Aussage A die Aussage B impliziert, und diese Behauptung einer Implikationsbeziehung sei dann wahr, wenn A falsch oder A und B beide wahr sind: nein – der Ausdruck A$\Rightarrow$B bedeutet nichts als: es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist – von einer Implikation ist hier nicht die Rede: wenn dies unterstellt wird, ergeben sich Widersprüche, etwa die so genannten Paradoxien der „materialen Implikation"

Festzuhalten bleibt: Die Postulate, auf denen die Konstruktion der Gedankengefüge beruht, resultieren nicht aus einer verallgemeinernden Analyse der Bedeutung umgangssprachlicher logischer Partikeln; die Stellen, in denen **Frege** auf den umgangssprachlichen Gebrauch der logischen Partikel eingeht (EL 75ff; Gef 84f [46f]; GLG IV 295 [377]), belegen, dass **Frege** seine Konstruktionen bewusst in einen Gegensatz zum normalen Sprachgebrauch setzt; er stellt nämlich richtig fest, dass in bestimmten Wenn-dann-Sätzen (jene, die Implikationsgesetze ausdrücken) keine wertdefiniten Aussagen in Beziehung stehen. Ohne weiter danach zu fragen, welche Relata, wenn offenbar keine Sätze, in diesen umgangssprachlichen Wenn-dann-Aussagen tatsächlich aufeinander bezogen sind, postuliert **Frege** ohne jede Begründung, in den „Wenn-dann-Sätzen" seines Systems sollten wertdefinite Aussagen verbunden werden. Diese Forderung determiniert, zusammen mit der Auffassung, dass die Wahrheitswerte die einzigen logisch relevanten Bestimmungen von Urteilen sind (Ged 33 [61], Fn.1) (Postulat der „Wahrheitsfunktionalität"), vollständig Konstruktion und Gehalt der Gedankengefüge; keines dieser konstitutiven Postulate wird durch die Reflexion des Gehaltes der umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel nahe gelegt. Festzuhalten bleibt ferner, dass für die Bildung der Gedankengefüge andere umgangssprachliche Partikeln als „nicht (wahr)", „und" und evtl. „entweder-oder" keinerlei Rolle spielen.

1.3. Zum Gehalt der Gedankengefüge

1.3.1. Die Gedankengefüge sind keine echten Relationen

Der wissenschaftliche Wert des fregeschen Logikentwurfs steht und fällt mit der Behauptung, dass die mit „Wahrheitstafeln“ darstellbaren Gedankengefüge *logische Beziehungen* zwischen Aussagen sind. Dass diese Behauptung kaum auf Bedenken stößt[27], ist erstaunlich, hat **FREGE** für die Gedankengefüge doch festgesetzt, dass zwischen Aussagen, denen ein Gedankengefüge zugesprochen wird, *keine* Beziehung vorausgesetzt werden darf, und der jeweilige Aussagegehalt völlig unbeachtet bleiben kann. Welche „Zusammenhänge“ sind es denn, die wir mit Hilfe der Gedankengefüge ausdrücken können?

Dem Prinzip der „Wahrheitsfunktionalität“ entsprechend sind die Gedankengefüge Prädikate, die nur die *schon vorausgesetzte* Wahrheit bzw. Falschheit von Aussagen betreffen: Aussagen kann ich nur dann ein Gedankengefüge zusprechen, „wenn ich die Wahrheitswerte der Teilsätze von vorneherein kenne… Über den Wahrheitswert … muss schon entschieden sein, damit … dann auch über den Wahrheitswert der Verknüpfungen entschieden werden kann (man sagt: hier werden wertdefinite Aussagen vorausgesetzt und hergestellt).“[28] Da die Wahrheitswerte der prädizierten Aussagen die *vorgegebenen* und ganz unabhängig von der Bildung irgendwelcher Gedankengefüge *bereits feststehenden* Bezugspunkte der Bildung der Gedankengefüge sind, werden die durch Gedankengefügen prädizierten Aussagen durch die Gedankengefüge nicht näher bestimmt: *die fregeschen Gedankengefüge sind deshalb keine echten Relationen*. Eine *echte Relation* liegt nur dann vor, wenn den Relata die Bestimmung, die vom Relationenprädikat ausgesagt wird, nur im Hinblick auf die jeweils anderen Relata zukommt, nicht aber unabhängig von den jeweils anderen Relata[29]. Ein Mensch ist z.B. *Vater* nur in Bezug auf ganz bestimmte Menschen, in Bezug auf andere Menschen ist er nicht Vater, sondern z.B. Bruder, oder nicht-verwandt; die Relation „x ist Vater von y“ ist eine echte Relation, weil x in Bezug auf y Vater ist. Die bedingungslogischen Relationen sind ebenfalls echte Relationen. Gilt für irgendwelche Sachverhalts-/Ereignisklassen p, q, r beispielsweise [p, q, r 𝕂𝔻], so sind q und r die einzigen notwendigen Bedingungen von p. Das Ereignis q ist aber eine von zwei notwendigen Bedingungen für ein drittes Ereignis nur im Hinblick auf p und r, relativ zu anderen Ereignisklassen kann q hinreichende Bedingung, zufällig, usw. sein. Was hingegen in den Gedankengefügen über die prädizierten Aussagen gesagt wird, nämlich ihr *vorausgesetzter* Wahrheitswert, kommt diesen Aussagen aufgrund des Prinzips der Zusammenhanglosigkeit ganz unabhängig von den jeweils anderen Aussagen zu und die Gedankengefüge sind deshalb keine echten Relationen, es sind *Scheinrelationen*[30]. Wer für die Bildung der Gedankengefüge voraussetzt, dass zwischen den durch Gedankengefüge gekennzeichneten Aussagen keine Beziehung besteht, darf nicht zugleich behaupten, die Gedankengefüge prädizierten doch echte Beziehungen. Immer dann, wenn die Gedankengefügen entgegen den Prinzipien ihrer Konstruktion für echte, gehaltvolle (etwa logische) Beziehungen gehalten werden, ergibt sich unvermeidlich paradoxer Widersinn.

1.3.2. Die vorausgesetzten Wahrheitswerte von Aussagen werden durch die Gedankengefüge entweder tautologisch oder mit einem unterschiedlichen Ausmaß an Informationsverschleierung kundgegeben

Was behaupten wir eigentlich, wenn wir Paaren vorgegebener, wertdefiniter Aussagen ein Gedankengefüge zuschreiben? Jedem Paar wertdefiniter Aussagen kommt von vornherein aufgrund der Disjunktivität und Vollständigkeit der Wahrheitswertkombinationen *genau eines und nur eines* der vier Wahrheitswertprädikate, d.h. eines der vier Gedankengefüge **K**, **L**, **M** oder **X** zu. Diese vier Gedankengefüge besitzen eine Sonderstellung, da sie der Bildung aller anderen Gedankengefüge zu Grunde liegen; ein Gedankengefüge bestimmt ja für *jedes* Wahrheitswertprädikat, ob es ausgeschlossen wird oder nicht. Die Prädikation dieser vier Gedankengefüge bringt unverkürzt die *vorausgesetzten* Wahrheitswerte der prädizierten Aussagen zum Ausdruck, und sie haben deshalb in jeder rationalen Diskussion ihren legitimen Platz; denn was jemand für wahr oder falsch hält, muss offen gelegt werden und bildet den *Ausgangspunkt* jeder Diskussion, in der die Begründung oder Widerlegung des vorausgesetzten Fürwahr- oder Fürfalschhaltens erstrebt wird. Die vier Gedankengefüge **K**, **L**, **M** oder **X** drücken freilich nicht mehr aus, als was der Sprecher auch schon vor und unabhängig von der Bildung dieser Gedankengefüge-Prädikate weiß und behaupten kann; sie legen dar, *was für wahr bzw. für falsch gehalten wird* – aber sie bestimmen oder begründen den Inhalt, den sie voraussetzen und dem sie prädiziert werden, nämlich die Wahrheitswerte der betreffenden Aussagen, nicht näher; sie sind deshalb *Tautologien* im Sinne der traditionellen Logik, d.h. Scheinbehauptungen, die ihre Voraussetzungen in verbaler Abwandlung nur wiederholen, anstatt näher zu bestimmen.

Den übrigen nicht-leeren zweistelligen Gedankengefügen kann nicht einmal ein solcher tautologischer Gehalt zugute gehalten werden, denn sie bringen das vorausgesetzte Wissen der Wahrheitswerte nicht mehr unverkürzt zum Ausdruck; sie besagen nämlich, dass den prädizierten Aussagen genau eines der vier Wahrheitswertprädikate jedenfalls nicht zukommt (es werden dann die restlichen drei disjunkten Möglichkeiten nicht ausgeschlossen), oder dass ihnen jedenfalls zwei der vier Wahrheitswertprädikate nicht zukommen (es bleiben dann zwei disjunkte Möglichkeiten übrig), oder es werden – beim Gedankengefüge **V** – alle vier disjunkten Möglichkeiten offen gelassen. So kann ich etwa die Voraussetzung, dass ich die Aussagen „2 > 3“ und „5 + 1 = 4“ beide für falsch halte, mit dem Gefüge **X** ohne Unterschlagung des vorausgesetzten Fürfalschhaltens kundtun; ich kann aber auch – ohne damit etwas Falsches zu sagen – ein Gedankengefüge **C** formulieren: „Es ist falsch, dass die Aussage ‚2 > 3‘ wahr und zugleich die Aussage ‚5 + 1 = 4‘ falsch ist“: jetzt verneine ich beim eindeutigen Vorliegen des Wahrheitswertprädikats $\mathcal{F} \frown \mathcal{F}$ (beide Aussagen falsch) ausdrücklich nur das Wahrheitswertprädikat $\mathcal{W} \frown \mathcal{F}$ (die erste Aussage wahr, die zweite falsch). Diese **C**-Aussage ist zwar richtig, bringt aber das, worüber die Rede geht, nämlich die vorausgesetzte Falschheit der beiden „verknüpften“ Aussagen, nicht mehr unmissverständlich und vollständig zum Ausdruck; der Sprecher sagt nicht alles, was er weiß, er begeht eine absichtliche *Informationsverschleierung*: obwohl er weiß, dass beide Aussagen falsch sind, lässt er es für den Hörer auch offen, dass beide Aussagen wahr sind oder die erste falsch und die zweite wahr ist.

Mit Hilfe des Systems der zweistelligen fregeschen Gedankengefüge kann die vorausgesetzten Wahrheitswerte von zwei vorgegebenen Aussagen einmal eindeutig und unverkürzt – tautologisch –, siebenmal aber mehrdeutig und unvollständig – informationsverschleiernd – wiedergegeben werden. Bin ich beispielsweise von der Wahrheit zweier Aussagen A und B überzeugt, so kann ich beiden wahren Aussagen acht verschiedene Gedankengefüge zusprechen: A&B, A▽B, A⋝B, A⋦B, A⊽B, A⇐B, A⇒B und A⇔B. Aber nur A&B gibt meine Voraussetzungen eindeutig und ohne vorsätzliche Informationsverschleierung wieder. Die 15 nicht-leeren Gedankengefüge lassen sich nach dem Ausmaß ordnen, in dem sie das *vorausgesetzte* Wissen von den Wahrheitswerten unterschlagen; **K**, **L**, **M** und **X** weisen den „*Informationsverschleierungsgrad*“ 0 auf (ein Wahrheitswertprädikat wird definitiv zugesprochen); **E**, **J**, **F**, **G**, **H** und **I** haben den „Informationsverschleierungsgrad“ 1 (es kommen zwei Wahrheitswertprädikate in Frage), **A**, **B**, **C** und **D** den „Informationsverschleierungsgrad“ 2 (es kommen drei Wahrheitswertprädikate in Frage); das Gedankengefüge **V** weist schließlich den maximalen „Informationsverschleierungsgrad 3“ (es kommen alle vier Wahrheitswertprädikate in Frage – die Prädikation von **V** verheimlicht die vorausgesetzten Wahrheitswerte vollständig; **V** ist ganz nichts sagend und besagt so dasselbe wie der Grundsatz der disjunkten Vollständigkeit der Wahrheitswertkombinationen). Wer ein informationsverschleierndes Gedankengefüge formuliert, lässt offen, dass bestimmte Wahrheitswertkombinationen zutreffen, obwohl er weiß, dass diese Wahrheitswertkombinationen nicht zutreffen.

Aus den von **Frege** konstruierten Gedankengefügen können wir so keinen anderen „Nutzen“ ziehen, als dass wir mit ihrer Hilfe die schon feststehende und stets vorauszusetzende Wahrheit von Aussagen nochmals explizit mit oder ohne Informationsverschleierung formulieren können. Zumindest jene Gedankengefüge, die einen Informationsverschleierungsgrad größer als 0 haben, sind völlig überflüssig und unnütz, sie sind eine wertlose Mystifikation des vorausgesetzten Fürwahrhaltens; niemals darf ihnen der Rang logischer Formen, d.h. die Bedeutung universeller Bedingungen jeder Art von Erkenntnis, zugeschrieben werden.

Insbesondere **Ludwig Wittgenstein** hat versucht, der Tatsache, dass man mit Hilfe der Gedankengefüge sein vorausgesetztes Fürwahr- und Fürfalschhalten entweder tautologisch und ohne Abstriche kundtut oder aber in unterschiedlichem Ausmaß verschleiert, einen tieferen epistemologischen „Sinn“ abzugewinnen; sein „Tractatus Logico Philosophicus“ ist ein Versuch, die von den Konstruktionsprinzipien und Voraussetzungen des SFG involvierte Ontologie und Erkenntnistheorie herauszuarbeiten und als endgültige Lösung bzw. Beseitigung der philosophischen Probleme anzupreisen. Die Tatsache, dass von **Frege**s SFG alle gehaltvollen, wirklichkeitsbezogenen Aussagen mitsamt ihren Wahrheitswerten schon vorausgesetzt werden, und dass dieses SFG keinerlei logische Beziehungen zwischen diesen Aussagen und den Sachverhalten, die sie bezeichnen, berücksichtigt, führt **Wittgenstein** zur Aufstellung einer extrem empiristischen Erkenntnistheorie; jeder reale Einzelsachverhalt spiegelt sich in einem Satz, dem „Bild“ dieses Sachverhalts; dieses Wissen soll aus einer unmittelbaren Erfahrung resultieren, die selbst noch keinerlei Logik voraussetzt; jeder einzelne Gegenstand mit seinen einzelnen Aspekten ist unmittelbar und ohne Vermittlung allgemeiner Begriffe und Gesetze in Sätzen und ihren Wörtern abgebildet[31] und einfach vorgegeben wie die Aussagen dem System der Gedankengefüge.

Dem SFG-Prinzip der Zusammenhanglosigkeit entsprechend behauptet **WITTGENSTEIN** dann, zwischen den von den Elementarsätzen abgebildeten Sachverhalten bestehe keinerlei gesetzmäßiger Zusammenhang, entsprechend keine Möglichkeit der Prognose (das Wissen von der Wirklichkeit ist ein aggregathaftes Wissen von unverbundenen Einzelfakten – beziehungslos wie die Aussagen im SFG): was der Fall ist, kann nur im Nachhinein direkt festgestellt werden – solches Feststellen setzt noch keinerlei Logik voraus. Für n vorausgesetzte Elementarsätze, die einzelnen Tatsachen entsprechen, können dann freilich kombinatorisch die möglichen Wahrheitswertkombinationen ermittelt werden; da die Wahrheitswerte jedoch schon festliegen, und eben dadurch den vorgegebenen Aussagen genau eine der kombinatorisch konstruierbaren Wahrheitswertprädikate zukommt, entsteht durch die Konstruktion der Wahrheitswertprädikate keinerlei Information, die über die Voraussetzungen hinaus ginge. **WITTGENSTEIN** nennt aber die Wahrheitswertkombinationen, die für die vorgegebenen Aussagen konstruiert werden können, die „logische Form“ dieser Aussagen, oder auch den „logischen Raum“, die Gesamtheit aller „logischen Möglichkeiten“, die – als das, was überhaupt denkbar ist – alles Wirklichkeit (als Konglomerat aller möglichen Tatsachen) umfassen und begrenzen.

Auch **RUDOLF CARNAP** behauptet, wir könnten „uns leicht klarmachen, dass ein Satz um so mehr besagt, je kleiner sein Spielraum ist… Wird uns nun ‚A&B‘ mitgeteilt, so erfahren wir genau, welcher von den vier möglichen Fällen … wirklich zutrifft… Die Mitteilung ‚A $\Leftrightarrow$ B‘ ist unbestimmter, weil sie zwei Möglichkeiten offen lässt; ‚A$\overline{\triangledown}$B‘ ist noch unbestimmter, weil drei Möglichkeiten offen gelassen werden, und nur eine einzige ausgeschlossen wird. Hat ein Satz den *totalen Spielraum*, der sämtliche möglichen Bewertungen zulässt…, so schließt er gar keine Möglichkeit aus und besagt daher überhaupt nichts.“[32] **WITTGENSTEIN** meint, die „Wahrheitsbedingungen“ der Gedankengefüge, d.h. jene Wahrheitswertprädikate, deren Zukommen in einem Gedankengefüge nicht ausdrücklich ausgeschlossen ist, bestimmten „den Spielraum, der den Tatsachen durch den Satz gelassen“ werde[33]. Der „logische Spielraum“ sei maximal, wenn wir – in der Prädikation von **V** – es völlig offen lassen, welche der vier überhaupt möglichen Wahrheitswertprädikate zwei vorgegebenen Aussagen zukommt. **F.WAISMANN** führt dazu aus: „Die Wahrheit kann innerhalb der Grenzen variieren, die durch den Satz gezogen wird, ohne dass dieser durch sie falsch gemacht wird.“[34] Ein Gedankengefüge wie A&B lasse *der Wirklichkeit* weniger „Spielraum“ als ein Gefüge wie A$\overline{\triangledown}$B. „Je größer der Spielraum, desto weniger legt er die Wirklichkeit fest.“[35]

Diese Konzeption der „logischen Spielräume“ stellt den informationsverschleiernden Charakters der meisten Gedankengefüge nicht sachgerecht dar. Es ist falsch, in diesem Zusammenhang von möglichen „Variationen der Wahrheit“ oder von „Spielräumen der Wirklichkeit“ zu reden; da die Prädikation der Gedankengefüge die Wahrheitswerte der „prädizierten“ Aussagen als *vorgegebenen* voraussetzen muss, steht von vorneherein *eindeutig* fest, welches der vier Gedankengefüge **K**, **L**, **M** oder **X** zwei Aussagen zukommt; hier kann keine Wahrheit variieren, hier haben nicht Tatsachen einen objektiven Spielraum, denn diese „Wahrheit“ und diese „Tatsachen“ werden von der Bildung der Gedankengefüge schon als feststehend vorausgesetzt. Diese vorausgesetzte Wahrheit und Falschheit von Aussagen wird allerdings *willkürlich und nachträglich*, *ohne irgendwelchen nachvollziehbaren Nutzen und Informationswert* in unterschiedlichem Ausmaß mutwillig verschwiegen. Weil die von **K**, **L**, **M** oder **X** verschiedenen Gedankengefüge, wie **CARNAP** selber eingesteht, über vorgegebene Aussagen viel weniger aussagen als erstere, diese *aber voraussetzen*, sind letztere Bildungen nicht nur unnütz, sondern auch irreführend.

Die zitierten Ausführungen unterstellen, dass aus der Prädikation von Gedankengefügen gehaltvolle und informative Aussagen über die Wirklichkeit resultieren können, welche echte und objektive Möglichkeiten aufzeigen, wie dies bei den im erste Teil dieser Arbeit dargelegten Formen oder den Formen der Wahrscheinlichkeitstheorie der Fall ist. Es handelt sich bei den „logischen Spielräumen“, die die Gedankengefüge der Wirklichkeit angeblich „zugestehen“, nicht um *objektive* Möglichkeiten, sondern um die subjektive Ungewissheit, die ein Sprecher, der es besser weiß, ohne erkennbaren Nutzen durch willkürliche Informationsverheimlichung bei seinen Hörern erst erzeugt (für den Sprecher selbst sind diese Möglichkeiten rein fiktiv, also Schein-Möglichkeiten); diese „Spielräume“ absichtlicher Informationsverschleierung erklären oder bestimmen den Inhalt, nämlich die vorausgesetzte Wahrheit und Falschheit der „prädizierten“ Sätze nicht im Geringsten. Derjenige handelt unverständig, der die Tatsache, dass er eine Aussage A für falsch, eine andere Aussage B für wahr hält, in der Weise ausdrückt, dass er behauptet, beide Aussagen seien jedenfalls nicht beide wahr (A$\Uparrow$B), oder beide Aussagen seien jedenfalls nicht beide falsch (A$\overline{\triangledown}$B), oder jedenfalls sei nicht A wahr und B falsch (A$\Rightarrow$B), usw. Im Gegensatz zu den Gedankengefügen betreffen und begrenzen bedingungslogische Formen objektiv bestehende Realmöglichkeiten: nur wenn im Raum des Hypothetischmöglichen das Realmögliche vom Nichtrealmöglichen geschieden wird, können objektive gesetzmäßige Zusammenhänge erfasst werden. Weil z.B. von zwei

Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q bestimmt ist, dass es objektiv realmöglich ist, dass sie jeweils alleine oder zusammen vorliegen, und dass es objektiv nicht-realmöglich ist, dass von p und q keines vorliegt, weiß ich, dass bei p q möglich, bei ~p q aber notwendig ist, usw. Jedes Gesetz beruht in dieser Weise auf der Scheidung des Hypothetisch-möglichen in objektiv Realmögliches und objektiv Nichtrealmögliches.

Auch **FREGE** gibt der Informationsverschleierung durch Gedankengefüge eine unrichtige Auslegung; er meint, je größer der Grad der Informationsverschleierung ist, desto „einfacher", und je kleiner dieser Grad, desto „reichhaltiger" sei der „Inhalt" der Gedankengefüge; das Gedankengefüge **A** lasse mehr „freie Wahlen" zu als das Gedankengefüge **J** (BRL 40f). „Im Allgemeinen wird immer das Zeichen die mannigfachste Anwendung zulassen und die übersichtlichsten Ausdrücke abgeben, welches den einfachsten Inhalt hat." (BRL 41) Es sei günstiger **A** als **J** zu gebrauchen: denn durch inhaltsreichere Zeichen könnten die einfacheren nicht ausgedrückt werden; **E** kann durch **C**, aber **C** nicht durch **E** ausgedrückt werden (ebd.). Wenn zwei Aussagen **A** statt **J**, oder **J** statt **L** zugeschrieben, wenn **C** anstatt **E**, oder **E** statt **K**, usw. behauptet wird, dann bedeutet dies jedoch keinen Zuwachs an Allgemeinheit und Anwendbarkeit, sondern einen Zuwachs an willkürlich hergestellter Ungewissheit beim Adressaten der Mitteilung. Der Sprecher drückt nicht seine eigene Unwissenheit aus, wie es z.B. beim problematischen Konditional der Fall ist, sondern erzeugt lediglich – ohne Sinn und rationalen Zweck – beim Hörer unnötige Ungewissheit.

1.3.3. Die Reifikation und Verabsolutierung der Gedanken. Freges Psychologie des Gedankenfassens

Bei der Prädizierung der fregeschen Gedankengefüge wird die Wahrheit und Falschheit der prädizierten Aussagen einfach aufgenommen, weder problematisiert noch begründet, noch auf irgendwelche Bedingungen des Wahr- und Falschseins bezogen; die vorgegebenen Wahrheitswerte werden tautologisch oder informationsverschleiernd wiedergegeben. Wo es nur auf die vorgegebenen Wahrheitswerte der Aussagen (Urteile) ankommt, spielt ihre logische Form keine Rolle. **FREGE** hat versucht, diesem SFG-Standpunkt des bloßen Aufgreifens vorgegebener Wahrheiten eine umfassende philosophisch-erkenntnistheoretische Untermauerung zu geben: er verabsolutiert und reifiziert die wahrheitswertdefiniten Gedanken und verselbständigt sie sowohl gegenüber der objektiven Wirklichkeit, von der die Gedanken handeln, wie gegenüber den Subjekten, die jene Gedanken produzieren. Er reduziert die Erkenntnistätigkeit der Menschen auf ein unmittelbares, nicht weiter erklärbares Auf- und Hinnehmen („Fassen") fertiger und ewiger Wahrheiten – eine Einstellung, die derjenigen bei der Bildung von Gedankengefügeaussagen entspricht.

FREGE versucht die Verabsolutierung und Reifikation der Aussagen mit ihren vorgegebenen und feststehenden Wahrheitswerten durch folgende Argumente zu begründen. Wahrheit lasse sich nicht als *Übereinstimmung der Gedanken mir der Wirklichkeit* (Log II, 33; Ged 31f [59f]) definieren[36], da diese Definition in einen infiniten Regress münde. Wer Wahrheit als „Übereinstimmung" eines Gedankens mit der objektiven Wirklichkeit bestimme, müsse dieser „Definition" entsprechend auch nachweisen, dass die Behauptung des „Übereinstimmens" wahr sei, d.h. mit der Wirklichkeit übereinstimme. Dies könne wiederum nur in einer Behauptung geschehen, die ihrerseits als wahr nachzuweisen sei; ihre Übereinstimmung mit der entsprechenden Wirklichkeit sei zu zeigen – und wiederum in einer wahren Aussage darzulegen; und so ohne Ende. „Wenn man also wissen wollte, ob ein Gedanke wahr wäre, so müsste man fragen, ob diese Beziehung stattfände, mithin, ob der Gedanke wahr wäre, dass diese Beziehung bestände. Und so wären wir in der Lage eine Menschen, in einer Tretmühle. Er macht einen Schritt vorwärts; aber die Stufe, auf die er tritt, gibt immer nach, und er sinkt auf den vorigen Stand zurück." (Log II, 47; auch Ged 32f [60]) Darüber hinaus könne es eine „Übereinstimmung" „nur dann geben, wenn die übereinstimmenden Dinge zusammenfallen, also gar keine verschiedenen Dinge sind… Eine Vorstellung mit einem Ding zur Deckung zu bringen, wäre nur möglich, wenn auch das Ding eine Vorstellung wäre." (Ged 32 [60]) So scheitere „aber auch jeder andere Versuch, das Wahrsein zu definieren." (Ged 32 [60])

Es ergeben sich in der Tat enorme Schwierigkeiten, wenn wir die im alltäglichen Erkennen selbstverständlich und problemlos vorauszusetzende und vorausgesetzte „Übereinstimmung" von Wissen/Gedanken und realer Wirklichkeit zu erklären versuchen. Da es objektiv bestehenden Sachverhalte und ihre jeweilige Beschaffenheit *für uns* nur dann gibt, sofern wir von ihnen wissen, ist jeder Versuch, den Wirklichkeitsbezug und die Wahrheit von Gedanken dadurch zu überprüfen, dass die Gedanken mit den gedachten objektiven Sachverhalten auf ihrer „Übereinstimmung" hin verglichen werden, undurchführbar – es kann nur Wissen mit Wissen verglichen werden. Die logische Reflexion kann nur am verfügbaren Wissen, das von der gegenständlichen, objektiven Wirklichkeit handelt, ansetzen; dieses reflektierte gegenständliche Wissen kann seine orientierende Funktion nur dann erfüllen, wenn sein Aussagegehalt die realen Dinge und

Ereignisse, mit denen wir umgehen müssen, betrifft; dieses Wissen von der gegenständlichen Wirklichkeit ist kein Wissen von sich selbst und von seinem eigenen Entstehen; um in der alltäglichen Praxis zu bestehen, brauchen wir Wissen über die Gegenstände unseres Handelns, nicht aber ein Wissen über das gegenständliche Wissen. Deshalb kann die logische Reflexion sich immer nur Wissen über die gegenständliche Wirklichkeit vornehmen, seinen gegenständlichen Gehalt vergleichend ausbreiten und in seiner allgemeinen Struktur beschreiben; sie kann und braucht nicht klären, wie im vorgegebenen Wissen eine Realität erfasst sein kann, die unabhängig von diesem Wissen besteht, sie kann nicht erklären, wie wir zu solchem Wissen gekommen sind. Wenn die logische Reflexion auch nicht zur Erklärung des Wirklichkeitsbezuges des reflektierten Wissens gelangen kann, so kann sie diesen Wirklichkeitsbezug weder bestreiten oder auch nur ignorieren; dieser Wirklichkeitsbezug ist als eine in der Logik selbst nicht erklärbare Voraussetzung der Logik mit dem Wissen schon gegeben, das zum Gegenstand der logischen Reflexion wird. Wenn die logische Reflexion den Wirklichkeitsbezug des gegenständlichen Denkens nicht aufklären kann, bedeutet das freilich noch nicht, dass dieser Bezug überhaupt nicht erklärbar wäre.

Aus der Undurchführbarkeit eines direkten Vergleichs von Wissen und gegenständlichem Gewusstem folgert **FREGE**, dass jede Erklärung des Wirklichkeitsbezugs von Wissen prinzipiell unmöglich ist und deshalb als Voraussetzung der Logik nicht anerkannt werden dürfe; was wahr ist, sei nicht definier- und erklärbar, sondern „ursprünglich" und nicht auf Einfacheres zurückführbar (Log II, 35 und 43; Ged 32 [60]; Kernsätze 23). Das einfache Wahre ruhe in sich selbst und sei frei von jedem Bezug zu einem Objekt: „Eine Übereinstimmung ist eine Beziehung. Dem widerspricht aber die Gebrauchsweise des Wortes ‚wahr', das kein Beziehungswort ist, keinen Hinweis auf etwas anderes enthält, mit dem etwas übereinstimmen sollte." (Ged 32 [59])

Diese Dissoziation der wahrheitswertdefiniten Gedanken der objektiven Wirklichkeit verlangt auch die Abspaltung der Gedanken von erkennenden Subjekten. Während die Rede von Wissen doch nur dann Sinn macht, wenn man sie als erkennende Beziehung von Subjekten zur Welt der Objekte fasst, wenn also im Wissen Subjekt und Objekt verbunden sind, hält **FREGE** in seltener erkenntnistheoretischer Naivität die Dissoziation dieser drei Seiten – *Subjekt- Wissen - Objekt* – und ihre Hypostasierung zu je eigenständigen, und für sich bestehenden „Welten" für methodisch geboten: er unterscheidet eine (Außen-)Welt der objektiven, wahrnehmbaren, physischen Dinge, eine (Innen-)Welt der subjektiven Vorstellungen und eine (Sonder-)Welt der objektiv und unabhängig von Anderem existierenden Gedanken. Die Verselbständigung des Wissens (der Gedanken) gegenüber der menschlichen Subjektivität soll zugleich die Eigenständigkeit der Logik gegenüber der Psychologie sichern und den „Verwüstungen..., die der Einbruch der Psychologie in die Logik angerichtet hat" (RH 192 [332]), entgegenwirken[37]. Für **FREGE** ist Psychologismus nicht nur der unzulässige Versuch, die Geltung logischer Gesetze durch Hinweise auf psychologische Fakten und psychologische Gesetzmäßigkeiten zu begründen, sondern jede Anbindung des Logischen an die menschliche Subjektivität; er fordert den Entwurf einer *Logik ohne Subjekt*[38].

Gegen den Psychologismus betont **FREGE** zurecht, dass die Geltung der logischen Gesetze völlig unabhängig von irgendwelchen psychischen Gegebenheiten ist und dass „die Gesetze der Logik … nicht durch psychologische Untersuchungen gerechtfertigt werden" können (Kernsätze 24); die Gesetze der Logik beschreiben nicht den tatsächlichen, empirisch nachzuweisenden Ablauf irgendeines wirklichen Denkens[39]. Die Unabhängigkeit der Logik von der Psychologie setzt nach **FREGE** voraus, dass die Gedanken (das Wissen) eigenständig und unabhängig von jedem Wissenden bestehen; diese Eigenständigkeit gründe v.a. auch darin, dass das Wahre ganz unabhängig von seiner Anerkennung und seinem Erkanntwerden wahr sein müsse. „Gedanken – z.B. Naturgesetze – bedürfen nicht nur unserer Anerkennung nicht, um wahr zu sein, sie brauchen dazu nicht einmal von uns gedacht werden. Ein Naturgesetz wird nicht von uns ersonnen, sondern entdeckt… Wir entnehmen hieraus, dass Gedanken nicht nur, falls sie wahr sind, unabhängig von unserer Anerkennung wahr sind, sondern, dass sie überhaupt unabhängig von unserem Denken sind." (Logik II 46; auch Kernsätze 24; Ged 50 [74]; Neg 63f [151]; GLA XVII)

FREGEs These von der Unabhängigkeit der Wahrheit von unserer Anerkennung behält den Anschein der Plausibilität nur, solange nicht strikt zwischen dem Wissen (*unseren* wirklichkeitsbezogenen Gedanken) und dem Gewussten (denjenigen *objektiven* Sachverhalten und Gesetzmäßigkeiten, von denen wir wissen) unterschieden wird. Es klingt einleuchtend, dass die Wahrheit einer Aussage nicht erst von dem Zeitpunkt an besteht, da die Tatsache oder die Gesetzmäßigkeit, von der die Aussage handelt, von Menschen gewusst und anerkannt wird. Hier fällt die Zweideutigkeit ins Gewicht, mit der vom Wahrsein gesprochen wird: einmal in dem Sinn, dass eine bestimmte objektive Tatsache besteht oder eine bestimmt Gesetzmäßigkeit gilt, dann aber in dem Sinne, dass die von Subjekten vertretene Behauptung, es bestehe eine derartige objektive Tatsache oder es gelte eine derartige Gesetzmäßigkeit, wahr ist.

Das objektive Bestehen von Tatsachen und das objektive Wirken und Gelten von Gesetzmäßigkeiten darf nicht mit dem Wissen von diesen Tatsachen und Gesetzmäßigkeiten identifiziert werden. Die Forderung nach Rechtfertigung und Begründung der Wahrheit und nach logischer Kohärenz kann nicht der objektive Wirklichkeit selbst gestellt werden, sondern nur an unsere, von uns zu verantwortende Aussagen über diese Wirklichkeit: es wäre unsinnig, von objektiven Tatsachen oder Gesetzmäßigkeiten zu fordern, sie sollten sich erst einmal begründen; sie bestehen und wirken ganz unabhängig von uns und unserem Wissen. Rechenschaft schuldet uns nur derjenige Mensch, der behauptet, er wisse, dass ein bestimmtes Faktum objektiv besteht oder ein bestimmtes Gesetz objektiv gilt, der bestimmte Behauptungen für wahr erklärt. Wenn ein Wissenschaftler die Entstehung der Erde untersucht, untersucht er einen Prozess, der unabhängig von ihm und seiner Erkenntnis ist; dass dieser Prozess auf eine bestimmte Weise verlaufen ist, ist von ihm völlig unabhängig. Dies bedeutet nicht, dass es ein wahres Wissen von diesem objektiven Vorgang unabhängig von seiner entscheidenden Mitwirkung geben könnte. Die Logik untersucht nicht von uns unabhängige „Wahrheiten", sondern sie erforscht bestimmte Bedingungen, denen *unsere* Erkenntnistätigkeit und das dieser Tätigkeit entspringende Wissen genügen muss, wenn wir objektive Tatbestände wahrheitsgemäß erkennen wollen. *Objektiv sein* ist für **Frege** gleichbedeutend mit *unabhängig vom Urteilenden und Wissenden bestehen* (GLA XVIII); diese richtige Bestimmung kann jedoch nicht, wie **Frege** unterstellt, in derselben Bedeutung einem Wissen zugesprochen werden. Denn Wissen kann nie ohne wissende Subjekte bestehen; objektives Wissen kann nur bedeuten, dass wir ein Wissen von Tatsachen haben, in dem *wir* diese Tatsachen so bestimmen, wie sie selber ansich, objektiv sind und bestehen. Diesen Unterschied nimmt **Frege** nicht zur Kenntnis[40]. Es ist deshalb nicht richtig, dass **Frege** das selbständige Bestehen der Gedanken zur Bedingung von *Wahrsein* macht, und dann, wenn das erkennende Subjekt mit in Spiel kommt, von einem bloßen *Fürwahrhalten* spricht. Bei den logischen Gesetzen handele es sich „nicht darum, was dieser oder jener Mensch für wahr hält, sondern darum, was wahr ist." (Log II, 68) Auch wer beteuert, dass dieser oder jener Gedanke ganz unabhängig von seiner Meinung wahr *ist*, drückt, auch wenn er Recht haben sollte, nur aus, was er für wahr hält. Das Wahre kann dem Fürwahrhalten nicht dissoziativ entgegensetzt werden, so, als ob ein Gedanke entweder wahr sein oder für wahr gehalten werden könnte. Zunächst haben wir es *immer* mit unserem Fürwahrhalten zu tun. Die Logik soll dazu verhelfen, nicht das Wahre vom Fürwahrhalten zu sondern (denn auch das Wahre müssen wir, soll es *für uns* sein, für wahr halten), sondern das begründete von unbegründeten Fürwahrhalten zu scheiden. Wenn **Frege** die Wahrheiten auf ein selbständiges Bestehen gründet, drückt er sich gerade um die Aufgabe, bestimmte logische Bedingungen darzutun, durch welche sich das begründete vom unbegründeten Fürwahrhalten unterscheidet. Wäre **Frege**s Behauptung richtig, dass die Wahrheit unseres Wissens von unserem Dazutun unabhängig wäre, dann läge die Wahrheit unseres Wissens ganz außerhalb unserer Verantwortung und könnte allenfalls unmittelbar „aufgenommen" werden; eine Logik wäre ohne Funktion.

So richtig es ist, dass die Geltung der logischen Gesetze völlig unabhängig von psychologischen Gegebenheiten ist, so falsch ist diese totale Trennung der Logik von der menschlichen Subjektivität. Die Logik ist eine theoretische Disziplin, deshalb wesentlich mit Subjekten verbunden, die dieses theoretische Wissen entwerfen, entwickeln und rechtfertigen; ebenso verweist der normative Charakter der Logik (den **Frege** an anderer Stelle nachdrücklich hervorhebt) auf Subjekte, die sich an diesen Normen orientieren. Auch wenn die Reifikation und Verabsolutierung der Gedanken rechtens wäre (sie ist es nicht – man kann die Gedanken nicht vom Denken denkender Subjekte abspalten!), würde sich immer noch die Frage stellen: wie kommt es, dass *wir* von diesen „objektiv bestehenden" Gedanken wissen können, wie *wir* zu dem Wissen von diesen angeblich unabhängig von uns existierenden Gedanken und ihren Wahrheitswerten kommen? Auf diese entscheidende Frage gibt **Frege** eine recht simple *psychologische* Antwort. Frege, der sich aus einer Tretmühle befreien will, landet wieder in einer Tretmühle.

Es ist unmöglich, das Wissen und die Gedanken von den wissenden und denkenden Subjekten abzutrennen; unvermeidbar führt **Frege**s Konstruktion deshalb nicht vom Psychologismus weg, sondern zu einer besonders simplen und vordergründigen psychologischen Scheinerklärung *unseres* Wissens. Die angeblich für sich bestehenden Gedanken sind laut **Frege** ewig, außer der Zeit, an keinem Ort, kein Bewusstseinsinhalt, nicht geschaffen, unsinnlich, „objektiv"; nur dann könnten sie „gemeinsames Eigentum von Vielen sein". (FB 46) „Die Gedanken gehören nicht wie die Vorstellungen der einzelnen Seele an (sind nicht subjektiv), sondern unabhängig vom Denken, stehen jedem in gleicher Weise (objektiv) gegenüber; sie werden durch das Denken nicht gemacht, sondern nur erfasst. Hierin sind sie den physikalischen Körpern ähnlich." (Log II, 69) Die von **Frege** behauptete Unlösbarkeit des Problems, wie wir zu einem Wissen von einer unabhängig von uns und dem Wissen bestehenden Wirklichkeit gelangen, und wie es zugeht, dass unser Wissen mit einer gegenständlichen Realität „übereinstimmt", hat ihn zur Verselbständigung der Gedanken veranlasst; das Problem einer „Übereinstimmung" stellt sich jedoch auch jetzt von neuem – jedoch in mystifizierter Form. Denn jetzt steht die Frage, wie wir von diesen „selbstständig existierenden Gedanken", so wie sie angeblich an sich und unabhängig von uns und unseren Wissen bestehen, wissen können. Wir müssen, so **FREGE**, den Gedanken *fassen* und uns seiner *bemächtigen*, wenn er uns als derselbe in gleicher Weise *gegenübertritt* (Log II, 46, 52f). Beim Gedankenfassen trete man zum Gedanken in eine „gewisse Beziehung", die verschieden sei vom Sehen der Dinge und von Haben von Vorstellungen (Ged 44). Wie aber sollte ein außer Zeit und Raum stehender Gedanke *vor uns hintreten* können, wie sollen wir uns seiner, der doch ganz immateriell sein soll, *bemächtigen* können?[41]

Das Gedankenfassen selbst soll ein psychologischer Vorgang sein, freilich „schon an der Grenze des Seelischen", weil der nichtseelische Gedanke ins Spiel käme[42]; es sei der „geheimnisvollste" aller Vorgänge (Log II, 64) und könne nur metaphorisch umschrieben werden (Ged 49 [74]). „Für die Logik" sei nicht das psychologische Gedankenfassen ausschlaggebend, sondern, dass wir dadurch in den Besitz fertiger Wahrheiten kommen. „Uns genügt, dass wir Gedanken fassen und als wahr erkennen können"; wie das zugehe, sei „eine Frage für sich", um die sich die Logik nicht kümmern brauche (Log II, 64;).

Logik im vorfregeschen Sinne muss darlegen, wie wir *unsere* Behauptungen begründen müssen, wenn sie Anspruch auf Wahrheit haben sollen. Bei **FREGE** führt schon das seinem Verständnis von Logik immer vorausgehende „Fassen" vorgegebener Gedanken zum Erwerb wahren Wissens; man müsse die Gedanken so „nehmen, wie sie sind." (Ged 53 [77]) Die Klarheit unserer Gedanken hinge nicht von ihrer logischen Durchgliederung und ihrer kohärenten Einordnung in ein System des Wissens ab, sondern sei „eigentlich eine Vollkommenheit der Aneignung, der Auffassung von Gedanken…, nicht eine Eigenschaft der Gedanken." (Log II, 53) Im Rahmen dieser Theorie könnte die Rechtfertigung unserer Behauptungen nur in der Versicherung bestehen, wir hätten den entsprechenden Gedanken „richtig gefasst"; da das *Denken* als Fassen von Gedanken und da das *Urteilen* als Für-Wahr-Anerkennen dieser gefassten Gedanken für **FREGE** seelische Prozesse sind (ALD 273), könnten wir allenfalls psychische Vorgänge erläutern. Diese Konzeption **FREGE**s, die beim bloßen Fürwahrhalten und „geheimnisvollen" psychischen Vorgängen stehen bleibt, ist nicht die endgültige Überwindung des Psychologismus in der Logik[43], sondern ein besonders einfältiger Psychologismus; wäre **FREGE**s Psychologie des Gedankenfassens richtig, wäre eine Logik überflüssig, da wir durch das unmittelbare, bestenfalls psychologisch beschreibbare Aufnehmen vorgegebener Wahrheiten zu unserem Wissen kämen. **FREGE**s eigene Rede von „*Gesetzen* des Wahrseins" verlöre jeden Sinn. Wenn selbständige Gedanken seit jeher wahr oder falsch wären, könnte das einzig mögliche „logische Gesetz des Wahrseins" nur besagen, dass ein Gedanke eben seit Ewigkeit entweder wahr oder falsch ist; dieses „Gesetz des Wahrseins" haben wir freilich schon kennen gelernt – in ihm erschöpft sich der logische Gehalt des fregeschen Systems der Gedankengefüge.

FREGE erweitert in seiner Konzeption des Gedankenfassens die Voraussetzungen und den Gehalt des SFG zu einer recht simplen, psychologistischen Erkenntnistheorie. So wie im SFG die Wahrheiten einfach vorgegeben sind, und in dieser Vorgegebenheit einfach aufgenommen werden, so wird das menschliche Wissen generell beschrieben. Wahrheiten werden nicht begründet und bewiesen, sondern als schon immer bestehend gefasst; dies bedeutet faktisch nichts anderes als ein Stehenbleiben beim bloßen Fürwahrhalten. Da es im System der fregeschen Gedankengefüge (SFG) nur auf die *vorausgesetzten* Wahrheitswerte von Aussagen ankommt und nicht auf die logischen Formen der Aussagen, erklärt **FREGE** konsequent jene Leistung als logisch unnütz, die **ARISTOTELES** erst die Erarbeitung der theoretischen Logik ermöglicht hat, nämlich die Unterscheidung verschiedener Arten oder Formen von Urteilen; diese Unterscheidungen, so **FREGE**, seien „logisch" ohne Gewicht, weil es unter den Urteilen einer bestimmten Form sowohl wahre wie falsche Urteile gäbe. Mit der Form eines Urteils sei der Wahrheitswert noch nicht gegeben, auf den es im SFG alleine ankommt; seine Formbestimmtheit, etwa ob es affirmativ und negativ ist, komme einem „Inhalte auch zu, wenn er nicht als Urteil hingestellt wird", wenn also über seine Wahrheit oder Falschheit nichts entschieden ist (BS 4). **FREGE** bezeichnet die Unterscheidung von Affirmation und Negation, die bei **ARISTOTELES** als *Zukommen* und *Nicht-Zukommen* am Anfang aller logischen Bestimmungen steht, als „eine für die Logik wenigstens ganz unnötige Unterscheidung, deren Grund außerhalb der Logik zu suchen ist." (Neg 61 [149]) „Die Einteilung der Gedanken (Urteile) in bejahende und verneinende hat keinen Nutzen für die Logik, ihre Durchführbarkeit bezweifle ich." (ALD 274) Es sei kein „Merkmal" zu finden, welches die Unterscheidung von Affirmation und Negation in eindeutiger Weise zuließe (Log II, 71f; Neg 62 [150]); er selbst kenne kein logisches Gesetz, „bei dem eine Einteilung der Gedanken in die Klasse der bejahenden und verneinenden in Betracht käme." (Log II, 72; auch Neg 61f [149f][44]) **FREGE** ignoriert, dass jedes Urteil Unterscheidung und damit Negation involviert. Ohne Negation wären auch die Gedankengefüge nicht bestimmbar; ein Grundgesetz des SFG besagt, dass eine Aussage entweder wahr oder *nicht* wahr ist; auch muss für jedes Paar wertdefiniter Aussagen feststehen, ob ihm ein bestimmtes Gedankengefüge zukommt oder *nicht* zukommt. Wie alle anderen logischen Formen nutzt **FREGE** die logische Grundbeziehung der Affirmation und Negation beim Aufbau und der Darstellung des SFG, offenbar ohne sich dieser Formen explizit bewusst zu sein.

In die Bildung und Prädikation von Gedankengefügen geht nur der einzelne Gedanke mit seinem *je besonderen* Gehalt[45] ohne jede Differenzierung von Form und Inhalt, und der Wahrheitswert ein. „Urteilen ... ist etwas als wahr anerkennen. Was als wahr anerkannt wird, kann nur ein Gedanke sein. Der ursprüngliche Kern scheint sich nun gespalten zu haben; ein Teil davon steckt im Worte 'Gedanke', der andere im Worte 'wahr'. Hier wird man wohl stehen bleiben müssen." (Neg 63 [151]) Das SFG unterscheidet die verschiedenen Urteil nur danach, ob sie für wahr oder falsch gehalten werden; diese Einteilung der Urteile habe man getadelt, da sie „von allen möglichen Einteilungen der Urteile vielleicht die am wenigsten bedeutsame sei... Was die Bedeutsamkeit betrifft, so wird man sie doch nicht gering schätzen dürfen, wenn das Wort ‚wahr' ... der Logik die Richtung weist." (Ged 33 [61] Fn.1) Jede andere Einteilung hänge sich an „unwesentliche Nebensachen", an Grammatik und Psychologie und bringe „die Untersuchung gleich anfangs auf ein falsches Gleis" (Neg 63 [150]; Briefe XIX/3, 40f). Bei der Bildung der Gedankengefüge kommt es tatsächlich nur auf die Wahrheitswerte von Aussagen, nicht auf ihre logische Form an; die Gedankengefüge selbst sind keine logischen Formen, keine allgemeinen Schemata der logischen Synthesis und damit unabdingbare Bedingungen des Erfahrungsgewinns. Dem vorlogischen Charakter der Gedankengefüge entspricht die fregesche Theorie des Gedankenfassens. Die Behauptung, Wissen entstamme dem unmittelbaren Fassen vorgegebener und quasidinglicher Wahrheiten, ist der Versuch, die fundamentale Voraussetzung und den einzigen Gehalt des SFG, die Wahrheitswertdefinitheit von Aussagen, zu rechtfertigen. Wäre **FREGE**s Theorie des Gedankenfassens richtig, wäre jede Logik überflüssig; tatsächlich aber sind die Gedankengefüge völlig überflüssig, da sie doch nur das bloße Fürwahrhalten kundgeben oder in sinnloser Weise verbergen.

1.3.4. An die Konstruktion der Gedankengefüge schließt sich die logische Missdeutung dieser Gedankengefüge an

FREGEs Konstruktion der Gedankengefüge beruht einzig auf den eben dargelegten Grundsätzen der Aussagenbezogenheit, der „Wahrheitsfunktionalität", der Wahrheitswertdefinitheit und Beziehungslosigkeit der durch die Gedankengefüge prädizierten Aussagen, der Kombination der Wahrheitswertprädikate und ihrer vollständigen Disjunktivität; es ist unabweisbar, dass aus dieser Konstruktion ein bestenfalls tautologischer Gehalt und durchweg eine theoretische und praktische Belanglosigkeit der Gedankengefüge und des auf diesen Gebilden beruhenden Logikentwurfs resultieren kann. **FREGE**s Logikentwurf wäre kaum sein durchschlagender Erfolg beschieden gewesen, wenn unvoreingenommen und konsequent danach gefragt worden wäre, was wir eigentlich mit Hilfe der Gedankengefüge aussagen können. Diese bare Selbstverständlichkeit ist unterblieben, weil **FREGE** und seine Anhänger die Gedankengefüge schon immer mit Deutungen versehen, die ihren tatsächlichen, den eigenen Festsetzungen entspringenden Bedeutungen und insbesondere dem Konstruktionsprinzip der Beziehungslosigkeit krass widersprechen, und weil sie diese nachträglichen Deutungen ohne Weiteres mit den ursprünglichen Festsetzungen identifiziert haben.

Die Bedeutung der Gedankengefüge kann nur mit den umgangssprachlichen Partikeln „und" und „nicht" *festgesetzt* werden, und **FREGE** hat sich auch keiner anderen Ausdrücke bedient[46]; gleichwohl behauptet er, manche Gedankengefüge, und v.a. die informationsverschleiernden, seien eine zulässige sachgerechte, präzisierende Fassung der Bedeutung solcher umgangssprachlicher Partikeln, mit deren Hilfe in Alltag und Wissenschaft, wenn auch noch unreflektiert, bedingungslogische Zusammenhänge geprüft, erkannt und ausgedrückt, mit denen Schlüsse gezogen und Beweise geführt werden. **FREGE** behauptet, er habe in seine Bestimmung der Gedankengefüge die logische Kernbedeutung der umgangssprachlichen Ausdrucksmittel für logische Zusammenhänge hineingearbeitet und von allen Ungenauigkeiten, Mehrdeutigkeiten und logisch irrelevanten Nebenbedeutungen befreit, mit denen sie im unreflektierten alltäglichen Gebrauch noch behaftet seien. So gebe die **C**-Aussage, nach welcher von zwei vorgegebenen Aussagen jedenfalls nicht die erste wahr und die zweite falsch ist, den logischen Gehalt des umgangssprachlichen „Wenn-dann", die **A**-Aussage, welche nichts anderes besagt, als dass von zwei Aussagen jedenfalls nicht beide falsch sind, den logischen Sinn des umgangssprachlichen, „oder" im nicht-ausschließenden Sinne wieder (Gef 79 [42]; BS XIII).

FREGE glaubt, die *unter der Voraussetzung*, dass 2 nicht größer als 3, und dass 4 keine Primzahl ist, zweifellos richtige, aber unnütze und informationsverschleiernde Behauptung „Es ist falsch, dass einerseits ‚2>3' wahr und andererseits ‚4 ist eine Primzahl' falsch ist" sei „übersetzbar" in den Satz „Wenn 2 größer als 3 ist, so ist 4 eine Primzahl" (LU 83; Gef 83 [45]). Der zwar informationsverschleiernde, aber richtige Satz „Es ist falsch, dass die Sätze ‚Friedrich der Große siegte bei Rossbach‘ und ‚Zwei ist größer als drei‘ beide falsch sind“ lasse sich „kürzer schreiben“ als „Friedrich der Große siegte bei Rossbach, oder zwei ist größer als drei“ (Gef 79f [42]). **HILBERT** und **ACKERMANN** zufolge kann statt „Es ist falsch, dass von den Aussagen ‚$2 < 3$‘ und ‚Der Schnee ist schwarz‘ beide falsch sind“ gesagt werden „2 ist kleiner als 3 oder der Schnee ist schwarz“[47]. Das Gedankengefüge **A**, demzufolge von zwei Aussagen jedenfalls nicht beide falsch sind, könne durch das (nicht-ausschließende) *Oder* der Umgangsprache ausgedrückt werden, und stelle die logische Beziehung zwischen „verträglichen Alternativen“ dar. **L.BORKOWSKI** behauptet zunächst, dass der Ausdruck „$A \Rightarrow B$“ dem Ausdruck „$\neg(A \;\&\; \neg B)$“ mit der Bedeutung „es ist nicht wahr, dass A und nicht B“ „äquivalent“ im Sinne von bedeutungsgleich sei; dies ist richtig, denn „$A \Rightarrow B$“ ist die sekundäre Abkürzung von „$\neg(A \;\&\; \neg B)$“ und „$\neg(A \;\&\; \neg B)$“ ist die primäre Abkürzung des Satzes „Es ist nicht wahr, dass A und nicht B“; dann aber meint er, man könne den Ausdruck „$A \Rightarrow B$“ auch als den umgangssprachlichen Bedingungssatz „wenn A, so B“ lesen[48] – *und genau an diesem Punkt beginnt die Zerstörung der theoretischen Logik.*

Die wichtigsten logischen Verhältnisse, die *angeblich* durch zweistellige Gedankengefüge ausgedrückt werden, sind in folgender Tabelle angegeben[49].

Das Gedankengefüge	*angeblich mögliche „Übersetzung“ in die Umgangssprache*	*die logische Form, mit der das Gedankengefüge verwechselt wird*
A	… oder … (nicht ausschließend)	Verhältnis einziger, verträglicher Alternativen; subkonträre Opposition; (nicht-strikte) Disjunktion
C	wenn …, dann …	Implikation; Subalternation; Beziehung der hinreichenden Bedingung; Folgerungsbeziehung
B	nur wenn …, dann …	Beziehung der notwendigen Bedingung
D	nicht möglich, dass zugleich … und …	konträrer Gegensatz, Unverträglichkeit, Exklusion
E	genau wenn …, dann …	Äquivalenz, hinreichende und notwendige Bedingung
J	(ausschließendes) oder; entweder …, oder …	kontradiktorischer Gegensatz, strenge Disjunktion, Widerspruch, erschöpfendes Verhältnis von unverträglichen Alternativen

FREGE hat die Gedankengefüge zunächst in der angegebenen Weise konstruiert; wenn den Gedankengefügen keine anderen als die aus dieser Konstruktion resultierenden Bedeutungen unterschoben werden, ist ihr nutzloser tautologischer oder gar informationsverschleiernder Gehalt, damit ihre logische Irrelevanz offenkundig. Nur dadurch, dass **FREGE** bestimmte Gedankengefüge *im Nachhinein* und in Widerspruch zu ihrer festgelegten Bedeutung als präzisierende Bestimmungen umgangssprachlicher Ausdrucksmittel für logische Zusammenhänge ausgibt, kann er den Anschein erzeugen, die Gedankengefüge stellten logische Verhältnisse dar.

Der Ausdruck der informationsverschleiernden Gedankengefüge mit Hilfe umgangssprachlicher, logische Verhältnisse ausdrückender Partikeln ist in allen Fällen eine nachträgliche unzulässig-falsche logische Deutung der Gedankengefüge. Die kritische Prüfung und Bewertung des fregeschen Logikentwurfs muss sich *zuerst und vor allem* der Tatsache dieser nachträglichen logischen Deutung stellen; denn mit der Berechtigung dieser nachträglichen logischen Deutung stehen oder fallen *alle* logischen Ansprüche, die mit **FREGE**s Versuch, die Logik auf der Konzeption der Gedankengefüge neu aufzubauen, verbunden werden können. Was **FREGE** und seine Parteigänger zur Rechtfertigung dieser nachträglichen Deutung der Gedankengefüge vorbringen, ist unvoreingenommen zu prüfen. Im Folgenden sollen uns die wichtigsten Stellungnahmen der Anhänger **FREGE**s zum Problem der Nachträglichkeit und Zulässigkeit der logischen Deutung der Gedankengefüge beschäftigen.

Anmerkungen zu Teil II, Kapitel 1

1 Diese „Aussagejunktoren“ werden auch „Wahrheits(wert)funktionen“, „Aussagefunktoren“, „Funktoren“, „Aussagenkonnektive“, „Aussageverknüpfungen“ u.a.m. genannt. **FREGE** spricht meistens von *Gedankengefügen*. Ich benutze nur die fregesche Bezeichnung „*Gedankengefüge*“.

2 **G.PATZIG** schreibt, durch **FREGE**s Konstruktion der Gedankengefüge sei „die Leitfrage **KANT**s nach einem System der logischen Formen endgültig und befriedigend beantwortet.“ (Sprache und Logik, 2., durchges. und erw. Aufl., Göttingen 1981, S.84). In **FREGE**s Logikentwurf könnten „alle logisch relevanten Formen von Sätzen eindeutig ausgedrückt werden.“ (ebd., S.82)

3 **SUSAN HAACK**: Philosophy of Logics, Cambridge/London/ New York/Melbourne, 1978. S.4f.

4 In der Logistik wird meist von elementaren oder atomaren Aussagen gesprochen.

5 „Nicht der Sinn der Aussage für die formale Logik maßgeblich ist, sondern nur der Wahrheitswert. Der Wahrheitswert lässt sich allerdings nur mit Berufung auf den Sinn rechtfertigen. Aber nicht diese Rechtfertigung, sondern nur, dass der Aussage einer der beiden Wahrheitswerte zukommt, ist für die Logik von Bedeutung.“ (**L.ELEY**, Philosophie der Logik, S. 87f) Hier treffen wir auf eine gängige, aber fragwürdige Weise der Argumentation: zunächst lässt sich doch nur behaupten, dass dieses Prinzip der „Wahrheitsfunktionalität“ für die Konstruktion der fregeschen Gedankengefüge maßgeblich ist; ob von diesem Prinzip ausgehend auch logische Formen rekonstruiert werden können (nur dann wäre es „für die formale Logik von Bedeutung“), müsste erst durch den Nachweis gezeigt werden, dass auch die logischen Formen, die dem erkennenden Denken schon vor jeder logischen Reflexion zu Grunde liegen, diesem Prinzip unterstehen. Ein solcher Nachweis ist weder von **FREGE** noch einem seiner Nachfolger erbracht worden. Dass **FREGE**s System der Gedankengefüge Logik ist, ist „apriorische“, jeder Begründung entzogene Voraussetzung.

6 „Unter einer Wahrheitsfunktion versteht man eine Funktion, deren Argumente Aussagen sind, und deren Wahrheitswert *nur* von dem Wahrheitswert der Argumente abhängt.“ (**JAN ŁUKASIEWICZ**, Geschichte der Aussagenlogik, 116) – „Im Aussagenkalkül interessiert die Logik besonders die Abhängigkeit des Wahrheitswertes einer Verknüpfung von den Wahrheitswerten ihrer Teile… Die Junktoren bestimmen eindeutig den Wahrheitswert einer Verknüpfung, falls die Wahrheitswerte der verknüpften Teile bekannt sind, bzw. durch Einsetzungen bestimmt werden. Weil also der Wahrheitswert der Verknüpfung eine Funktion der Wahrheitswerte der Teile ist, nennt man die Junktoren auch wahrheitsfunktionale Zeichen.“ (**H.J.HERINGER**, Formale Logik und Grammatik, 11f) – „We shall here consider only those ways of forming compound statements which will allow us to determine the truth or falsity of the resulting compound statements *solely and entirely* on the basis of the truth or falsity of their constituent statements.“ (**NICHOLAS RESCHER**, Introduction to Logic, 175) – „Die elementare Aussagenlogik“ lässt sich „am einfachsten als eine inhaltlich-kombinatorische Theorie der ‚Wahrheitsfunktionen‘ entwickeln.“ (**HILBERT**/**BERNAYS**, 45) – Der „Grundgedanke“ der Konstruktion von Gedankengefügen besteht darin, „dass es bestimmte Möglichkeiten gibt, komplexe Aussagen aus Teilaussagen zu bilden, und zwar derart, dass der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage *vollkommen* durch die Wahrheitswerte der Teilaussagen bestimmt ist.“ (**W.C.SALMON**, 73) – Die Gedankengefüge „müssen aus Sätzen solche neuen Sätze aufbauen können, deren Wahrheitswert schon durch die Wahrheitswerte der Ausgangssätze *eindeutig* bestimmt ist. Solche Konjunktionen (oder ‚Junktoren‘, oder ‚Funktoren‘) nennt man ‚Wahrheitsfunktionen‘.“ (**G.PATZIG**, Sprache und Logik, 14) – Um die Wahrheit oder Falschheit eines Gedankengefüges „bestimmen zu können, *genügt es*, die Wahrheit oder Falschheit ihrer Glieder zu kennen.“ (**QUINE**, Grundzüge der Logik, S. 33) – „Wir wollen dabei nur solche Funktoren betrachten, die neue Aussagen bilden, deren Wahrheitswerte *ausschließlich* von dem Wahrheitswert der Aussagen abhängt, die die Argumente dieser Funktoren sind. Um das zum Ausdruck zu bringen, nennen wir diese Funktoren auch Wahrheitsfunktionen.“ (**MENNE**, Einführung in die Logik, 33) – „Die Schemata, mit denen wir uns hier beschäftigen, sind so gestaltet, dass sie Ausdrücke betreffen, von denen wir *nichts* wissen, *außer* dass sie wahr oder falsch sind und dass sie einen der beiden Wahrheitswerte besitzen.“ (**PERELMAN, CHAIM**: Logik und Argumentation, S.7) „Wir müssen wieder betonen, dass bei alledem {der Festsetzung der Bedeutung der Junktoren} kein logisches Verhältnis zwischen den Bedeutungen der Ausdrücke gefragt ist, sondern *ausschließlich* der Wahrheitswerte.“ (9) – „A proposition is called a truth-function of *n* propositions, if the truth-value of the former is *uniquely* determined by the truth-value of the latter.“ (**G.V.WRIGHT**, On the Idea of Logical Truth, in: Logical Studies, S. 22) (Alle Hervorhebungen von mir – J.P.)

7 **FREGE** identifiziert die Operationen der Prädikation und der Abbildung; unter Voraussetzung der exakten algebraischen Definition der Abbildung erweist sich diese Identifikation als unhaltbar. Ich werde später zeigen, dass dann, wenn die Gedankengefüge als *echte* Abbildungen von Paaren von „Wahrheitswerten“ in die Menge der „Wahrheitswerte“ aufgefasst werden, ein anderes System als das der Gedankengefüge entsteht (s. II, Kapitel 3: Freges Versuch einer „Verallgemeinerung“ des Funktionsbegriffes. Das System der Fregealgebra, S. 162)

8 In **FREGE**s System kommt die fundamentale *logische Form* der Negation, die ich durch das Zeichen „~“ darstelle, nur in einer sehr speziellen Verwendung vor, nämlich als Negation des Als-wahr-Behauptens; die Betrachtung der logischen Negation im Allgemeinen, als logische Form, die unabhängig vom Wahrheitswert prädizierbar ist, verwirft **FREGE** ausdrücklich als unnütz und angeblich nicht präzise durchführbar. Die allgemeine logische Form der Negation bezeichne ich mit „~“, die spezielle Form der fregeschen Negation als Negation des Wahrseins einer Aussage A bezeichne ich in den meisten Fällen durch den Ausdruck „¬ A“.

9 Es ist im Rahmen der „modernen Logik“ die Regel, dass in ihrer vortheoretisch-intuitiven Form unanalysiert aufgenommene Vorstellungen einfach durch neu festgesetzte Symbole in der Illusion bezeichnet werden, dass solche „Symbolisierungen“ bereits eine Erkenntnisleistung darstellen, welche über das nur aufgenommene intuitive Verständnis hinausweisen und dieses präzisieren.

10 Unter einer Wahrheitswertkombination verstehe ich also nicht eine Kombination der Wahrheitswerte als solcher ($\mathcal{W} \frown \mathcal{W}$, $\mathcal{W} \frown \mathcal{F}$, usw.), sondern eine Kombination wahrheitswertdefiniter Aussagen, sofern sie entweder der Klasse der wahren oder der Klasse der falschen Aussagen angehören: Wahrheitswertkombination 1: *wahre Aussage⌢wahre Aussage*; Wahrheitswertkombination 2: *wahre Aussage⌢falsche Aussage*; Wahrheitswertkombination 3: *falsche Aussage⌢wahre Aussage*; Wahrheitswertkombination 4: *falsche Aussage⌢falsche Aussage*. Die Gedankengefüge **FREGE**s werden ja nicht Wahrheitswerten, sondern wahrheitswertdefiniten Aussagen zugesprochen (man kann nur von Aussagen, nicht von Wahrheitswerten sagen sie seien wahr oder falsch).

11 Das Gedankengefüge ◖◗ spricht einem Aussagenpaar alle vier Wahrheitswertprädikate ab; es kann keinem Paar von Aussagen zukommen, weil jedem Aussagenpaar genau eines der vier Wahrheitswertprädikate zukommt; andernfalls wären die beiden Aussagen jeweils weder wahr noch falsch.

12 Abkürzend werden das umgangssprachliche „und“ durch „&“, das umgangssprachliche „nicht wahr“ wird durch „¬“ , das umgangssprachliche „entweder – oder“ (ausschließendes oder) durch „⋈“ bezeichnet.

13 Dies bedeutet in Kürze: *Von den beiden Aussagen A und B ist jede jeweils weder wahr noch falsch*. Das Gedankengefüge ◖◗ ist widersprüchlich und leer. Da alle Wahrheitswertprädikate ausgeschlossen sind, kann ◖◗ nicht mit Hilfe von „entweder–oder“ ausgedrückt werden.

14 Andere bedeutungsgleiche Formulierungen sind „Von den beiden Aussagen A und B ist die eine wahr, die andere falsch“; möglich ist auch die Formulierung „Entweder ist A wahr oder es ist B wahr“.

15 Auch der Ausdruck „A ⋈ B“ ist eine primäre Abkürzung des umgangssprachlichen Ausdrucks „Entweder ist A wahr oder es ist B wahr“.

16 Kürzer: „Es ist jedenfalls A wahr“.

17 Kürzer: „Jedenfalls ist A falsch“.

18 Kürzer: „Jedenfalls ist B wahr“.

19 Kürzer: „Jedenfalls ist B falsch“.

20 Man kann auch sagen „Von den beiden Aussagen A und B ist mindestens eine falsch“.

21 Dieses Gedankengefüge lässt sich unter anderem auch so formulieren: „Entweder ist A falsch oder es ist B wahr oder beides trifft zu“ oder „Entweder ist A falsch oder A und B sind beide wahr“.

22 Man kann auch sagen „Entweder ist A wahr oder es ist B falsch oder beides trifft zu“.

23 Auch folgende Formulierungen sind möglich: „Von den beiden Aussagen A und B ist mindestens eine wahr“ „Entweder ist A wahr, oder es ist B wahr, oder beide Aussagen sind wahr“.

24 Dies bedeutet „Beide Aussagen A und B sind *jeweils* entweder wahr oder falsch“; das Gedankengefüge **V** muss also jedem Paar von Aussagen zugeschrieben werden. Da kein Wahrheitswertprädikat ausgeschlossen ist, kann das Gedankengefüge **V** nicht alleine mit „und“ und „nicht“ ausgedrückt werden.

25 „Die Kenntnis der Wahrheitsbedingungen eines Satzes ist dasselbe wie das Verstehen seines Sinns.“ (**R.CARNAP**, Symbolische Logik, S. 15)

Bejaht ein Gedankengefüge genau ein Wahrheitswertprädikat (nur dieses eine Wahrheitswertprädikat wird dann nicht ausgeschlossen, alle restlichen ausdrücklich ausgeschlossen), dann ist der Umstand, dass zwei Aussagen dieses Wahrheitswertprädikat zukommt, eine *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür, dass diesen Aussagen das betreffende Gedankengefüge zukommt.
Schließt ein Gedankengefüge zumindest zwei Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich aus, dann ist die Tatsache, dass zwei Aussagen eines dieser Wahrheitswertprädikate zukommt, jeweils eine *hinreichende, nicht notwendige* Bedingung dafür, dass den beiden Aussagen das Gedankengefüge zukommt.
Schließt ein Gedankengefüge genau ein Wahrheitswertprädikat ausdrücklich aus, dann ist die Tatsache, dass zwei Aussagen dieses Wahrheitswertprädikat nicht zukommt, eine *hinreichende und notwendige* Bedingung dafür, dass beiden Aussagen das betreffende Gedankengefüge zukommt.
Schließt ein Gedankengefüge mehr als ein (höchstens drei) Wahrheitswertprädikate ausdrücklich aus, dann ist die Tatsache, dass zwei

Aussagen eines dieser Wahrheitswertprädikate nicht zukommt, eine *notwendige, nicht hinreichende* Bedingung dafür, dass beiden Aussagen das betreffende Gedankengefüge zukommt.

26 „Die Wahrheitstafel gibt zunächst nur eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Wahrheit eines Satzes mit diesem Zeichen, in Bezug auf die Wahrheitswerte der Glieder. Wir können uns nun aber überzeugen, dass die Angabe einer solchen Bedingung die Bedeutung des Zeichens eindeutig festlegt, dass also die weitere Angabe einer Übersetzung des Zeichens durch ein deutsches Wort oder eine Phrase theoretisch überflüssig ist.“ (**R.CARNAP**, Symbolische Logik, S.14) Das Umgelehrte ist richtig (und das ist äußerst wichtig!): die „Wahrheitstafeln“ sind nichts anderes als „Übersetzungen“ der primären umgangssprachlichen Bedeutungen der Gedankengefüge; richtig ist allerdings, dass jede über *diese* primäre, umgangssprachlich festgesetzte Bedeutung der Gedankengefüge hinausgehende (Um-)Deutung oder „Übersetzung“ theoretisch überflüssig ist; sie ist nicht nur theoretisch überflüssig, sondern unzulässig; auch **CARNAP** gibt den Gedankengefügen später dann eine von ihrer tatsächlichen Bedeutung erheblich abweichende Deutung („Übersetzung“).

27 Die Gedankengefüge sind die „*logischen Formen*, die sich aus den systematisch in Wahrheitstafeln erfassten möglichen *Beziehungen von Aussagen* ergeben“, behauptet **KLAUS HAMMACHER** (Artikel „Bedingung“, in: HPG 1, 183) – „Die Wahrheitstafel unterscheidet die Wahrheitsbedingungen, unter denen die durch sie definierte *logische Verbindung* wahr ist, von den Wahrheitsbedingungen, unter denen die *logische Verbindung* falsch ist.“ (**ELEY**, Philosophie der Logik, 91) (Hervorhebungen von mit, J.P.) Der Irrtum, die Gedankengefüge seien logische Formen, ist das falsche Dogma, an dem die ganze „moderne Logik“ hängt.

28 **W.KAMLAH/P.LORENZEN**: Logische Propädeutik oder Vorschule des vernünftigen Redens, Mannheim 1967, S.156f.. Vgl. Anmerkung 6

29 „Alle Dinge nun, die … als bezüglich (πρὸς τί) bezeichnet werden, sind bezüglich, weil *das, was sie unmittelbar sind, in Beziehung zu einem anderen besteht*.“ (**ARISTOTELES**, Met, Δ 15, 1021a 26-28; vgl. auch Kat 7, 6a 36f).

30 Man darf sich in diesem Zusammenhang nicht darauf hinausreden, dass die angebliche, durch ein Gedankengefüge ausgedrückte „Beziehung“ nur den Status der Wahrheitswerte, nicht aber Sinn und Gehalt der prädizierten Aussagen betreffe – so wie etwa **N.RESCHER** über das Gedankengefüge „A $\Rightarrow$ B“ schreibt: „A truth-functional mode of implication can represent only a relationship between the truth status of the antecedent and that of consequent, and *not* a relationship between their meanings.“ (Introduction to Logic, S.179) Die Wahrheitswerte der durch **C** prädizierten Aussagen sind in Wahrheit völlig unabhängig von einander, jede der Aussagen besitzt ihren Wahrheitswert ganz unabhängig von der jeweils anderen – es gibt also auch keine echte Beziehung zwischen den Wahrheitswerten der durch **C** kennzeichneten Aussagen! Die Bedeutung der Gedankengefüge erschöpft sich in der redundant-sinnlosen Wiedergabe vorausgesetzter und zusammenhangsloser Wahrheitswerte.

31 Es charakterisiert den Empirismus, dass er unterstellt, das elementare Wissen von der gegenständlichen Realität resultiere aus einem unmittelbaren, bloß passiven, wahrnehmenden Auffassen der Dinge in ihrer Einzelheit; die Einsicht, dass schon die elementarste empirische Feststellung nur dadurch möglich wird, wenn in der Wahrnehmung Gegebenes allgemeinen Begriffen und Gesetzen subsumiert wird, die Einsicht, die erst die Entwicklung der abendländischen Philosophie und Logik ermöglicht hat, wird ignoriert. Auch **FREGE** entwirft eine empiristische (und extrem psychologistische) Erkenntnistheorie, wenn er versucht, sein System der Gedankengefüge (die „Aussagenlogik“), und insbesondere die Tatsache, dass alle realitätsbezogenen Aussagen mit ihren Wahrheitswerten in seinem Logikentwurf samt und sonders vorausgesetzt werden, philosophisch zu begründen (s. Abschnitt 1.3.3. Die Reifikation und Verabsolutierung der Gedanken. Freges Psychologie des Gedankenfassens, S. 94).

32 **RUDOLF CARNAP**, Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Wien/New York 1968, dritte, unveränderte Aufl., Nachdruck 1973, S.15. Statt der Zeichen &, $\triangledown$, $\Leftrightarrow$ gebraucht **CARNAP** die Zeichen $\cdot$, $\vee$ und $\equiv$.

33 **L.WITTGENSTEIN**: Tractatus logico-philosophicus, Frankfurt/Main 1963, S.56

34 **F.WAISMANN**: Logik, Sprache, Philosophie, Stuttgart 1976, S.533

35 Ebd., S.534. Im gleichen Sinne schreibt **R.CARNAP**: „Ein Satz besagt etwas über die Welt, dass er bestimmte Fälle, die an sich möglich wären, ausschließt, d.h. dass er uns mitteilt, dass die Wirklichkeit nicht zu den ausgeschlossenen Fällen gehört. Je mehr Fälle ein Satz ausschließt, umso mehr besagt er.“ (Symbolische Logik …, S.21) Die Sätze, die **CARNAP** anspricht, sind freilich nur jene ganz speziellen, ausschließlich in Abhandlungen der „modernen Logik“ vorkommenden Sätze, die Gedankengefüge prädizieren; wenn jemand weiß, dass z.B. zwei Aussagen falsch sind, dann weiß er, dass genau drei Wahrheitswertprädikate ausgeschlossen sind; niemand – außer den Autoren logistischer Abhandlungen – sagt in diesem Falle zweier falscher Aussagen, dass weniger als drei Wahrheitswertprädikate ausgeschlossen sind (z.B. dass jedenfalls nicht beide Aussagen wahr sind, oder dass jedenfalls nicht bloß eine der zwei Aussagen wahr ist, usw.) Wenn schon feststeht, dass zwei Aussagen falsch sind, dann ist die Möglichkeit, dass beide richtig sind, eine *fiktive Möglichkeit*; der für die theoretische Logik konstitutive Grundbegriff der Möglichkeit wird im Rahmen der „modernen Logik“ generell als fiktive Möglichkeit, als Schein-Möglichkeit, verballhornt (siehe

II, Kapitel 5: Die Modalitätenlogistik, S. 281).

36 Diese für **FREGE** einzig mögliche „Definition“ ist recht besehen keine Definition, sondern eine bildhafte, globale Darlegung des Wahrheitsverständnisses des erkenntnistheoretisch unreflektierten Alltagsbewusstseins; der tatsächliche Charakter dieser „Übereinstimmung“ bleibt völlig ungeklärt.

37 Dass sich im *Wissen Subjekt* und *Objekt* in spezifischer Weise verbinden, ist eine Voraussetzung jeder sinnvollen logischen Fragestellung. **FREGE** dissoziiert diese drei Seiten und macht sie zu drei für sich bestehenden „Reichen“ (oder „Welten“), für die er jeweils eine eigenständige, mit den anderen unverträgliche „Erkenntnistheorie“ anbietet. Der Welt der *Dinge* entspricht ein sensualistisch interpretierter vortheoretischer Alltagsrealismus; Dinge sehen (tasten, schmecken, riechen) wir, und wir wissen, dass diese wahrgenommenen Dinge unabhängig davon, ob wir sie wahrnehmen, existieren. Für die Welt des *Subjektiven* ist nach **FREGE** die absolut egozentrische (solipsistische) Introspektion zuständig. Dem „dritten Reich“ der eigenständigen *Gedanken* schließlich entspricht die vage, psychologische Vorstellung des Gedankenfassens. „Man sieht ein Ding, man hat eine Vorstellung, man fasst oder denkt einen Gedanken.“ (Ged 44 [69], Fn.5) Die drei „Welten“ sind für **FREGE** Untersuchungsgegenstand der Disziplinen Physik, Psychologie, Logik (die Logik muss er dann doch ganz auf die psychologische Tätigkeit des „Gedankenfassen“ gründen).

38 Die Logik müsse vollständig „aus dem Subjektiven herauskommen.“ (GGA I, XXIV) „Es ist das Psychologische vom Logischen, das Subjektive vom Objektiven scharf zu trennen.“ (GLA 10 [XI]) Schon die Annahme, das Logische sei an die menschliche Subjektivität gebunden, ist ihm eine psychologistische Entstellung der Logik: „Kann man ärger den Sinn des Wortes ‘wahr’ fälschen, als wenn man eine Beziehung auf den Urteilenden einschließen will?“ (GGA I, XVI) Was wahr ist, müsse etwas „Objektives, von dem Urteilenden Unabhängiges“ sein (GGA I, XVII, auch XVIII).

39 „Wenn man den Gedanken als etwas Psychologisches, als ein Vorstellungsgebilde ansehen wollte, … so müsste man die Behauptung, dass 2 + 3 = 5 ist, schon etwa so erklären: ‚Man hat bemerkt, dass bei vielen Menschen gewisse Vorstellungsgebilde vorkommen, die mit dem Satz ›2+3=5‹ verknüpft sind. Wir nennen ein Gebilde dieser Gattung Sinn des Satzes ›2+3=5‹. Soweit man bisher beobachtet hat, sind diese Vorstellungen immer wahr, so dass wir vorläufig immer sagen können: ‚Nach den bisherigen Beobachtungen ist der Sinn des Satzes ›2+3=5‹ wahr.‘ “ (Log II, 47) Gegen die psychologistische Begründungsanmaßung spricht auch, dass beim Beweis eines logischen Gesetzes nie auf irgendein Subjekt verweisen wird: „Wenn ich etwas als wahr behaupte, will ich nicht von mir sprechen, von einem Vorgang in meiner Seele. Und um es zu verstehen, braucht man nicht zu wissen, wer es behauptet.“ (Briefe, XXI/2, 111; auch Kernsätze 24) Die kennzeichnet freilich alle wissenschaftlichen Aussagen (auch die psychologischen).

40 Gegen **FREGE**s These vom selbständigen Bestehen der Gedanken spricht auch, dass sie sich auf jede noch so triviale Feststellung erstrecken müsste; da jedes noch so zufällige Ereignis zum Gegenstand einer wahren Aussage werden kann, müsste auch die entsprechende wahre Feststellung seit jeher unabhängig existieren; dies aber würde einen wirklichkeitsfremden absoluten Determinismus implizieren.

41 **FREGE**s Tretmühlenargument, wenn es denn einen Wert besäße, würde auch das Gedankenfassen betreffen. Um etwas zu wissen, muss ich mich eines schon bestehenden Gedankens "bemächtigen"; es muss also wahr sein, dass ich mich dieses Gedankens bemächtigt habe; zugleich muss ich neben dem ursprünglichen Gedanke den weiteren Gedanke fassen, dass ich diesen Gedanken fasse. Aber auch letzteres muss wahr sein, also als Gedanken gefasst werden, usw. usf. Jeder Gedanke müsste sich ins schlechte Unendliche vervielfältigen und wir kämen an keinen Punkt, an dem wir die Wahrheit, eine Wahrheit gefasst zu haben, anerkennen könnten.

42 In Wahrheit ist **FREGE**s Vorstellung einer in sich verschlossenen Subjektivität eine Fiktion; Bewusstsein ist seiner Natur nach immer intentional auf Nichtbewusstsein bezogen; es verbindet uns, soweit es überhaupt Bewusstsein ist, mit der objektiven Wirklichkeit, anstatt uns von dieser abzuschließen; *alles* Seelische und „Subjektive“ steht damit „an der Grenze des Seelischen“, denn „das Seelische“ betrifft unser Verhältnis zur objektiven Realität, freilich auf eine Weise, die nicht durch die theoretische Logik geklärt werden kann

43 „Die psychologische Auffassung oder vielmehr Fehldeutung der Logik darf nach **FREGE** und **HUSSERL** als abgetan gelten.“ (**G.PATZIG**, Sprache und Logik, S.7). „Die Reinigung der Logik vom Psychologismus ist das Verdienst ... der bedeutendsten deutschen Philosophen, die um die Jahrhundertwende lebten: **EDMUND HUSSERL** ... und **GOTTLOB FREGE**.“ (**A.MENNE**, Einführung in die Logik, S.23f).

44 Tatsächlich aber ist das Prinzip, wonach entweder die Aussage A oder die Aussage nicht-A wahr ist, das *einzige* logische Gesetz, das in **FREGE**s „Aussagenlogik“ berücksichtigt wird.

45 **FREGE** spricht vom "Urteilsinhalt", vom "begrifflichen" oder vom "beurteilbaren Inhalt" (vgl. BS 1ff; GGA I, X).

46 In aller Regel definieren die Verfechter des fregeschen Logikentwurfs die Gedankengefüge allein mit Hilfe von „und“ und „nicht“, ohne das *umgangssprachliche* „entweder-oder“. So wird der Ausdruck „$A \Rightarrow B$“ eigentlich immer als Abkürzung des umgangssprachlich formulierten Gedankengefüges „es ist falsch, das A wahr und B falsch ist“, und nicht des gleichbedeutenden Ausdrucks „Entweder sind A und B beide wahr oder es ist A falsch und B wahr oder es sind A und B beide falsch“ bestimmt; das Gedankengefüge $A \triangledown B$ wird als die Bedeutung der Formulierung „es ist falsch, dass A und B beide falsch sind“ und nicht als die Bedeutung des Ausdrucks „Entweder sind A und B beide wahr oder es ist A wahr und B falsch oder es ist A falsch und B wahr“ festgesetzt, usw.

47 **HILBERT/ACKERMANN**, S.3.

48 Formale Logik, S.96

49 Zur Behauptung dieser angeblichen Entsprechungen vgl. etwa **A. MENNE**, Einführung in die formale Logik, S. 27-35; **A. MENNE**, Einführung in die Logik, S. 35-39

II, Kapitel 2. Die logische Missdeutung der Gedankengefüge

2.1. Die Nachträglichkeit der logischen Deutung der Gedankengefüge wird ignoriert, jedenfalls nicht thematisiert

2.1.1. Die Leugnung der Nachträglichkeit der logischen Deutung der Gedankengefüge

Zumeist wird die Diskrepanz zwischen der ursprünglichen Bedeutung der Gedankengefüge und den Bedeutungen, die aus der nachträglichen logischen Deutung der Gedankengefüge resultieren, überhaupt nicht zur Kenntnis genommen oder ignoriert; die Abweichung der neuartigen fregeschen Verwendung der umgangssprachlichen logischen Partikeln von der seit jeher üblichen wird dann nicht einmal als Problem anerkannt. Insbesondere die lehrbuchhaften Darstellungen der fregeschen „Aussagenlogik" erwecken den Eindruck, als würde die „logische Bedeutung" der Gedankengefüge aus einer ursprünglichen und direkten präzisierenden Explikation der logischen Verhältnisse resultieren, die wir mit Hilfe umgangssprachlicher logischer Partikeln wie „Wenn" oder „Oder" ausdrücken. In Wirklichkeit aber hat **FREGE** die Gedankengefüge definiert, ohne dass diese logischen Partikeln dabei als Definiendum bzw. Definiens aufgetreten wären; erst im Nachhinein hat er den eindeutig-korrekten Ausdruck der Gedankengefüge (z.B. „Es ist falsch, dass die Aussage a wahr und die Aussage B falsch ist") durch den fragwürdigen Ausdruck mit Hilfe logischer Partikeln (z.B. „Wenn A, dann B") ohne jede Rechtfertigung ersetzt[1].

Wir lesen etwa, bei der Bildung der Gedankengefüge entstünden „mit Hilfe der Junktoren ‚und', ‚oder' und ‚wenn, so' aus zwei Aussagen a, b die zusammengesetzten Aussagen ‚a und b', ‚a oder b'. ‚wenn a, so b'."[2] Nach **A.OBERSCHELP** sind es die umgangssprachlichen „logischen Konstanten" selbst, die durch begriffsschriftliche Zeichen wie „⇒", „$\triangledown$" abgekürzt werden[3]; die (sekundären!) Bezeichnungen der Gedankengefüge werden als „formal-sprachliche Entsprechungen" der „logischen Fügewörter ‚und', ‚oder', ‚nicht' und ‚wenn-dann'" ausgegeben, die Wörter „nicht", „und", „oder", „wenn-dann", „genau wenn" sollen von vorneherein die „normalsprachliche Leseart" von Gedankengefügen sein[4]; die tatsächlichen Verhältnisse werden also auf den Kopf gestellt.

Diese Beurteilungen lassen das tatsächliche Vorgehen **FREGE**s bei der Definition der Gedankengefüge außer Acht: für das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ beispielsweise sind nur jene „umgangssprachlichen Lesearten" zulässig, die dieses Gedankengefüge ursprünglich bei **FREGE** *definieren*: es sind dies nur die „Lesearten" „es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist" (primär abgekürzt als „¬(A&¬B)"), bzw. „Entweder sind A und B beide wahr, oder sie sind beide falsch, oder A ist falsch und B ist wahr"; dies erhellt schon daraus, dass die Darlegung eines Gedankengefüge **C** nur dann dem unverdorbenen Sprachgefühl akzeptabel und sinnvoll erscheint, wenn es durch die richtige „Leseart" ausgedrückt wird – wenn z.B. der korrekte (wenn auch nutzlos-informationsverschleiernde) Ausdruck „Es trifft nicht zu, dass Frege katholisch war und Cäsar Gallien erobert hat" nicht durch die nachträglich-verfälschende und absurde Formulierung „Wenn Frege katholisch war, dann hat Cäsar Gallien erobert" ersetzt wird. **FREGE** hat also nicht umgangssprachliche Partikeln wie „Wenn" und „Oder" aufgegriffen und ihre bereits vorhandene Bedeutung präzisierend normiert, sondern durch die willkürliche, unzulässige Verwendung dieser Partikeln zum Ausdruck seiner Gedankengefüge die zuvor präzise definierten Bedeutungen seiner Gedankengefüge wie auch die Bedeutungen umgangssprachlicher logischer Partikeln verwischt und verfälscht.

Dass einzig der Ausdruck der Gedankengefüge mit Hilfe des „Und", „Nicht", evtl. auch des „Entweder-oder" zulässig ist, zeigt sich auch darin, dass dann, wenn Vertreter des fregeschen Logikentwurfs die Richtigkeit eines Ausdruck wie „$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$" zu entscheiden haben, sie sich *ausschließlich* an den festgesetzten Wahrheitsbedingungen für die Prädikation von **C**, d.h. an der korrekten ursprünglichen Definition des Zeichens „⇒" als „es ist **nicht** wahr, dass … wahr **und** … **nicht** wahr ist" orientieren; die Prüfung eines solchen Ausdrucks erfordert nur ein korrektes Verständnis der umgangssprachlichen Partikeln „Und" und „Nicht", während die Art und Weise, wie das „Wenn" gebraucht wird, keine Rolle spielt. Erst wenn **FREGE** und seine Anhänger einem solchen Ausdruck, der doch schon eine eindeutige, wenn auch logisch irrelevante Bedeutung besitzt, einen *logisch* bedeutsamen Gehalt zu geben versuchen, bringen sie nachträglich die „Wenn-dann"-Missdeutung ins Spiel; sie unterstellen so, die Festlegung von Wahrheitsbedingungen (etwa die Bestimmung der Gedankengefüge mit Hilfe der „Wahrheitstafeln“) und die Festlegung der Bedeutung (im Sinne der Deutung der Gedankengefüge als logische Formen) seien Schritte, die auseinander fallen können. Dies trifft nicht zu, denn generell gilt, dass eine Aussage genau dann wahr ist, wenn das, was sie aussagt, zutrifft (eine Präsupposition der theoretischen Logik). Wenn für eine Behauptung „A⇒B“ als *Wahrheitsbedingung* festgesetzt wird, dass jedenfalls A nicht wahr und B nicht falsch sein darf, dann hat der Ausdruck auch *keine andere Bedeutung* als „Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“. Die Festlegung der Wahrheitsbedingungen für die Prädikation der Gedankengefüge mit Hilfe der angegebenen umgangssprachlichen Ausdrucksmittel stellt zugleich die Festlegung der Bedeutungen der Gedankengefüge dar – eine darüber hinausgehende „Interpretation“ ist nicht statthaft. Niemand wird die Richtigkeit der zulässigen Aussage „Es ist falsch, dass Frege katholisch war und Cæsar Gallien erobert hat“ in Frage stellen können, während jeder, der sich ein unverdorbenes Sprachgefühl bewahrt hat, die Formulierung „Wenn Frege katholisch war, dann hat Cäsar Gallien erobert“ zu Recht für abstrus hält.

2.1.2. Die angebliche Gleichursprünglichkeit der verschiedenen Gedankengefüge; der sekundäre Charakter und die Überflüssigkeit der Gedankengefügebezeichnungen wird bestritten

Die Untersuchung hat gezeigt, dass **FREGE**s Konstruktion der Gedankengefüge nur die Partikeln „Und“ und „Nicht“ verwendet, und der Ausdruck von Gedankengefügen mit Hilfe des „Wenn“, „Oder“ usw. eine nachträgliche illegitime Umdeutung bereits klar definierter Konzepte ist[5]. **FREGE** bestreitet diese Sonderstellung des *Und* und behauptet, alle Gedankengefüge seien gleichberechtigt und gleichursprünglich; die Bedeutungen der Partikeln *Wenn* und *Oder* usw. seien in seinem Logikentwurf ebenso elementar wie die Bedeutung des *Und* und könne zur Konstruktion anderer Gedankengefüge benutzt werden. Dieser These zufolge ist es nicht notwendig, alle Gedankengefüge auf der Grundlage des „Und“ zu definieren. Das „Wenn-dann“ würde direkt ein einfaches, nicht vorher durch andere Partikeln zu definierendes Gedankengefüge bezeichnen. „Man kann irgendeine der sechs Arten der Gedankengefüge“ – **K**, **X**, **M**, **A**, **D** und **C** – „zugrunde legen und aus ihr mithilfe der Verneinung die anderen ableiten, so dass für die Logik alle sechs Arten gleichberechtigt sind.“ (Gef 87 [48]) Die verschiedenen Gedankengefüge seien insofern entbehrlich, als es angeblich genüge, von den Junktoren **A**, **B**, **C**, **D**, **K**, **L**, **M** und **X** nur einen einzigen zusammen mit dem Ausdruck „nicht“ zu benutzen, um alle übrigen Gedankengefüge durch sie darstellen zu können.

Wäre diese Behauptung richtig, müsste die Bedeutung der Gedankengefüge nicht in der von mir dargelegten Reihenfolge festgesetzt werden, d.h. *alle* Gedankengefüge müssten nicht in einem *ersten*, entscheidenden Schritt mit Hilfe der Wörter „und“, „nicht“ und „ist wahr“ bestimmt und konstruiert werden. Nur wenn sich z.B. die Bedeutung der Gedankengefüge **C**, **A**, usw. auch ohne vorherigen Rückgriff auf das „und“ und „nicht“ umgangssprachlich erläutern ließe, wäre es möglich, diese Gedankengefüge schon ursprünglich und direkt (nicht erst nachträglich – mit welchem Recht auch immer) durch eigenständige logische Partikeln wie „Wenn-dann“, „Oder“, usw. auszudrücken. Diese behauptete Gleichursprünglichkeit und Gleichberechtigung der Gedankengefüge würde meine Behauptung der Nachträglichkeit und Unzulässigkeit der logischen Deutung der Gedankengefüge widerlegen.

Kann man also – wie **FREGE** und seine Anhänger behaupten – die anderen Gedankengefüge durch das Gedankengefüge **C** *definieren* und die Bedeutungsgleichheiten (A&B) ≡ ¬(A ⇒ ¬B), (A ∇ B) ≡ (¬A ⇒ B), (A ⊧ B) ≡ ¬(A ⇒ B), (A ⇑ B) ≡ (A ⇒ ¬B), (A ⫤ B) ≡ ¬(¬A ⇒ B) und (A ⇐ B) ≡ (¬A ⇒ ¬B) rechtfertigen, ohne schon *vorher* die Bedeutung des Zeichens ⇒ mit Hilfe der Partikeln „nicht“ und „und“ festgesetzt zu haben? Kann umgekehrt etwa A ⇒ B durch die gleichbedeutenden Ausdrücke „¬A ∇ B“, „¬(¬A ⫤ B)“, „A ⇑ ¬B“, „¬A ⇐ ¬B“ usw. ersetzt werden, ohne dass die Bedeutung der Zeichen „⇒“, „∇“, „⊧“, „⇑“, „⫤“ und „⇐“ bereits vorher *allein* durch „und“ und „nicht“ definiert worden ist? Dies ist nicht möglich, denn wenn nicht *alle* Gedankengefüge (außer **V**) *zuerst* mithilfe von „und“, „nicht“ und „ist wahr“ bestimmt würden, wären diese Bedeutungsgleichheiten weder erkennbar noch begründbar. Nur weil **FREGE** in seiner „Begriffsschrift“ (S.5) „A ⇒ B“ *schon zuvor* durch „**nicht**(A **und nicht** B)“ definiert hat, kann er *hernach* auch andere Gedankengefüge mithilfe des Zeichens „⇒“ ausdrücken. Wer also nicht weiß, was die Zeichen „⇒“ und „∇“, also das „wenn-dann“ und „oder“ in der nur bei **FREGE** vorkommenden skurrilen Verwendung bedeuten, wer nicht weiß, dass „A ∇ B“ *nichts anderes* bedeutet als „**nicht**(**nicht** A **und nicht** B)“, und dass „A ⇒ B“ „**nicht**(A **und nicht** B)“ bedeutet, der kann die Bedeutungsgleichheiten (A ∇ B) ≡ (¬A ⇒ B) und (¬A ∇ B) ≡ (A ⇒ B) weder erkennen noch begründen – wobei die Kenntnis der Bedeutungen des umgangssprachlichen „Oder“ und „Wenn“ hier keinerlei Rolle spielt.

Da das Gedankengefüge (A & B) nur deshalb auch durch „$\neg(A \Rightarrow \neg B)$“ bezeichnet (nicht etwa definiert) werden kann, weil *zuvor* die Bedeutung von „$\Rightarrow$“ als „nicht(A und nicht-B)“ festgesetzt worden ist, erweist sich die Substitution von „A&B“ durch den Ausdruck “$\neg(A \Rightarrow \neg B)$“ als die Substitution von „A&B“ durch „$\neg\neg(A \,\&\, \neg\neg B)$“. Nach Beseitigung der doppelten Negationen ergibt sich die „Substitution“ von „A&B“ durch „A&B“. Da die Bedeutungsgleichheit $(A \triangledown B) \equiv (\neg A \Rightarrow B)$ nur auf der Grundlage der Festsetzung, dass „$A \triangledown B$“ den Ausdruck „$\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$“ und „$A \Rightarrow B$“ den Ausdruck „$\neg(A \,\&\, \neg B)$“ abkürzen soll, eingesehen werden kann, bedeutet die Beziehung $(A \triangledown B) \equiv (\neg A \Rightarrow B)$ nichts anderes als $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \equiv \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$. Da *jedes* Operieren mit Gedankengefügen auf die ursprüngliche Definition der Gedankengefüge Bezug nehmen muss, erweisen sich diese Substitutionen auf der Basis der sekundären Bezeichnungen der Gedankengefüge nicht als Vereinfachungen, sondern als unnötige Verkomplizierungen[6], als nutzlose Spielereien, die von der Hauptsache ablenken und der unzulässigen nachträglichen logischen Umdeutung der Gedankengefüge Vorschub leisten.

Dass sich alle Gedankengefüge mit Hilfe des „nicht“ und jeweils den *sekundären* Bezeichnungen der Gedankengefüge **A**, **B**, **C**, **D**, **M**, **L** und **X** darstellen lassen, bedeutet keineswegs, dass sich das „und“ mit Hilfe dieser sekundären Abkürzungen definieren ließe; diese sekundären Abkürzungen können umgekehrt nur mit Hilfe des „und“ festgesetzt werden. Das umgangssprachliche „und“ ist die *einzige* aussagenverbindende Partikel, der zur Bildung der Gedankengefüge herangezogen wird und im SFG eine Rolle spielt. Es ist deshalb keineswegs, wie **FREGE** meint, ein nur „psychologischer Vorzug“, den das Wort „und“ im SFG besitzt (Gef 87 [48][7]); auch die Behauptung **FREGE**s, „dass keine dieser Arten {von Gedankengefügen, J.P.} vor den andern etwas voraus hat.“ (Gef 88 [49]), ist unzutreffend. Nur die Partikel „und“ („&“) ist ein „Urzeichen“ des SFG, nicht etwa „$\Rightarrow$“, „$\triangledown$“ oder eine andere sekundäre Gedankengefüge-Bezeichnung, wie **FREGE** meint (BRL 40).

2.1.3. Die irreführende Verbeispielung von Gedankengefügen

Die Tatsache, dass **FREGE** Gedankengefüge, die bereits einen unmissverständlichen sprachlichen Ausdruck haben, im Nachhinein willkürlich mit logischen Partikeln ausdrückt und so eine dem üblichen Sprachgebrauch ganz fremde Verwendung dieser Partikeln einführt, wird auch dadurch vertuscht, dass umgangssprachlich korrekte Oder- oder Wenn-Sätze (bedingungslogische Gesetze oder problematische Enthymeme) unzulässigerweise als Beispiele für die Gedankengefüge **A** und **C** ausgegeben werden. Diese falschen Verbeispielungen beruhen darauf, dass die eigenen klaren Festsetzungen mit vagen logischen Intuitionen konfundiert werden; würden an diese Beispielsätze die eindeutigen und spezifischen Kriterien der Gedankengefüge (insbesondere Wahrheitsfunktionalität und Zusammenhanglosigkeit) angelegt, würde schnell offenbar, dass diese Verbeispielungen unstatthaft sind.

Zum einen werden echte bedingungslogische Gesetzesaussagen als Gedankengefüge vorgestellt. So gibt etwa **A.MENNE** das bedingungslogische $\mathbb{A}$-Gesetz „Autos haben Trommelbremsen oder sie haben Scheibenbremsen“ als Gedankengefüge **A** aus[8], **HILBERT/ACKERMANN** verbeispielen das Gedankengefüge **A** durch das $\mathbb{A}$-Gesetz „Ein Kandidat der Mathematik und Physik muss in Mathematik besonders gründlich Bescheid wissen, oder er muss in Physik besonders gründlich Bescheid wissen“[9]. Für **KLEINKNECHT/WÜST** sind die Implikationsgesetze „Wenn es brennt, dann kommt die Feuerwehr“ und „Wenn die Straße nass ist, dann besteht für Autos erhöhte Schleudergefahr“ Beispiele für das Gedankengefüge **C**[10]. Keiner dieser Wenn-Sätze ist ein korrektes Beispiel des Gedankengefüges **C**; sie drücken weder eine Beziehung von Sätzen, deren definitiver Wahrheitswert als bekannt vorausgesetzt werden könnte, aus (die Beispiele sind also keine „Wahrheitsfunktionen“), noch gilt das Prinzip der Beziehungslosigkeit; von zwei Sachverhalten bestimmter Art, die jeweils auf dasselbe Bezugsetzung bezogen sind, wird in diesen Beispielsätzen vielmehr gesagt, dass sie im Verhältnis der verträglichen Alternativen $\mathbb{A}$, bzw. der Implikation $\mathbb{C}$ stehen.

Auch problematische Konditionale werden als Beispiele für das Gedankengefüge **C** ausgegeben. **FREGE** meint, das problematische Konditional „Wenn $13^{13}>23^{11}$, so ist $13^{13}+1 > 23^{11}+1$“ sei das Gedankengefüge „$(13^{13}>23^{11}) \Rightarrow (13^{13}+1 > 23^{11}+1)$“; er stellt zurecht fest, dass man, um die Wahrheit dieses Konditional zu erkennen, die Wahrheitswerte der Teilsätze nicht wissen muss (Briefe 104); allerdings übersieht er, dass wir es dann nicht mit einer „Wahrheitsfunktion“ zu tun haben, deren Wahrheit, gemäß **FREGE**s eigener Festsetzung, *alleine* von der vorausgesetzten Wahrheit und Falschheit der prädizierten Aussagen abhängen darf; die Richtigkeit des Konditionals hängt, anders als jene von **C**, nicht von vorgegebenen Wahrheitswerten ab, sondern erstens von der Gültigkeit des implizit zu Grunde gelegten Gesetzes „Wenn eine erste Zahl größer als eine zweite ist, dann ist der unmittelbare Nachfolger der ersten Zahl größer als der unmittelbare Nachfolger der zweiten Zahl“ *und* der Voraussetzung, dass der Sprecher den Wahrheitswert von

„$13^{13}>23^{11}$“ nicht kennt. Wenn sich der Sprecher jedoch kundig gemacht hat, und die Falschheit des Vordersatzes errechnet hat, kann er nur sagen „Wenn $13^{13}>23^{11}$ richtig wäre, dann wäre auch $13^{13}+1 > 23^{11}+1$ richtig“. Das von **FREGE** angeführte Konditional ist weder „wahrheitsfunktional“, noch besteht Zusammenhanglosigkeit[11]. Falsche Beispiele des Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ sollen diesem einen Gehalt und eine logische Bedeutsamkeit vorspiegeln, die $\mathfrak{C}$ gar nicht besitzt.

J.A.FARIS[12] möchte an einem Beispiel zeigen, dass es keineswegs abwegig ist, wenn eine „Wahrheitsfunktion“ durch das *Wenn* zum Ausdruck gebracht wird – die von ihm dargelegte „Wahrheitsfunktion“ entpuppt sich jedoch als nicht-„wahrheitsfunktionaler“ bedingungslogischer Zusammenhang. Er geht aus von den beiden Sätzen $\mathfrak{S}_1$: „Robinson ist über 21 Jahre alt“ und $\mathfrak{S}_2$: „Robinson ist graduiert“. Um zu erhärten, dass der Ausdruck eines Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ als Wenn-Satz akzeptabel ist, bezieht **FARIS** die in den Sätzen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ angesprochenen Einzelsachverhalte auf den folgenden bedingungslogischen Zusammenhang: wenn jemand einen bestimmten Posten erhält, muss er graduiert sein, falls er über 21 Jahre alt ist. Zwischen den Sachverhaltsklassen $\mathfrak{p}$: jemand erhält den Posten, $\mathfrak{t}$: er ist über 21 Jahre alt, und $\mathfrak{g}$: er ist graduiert, besteht also der bedingungslogische Zusammenhang [$\mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{g}$ $\mathbb{C}\mathbb{V}$], wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass es für den, der den Posten erhält, in dem Falle, dass er nicht über 21 Jahre alt ist, keine Rolle spielt, ob er graduiert ist oder nicht. Unter der Bedingung, dass Robinson den Posten erhält, könnten wir den Satz „Wenn Robinson über 21 Jahre alt ist, ist er graduiert“ behaupten; dieser Wenn-Satz sei, so **FARIS**, genau dann richtig, wenn entweder $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ beide wahr seien, oder wenn $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ beide falsch seien, oder wenn $\mathfrak{S}_1$ falsch, $\mathfrak{S}_2$ wahr sei – aus diesem Grunde stelle dieser Wenn-Satz ein „wahrheitsfunktionales“ Gedankengefüge $\mathfrak{C}$ dar; wie dieses Beispiel belege, sei es „natural and not just perverse to use *if* in a purely truth-functional sense.“[13]

Da eine „Wahrheitsfunktion“ den eigenen Bestimmungen der Logistiker entsprechend eine Behauptung über Aussagen ist, deren Wahrheit *ausschließlich* von der vorgegebenen Wahrheit dieser Aussagen abhängt, ist der anstehende Wenn-Satz eben keine „Wahrheitsfunktion“; denn seine Wahrheit setzt erstens die Geltung des Zusammenhangs [$\mathfrak{p}, \mathfrak{t}, \mathfrak{g}$ $\mathbb{C}\mathbb{V}$] voraus, zweitens die Tatsache, dass Robinson den Posten erhält, schließlich drittens, dass der Sprecher *gerade nicht* die Wahrheitswerte von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ kennt. Was **FARIS** als Gedankengefüge ausgibt, ist das bedingte problematische Konditional „Da Robinson den Posten bekommt, ist er graduiert, wenn er über 21 Jahre alt ist (sein sollte)“[14] – und dieser enthymematische Schluss kann natürlich korrekt mit Hilfe des Wenn_2 ausgedrückt werden. Wenn tatsächlich nur die vorgegebenen Wahrheitswerte von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ berücksichtigt würden, dann könnten wir ihnen, je nachdem, ob die Sätze jeweils wahr oder falsch sind, ein tautologisches und mehrere informationsverschleiernde Gedankengefüge zusprechen; wären etwa beide Sätze falsch, dann könnten wir die Wahrheitsfunktion $\mathfrak{C}$ „es ist falsch, dass Robinson über 21 Jahre alt und nicht graduiert ist“ formulieren – der Ausdruck „Wenn Robinson über 21 Jahre alt ist, ist er gradiert“ wäre in diesem Falle in der Tat „unnatürlich und abartig“. Wenn wir von zwei Sätzen wissen, dass (jedenfalls) nicht der erste wahr und der zweite falsch ist, so liegt keineswegs immer eine „Wahrheitsfunktion“ $\mathfrak{C}$ vor: denn gilt A⇨B, wissen wir, dass auf jedenfalls der Fall ausgeschlossen ist, dass A wahr und B falsch ist; dieses Wissen ist aber nicht „wahrheitsfunktional“, sondern ist abhängig von der Geltung eines Gesetzes $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$, sowie davon, dass der Sprecher die Wahrheitswerte der Aussagen A und B nicht kennt. Gilt hingegen $A \Rightarrow B$ als „Wahrheitsfunktion“, dann müssen wir entweder wissen, dass A und B beide wahr sind, oder dass B falsch ist: in beiden Fällen ist der Ausdruck als Wenn_2-Satz unzulässig. Wenn also sowohl bei A⇨B wie bei $A \Rightarrow B$ feststeht, dass jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist, so ist diese Wahrheitswertkombination doch aus völlig verschiedenen Gründen ausgeschlossen[15]. Alle Versuche, Gedankengefüge durch nicht-„wahrheitsfunktionale“ enthymematische Schlüsse oder durch bedingungslogische Zusammenhänge zu erläutern, sind unrechtmäßig und verschleiern den fundamentalen Unterschied zwischen diesen logischen Formen und den Gedankengefügen[16].

2.1.4. Der „wahrheitsfunktionale“ Charakter des *Und* wird auf die logischen Partikeln übertragen

Um die Bedeutung der Gedankengefüge zu definieren, darzulegen und zu verstehen, und um die Wahrheit der Ausdrücke zu entscheiden, die Bezeichnungen von Gedankengefügen enthalten, genügt es, mit der ganz unproblematischen Bedeutung der umgangssprachlichen Partikeln *Und* und *Nicht* vertraut zu sein. Nur von diesen beiden Partikeln besitzt **FREGE** ein sachgerechtes Verständnis und nur von ihnen macht er bei seiner Konstruktion des SFG Gebrauch; nur diese Partikeln haben tatsächlich einen „wahrheitsfunktionalen“ Charakter: ein Satz $\neg A$, der einen Satz A bestreitet, hat den entgegengesetzten Wahrheitswert dieses Satzes A; ein Satz der aus der Und - Verbindung zweier Sätze besteht, ist genau dann wahr, wenn beide Sätze wahr sind; in beiden Fällen muss der Wahrheitswert der vorgegebenen Sätze schon bekannt sein; außerdem sind zwei durch „und" verbundene Sätze auch dann sinnvoll, wenn zwischen ihnen kein logisch-inhaltlicher Zusammenhang besteht. Nur die Partikel *Und* weist als Bindwort zwischen Aussagen die für Gedankengefüge konstitutiven Eigenschaften der Wahrheitswertdefinitheit und der „Wahrheitsfunktionalität" auf; und nur dieses *Und* kann mit der Beziehungslosigkeit der betreffenden Aussagen verbunden sein. Diese Eigenart des *Und* wird in der Logistik unzulässigerweise auf andere Partikeln übertragen. Diese illegitime Übertragung verschleiert wie die falsche Verbeispielung der Gedankengefüge die Nachträglichkeit und Illegitimität der logischen Deutung der Gedankengefüge. „The conjunction ‚and' typifies the type of statement-compounding device… Such connectives are said to be truth-functional in that the truth or falsity of the compound statements using them can be determined entirely on the basis of the truth or falsity of the constituent statements."[17] Nachdem **Salmon** die „Wahrheitsfunktionalität" von „A und B" dargelegt hat, behauptet er ohne Begründung, „andere Ausdrücke, die Aussagen mit einander verknüpfen, wie ‚oder', ‚wenn…, dann…' und ‚genau dann, wenn…', können in ähnlicher Weise analysiert werden."[18] **Waismann** konstatiert richtig, dass in den Sätzen *Es ist warm geworden* und *die Sonne scheint* „die Wahrheit des Gesamtsatzes nur … von der Wahrheit der Teilsätze" abhängt, und fährt fort, dass auch die Ausdrücke „p und q", „p oder q", „wenn p, so q" „nahe liegende Beispiele" für derartige „Wahrheitsfunktionen" seien, ohne dass er diese Behauptung belegt[19]. Die Übertragung der „Wahrheitsfunktionalität" des *Und* und *Nicht* auf -das *Wenn-dann*, das *Oder* usw. ist falsch und unzulässig; alle *logischen* Partikel, durch welche **Frege** und seine Anhänger unzulässigerweise die *informationsverschleiernden* Gedankengefüge ausdrücken, sind, *sofern sie sich auf Aussagen beziehen,* problematische Enthymeme, die die Kenntnis der Wahrheitswerte der Aussagen-Relata gerade ausschließen und nicht „wahrheitsfunktional" sind.

2.1.5. Die bedingungslogischen Beziehungen zwischen den Gedankengefüge werden auch als Gedankengefüge missdeutet

Weil – ungeachtet ihrer Gehalt- und Nutzlosigkeit – die Gedankengefüge wohlbestimmte Prädikate sind und für jedes Gedankengefüge aufgrund der primären Festsetzungen exakt feststeht, unter welchen Bedingungen ein Gedankengefüge vorgegebenen wahrheitswertdefiniten Aussagen zukommt und nicht zukommt, stehen auch die bedingungslogischen Verhältnisse zwischen beliebigen Gedankengefüge eindeutig fest; wissen wir also, dass zwei Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zukommt bzw. nicht zukommt, dann wissen wir auch für jedes andere zweistellige Gedankengefüge, ob notwendig oder möglich ist, dass es den betreffenden Aussage zukommt bzw. nicht zukommt. Das fehlende Bewusstsein der Nachträglichkeit und Unzulässigkeit der logischen Deutung seiner Gedankengefüge verleitet **Frege** nun dazu, die bedingungslogischen Verhältnisse – die ja mittels der umgangssprachlichen Ausdrücke für logische Zusammenhänge dargelegt werden – zwischen den Gedankengefüge-Schemata völlig bedenkenlos selber als Gedankengefüge anzusehen.

Die *logischen* Verhältnisse zwischen den Gedankengefüge(prädikate)n nenne ich **Gesetze des SFG**. Diese lassen sich, anders als die Gedankengefüge, ohne Widersinn und Paradoxität mit Hilfe umgangssprachlicher logischer Partikeln, wie auch mit Hilfe der von mir vorgeschlagenen Bezeichnungen bedingungslogischer Beziehungen zum Ausdruck bringen.

Es gelten etwa folgende Gesetze des SFG:

> Das zwischen den Gedankengefügen **K** und **C** bestehende Gesetzesverhältnis lässt sich umgangssprachlich formulieren: „*Wenn* zwei Aussagen wahr sind, *dann* trifft es nicht zu, dass die erste der Aussagen wahr und die zweite falsch ist" oder auch „*Wenn* zwei Aussagen A und B das Gefüge **K** zukommt, *dann* kommt ihnen auch das Gefüge **C** zu, aber nicht umgekehrt" (Implikation). Das Gesetz lautet in Symbolik der Bedingungslogik „(A&B) → (A⇒B)".
>
> „*Wenn* eine Aussage A falsch und eine Aussage B wahr ist, *dann* trifft es nicht zu, dass A wahr und B falsch ist" (Implikation) – in Symbolen „(A ⫤ B) → (A⇒B)"
>
> „*Wenn* zwei Aussagen A und B falsch sind, *dann* trifft es nicht zu, dass A wahr und B falsch ist" (Implikation) – in Symbolen (A⇓B) → (A⇒B)

Diese drei SFG-Implikationsgesetze bestimmen alle miteinander unverträglichen hinreichenden Bedingungen für das Vorliegen des Gefüges A⇒B; auch dieser vierstellige logische Zusammenhang zwischen den Gedankengefügen **C**, **K**, **M** und **X** lässt sich klar und eindeutig mit den logischen Ausdrucksmitteln der Umgangssprache darlegen: *Wenn* zwei

Aussagen das Gedankengefüge **C** zukommt, *genau dann* kommt diesen Aussagen *genau eines und nur eines der Gedankengefüge* **K** *oder* **M** *oder* **X** zu – in bedingungslogischen Symbolen: [(A⇒B), (A&B), (A⫤B), (A⇓B) 𝕏𝕁𝕆𝕏].

Andere *Gesetze des SFG* in umgangssprachlicher und symbolischer Darstellung sind:

> „Zwei Aussagen A und B kommen die Gedankengefüge **L** und **E** nicht zugleich zu“ (Verhältnis der Unverträglichkeit); in Symbolen: „(A ⊧ B) ↑ (A ⇔ B)“
>
> „Nur wenn zwei Aussagen das Gedankengefüge **J** zukommt, kommt ihnen auch das Gedankengefüge **M** zu“ (Verhältnis der notwendigen Bedingung); in Symbolen „(A ⋈ B) ← (A ⫤ B)“
>
> „Zwei Aussagen kommt das Gedankengefüge **A** *oder* **D** *oder beide* zu“ (Verhältnis der verträglichen Alternative); in Symbolen: „(A▿B) ∨ (A⇑B)“
>
> „Zwei Aussagen kommt *entweder* das Gedankengefüge **L** *oder* **C** zu“ (Verhältnis der einzigen unverträglichen Alternativen); in Symbolen: (A⊧B) ≻≺ (A⇒B)
>
> „Wenn zwei Aussagen das Gedankengefüge **K** zukommt, dann kommen ihnen auch die Gedankengefüge **E** und **C** zu; wenn zwei Aussagen das Gedankengefüge **K** nicht zukommt, dann kommt ihnen **C** nur zu, wenn ihnen auch **E** zukommt“; in Symbolen „[(A&B),(A⇒B),(A⇔B) 𝕂𝔹]“
>
> „Zwei beliebigen Aussagen kommen von den vier Gedankengefügen **A**, **B**, **C** und **D** genau drei zu“; in Symbolen „[(A▿B),(A⇐B),(A⇒B),(A⇑B) 𝕁𝕂𝕂𝕆]“

Die Gesetze des SFG werden bewiesen, indem unter Bezug auf die Festsetzung der Gedankengefüge jede Vorkommenskombination auf seine Realmöglichkeit hin überprüft wird; es müssen *einerseits* die Wahrheitsbedingungen der Gedankengefüge, *andererseits* die Geltungsbedingungen der logischen Totalformen bekannt sein. Zum Beispiel besteht der Beweis für das Gesetz (6) im Nachweis, dass für die Sachverhaltsklassen (A▿B) und (A⇒B) alle Vorkommenskombinationen außer dem vierten realmöglich sind. Ist von zwei Aussagen etwa die erste wahr, die zweite falsch, kommen den Aussagen zugleich **A** und **D** zu (Vorkommenskombination I ist realmöglich); sind zwei Aussagen A und B wahr, dann kommt den Aussagen wohl **A**, nicht aber **D** zu (Vorkommenskombination II ist realmöglich); sind zwei Aussagen A und B falsch, dann kommt den Aussagen wohl **D**, nicht aber **A** zu (Vorkommenskombination III ist realmöglich); kommt zwei Aussagen A und B das **A** nicht zu, sind beide Aussagen falsch; dann aber kommt den Aussagen **D** zu; kommt umgekehrt zwei Aussagen **D** nicht zu, sind beide Aussagen wahr, dann aber kommt den Aussagen **A** zu (Vorkommenskombination IV ist nicht-realmöglich). Die bedingungslogischen Beziehungen die zwischen jeweils zwei zweistelligen Gedankengefügen bestehen, können übersichtlich in einer Relationenmatrix dargestellt werden[20].

Weil **FREGE** die Gedankengefüge für die logischen Verhältnisse hält, hält er umgekehrt auch die logischen Verhältnisse zwischen den Gedankengefügen für Gedankengefüge. Die daraus resultierenden Widersprüche und Konfusionen nimmt er erst gar nicht zur Kenntnis. Werden nämlich die logischen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen begriffsschriftlich selbst als Gedankengefüge dargestellt, erhält man nicht Gesetze des SFG, sondern Gesetze eines ganz anderen Gehalts (ich nenne diese Gesetze **Fregegesetze**); die aus der falschen Auffassung der Gesetze des SFG resultierenden Fregegesetze verwechselt **FREGE** obendrein noch mit den logischen Gesetzen (die ja bedingungslogische Beziehungen zwischen bedingungslogischen Formen sind). Die *nach Form und Inhalt wohlunterschiedenen* Gesetze des SFG, Fregegesetze und logischen Gesetze werden von **FREGE** in einer einzigen unreflektierten synkretistischen Intuition identifiziert. Dabei zeigt sich, dass **FREGE** weder die konstitutiven bedingungslogischen Gesetze seiner eigenen „Aussagenlogik“ (SFG), noch sonst irgendwelche gesetzmäßigen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen bestimmen und begriffsschriftlich darstellen kann.

In den oben dargestellten Gesetzen des SFG (1) bis (9) wird behauptet, dass zwischen bestimmten *Gedankengefügen* bestimmte *logische Relationen* bestehen; die entsprechenden Ausdrücke enthalten deshalb Bezeichnungen für bedingungslogische Relationen *und* Bezeichnungen für fregesche Gedankengefüge. Beim Versuch, die logischen Verhältnisse der Gedankengefüge durch die Zeichen von Gedankengefügen darzustellen, ergeben sich andere Gesetze. Aus (1) erhalten wir z.B.

> (1′) (A&B) ⇒ (A⇒B)

Bei der Bestimmung der Bedeutung dieses Ausdrucks dürfen wir den Zeichen der Gedankengefüge keine andere Bedeutung als jene, die **FREGE** selbst festgesetzt hat, dem Zeichen „X⇒Y“ also die Bedeutung „nicht(X und nicht Y)“. Wir erhalten dann aus (1′) dem Ausdruck

(1″) $\neg[(A\&B)\ \&\ \neg\neg(A\&\neg B)]$;

nach Beseitigung der doppelten Negation erhalten wir

(1‴) $\neg[(A\&B)\ \&\ (A\&\neg B)]$

und nach Weglassen der überflüssigen runden Klammern und der Ersetzung von A&A durch A erhalten wir

(1⁗) $\neg(A\ \&\ B\ \&\ \neg B)$

Der Ausdruck „$(A\&B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ besagt also, dass es für alle Aussagen A und B falsch ist, dass A und B wahr sind, zugleich aber B falsch ist.

Wenn wir in Ausdruck (6) das logische Zeichen „$\vee$“ durch die Gedankengefügebezeichnung „$\triangledown$“ ersetzen, erhalten wir

(6′) $(A \triangledown B)\ \triangledown\ (A \Uparrow B)$.

Nach der von **Frege** festgelegten Bedeutung für die begriffsschriftlichen Zeichen $X \triangledown Y \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg X\&\neg Y)$ – und $X \Uparrow Y \stackrel{\text{def}}{=} \neg(X\&Y)$ ergibt sich

(6″) $\neg[\neg\neg(\neg A\,\&\,\neg B)\ \&\ \neg\neg(A\,\&\,B)]$.

Nach Beseitigung der doppelten Negation erhalten wir

(6‴) $\neg[(\neg A\,\&\,\neg B)\ \&\ (A\,\&\,B)]$.

Nach Beseitigung der überflüssigen runden Klammern ergibt sich

(6⁗) $\neg(\neg A\ \&\ \neg B\ \&\ A\ \&\ B)$.

Der Ausdruck „$(A \triangledown B)\ \triangledown\ (A \Uparrow B)$“ besagt: es ist falsch, dass zwei Aussagen jeweils zugleich wahr und falsch sind.

Der Ausdruck der ***Fregegesetze*** weist wohl Zeichen von Gedankengefügen, nicht aber von bedingungslogischen Total- und Partialrelationen auf. Von diesen Fregegesetzen meint **Frege**, sie seien die Gesamtheit der „Gesetze oder Urteile des reinen Denkens“ (BS 25) – womit er die logischen Gesetze meint; fasst man diese Gesetze jedoch auf der Grundlage der fregeschen Festsetzungen – und alles andere ist unzulässig –, zeigt sich, dass diese Gesetze allesamt nur eine unendliche Variation der einen Aussage sind, dass eine Aussage nicht zugleich wahr und falsch sein kann[21] (und gleichzeitig irgendeine andere Aussage wahr bzw. falsch); die Fregegesetze sind samt und sonders nur unvollständige Formulierungen der Prinzipien der Wahrheitswertdefinitheit und der Disjunktivität und Vollständigkeit der Wahrheitswertprädikate – zwei konstitutiven *Voraussetzungen* des SFG[22]. Dabei gibt es verschiedene, unterschiedlich komplizierte Versionen dieser Variation[23]; der logische Gehalt *aller* Fregegesetze beschränkt sich jedoch stets auf dieselbe platte Binsenweisheit: eine Aussage ist nicht zugleich wahr und falsch[24]. Die Behauptung, diese „aussagenlogischen Wahrheiten“ beruhten „ausschließlich auf der aussagenlogischen Form der Aussage“ ist unhaltbar: diese trivialen Wahrheiten liegen noch jenseits aller Unterscheidungen logischer Formen: denn welche logische Form eine Aussage A auch immer aufweist – ob die Form einer Feststellung (einer singulären Aussage) oder die Form irgendeiner bedingungslogischen Gesetzesaussage (eines Allsatzes, einer Implikationsaussage, usw.) – sie ist entweder wahr oder falsch[25].

Die Beziehungen zwischen den Gedankengefügen sind bedingungslogische Verhältnisse; dass **Frege** diese Zusammenhänge zwischen den Gedankengefügen selbst als Gedankengefüge aufgefasst, belegt, dass er in seiner „Aussagenlogik“ eigentlich *diese* bedingungslogischen Formen, wenn auch erfolglos, zu bestimmen und in ihren gesetzmäßigen Zusammenhängen aufzuzeigen versucht hat. Aus der Verwechslung der Gedankengefüge mit logischen Formen resultiert zum einen eine Verwechslung der **Gesetze des SFG** mit den **Fregegesetzen**; auf der anderen Seite werden die Fregegesetze mit den **logischen Gesetzen** – die ja bedingungslogische Zusammenhänge zwischen bedingungslogischen Formen sind – konfundiert. Ersetzen wir etwa im Ausdruck des Fregegesetzes „$(A \triangledown B)\ \triangledown\ (A \Rightarrow B)$“ die Bezeichnungen der Gedankengefüge **▲** und **◖** durch die Bezeichnungen der bedingungslogischen Verhältnisse $\mathbb{A}$ und $\mathbb{C}$, resultiert der Ausdruck „$(A \vee B) \vee (A \rightarrow B)$“; dieser Ausdruck ist zunächst sinnlos, denn die Teilausdrücke „$A \vee B$“ und „$A \rightarrow B$“ besagen, dass zwischen zwei *Aussagen* die logische Relation $\mathbb{A}$ bzw. $\mathbb{C}$ besteht; logische Formen bestehen jedoch nicht zwischen Aussagen, sondern zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen; nur wenn auch die Beliebig-Element-Zeichen A und B für Aussagen durch Beliebig-Element-Zeichen p und q für Sachverhalts-/Ereignisklassen ersetzt werden, erhalten wir aus dem Ausdruck des Fregegesetzes den Ausdruck eines logischen Gesetzes, nämlich „$(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$“; diese Gesetzesaussage ist freilich falsch, denn zwischen den Formen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{C}$ besteht die Beziehung der Exklusion $\mathbb{D}$. Die nachträgliche Missdeutung der Gedankengefüge als logische Formen führt also unvermeidlich in eine heillose Konfusion von logischen Gesetzen, Gesetzen des SFG und Fregegesetzen; diese Konfusion erwächst letztlich aus der Abneigung der Logistiker, sich bei der Deutung der begriffsschriftlichen Formeln an die eigenen Festlegungen zu halten.

Ich werde später die strukturellen Unterschiede zwischen den logischen Gesetzen und den Fregegesetzen näher untersuchen. Wenn wir in einem Ausdruck eines logischen Gesetzes die Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen durch Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen, und die Zeichen für logische Totalformen durch die Zeichen derjenigen Gedankengefüge, die mit den betreffenden logischen Formen konfundiert werden, ersetzen, ergibt sich in dem einen Fall ein gültiges Fregegesetz[26], in einem anderen Falle nicht[27]. Werden umgekehrt in einem Ausdruck eines Fregegesetzes die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen durch Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen, und die Bezeichnungen der Gedankengefüge durch die Bezeichnungen der logischen Formen, die mit ihnen verwechselt werden, ersetzt, ergibt sich aus einem gültigen Fregegesetz in manchen Fällen ein gültiges logisches Gesetz[28], in anderen Fällen jedoch nicht[29]. Daraus folgt, dass sich logische Gesetze und Fregegesetze keineswegs entsprechen. Im Rahmen des SFG, allein mit den Ausdrucksmitteln der *Begriffsschrift*, lassen sich auch indirekt, etwa aufgrund irgendeines Homomorphismus zwischen Gedankengefügen und logischen Funktoren, keine logischen Gesetze darstellen.

2.1.6. Die Pseudoschlussschemata des SFG

2.1.6.1 Der zirkuläre Charakter der fregeschen „Schlussgesetze“

Nach Meinung der „modernen Logiker“ soll sich die logische Relevanz der fregeschen Gedankengefüge insbesondere darin zeigen, dass auf ihrer Basis alle nur möglichen Schemata des Schließens konstruiert werden können; diese Auffassung lässt sich nur vertreten, wenn der „wahrheitsfunktionale“ Charakter der Gedankengefüge „vergessen“ wird. Alles „richtige Schließen“, dessen Gesetze die Logik darzustellen habe (Log I, 3), vollziehe sich, so **Frege**, gemäß einem Schlussschema, einem „allgemeinen Schlussgesetze“ (GLG III-V, 304), welche die Prämissen und Konklusion(en) verbinde und es unmöglich mache, dass die Prämissen wahr seien und die Konklusion(en) falsch sei(en). **Frege** und seine Anhänger glauben, dass die Gedankengefüge, v.a. das Gedankengefüge **C**, eben diese Struktur aufweisen: unter der Voraussetzung, dass zwei Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zukomme, könne aus der Wahrheit bzw. Falschheit der einen Aussage die Wahrheit bzw. Falschheit der anderen Aussage *gefolgert* werden. So bestimmt **Frege** auf der Basis von **D** den „Schluss“ „Nicht [A und B] ist wahr; A ist wahr; also ist B falsch.“ (Gef 77 [41]); dieses Schema wird von **Frege** offensichtlich mit dem Schlussschema 𝔻/α verwechselt; ich bezeichne **Frege**s Schema mit dem Ausdruck „**D**/α“[30]. Für das Gedankengefüge **A** ergebe sich der „Schluss“ „(A oder B)[31] ist wahr; A ist falsch; also ist B wahr.“ (Gef.80 [43] – es ist das mit 𝔸/β verwechselte Schema **A**/β; für das Gedankengefüge **C** das „Schlussschema“ „[Wenn B, so A][32] ist wahr; B ist wahr; also ist A wahr.“ (Gef 85 [47]); dieses mit dem Schlussschema ℂ/α identifizierte Schema schreibe ich als **C**/α. Insbesondere diesem Schema **C**/α soll unmittelbar der wesentliche Charakterzug der logischen Folgebeziehung eignen, nämlich „dass man aus wahren Voraussetzungen stets wahre Folgerungen erhält… Wenn A ⇒ B wahr ist und A wahr ist, so ist B aufgrund der Definition von ⇒ wahr.“[33]

Vor allem **B. Russell** hat den Kritikern der logischen Deutung von **C** den angeblichen Folgerungscharakter des Gedankengefüges **C** (A⇒B ≡ ¬A⊽B) entgegengehalten. „Wenn A und ¬A ⊽ B beide wahr sind, dann ist B wahr. In diesem Sinn wird die Proposition ¬A⊽B als die Behauptung eingeführt, dass A das B impliziert… Das für ‚A impliziert B‘, d.h. für ‚¬A ⊽ B‘ verwendete Symbol ist ‚A ⇒ B‘. Dieses Symbol kann auch gelesen werden: ‚wenn A, so B‘.“[34] „Das Schema eines Schlusses besteht aus einem Satz A und einem Satz ‚aus A folgt B‘, woraus wir B schließen. Wenn wir es nun mit den Prinzipien der Deduktion zu tun haben, so muss unser Apparat von Grundsätzen sowohl das A wie das ‚aus A folgt B‘ enthalten.“[35] Dieses „aus A folgt B“ werde exakt durch „A ⇒ B“ ausgedrückt, denn wenn A ⇒ B und A wahr seien, dann sei auch B wahr. „Damit es *gültig* ist, B aus A zu schließen, ist nur notwendig, dass A und der Satz ‚Nicht-A oder B‘ wahr ist. Wenn dieser Fall zutrifft, so ist es klar, dass B wahr sein muss.“[36] Es stehe somit fest, „dass wir keine Form des Folgens als Grundbegriff einzuführen brauchen, die nicht durch eine Wahrheitsfunktion ausdrückbar ist.“[37]

Wir haben die Behauptung zu prüfen, dass aus A⇒B und A die Aussage B *folgt*, bzw. dass A⇒B und A die Aussage B *implizieren*; dabei dürfen wir nicht außer Acht lassen, dass A⇒B eine „*Wahrheitsfunktion*“ ist, und deshalb die Wahrheit der „Prämisse“ A⇒B *nur* vom Wahrheitswert von A und/oder von B abhängen darf. Nun gilt für einen korrekten Schluss von den Prämissen P_1 und P_2 auf die Konklusion K nicht nur, dass es unmöglich sein muss, dass die Prämissen P_1 und P_2 wahr und die Konklusion K falsch ist, sondern ebenso, dass man zur Begründung der Wahrheit der Prämissen nicht schon die Wahrheit der Konklusion *voraussetzen* darf. Ein „Schluss", der zur Begründung der Prämissen bereits die Wahrheit der Konklusion voraussetzt, ist ein zirkulärer *Pseudoschluss*, ein in der traditionellen Logik „*Petitio principii*" genannter *Trugschluss*, der schon voraussetzt, was angeblich erst erschlossen wird. ***Alle auf der Grundlage von Gedankengefügen erstellten Schlussschemata sind ausnahmslos Schemata solcher Trugschlüsse***. Dies ergibt sich aus dem Charakter der Gedankengefüge als „Wahrheitsfunktionen".

Im angeblichen Schlussschema **C**/α fungiert $A \Rightarrow B$ neben A als „Prämisse"; die „Wahrheitsfunktion" $A \Rightarrow B$ kann jedoch nur in zwei Fällen als wahr behauptet werden: man muss entweder wissen, dass A falsch ist (B kann dann wahr oder falsch sein), oder dass A und B beide wahr sind. Ist $A \Rightarrow B$ aufgrund der Falschheit von A wahr, dann wäre es ein *Widerspruch*, wenn zugleich die Wahrheit von A als Prämisse behauptet würde; wird $A \Rightarrow B$ aufgrund der Wahrheit von A und der Wahrheit von B behauptet, dann ist der Schluss von $A \Rightarrow B$ und A auf B zirkulär; unter der Voraussetzung der Wahrheit von A kann ich $A \Rightarrow B$ *als Wahrheitsfunktion* nämlich *nur dann* als wahr voraussetzen, wenn ich die Wahrheit von B bereits kenne. Dass „A" und „$A \Rightarrow B$" beide wahr sind, bedeutet nichts anderes als das „A&B" wahr ist; aus der Wahrheit von „A&B" jedoch die Wahrheit von „B" zu „erschließen", ist zirkulär. Die richtige Feststellung **V.WRIGHT**s, dass eine „materiale Implikation" nur dann zum Schließen verwendet werden kann, „when the composite has been reached irrespectively of any *assertion* of the truth of falsity of its components"[38], bedeutet, dass die „materiale Implikation" **C** (als „Wahrheitsfunktion") unter keinen Umständen zur Grundlage eines Schlussschemas genommen werden kann.

Durchweg alle von **FREGE** behaupteten „Schlussgesetze" sind solche Trugschlussschemata. Die Wahrheit der „Prämissen" kann in *allen* Fällen nur dann behauptet und begründet werden, wenn die Wahrheit der „Konklusion" schon als bekannt vorausgesetzt ist:

> Im Schema **D**/α wird $\neg(A \,\&\, B)$ unter der Voraussetzung A behauptet; dies ist nur dann möglich, wenn ich bereits voraussetze, dass B falsch ist; $(A \Uparrow B)$ & A ist gleichbedeutend, mit $(A \& \neg B)$; wir haben in Wahrheit also den Trugschluss „Wenn A wahr und B falsch ist, dann ist B falsch".
>
> Im Schema **A**/β wird $\neg(\neg A \,\&\, \neg B)$ unter der Voraussetzung $\neg A$ behauptet; dies ist nur möglich, wenn die Wahrheit von B schon vorausgesetzt ist – „$(A \overline{\triangledown} B)$ & $\neg A$" ist gleichbedeutend mit „$\neg A \& B$", und wir haben in Wirklichkeit den Trugschluss „Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist B wahr".
>
> Im Schema **C**/α wird $A \Rightarrow B$ unter der Voraussetzung A behauptet; dies ist nur möglich, wenn ich schon weiß, dass B wahr ist; „$(A \Rightarrow B) \& A$" ist gleichbedeutend mit „A&B", wir haben in Wirklichkeit das Trugschlussschema: Wenn A und B wahr sind, dann ist B wahr."

Wenn **FREGE** diese Trugschlussschemata als „Schlussgesetze" missversteht und ihren zirkulären Charakter übersieht, „vergisst" er wieder einmal, dass er die Gedankengefüge als „Wahrheitsfunktionen" definiert hat: die Wahrheit eines Gedankengefüges $A \oplus B$ kann sich immer nur aus den vorgegebenen Wahrheitswerten der Aussagen A und B ergeben. Niemals kann der Wahrheitswert von A oder B oder beiden aus einem Gedankengefüge $A \oplus B$ erschlossen werden, denn immer, wenn dies so scheint, ist der angeblich erschlossene Wahrheitswert einer oder beider Aussagen (die „Konklusion") schon unabdingbare Voraussetzung, um das Gedankengefüge (eine der „Prämissen") zu behaupten[39].

B.RUSSELL und andere haben – im Gegensatz zu **FREGE** selbst – indes durchaus erkannt, dass, wenn $A \Rightarrow B$ mit A zu den Prämissen eines Schlusses gemacht wird, das Gedankengefüge weder durch die Falschheit von A noch die Wahrheit von B begründet sein dürfte. „Ein Schluss wird nur dann wirklich vorliegen, wenn der Satz ‚Nicht-A oder B' auf andere Weise bekannt ist als vermöge der Kenntnis von Nicht-A oder B. Sobald A falsch ist, ist ‚Nicht-A oder B' wahr, aber unbrauchbar für einen Schluss, der die Wahrheit von A verlangt. Wenn man schon weiß, dass B wahr ist, so weiß man natürlich auch, dass ‚Nicht-A oder B', was aber wieder für einen Schluss nutzlos ist, da B schon bekannt ist und nicht erst erschlossen zu werden braucht. In der Tat, es entsteht nur dann ein Schluss, wenn ‚Nicht-A oder B' erkannt werden kann, ohne dass man schon weiß, welche beiden Alternativen die Disjunktion wahr macht."[40] In gleichem Sinn schreibt **G.PATZIG**, man dürfe nicht außer Acht lassen, dass die Schlussregel „Wenn $A \Rightarrow B$ und A, dann B" „in den Fällen, in denen die Wahrheit von ›$A \Rightarrow B$‹ wegen der Falschheit von ›A‹ bekannt ist, nicht angewendet werden *kann*, weil dann die 1. Prämisse, eben ›A‹, nicht gilt. Ebenso wenig ist es sinnvoll, die Regel dann anzuwenden, wenn die Wahrheit von ›$A \Rightarrow B$‹ wegen der Wahrheit von ›B‹ feststeht. Denn wenn ich schon weiß, dass *B* gilt, brauche ich es nicht aus ›A‹ und ›$A \Rightarrow B$‹ umständlich zu erschließen[41]. Die Anwendung der Regel ‚Wenn ›A‹ gilt und auch ›$A \Rightarrow B$‹ gilt, dann gilt auch ›B‹' ist also nur dann möglich, wenn die Wahrheit von ‚$A \Rightarrow B$‹ nicht dadurch bekannt ist, dass die Wahrheit von B oder die Falschheit von A bereits feststeht."[42]

Einerseits wäre also $\mathbb{C}/\alpha$ nur dann ein echtes Schlussschema, wenn die Wahrheit von $A \Rightarrow B$ und A nicht schon die Wahrheit von B voraussetzte, andererseits aber ist es völlig unmöglich, die Wahrheit von $A \Rightarrow B$ *als „Wahrheitsfunktion*“ zu behaupten, ohne dass schon die Wahrheit von B oder die Falschheit von A feststeht. **Russell** versucht, sich dem Dilemma durch den Vorschlag zu entziehen, dass nur dann, wenn die Wahrheit der Prämisse $A \Rightarrow B$ aus „rein logischen“ oder „formalen“ Gründen gelte, dem Schema $\mathbb{C}/\alpha$ der behauptete Schlusscharakter zugebilligt werden solle: zwischen A und B müsse eine bestimmte „formale Beziehung“ bestehen, und diese werde „nur gebraucht, um zu wissen, dass entweder die Prämisse (the premises) falsch oder der Schluss (the conclusion) wahr ist“ – dabei müsse man nicht schon wissen, welche der beiden Möglichkeiten tatsächlich gegeben ist. Eine solche „formale Beziehung“ bestehe z.B. zwischen $(C \Rightarrow \neg D)$ und $(D \Rightarrow \neg C)$; man könne behaupten, dass das eine das andere impliziere, ohne schon zu wissen, ob $(C \Rightarrow \neg D)$ bzw. $(D \Rightarrow \neg C)$ wahr oder falsch sei[43].

Dieser Vorschlag ist nur ein scheinbarer Ausweg, denn hier haben wir es gar nicht mehr mit der „Wahrheitsfunktion“ $\mathbb{C}$ zu tun; die „formale Beziehung“, die **Russell** *jetzt* ins Spiel bringt, ist nicht mehr das Gedankengefüge $\mathbb{C}$, sondern die *logische* Beziehung des Entailment, nach der, als Alternative zu $\mathbb{C}$, die Relevanzlogistiker so angestrengt und mit so mäßigem Erfolg suchen[44]. **Russell** nimmt weder zur Kenntnis, dass die Relata dieser „formalen Relation“ nicht mehr wahrheitswertdefinite Aussagen, sondern allgemeine Gedankengefügeprädikatoren sind – schon deshalb also keine „Wahrheitsfunktion“ vorliegt; noch registriert er, dass das Vorliegen dieser Entailmentrelation nicht mit den Mitteln des SFG entschieden werden kann. Um also nachzuweisen, dass die „*Wahrheitsfunktion*“ $\mathbb{C}$ eine adäquate Grundlage für das Schließen ist, schlägt er vor, $\mathbb{C}$ durch eine Beziehung zu ersetzen, die keine „Wahrheitsfunktion“ ist!

Nach **Russel** und anderen[45] besteht diese Entailmentbeziehung zwischen zwei Gedankengefügeprädikatoren Γ_1 und Γ_2 – genau dann, wenn $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ ein Fregegesetz (eine „Tautologie“) ist, was sich ja im Rahmen des SFG nachweisen ließe; wie wir sehen werden, besteht jedoch nicht in allen Fällen eines Fregegesetzes der Form $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ zwischen Γ_1 und Γ_2 eine Entailmentbeziehung[46]. Der Trugschlusscharakter des Schemas $\mathbb{C}/\alpha$ kennzeichnet außerdem auch das Schema „Wenn $(\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2)$ eine ‚Tautologie‘ ist und wenn Γ_1 eine ‚Tautologie‘ ist, dann ist Γ_2 eine ‚Tautologie‘“; denn auch unter der Voraussetzung, dass Γ_1 eine „Tautologie“ ist, kann ich *nur dann* behaupten, dass $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ eine „Tautologie“ ist, wenn ich bereits weiß und voraussetze, dass auch Γ_2 eine „Tautologie“ ist.

Wie **Russell** richtig erkennt, können wir wissen, dass $(C \Rightarrow \neg D)$ das $(D \Rightarrow \neg C)$ „impliziert“, ohne dass wir wie im Falle von Gedankengefügen Wahrheitswerte schon voraussetzen könnten oder müssten[47]. Deshalb darf das logische Verhältnis zwischen $(C \Rightarrow \neg D)$ und $(D \Rightarrow \neg C)$ nicht als eine „wahrheitsfunktional entscheidbare Wahrheitsfunktion“ aufgefasst werden; das logische Verhältnis lässt sich dann ermitteln, wenn systematisch überprüft wird, ob die Bedingungen für die Geltung der beiden Gedankengefüge $(C \Rightarrow \neg D)$ und $(D \Rightarrow \neg C)$ 1) zugleich vorliegen, und 2) zugleich nicht vorliegen können, und ob 3) und 4) die Bedingungen für die Geltung des einen Sachverhalts vorliegen können, ohne dass die Bedingungen für das Vorliegen des anderen Sachverhalt erfüllt sind: diese Prüfung ergibt, dass die Bedingungen für $(C \Rightarrow \neg D)$ genau dann vorliegen, wenn auch die Bedingungen für $(D \Rightarrow \neg C)$ vorliegen, es gilt das $\mathbb{E}$-Gesetz des SFG $(C \Rightarrow \neg D) \leftrightarrow (D \Rightarrow \neg C)$; auf der Basis dieses bedingungslogischen Gesetzes kann dann natürlich ein echter, nicht-zirkulärer Schluss nach dem *logischen* Schlussschema $\mathbb{E}/\alpha$ vollzogen werden[48].

Russells Plädoyer, dass man auf der Grundlage von Gedankengefügen, insbesondere von $\mathbb{C}$, Schlussgesetze (Schlussregeln, Schlussschemata) erstellen könne, ist in sich widersprüchlich: einerseits erkennt er recht klar, dass die von **Frege** behaupteten Schlussschemata wegen ihrer Zirkularität ungültig sind. Um die von **Frege** behaupteten „Schlussgesetze“ dennoch zu retten, meint er, man könne das „wahrheitsfunktionale“ Gedankengefüge durch die „Tautologie“ $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ ersetzen; gelte $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$, könne behauptet werden, dass das Γ_1 das Γ_2 impliziert, ohne dass man, wie bei der Wahrheitsfunktion schon wissen müsse, ob Γ_1 wahr oder Γ_2 falsch sei. Der „Tautologie“ $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ kann zwar unter Umständen, eine echte Implikation oder eine echte Äquivalenz zwischen Γ_1 und Γ_2 entsprechen, dann aber ist die zugrunde gelegte Beziehung zwischen Γ_1 und Γ_2 eben *kein* Gedankengefüge $\mathbb{C}$ mehr. Es bleibt dabei: alle von **Frege** behaupteten „Schlussgesetze“ sind Schemata von Trugschlüssen; im Rahmen des SFG ist es **Frege** nicht gelungen, auch nur ein einziges Schlussgesetz darzulegen.

2.1.6.2. Priors falsche Kritik an den angeblichen Schlussschemata des SFG

ARTHUR N. PRIOR[49] stellt die „analytische Validität“ in Frage, die „Schlüssen“ wie „A ist wahr und B ist wahr, also ist A wahr“ („Grass is green and the sky is blue, therefore grass is green“) in der „modernen Logik“ zugesprochen wird; seine Einwände gegen die logistischen „Schlussschemata“ treffen aber nicht den Kern des Problems. Anstatt ihre Zirkularität aufzuzeigen, behauptet **PRIOR** zu Unrecht, mittels dieser „Schlussschemata“ ließe sich jede beliebige Aussage aus jeder beliebigen anderen Aussage herleiten. Er glaubt ein Gedankengefüge („connective“) „A tonk B“ durch die beiden folgenden „Schlussregeln“ definieren zu können:

(1) A ist wahr, also ist (A tonk B) wahr
(2) (A tonk B) ist wahr, also ist B wahr.

Es gelte dann z.B.: „›2 + 2 = 4‹ ist wahr, also ist „›2 + 2 = 4‹ tonk ›2 + 2 = 5‹“ ist wahr; „›2 + 2 = 4‹ tonk ›2 + 2 = 5‹“ ist wahr, also ist ›2 + 2 = 5‹ wahr; demnach (aufgrund der Transitivität der Folgerungsbeziehung): „›2 + 2 = 4‹ ist wahr, also ist ›2 + 2 = 5‹ wahr.

Dieses „tonk“-Gedankengefüge der ersten priorschen Regel ist nun keineswegs eine priorsche Schöpfung, sondern im SFG bereits eindeutig definiert; das zweistellige Gedankengefüge, das durch die Wahrheit von A bereits festliegt, ist das Gedankengefüge ▌: A ↙ B; auch die Wahrheit all jener Gedankengefüge, die von A↙B impliziert werden (▼, ▲, ▌▌), sind bei wahrem A schon wahr; in keinem diese vier Fälle kann man jedoch aus der Wahrheit des Gedankengefüges auf die Wahrheit der Aussage B schließen[50]. Es gibt kein einziges Gedankengefüge, das es in der Art des priorschen „tonk“ gestatten würde, aus einer beliebigen Aussage eine andere Aussage abzuleiten[51]. Tatsächlich kann man, entgegen **PRIOR**s Meinung, mit den SFG-„Schlussschemata“ nicht alles, sondern gar nichts beweisen. Die Fehlerhaftigkeit von **PRIOR**s Kritik kann nicht zu Gunsten eines logischen Werts der Gedankengefüge in Feld geführt werden.

2.2. Die Diskrepanz zwischen der fregeschen und umgangssprachlichen Verwendung der logischen Partikeln wird zugegeben

2.2.1. Behauptung, dass im Wesentlichen eine Übereinstimmung bestehe zwischen dem normalen und dem fregeschen Gebrauch der logischen Partikeln

Dass **FREGE**s Einfall, die Gedankengefüge mit Hilfe logischer Partikeln wie *Wenn* und *Oder* auszudrücken, auf einen neuartigen, ungewöhnlichen Gebrauch dieser Ausdrücke hinausläuft, ist schon **FREGE** nicht verborgen geblieben; diese von **FREGE** und seinen Parteigängern eher intuitiv gefühlte, als theoretisch begriffene Diskrepanz war nie Veranlassung, ernsthaft die sachliche Richtigkeit der fregeschen Verwendung der logischen Partikeln zu überprüfen; man versicherte meistens die Unerheblichkeit dieser Nichtübereinstimmung, oder lastete sie irgendwelchen nebelhaften, nie näher belegten und beschriebenen „logischen Unvollkommenheiten“ des alltäglichen Sprachgebrauchs an. Weder **FREGE** noch einer seiner Nachfolger konnte bislang überzeugend darlegen, worin genau der gefühlte Unterschied und die versicherte Entsprechung zwischen der umgangssprachlichen und fregeschen Verwendung der logischen Partikeln besteht, worin also die angebliche Präzisierung der umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel durch **FREGE**s *Begriffsschrift* besteht. Die Vorstellungen über diese Unterschiede sind vage: „Man wird vielleicht finden, dass der Sprachgebrauch hierdurch nicht getroffen sei.“ (Gef 83 [45]) „Vielleicht findet man, dass der hier angegebene Sinn des Wortes ‚oder‘ mit dem Sprachgebrauche nicht immer übereinstimmt.“ (Gef 79 [42]) Die Gedankengefüge „treten uns in den natürlichen Sprachen in gewissen Verhüllungen entgegen.“[52] Die Gedankengefüge entsprächen „in etwa den deutschen Worten ‚nicht‘, ‚oder‘, ‚wenn-so‘, ‚und‘ usf.“[53] Die Zeichen „▽“, „⇒“ und „⇔“ „correspond, roughly, to the words ‚or‘, ‚if…then‘, and ‚if, and only if,…then‘ of ordinary language.“[54] Die „Übersetzung“ der „logischen Verknüpfungszeichen“ in die deutsche Sprache sei „weniger genau“ als die Definition durch die „Wahrheitstafeln“, „da die verwendeten Wörter der deutschen Sprache den Verknüpfungszeichen zuweilen nur angenähert entsprechen und ferner in ihrer üblichen Verwendung mehrdeutig sind.“[55] Die Charakterisierung des Unterschieds und der beanspruchten Verbesserung bleibt immer vage („vielleicht“, „nicht immer“, „in etwa“, „gewisses“, „ungefähr“, „grob“, „angenähert“, „some degree of interpenetration of meanings“[56]). **FREGE** selber sucht Zuflucht bei einer fragwürdigen Analogie, wenn er das Verhältnis der „normalen Sprache“ zu seiner Begriffsschrift dem Verhältnis von Auge und Mikroskop gleichstellt (BS XI).

Diese Analogie trägt nicht, denn während die Konstrukteure von Mikroskopen genau über die optischen Beschaffenheiten des Auges und das Zusammenwirken von Gerät und Sinnesorgan Bescheid wissen, schenkt **FREGE** dem tatsächlichen logischen Gehalt der Umgangssprache nicht die mindeste Beachtung; hat **FREGE** einmal die Gedankengefüge auf der Basis willkürlicher Dogmen konstruiert, beurteilt er den umgangssprachlichen Gehalt logischer Beziehungswörter nur noch durch die Zerrbrille der Gedankengefüge.

FREGE und seine Nachfolger geben sich mit der nie näher gerechtfertigten, gefühlsmäßigen Vorstellung zufrieden, die Bedeutung der umgangssprachlichen logischen Beziehungswörter würde doch wenigstens annähernd und ungefähr der Bedeutung der Gedankengefüge entsprechen. Weder die auch für **FREGE** unbestreitbare Diskrepanz (vgl. Gef 79 [42], 83f [45f]; EL 76) – Bildungen wie „Wenn 2 kleiner ist als 3, so ist der Schnee schwarz“[57] tauchen nirgendwo sonst als in den Abhandlungen zur „modernen Logik“ auf – noch die unterstellte Entsprechung von Gedankengefügen und logischen Formen wird näher untersucht und überzeugend nachgewiesen.

2.2.2. Die zirkuläre Rechtfertigung: Freges Gebrauch der logischen Partikeln dient als „Beweis“, dass dies zumindest eine mögliche und „gebräuchliche“ Verwendung ist

Oft wird **FREGE**s neuartiger Gebrauch der logischen Partikeln als Beleg in Anspruch genommen, dass dieser Gebrauch zumindest ein möglicher und tatsächlich vorkommender Gebrauch ist. Dieses Argument bemüht **FREGE** an einer Stelle, wo er seine verfälschende Umdeutung der logischen Partikel „Oder“ wenigstens in Ansätzen zu rechtfertigen versucht. *Zunächst* definiert er das Gedankengefüge ▲ in korrekter Weise, ohne jeden Bezug auf die Bedeutung des umgangssprachlichen Oder, als „nicht [(nicht A) und (nicht B)]“. Dann behauptet er – *unvermittelt* und ohne Begründung – dieses ▲-Gedankengefüge ließe sich „kürzer schreiben“ als „A oder B“. Es könne dann „wahrheitsgemäß behauptet werden: ‚Friedrich der Große siegte bei Roßbach, oder zwei ist größer als drei.‘“ Es ist zwar richtig, dass diese zwei prädizierte Aussagen *nicht beide falsch* sind, den Aussagen also das Gedankengefüge ▲ zukommt; *diese* Richtigkeit rechtfertigt jedoch noch nicht **FREGE**s Verwendung des *Oder* zum Ausdruck des Gedankengefüges. Nur *diese* Verwendung des Oder, nicht die triviale Richtigkeit des Gedankengefüges, ist der Rechtfertigung bedürftig; **FREGE** lenkt jedoch vom wirklichen Problem ab, indem er fortfährt: „Da meint jemand: ‚Sonderbar! Was hat der Sieg bei Roßbach mit dem Unsinn zu tun, dass zwei größer als drei sei?‘ Dass zwei größer als drei sei, ist falsch, aber kein Unsinn. Ob die Falschheit eines Gedankens leicht oder schwer einzusehen ist, macht für die Logik keinen Unterschied.“ **FREGE** unterschiebt hier eine Problemstellung, um die es an dieser Stelle überhaupt nicht geht; die Aussage „$2 > 3$“ ist in der Tat nur falsch und nicht unsinnig (wie es die Aussage „2 ist die Großmutter von 3“ wäre); das Problem ist nicht, ob die Behauptung „$2 > 3$“, sondern ob **FREGE**s Gebrauch des *Oder* sinnvoll und zulässig ist[58]. **FREGE** schreibt weiter: „Man ist gewohnt, bei Sätzen, die mit ‚oder‘ verbunden sind, anzunehmen, dass der Sinn des einen mit dem des anderen etwas zu tun habe, dass zwischen ihnen irgendeine Verwandtschaft bestehe; und in einem gegebenen Fall wird man eine solche vielleicht auch angeben können; aber in einem anderen Falle wird man eine andere haben, so dass es unmöglich sein wird, eine Sinnverwandtschaft anzugeben, die immer mit dem ‚oder‘ verknüpft wäre und zu dem Sinn dieses Wortes gerechnet werden könnte.“ Der übliche nicht-fregesche Gebrauch des Wortes *oder* intendiert tatsächlich *ausnahmslos* die Bezeichnung einer echten Relation, nämlich die Sachlage, dass zwei Ereignisse einzige alternative Möglichkeiten sind. Wenn **FREGE** anführt, ein solcher *echter* Zusammenhang liege beim Gebrauch des Oder *jedenfalls nicht immer* vor, und gehöre *deshalb* auch nicht wesentlich zur Bedeutung dieses Wortes, dann kann er sich *alleine* auf jene Fälle berufen, die erst aufgrund seiner Neuerung auftreten. Aber gerade die Zulässigkeit seiner neuen Verwendung des *Oder* wollte er hier rechtfertigen, **FREGE** beruft sich bei der Begründung seines Sprachgebrauchs auf eben diesen Sprachgebrauch[59].

FREGE schließt seine Argumentation: „Aber warum fügt der Redner den zweiten Satz überhaupt an? Wenn er behaupten will, dass Friedrich der Große bei Roßbach siegte, genügte ja der erste Satz; dass der Redner nicht sagen will, zwei sei größer als drei, ist doch anzunehmen. Wenn der Redner sich mit dem ersten Satz begnügt hätte, hätte er mit weniger Worten mehr gesagt. Wozu also dieser Aufwand an Worten? Auch diese Fragen führen nur auf Nebengedanken. Welche Absichten und Beweggründe der Redner habe, gerade dies und nicht jenes zu sagen, geht uns hier nichts an, sondern nur, was er sagt.“[60] (Gef 79f [42f]) Die Absichten des Redners – er ist niemand anderer als **FREGE** selbst – sind durchaus keine Nebensache, denn dieser Redner will glauben machen, es sei logisch gerechtfertigt, das Gedankengefüge ▲ durch das Wort *Oder* auszudrücken; es geht um die keineswegs schon entschiedene *Haupt*frage, ob die Gedankengefüge als eine präzisierende Fassung der umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel aufgefasst werden dürfen, ob die Gedankengefüge überhaupt logische Verhältnisse sind. **FREGE** spielt hier die entscheidende Frage nach der

Zulässigkeit, ein **A**-Gedankengefüge mit Oder auszudrücken, zu einer logisch irrelevanten rhetorisch-psychologischen Nebensache herunter, eine Verteidigungslinie, die **PAUL GRICE** später umfassend auszubauen versucht hat[61].

An einer anderen Stelle dient **FREGE** die Korrektheit des *nicht* missdeuteten Gedankengefüges **C** als Beleg für die Korrektheit der Missdeutung dieses Gedankengefüges durch seinen Ausdruck durch das umgangssprachliche *Wenn*. Er will das „Widerstrebende" des Ausdrucks „Wenn 2 größer ist als 2, so ist das Quadrat von 2 größer als 2" dadurch ausräumen, dass er sagt: „Aber, dass es falsch ist, dass zugleich das Quadrat von 2 nicht größer ist als 2 und 2 größer ist als 2, ist ein wahrer Gedanke." (EL 80) **FREGE** redet sich ein, dass die unbestreitbare Richtigkeit der zwar unnützen, aber doch mit dem normalen Sprachgebrauch übereinstimmenden **C**-Aussage „Es ist falsch, dass von den Aussagen ‚2+2 = 5' und ‚3<3' die erste wahr und die zweite falsch ist" die Zulässigkeit des Ausdrucks „Wenn 2+2 = 5, dann 3<3" rechtfertige. Wieder lenkt er vom eigentlichen Problem ab: es geht nicht um die Richtigkeit dieser Gedankengefüge-Aussage, sondern darum, ob diese Gedankengefüge-Aussage durch das *Wenn* ausgedrückt werden darf, um das Bestehen einer logischen Beziehung vorzutäuschen.

2.2.3. Nur beim *Und* besteht Übereinstimmung zwischen dem fregeschen und dem üblichen Sprachgebrauch

Mehrere Autoren haben den Umstand bemerkt, dass zwar **FREGE**s Verwendung des *Und* und *Nicht* dem üblichen Sprachgebrauch außerhalb der „modernen Logik" entspricht, nicht aber sein Gebrauch jener logischen Partikeln, mit denen er den informationsverschleiernden Gedankengefügen nachträglich eine logische Missdeutung gibt. In einer eine Vielzahl verschiedener Sprachen berücksichtigenden Untersuchung, „wie die Sprache die logischen Funktoren des Aussagekalküls" – die fregeschen Gedankengefüge – „darstellt und inwieweit ihre Darstellung logisch unzulänglich ist", konnte **KARL DÖHMANN** wenig Übereinstimmung zwischen der Bedeutung der logischen Partikeln in ihrer normalen und ihrer fregeschen Verwendung feststellen[62]. Er befand, dass alle von ihm in der Untersuchung berücksichtigten Sprachen die Affirmation „ist wahr", die Verneinung und jene Gedankengefüge, die in der nicht-informationsverschleiernden Prädikation eines der vier Wahrheitswertprädikate bestehen (**K**, **L**, **M** und **X**), „sprachlich am besten und genauesten" ausdrücken[63]. Die „Wörter für ‚nicht' sind im Allgemeinen eine adäquate Wiedergabe des Funktors {d.h. des Gedankengefüges} von ¬p."[64] „Die Sprachen in ihrem ‚und' eine vergleichsweise gute und genaue Darstellung der logischen Konjunktion besitzen."[65] Es müsse festgestellt werden „dass die sprachlich am besten und genauesten darstellbaren Funktoren diejenigen sind, die nur eine der 4 Kombinationen A&B, A&¬B, ¬A&B und ¬A&¬B behaupten." „Die sprachliche Wiedergabe der Funktoren scheint also mit zunehmender Anzahl der Einsen in der Matrix" – dies bedeutet: mit zunehmendem Grad der Informationsverschleierung – „im Großen und Ganzen schwieriger und schlechter zu werden."[66] **D.H.SANFORD** bemerkt: „The truth-functional treatments of conjunction and negation appear to be quite faithful to the ordinary meanings of ‚and' and ‚not'. Truth-functional disjunction has difficulties in representing ordinary ‚or' parallel to those of the truth-functional conditional in representing ordinary ‚if'."[67] „Of the readings ‚not' (of ‚~'), ‚and' (of ‚&'), ‚or' (of ‚⊽') and ‚if…then…' (of ‚⇒'), **STRAWSON** has remarked … that ‚the first two are the least misleading' and the remainder ‚definitely wrong'."[68]

Ohne die Nachträglichkeit und Fragwürdigkeit des logischen Ausdrucks der Gedankengefüge durch andere Partikeln als „nicht" und „und" auch nur in Erwägung zu ziehen, wird die Nichtübereinstimmung ohne weiteres einem „Ungenügen der Sprache" angelastet; diese „bekannte Unzulänglichkeitsthese" (**K. DÖHMANN**) ist wohl die verbreitetste Reaktion der Logistiker gegenüber den Ungereimtheiten, die aus der nachträglichen logischen Deutung der Gedankengefüge resultieren. **DÖHMANN** kommentiert seine Entdeckung: „Die Sprache erwies sich hinsichtlich der genauen Funktoren-Darstellung durch spezifische einfache Symbole als recht unzulänglich."[69] Dass die Ergebnisse seiner Untersuchung genauso gut (oder viel eher) bedeuten könnten, dass das *Wenn*, das *Oder* und andere logische Partikeln in keiner Sprache Gedankengefüge ausdrücken, kommt **DÖHMANN** nicht einmal in den Sinn. Unumstößliche Tatsache ist jedoch, dass alle Gedankengefüge unschwer und eindeutig umgangssprachlich ausgedrückt werden können, sie werden durch diese rein umgangssprachlichen Ausdrücke ja erst definiert; es handelt sich dabei allerdings nur um die Partikeln *Und* und *Nicht*. Dass es – wie **DÖHMANN** anmerkt – für die informationsverschleiernden Gedankengefüge nicht die Möglichkeit des Ausdrucks durch ein *einfaches Symbol* gibt, liegt einzig daran, dass diese Gedankengefüge anders als durch eine Kombination von *Und* und *Nicht* überhaupt nicht adäquat ausgedrückt werden können.

2.2.4. Die angebliche Mangelhaftigkeit der logischen Ausdrucksmittel der Umgangssprache

Pauschal lastet **FREGE**, wie später seine Anhänger, die von ihm unbegriffene Diskrepanz zwischen dem umgangssprachlichen und seinem neuartigen Gebrauch der logischen Partikeln „logischen Unvollkommenheiten der Sprache" an, die er freilich im Einzelnen nirgendwo näher belegen kann (Log II 61); diese angebliche Diskrepanz dient ihm als ausschlaggebender Beleg der angeblichen Mangelhaftigkeit der umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel[70]. Den Gedanken, dass die Diskrepanz umgekehrt durch die Unangemessenheit, ja Unzulässigkeit der Darstellung der informationsverschleiernden Gedankengefüge durch umgangssprachliche logische Partikeln begründet sein könnte, scheint **FREGE** nie in Betracht gezogen zu haben. Dies ist erstaunlich, denn die pauschale, auf jeden konkreten Beleg verzichtende Abwertung der logischen umgangssprachlichen Ausdrucksmittel, mit der **FREGE** den Wert seiner Bildungen zu heben sucht, ist, recht besehen, indiskutabel. Wir benutzen die umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel ja nicht nur beim alltäglichen, um logische Stringenz unbekümmerten Daherreden, sondern auch der absolut überwiegende Teil der wissenschaftlichen Darlegungen gesetzmäßiger Zusammenhänge (nicht zuletzt auch in der Mathematik) stützt sich *ausschließlich* auf diese Darstellungsmittel. Die technischen, organisatorischen und wissenschaftlichen Hochleistungen aller Zeiten werden bis heute ausschließlich auf der Grundlage der noch unreflektierten logischen Ausdrucksmittel der Umgangssprachen erbracht. In logischer Hinsicht war beispielsweise **EUKLID** bei seiner axiomatischen Darstellung der Geometrie alleine auf die logischen Ausdrucksmittel der Umgangssprache verwiesen; auch die Naturwissenschaften wie auch die Mathematik selbst können bis heute neben der mathematischen Darstellung von gesetzmäßigen Zusammenhängen nur auf die logischen Ausdrucksmittel der Umgangssprache zurückgreifen; die Umgangssprache ermöglicht also durchaus die logisch präzise Darlegung von allen möglichen komplexen logischen Zusammenhängen. Hingegen ist in *keiner einzigen* wissenschaftlichen Disziplin die Aneignung von Kenntnissen der theoretischen Logik (oder gar der fregeschen „modernen Logik") eine Bedingung für die Forschung und Theoriebildung; nur wenn die Kenntnis der fregeschen „Logik" notwendige Bedingung jeder wissenschaftlichen Arbeit wäre, wäre die logistische Unzulänglichkeits-These richtig[71].

FREGE rechtfertigt seinen Verzicht auf eine vorurteilsfreie Analyse der logischen Ausdrucksmittel der Umgangssprache dadurch, dass er der sachgemäßen Untersuchung der Umgangssprache überhaupt jede Bedeutung für die Entwicklung einer theoretischen Logik bestreitet[72]. Er immunisiert dadurch seine Konstrukte gegen jede mögliche Kritik; wenn ein Logiker nicht nachweisen muss, dass seine Aufstellungen tatsächlich die Struktur des sachbezogenen erkennenden Denkens wiedergeben, das jeder logischen Reflexion vorausgeht, kann er alles behaupten. Da logisch korrektes und in sich stimmiges Denken und Wissen nicht erst mit den Versuchen der theoretischen Logik auftritt, das Logische also keine „freie" Erfindung und willkürliche Schöpfung der Logiker sein kann, kann nur die systematisch-verallgemeinernde Reflexion der „natürliche Logik", wie sie im gebrauchen der umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittels vorgegeben ist, dem Logiker einen Zugang zum Gegenstand der Logik ermöglichen. Würde es tatsächlich nicht zu den Aufgaben des Logikers gehören, „zu ermitteln, was in den sprachlichen Ausdrücken" liegt (BFH 41), so entschwände der Logik der *vorgegebene* Gegenstand, an dessen Stelle der Logiker, wie es bei **FREGE** der Fall ist, dann nur die eigenen willkürlichen Einfälle setzen könnte[73]. Die Behauptung, aufgrund der angeblich schillernden und vagen Bedeutung der umgangssprachlichen logischen Partikeln sei es prinzipiell aussichtslos, durch eine Analyse dieser Ausdrücke die wesentlichen Züge logischer Formen zu gewinnen[74], ist eine pure Schutzbehauptung.

Anstatt den Wert der logischen am der Umgangssprache derart pauschal herabzusetzen, müssten **FREGE** und seine Anhänger nachweisen, dass die Gedankengefüge mit den Ausdrucksmitteln der Umgangssprache tatsächlich nur sehr unzulänglich ausgedrückt werden können – und *diese* These ist offensichtlich falsch, wie immer es auch um die Genauigkeit und Eindeutigkeit des einen oder anderen umgangssprachlichen logischen Ausdrucks bestellt sein mag: *alle* Gedankengefüge lassen sich verständlich, klar und eindeutig durch vorgegebene umgangssprachliche Ausdrucksmittel – die Ausdrücke „und", nicht" und „ist wahr" – formulieren; anders können sie gar nicht definiert werden! Hingegen kann *kein einziges* logisches Verhältnis mit den begriffsschriftlichen Bezeichnungen des SFG dargelegt werden.

Wenn wir den Gehalt, den gesetzmäßigen Zusammenhang und die logische Relevanz der Gedankengefüge unvoreingenommen beurteilen wollen, so dürfen wir den begriffsschriftlichen Ausdrücken *nur* die Bedeutung geben, die **FREGE** unmissverständlich festgelegt hat. Wir müssen seiner Aufforderung nachkommen: „Ich bitte nur das unter ‚Wenn B, so A' zu verstehen, was ich gesagt habe und in der Form ‚nicht[(nicht A) und B]' ausgedrückt habe." (Gef 84 [46]). Leider ist es **FREGE** selbst, der ständig dieser seiner eigenen, eigentlich selbstverständlichen Forderung zuwider handelt. Wenn er die Gedankengefüge, deren Bedeutung er bereits exakt und endgültig festgelegt hat, *im Nachhinein* mit logischen Partikeln bezeichnet, ohne der Bedeutung, die diese Ausdrücke bereits vor und außerhalb der Begriffsschrift haben, die mindeste Beachtung zu schenken, widerspricht er der eigenen „Forderung nach Eindeutigkeit der Zeichen, an der wir unter allen Umständen festhalten müssen.“ (GLG III-V, 313) Zu Recht schreibt **FREGE**, „nur einem Zeichen, das noch keinen Sinn hat, kann willkürlich ein Sinn beigelegt werden“ (LM 103); deshalb ist es unzulässig, beim Ausdruck der Gedankengefüge Partikeln außer den Partikeln *Und* und *Nicht* zu benutzen – und beispielsweise das Gedankengefüge **C** durch das *Wenn* zu bezeichnen. „Wer willkürlich von dem hergebrachten Sinne eines Wortes abweiche und nicht angibt, in welchem Sinne er es gebrauchen wolle, wer plötzlich anfängt, das rot zu nennen, was sonst grün genannt wird, der wundere sich nicht, dass er Verwirrung anrichtet. Und solches ist, wenn es absichtlich geschieht, eine Versündigung an der Wissenschaft.“ (GLG III-V, 301; vgl. auch GLG I-III, 292f) **FREGE** ist es, der massiv und ständig gegen dieses Gebot verstößt; niemand dürfte in der Wissenschaft mehr Verwirrung gestiftet haben als er.

2.2.5. Das gricesche Argument

Auch die Argumente, die **H.P. GRICE** vorträgt, können die Einwände gegen **FREGE**s Deutung des Gedankengefüges **C** als Implikation oder Konditional nicht entkräften. Zuerst versucht **GRICE** anhand einiger konstruiert-gekünstelter Beispiele den Nachweis zu führen, dass auch der umgangssprachliche Gebrauch des *Wenn* und des *Oder* „wahrheitsfunktional“ ist. Er registriert, dass die „wahrheitsfunktionalen“ Gedankengefüge **C** und **A** mit einer Informationsverschleierung verbunden sind und überträgt diesen Charakter auf die seiner Meinung nach ebenfalls „wahrheitsfunktionalen“ Wenn$_2$- und Oder$_2$-Sätze. Seine Behauptung ist richtig, dass die *korrekt formulierten und nicht missdeuteten* informationsverschleiernden **C**- und **A**-Äußerungen zwar richtig und logisch korrekt sind[75], aber doch wichtige Normen einer auf Verständigung zielenden Kommunikation verletzen. Über den Zusammenhang der Gedankengefüge **A** und **C** mit den Wenn$_2$- und Oder$_2$-Aussagen meint er, dass die letzteren im alltäglichen Gebrauch *neben* einer angeblichen „wahrheitsfunktionalen Grundbedeutung“ noch *zusätzliche* Gehalte besitzen, die sicherstellen, dass den Erfordernissen einer sozial gelungenen Konversation Genüge getan wird. Er resümiert, die Einwände gegen **FREGE**s Deutung der Gedankengefüge **C** und **A** als Wenn- und Oder-Beziehungen träfen nur Verstöße gegen Normen *konversationeller* Gepflogenheiten, und könnten daher den *logischen* Wert der Gedankengefüge (die von ihm nie von ihrer nachträglichen logischen Umdeutung geschieden werden) nicht in Frage stellen[76].

GRICE zufolge finden die informationsverschleiernden Gedankengefüge – insbesondere die Gedankengefüge **A** und **C** – von vornherein in bestimmten enthymematischen Schlussschemata ihre umgangssprachlichen Analoga und Gegenstücke[77], z.B. das Gedankengefüge „$A \overline{\vee} B$“ im Enthymem „A oder$_2$ B“ und das Gedankengefüge „$A \Rightarrow B$“ im Enthymem „Wenn$_2$ A, dann B“, und stellen deren „Grundbedeutung“ dar. Er versucht anhand einiger Beispiele zu zeigen, dass es einen zulässigen und sinnvollen „wahrheitsfunktionalen“ Gebrauch von Wenn$_2$- und Oder$_2$-Sätzen gibt. Äußere man etwa anlässlich einer Schatzsuche mit Kindern „The prize is either in the garden or in the attic. I know that because I know where I put it, but I’m not going to tell you“ oder auch nur „The prize is in the garden or in the attic“, so sei dies ein korrekter und sinnvoller „wahrheitsfunktionaler“ Gebrauch des Oder[78]. Die angeführte Äußerung in ihrem Kontext stellt jedoch kein Beispiel eines echten „wahrheitsfunktionalen“ Gedankengefüges **A** dar. Zwischen den beiden Aussagen „The prize is in the garden“ und „The prize is in the attic“ besteht keinesfalls die für **A** charakteristische inhaltliche Beziehungslosigkeit; die beiden Sachverhalte, von denen in den Aussagen gesprochen wird, sind echte Alternativen – und zwar aufgrund der feststehenden Absicht des Erwachsenen, nur einen dieser beiden Orte für das Versteck vorzusehen. Auch und gerade dann, wenn der Erwachsene sich noch für kein Versteck entschieden hat und noch nicht weiß, für welche der selbst gesetzten Alternativen er sich entscheiden wird, kann er den Oder-Satz behaupten. In diesem besonderen Fall behält die Behauptung „Der Gegenstand ist im Garten oder in der Garage versteckt“ obendrein auch dann seinen Sinn, wenn der Erwachsene den Gegenstand schon versteckt hat und daher weiß, welche der Alternativen zutrifft; denn für die Kinder müssen, dem Zweck des Spiels entsprechend, die beiden Alternativen noch offen sein; die Richtigkeit des Oder-Satzes beruht zuallererst in der logischen Beziehung der Alternative, nicht darin, dass A oder dass B oder beide Aussagen wahr sind; folglich haben wir es mit keinem „wahrheitsfunktionalen“ Gedankengefüge zu tun.

GRICE meint, der Satz „Wenn sich Schmidt in der Bücherei aufhält, dann arbeitet er“ könne formuliert werden als „Ich weiß, wo sich Schmidt aufhält und was er tut, sage aber nur: wenn er in der Bücherei ist, dann arbeitet er.“[79] Nur wenn wir die Gültigkeit der implikativen Verhaltensregelmäßigkeit „Wenn$_1$ Schmidt sich in der Bücherei aufhält, dann arbeitet er“ voraussetzen können, sind wir berechtigt, das problematische Konditional „Wenn$_2$ Schmidt sich (zur Zeit) in der Bücherei aufhält (aufhalten sollte), dann arbeitet er“ zu behaupten – aber nur, wenn wir darüber hinaus den Aufenthaltsort Schmidts nicht kennen; falls wir dann doch erfahren, dass er in der Bücherei ist, können wir nicht mehr den problematischen Wenn$_2$-Satz, sondern nur noch den assertorischen Weil-Satz „Weil Schmidt sich in der Bücherei aufhält, arbeitet er“ aussagen. Wenn die angegebene implikative Verhaltensregelmäßigkeit jedoch nicht gilt, und wir nur „wahrheitsfunktional“ voraussetzen, dass Schmidt in der Bücherei ist und arbeitet, bzw. dass er nicht in der Bücherei ist, können wir überhaupt keinen Wenn_2-Satz behaupten, sondern nur das informationsverschleiernde Gedankengefüge **C** „Es trifft nicht zu, dass Schmidt in der Bücherei ist und zugleich nicht arbeitet“. Auch in diesem Fall ist **GRICE**’ Versuch, die Berechtigung Gebräuchlichkeit eines „wahrheitsfunktionalen“ Gebrauchs der Partikel *Wenn₁* zu rechtfertigen, erfolglos.

Schließlich behauptet **GRICE**, das u.U. korrekte Konditional „If the Dean doesn’t approve your raise, then I will resign the departmental chairmanship“ bleibe auch dann logisch-sprachlich korrekt und werde allenfalls *literally false*, wenn der Sprecher schon weiß, wie der Dekan handeln wird und/oder ob er selbst zurücktreten wird, da es keinerlei Zusammenhang zwischen den Handlungen des Sprecher und des Dekans gebe[80]. Korrekt kann jedoch das obige Konditional nur sein, wenn der Entschluss des Sprechers, im Falle der Weigerung des Dekans zurückzutreten, den implikativen Zusammenhang zwischen seinen Handlungen und denen des Dekans stiftet (bedingte Absicht). Weiterhin setzt das Konditional voraus, dass der Sprecher (noch) nicht weiß, wie der Dekan handelt. Wenn sich nun der Dekan tatsächlich weigert bzw. nicht weigert, der Beförderung zuzustimmen, kann der Sprecher keineswegs mehr, wie **GRICE** annimmt, das problematische Konditional „Wenn der Dekan der Gehaltserhöhung nicht zustimmt, trete ich zurück “, sondern er muss das assertorische Enthymem „Weil der Dekan der Gehaltserhöhung nicht zustimmt, trete ich zurück“ bzw. das kontrafaktische Konditional „Wenn der Dekan der Gehaltserhöhung nicht zustimmen würde, würde ich zurücktreten“ äußern. In beiden Fällen bleibt der durch den Entschluss gestiftete implikative Zusammenhang zwar bestehen, ein Wenn_2-Satz wird jedoch falsch; das *Wenn*$_2$ ist unter keinen Umständen „wahrheitsfunktional“!

Bei Oder_2-Sätzen $A \veebar B$ wird genau so wie bei Gedankengefügen $A \overline{\vee} B$ der Fall, dass A und B beide falsch sind, ausgeschlossen; beim Konditional A⇨B ist ebenso wie beim Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ ausgeschlossen, dass A wahr und B falsch ist. Es ist sicherlich diese Übereinstimmung, die **GRICE**, wie wohl schon **FREGE** und andere zur Auffassung verleitet hat, die „wahrheitsfunktionalen“ Gedankengefüge **C** und **A** seien hinsichtlich ihrer logischen Kernbedeutung den umgangssprachlichen Wenn_2- und Oder_2-Sätzen gleichzusetzen. Der Ausschluss dieser Wahrheitswertprädikate erfolgt bei Gedankengefügen und problematischen Enthymemen jedoch aus völlig verschiedenen Gründen: beim Gedankengefüge **C** ist der Fall *A wahr und B falsch* ausgeschlossen, weil dem Sprecher bereits bekannt ist, entweder dass A falsch oder dass A und B beide wahr sind; die Äußerung von $A \Rightarrow B$ ist somit *immer* informationsverschleiernd und unnütz. Ein Konditional A⇨B hingegen ist nur dann wahr, wenn dem Sprecher einerseits weder der Wahrheitswert von A noch der von B bekannt ist (das Wenn_2 wird deshalb *nie* wahrheitsfunktional gebraucht), und wenn das implizit zu Grunde gelegte Gesetz $\mathcal{N}^e(E_A,E_B)$ gültig ist; die Geltung dieses Gesetzes ist der entscheidende Grund für den Ausschluss der Wahrheit von A und der Falschheit von B. Im Falle des Gedankengefüges $A \overline{\vee} B$ kann ich den Fall, dass von A und B beide falsch sind nur deshalb ausschließen, weil ich von zumindest einer der Aussagen schon definitiv weiß, dass sie wahr ist; auch die Äußerung des Gedankengefüges $A \overline{\vee} B$ stellt so *immer* eine unnütze Informationsverschleierung dar. Die Wahrheitsbedingungen für ein Oder-Enthymem hingegen bestehen darin, dass einerseits dem Sprecher die Wahrheit von A und B nicht bekannt sind, und dass er implizit auf ein bedingungslogisches Gesetz $[E_C, E_A, E_B\ \mathbb{AX}]$ und auf die Tatsache, dass ein Sachverhalt/Ereignis e_C vorliegt, Bezug nimmt; der Ausschluss der Falschheit von A und B erfolgt hier nicht aus „wahrheitsfunktionalen“ Gründen, sondern aus dem Schluss: „Weil $[E_C, E_A, E_B\ \mathbb{AX}]$ und e_C, deshalb liegt e_A oder e_B oder beide vor (welches, geht aus den Voraussetzungen nicht hervor). Die falsche Gleichsetzung von der Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ und $A \overline{\vee} B$ mit den Enthymemen A⇨B und $A \veebar B$ beruht also darauf, dass „vergessen“ wird, dass die Gedankengefüge „wahrheitsfunktional“ sind: ihre Wahrheit darf ausschließlich von der vorgegebenen Wahrheit der prädizierten Aussagen A und B abhängen.

Nachdem er auf diese Weise die illegitime Gleichsetzung von problematischen Enthymemen und Gedankengefügen vorgenommen hat, räumt **GRICE** ein, dass ein Sprecher bei der „wahrheitsfunktionalen “ Äußerung von **C** und **A** weniger sage, als er wisse; er gibt zu, dass diese Informationsverschleierung allen kommunikativen Gepflogenheiten widerspricht – niemand sage „Meine Frau ist in London oder Oxford“, wenn er wisse, dass sie in Oxford sei[81]; man äußere in aller Regel anstatt des „stärkeren“ (= informativeren) „B“ oder „B ist wahr“ nie das „schwächere“ (= informationsverschleiernde) $A \Rightarrow B$ oder $A \overline{\vee} B$[82]. Derartige Verstöße gegen die Normen einer aufrichtigen und am Einvernehmen ausgerichteten Kommunikation kämen allerdings normalerweise kaum vor, weil zur angeblichen wahrheitsfunktionalen, informationsverschleiernden „Grundbedeutung“ der beiden Enthymeme stets noch eine Reihe *zusätzlicher*, implizit mitgemeinter Voraussetzungen hinzukäme. **GRICE** nennt diese Voraussetzungen „conversational implicature“; diese tangierten nicht Wahrheit und logische Zulässigkeit, sondern nur Fragen der konversationsbezogenen Schicklichkeit. Wer einen Wenn_2 oder Oder_2-Satz äußere, gebe unausgesprochen zu verstehen, dass er nichts zum Verständnis Notwendiges und Vorausgesetztes verschweige – „one should not make a weaker when entitled to make a stronger assertion“[83]. Wer etwa eine Behauptung „Wenn$_2$ A, dann B“ aufstelle, gebe stets implizit zu verstehen, dass er nie das „schwächere“ A⇒B behaupte, wenn er das „stärkere“ „A ist falsch“ und/oder „B ist wahr“ äußern könne. „There is a general presumption that in the case of ‚A⇒B‘, a more informative statement would be of interest“; im Falle einer „conversational implicature“ bestehe zwischen den Sätzen A und B auch eine „non-truth-functional evidence“ – anders als bei reinen Wahrheitsfunktionen sei B durch A *bedingt*, A sei ein „good reason“ für B; B sei erschließbar aus A; es bestehe eine „strong connection“; außerdem involviere die Äußerung eines Wenn$_2$-Satzes immer vorbehaltliche Annahmen („supposing“, „suppose that“)[84]. Üblicherweise werde ein Wenn$_2$- bzw. Oder$_2$-Satz aus nicht-wahrheitsfunktionalen Gründen behauptet, d.h. ohne die Wahrheitswerte von A bzw. von B vorauszusetzen[85].

So ungenau und vage die griceschen Charakterisierungen der Wenn$_2$- und Oder$_2$-Sätze bleiben, sie kennzeichnen doch unbestreitbar die *notwendigen* Wahrheitsbedingungen der betreffenden Enthymeme – keineswegs nur irgendwelche konversationsbezogenen Nebensächlichkeiten und Zusätze. Bei der vage angesprochenen Bedingtheit des einen durch den anderen Satz, bei der „strong connection“, der „relation of inferability“[86] handelt es sich um die wesentliche Bedingung, dass die in den Aussage A und B angesprochenen Einzelereignisse e_A und e_B einem (unausgesprochenen) bedingungslogischen Gesetz subsumiert werden. Auch der problematische Charakter der Aussagen A und B ist kein rhetorisches Beiwerk, sondern eine notwendige Wahrheitsbedingung für die Richtigkeit dieser Enthymeme. Diese Bedingungen können außerdem nicht zur Beziehungslosigkeit und „Wahrheitsfunktionalität“ als den Wahrheitsbedingungen der Gedankengefüge **A** und **C** *hinzu*treten – sie sind mit ihnen vielmehr unverträglich; es ist ein krasser, offener Widerspruch zu seiner Grundthese des „wahrheitsfunktionalen“ Grundcharakters der Wenn- und Oder-Sätze, wenn **GRICE** einen gleichzeitigen nicht-„wahrheitsfunktionalen“ Gebrauch von „Wahrheitsfunktionen“ postuliert: „The conditional form can fulfill this role only insofar as the truth-value of the conditional itself can be recognized independently of knowledge of the truth-values of the components of the conditional, that is to say, by virtue of strong connections between antecedent and consequent.“ „Given a truth-functional *or* it is predictable … that people would use *A or B* to imply the existence of non-truth-functional grounds.“[87] Eine „Wahrheitsfunktion“ kann nur aus „wahrheitsfunktionalen“ Gründen behauptet werden – wenn die Wahrheit einer Aussage über Aussagen jedoch nicht von den Wahrheitswerten dieser Aussagen abhängt, liegt keine „Wahrheitsfunktion“ vor. Bei **GRICE** kann eine „Wahrheitsfunktion“ zugleich nicht „wahrheitsfunktional“ sein!

Indem **GRICE** den nicht-„wahrheitsfunktionalen“ Charakter der Wenn$_2$- und Oder$_2$-Aussagen zu einer nebensächlichen, konversationsbezogenen Bestimmung macht, die üblicherweise zur angeblich „wahrheitsfunktionalen“ Kernbedeutung der Wenn- und Oder-Sätze hinzutritt, versucht er die Einwände gegen **FREGE**s logische Deutung der Gedankengefüge **C** und **A** folgendermaßen zu entkräften: die Kritik stoße ins Leere, weil der informationsverschleiernde Charakter der Gedankengefüge nicht gegen Prinzipien der Wahrheit und logischen Richtigkeit, sondern nur gegen bestimmte soziale Normen fairer und ehrlicher Konversation verstoße. Was **GRICE** allenfalls zur Rechtfertigung der informationsverschleiernden Gedankengefüge *vor* ihrer logischen Umdeutung vorbringen könnte, wird ihm unbesehen zur Rechtfertigung dieser Umdeutung selbst. **GRICE** erkennt nicht, dass die Frage der Richtigkeit und logischen Zweckdienlichkeit der Informationsverschleierung der *korrekt ausgedrückten und nicht missdeuteten* Gedankengefüge und die Frage, ob diese klar definierten Gedankengefüge **C** und **A** nachträglich durch logische Partikeln wie *Wenn* und *Oder* bezeichnet und damit als logische Formen gedeutet werden dürfen, ganz verschiedene Probleme sind. Seine Argumentation hat so die Struktur des Trugschlusses der *Ignoratio Elenchi* – er begegnet wie schon **FREGE** dem Einwand, dass die Gedankengefüge keine logischen Zusammenhänge ausdrücken und deshalb nicht mittels logischer Partikeln ausgedrückt werden dürfen, mit Argumenten, die für die Zurückweisung dieser Bedenken irrelevant sind. Es ist natürlich richtig, dass die (nicht missdeuteten!) Gedankengefüge eindeutig definiert sind, ihre triviale, immer schon vorausgesetzte Wahrheit definitiv entscheidbar ist, kein entsprechend den fregeschen Festsetzungen geäußertes Gedankengefüge oder Fregegesetz also gegen logische Prinzipien verstößt; dies ändert nichts an der Gehaltlosigkeit, Nichtsnutzigkeit und logischen Irrelevanz dieser Gedankengefüge. Unzulässig und nicht bloß unnütz ist der Ausdruck der Gedankengefüge durch logische Partikeln.

2.2.6. Das Gedankengefüge **C** und das problematische Konditional

2.2.6.1. Die angebliche Zusammenhanglosigkeit der Glieder des problematischen Konditional

Grice behauptet die Unterschiede der Gedankengefüge **C** und **A** vom problematische Konditional und Oder-Enthymem beträfe nur logisch irrelevante Aspekte der Kommunikation; in ihrer logischen Struktur seien diese Sachverhalte identisch; diese Behauptung ist falsch.

Um den Einwurf zu entkräften, **Frege**s Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ dürfe wegen der Beziehungslosigkeit der Aussagen A und B nicht mit Hilfe des umgangssprachlichen *Wenn* ausgedrückt werden, werden von Logistikern zuweilen Behauptungen bemüht, die im Gegensatz zu **Grice**’ Argument stehen: nicht nur bei der fregeschen, sondern auch bei korrekter umgangssprachlicher Verwendung des *Wenn* entständen oft Konditionalsätze, die intuitiv als falsch, konfus und unsinnig anmuten und denen jeder Bezug auf ein Gesetz fehle, das einen Zusammenhang der Sätze A und B stifte[88]. Um etwa die angebliche Zweideutigkeit und „völlige Zügellosigkeit“ der kontrafaktischen Konditionale zu untermauern, und für ihre Ersetzung durch das eindeutige fregesche Gedankengefüge **C**[89] zu werben, behauptet **Quine**, dass oft mit ein und demselben Vordersatz eines kontrafaktischen Konditional verschieden Hintersätze verbunden werden könnten. So sei nicht zu entscheiden, ob

(1) Wenn Cäsar Befehlshaber wäre, würde er die Atombombe einsetzen.

oder

(2) Wenn Cäsar Befehlshaber wäre, würde er Wurfmaschinen einsetzen[90]

gelte[91]. Diese Beispiele zeigen nicht, dass die umgangssprachlichen Regeln des kontrafaktischen Konditionals unzuverlässigen Regeln folgen – wie **Quine** unterstellt, sie sind vielmehr selbst falsch, denn es sind nicht alle notwendigen Prämissen des Enthymems angeführt: es muss notwendigerweise explizit gesagt werden, ob man Cäsar mit oder ohne die Militärtechnik seiner Zeit in unsere Zeit versetzt; es ist also zu verbessern:

(1') Wenn Cäsar heute Befehlshaber wäre und über die heutige Militärtechnik verfügen würde, würde er Atombomben einsetzen.

(2') Wenn Cäsar heute Befehlshaber wäre, aber nur über die Militärtechnik seiner Zeit verfügen würde, würde er Wurfmaschinen einsetzen.

Nur so haben wir es mit korrekten kontrafaktischen Konditionalen zu tun, denn nur in (1') und (2') sind alle notwendigen kontrafaktischen Prämissen angeführt.

Auch andere inkorrekte und spitzfindige Konditionale sollen die Mangelhaftigkeit und damit die logische Irrelevanz umgangssprachlich geregelter Konditionale und damit die Berechtigung der fregeschen „Verbesserungen“ belegen. So sei unklar, ob der Vordersatz „Wenn Jones in Carolina wäre“ mit dem Hintersatz „dann wäre er in Süd-Carolina“ oder mit „dann wäre er in Nord-Carolina“ zu verbinden sei[92]. In Wirklichkeit sind beide Sätze falsch, richtig ist nur das Konditional „Wenn Jones in Carolina wäre, dann wäre er entweder in Süd- oder Nord-Carolina“. Es wird behauptet, es sei nicht entscheidbar, ob, wenn Bizet und Verdi Landsleute gewesen wären, Bizet dann Italiener oder ob Verdi Franzose gewesen wäre[93]. Auch hier sind beide behaupteten Alternativen falsch; richtig ist nur das Konditional „Wenn Bizet und Verdi Landsleute gewesen wären, genau dann wären beide von derselben Nationalität (entweder beide Italiener oder Franzosen oder Russen oder Deutsche, oder was auch immer) gewesen“.[94]

Gegen den Vorwurf, das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ sei wegen des Fehlens eines Zusammenhangs zwischen den Aussagen A und B keine sachgerechte Rekonstruktion des umgangssprachlichen *Wenn*, wendet **Roderick M. Chisholm** ein, auch viele kontrafaktische Konditionale (subjunctive conditionals) $A \supset B$ entbehrten der „connection“ zwischen A und B; viele subjunctive conditionals, etwa „Even if you were to sleep all morning, you should be tired“ drückten gerade aus, dass es keine solche Beziehung gebe[95]. Dies ist ein unzutreffendes Argument, denn im Gegensatz zum kontrafaktischen Wenn-Satz subsumiert ein Even-if-Satz in der Tat einen einzelnen Fall oder besondere Fälle nicht unter ein allgemeines Gesetz, sondern kennzeichnet diese Fälle als Ausnahmen von einem Gesetz; **Chisholm** überträgt unzulässig die Bedeutung des *Wenn-auch* auf das kontrafaktische *Wenn*.

Auch so genannte „accidental conditionals” sollen belegen, dass ein Konditional (wie das Gedankengefüge **C**) nicht in jedem Falle ein *connecting principle* aufweise. **GOODMAN** konstruiert folgendes Beispiel: Da ich an Ostern zufällig nur Silbermünzen in der Tasche gehabt habe, gelte das „general law“: *Alle Münzen, die an Ostern in meiner Tasche waren, waren Silbermünzen*. Also müsse auch das kontrafaktische Konditional „Wenn diese Kupfermünze an Ostern in meiner Tasche gewesen wäre, wäre sie eine Silbermünze gewesen“ gelten – eine Behauptung, die nicht überzeuge, auch wenn das angebliche „general law“ richtig sei[96]. Zunächst ist *dieser* Allsatz kein Gesetz, sondern eine Feststellung, die allen Elementen einer endlichen, an eine bestimmte Raum-Zeit-Stelle gebundenen Menge eine bestimmte Beschaffenheit zuschreibt; der Vordersatz unterstellt nun kontrafaktisch, dass ein Elemente, das die betreffende Eigenschaft nicht aufweist, auch zu jener Menge gehöre. Aus dieser kontrafaktischen Unterstellung folgt jedoch nicht, dass das neue Element nicht es selbst wäre (die Kupfermünze also aus Silber), sondern dass nicht alle Elemente der betreffenden Menge jene Eigenschaft aufweisen würde. Richtig ist also nur das Konditional „Wenn diese Münze an Ostern in meiner Tasche gewesen wäre, dann hätte ich an Ostern nicht nur Silbermünzen in der Tasche gehabt“. Möglich wäre nur noch, dass im Vordersatz ausdrücklich kontrafaktisch unterstellt wird, dass die Kupfermünze nicht das Ding ist, das sie ist, sondern eine derjenigen Münzen, die ich an Ostern in der Tasche hatte: „Wenn diese Kupfermünze eine der Münzen gewesen wäre, die ich an Ostern in der Tasche hatte (nicht aber: wenn ich diese Kupfermünze an Ostern zusätzlich zu den Silbermünzen in der Tasche gehabt hätte…), wäre sie eine Silbermünze.“ Auch dieser angebliche Beleg einer Missverständlichkeit und Ungenauigkeit der umgangssprachlich geregelten Konditionale ist eine irreführende und sophistische Konstruktion[97].

Es werden auch kontrafaktische Konditionale, die sich auf historische Ereignisse beziehen, bemüht, um nachzuweisen, dass auch umgangssprachliche Wenn-Sätze nicht immer einen logischen, gesetzmäßigen Zusammenhang voraussetzen, deren Fehlen demnach auch dem Gedankengefüge **C** nicht angekreidet werden dürfe. **O’CONNOR** zufolge gibt es bei diesen Konditionalen „no obvious general principle from which the statement can be deduced.“ (S.355)

> If the Greeks had lost at Marathon, the Persians would have captured Athens.
> If Hitler had invaded in 1940, he would have captured London[98]
> „If Hitler had not invaded Russia, he would still be ruling Germany“[99]

Auch diese Konditionale sind nur dann korrekt, wenn der Sprecher über gültige allgemein - gesetzmäßige Gründe verfügt, die die kontrafaktische Bedingung mit der kontrafaktischen Folge verbinden. Diese Gesetzmäßigkeiten sind freilich auf dem Gebiete der Historie nicht so unumstößlich und einfach wie Naturgesetze es in der Regel sind, und es sind außerdem Wahrscheinlichkeitsgesetze. Z.B. könnte unter impliziter Bezugnahme auf Art und zu erwartender Auswirkung des damaligen militärischen Kräfteverhältnisses, die Invasionskapazitäten der Hitlerarmee usw., die Behauptung „Wenn Hitler 1940 die Invasion des Vereinigten Königreiches durchgeführt hätte, hätte er mit hoher Wahrscheinlichkeit London erobert“ völlig korrekt sein (Entsprechendes gilt für die anderen Beispiele). Auch bei diesen historischen Konditionalen finden wir dann die allgemeine Struktur der Konditionale. Gibt es diese Gesetzmäßigkeiten nicht, sind die Konditionale ungültig.

Die unzweifelhafte Transitivität der drei Typen von Enthymemen wird von manchen Logistikern bestritten. Diese angebliche Nichttransitivität der Konditionale soll die logische Wertlosigkeit des umgangssprachlichen *Wenn* im Gegensatz zum Gedankengefüge **C** belegen: dieses Gedankengefüge ist ja immerhin transitiv und entspricht so der Implikation und dem Entailment, deren Transitivität intuitiv gewiss scheint. Die zum Beweis der Nichttransitivität dienen sollenden Beispiele, wiewohl sehr ausgeklügelt, weisen alle den logischen Fehler der *quaternio terminorum* auf. Ich gehe auf einige Konditionale, die die Nichttransitivität belegen sollen:

> (1-1) If Carter had died in 1979, he would not have lost the election in 1980
> (1-2) If Carter had not lost the election in 1980 {als Gegenspieler von Reagan}, Reagan would not have been President in 1981
> (1-3) If Carter had died in 1979, Reagan would not have been President in 1981

Obwohl an der Gültigkeit der Konditionale (1-1) und (1-2) nicht zu rütteln sei, sei die Behauptung (1-3) unhaltbar, die aus den Konditionalen (1-1) und (1-2) folgen müsste, wenn das Konditional transitiv wäre[100]. In Wirklichkeit bedeutet das Verlieren der Wahl in den Sätzen (1-1) und (1-2) etwas völlig Verschiedenes: in (1-1) geht die „Wahlniederlage“ darauf zurück, dass Carter tot war und an den Wahlen gar nicht teilnehmen konnte[101]; in (1-2) ist vorausgesetzt, dass der lebende Carter gegen Reagan angetreten ist und die Wahl verloren hat verloren hat. Der Ausdruck „Carter had not lost the election in 1980“ bedeutet in (1-1) etwas ganz anderes als in (1-2), kann also nicht das Verkettungsglied sein.

(2-1) Wenn Thurston seine Arbeit verlieren würde, so würde er weniger arbeiten
(2-2) Wenn Thurston weniger arbeiten würde, so würde er weniger nervös sein
(2-3) Wenn Thurston seine Arbeit verlieren würde, so würde er weniger nervös sein[102]

Auch hier seien die Konditionale (2-1) und (2-2) korrekt, müssten also auf das unglaubhafte Konditional (2-3) führen, wenn das Konditional transitiv wäre. (2-1) und (2-2) sind wohl korrekt, aber nicht verkettbar, weil das *weniger arbeiten* in beiden Fälle völlig Verschiedenes bedeutet; in (2-2) ist von weniger Arbeitsbelastung im Betrieb bei vorausgesetzter Nichtarbeitslosigkeit die Rede, während in (2-1) von weniger Arbeit aufgrund Arbeitslosigkeit gesprochen wird; in (2-1) ist vom arbeitslosen, in (2-2) vom in Arbeit stehenden Thurston die Rede; dies schließt die Verkettung aus; diese würde den Fehler der *quaternio terminorum* beinhalten.

Ein andersgearteter, aber nicht weniger erfolgloser Versuch, die Nicht-Transitivität des kontrafaktischen Konditional nachzuweisen, stammt von **David Lewis**[103]: Gilt A ➲ B, genau dann ist für **Lewis** e_B von e_A *kausal abhängig*; e_A ist dann „Ursache“ (besser: hinreichende Bedingung) von e_B. Wenn nun e_B vom kontrafaktischen e_A kausal abhängig sei (A➲B), und e_C von e_B kausal abhängig sei (B➲C), dann sei nicht notwendig e_C von e_A abhängig (A➲C). Denn e_C könne durch eine andere hinreichende Bedingung als e_A verursacht sein. Diese Behauptung ist nicht richtig, weil es zwar für e_C eine andere hinreichende Bedingung als e_B, und für e_B eine andere hinreichende Bedingung als e_A geben kann, aber dann, wenn e_B durch e_A und e_C durch e_B bedingt ist, e_C nicht ohne e_A vorliegen kann. **Lewis** lässt sich zu dieser fehlerhaften Argumentation durch die falsche Annahme verleiten, dass, wenn e_A hinreichende Bedingung von e_B sei, genau dann gelte, dass e_B ohne e_A nicht der Fall sein könne – er macht aus einer hinreichenden Bedingung kurzerhand eine notwendige Bedingung. Weil nun aus A ➲ B und B ➲ C tatsächlich nicht hervorgeht, dass e_A notwendige Bedingung von e_C ist, unterstellt **Lewis**, es gelte nicht A ➲ C. Dieses Argument stellt einen Trugschluss in der Art einer *Ignoratio elenchi* dar: anstatt zu beweisen, dass bei A ➲ B und B ➲ C nicht A➲C gilt, beweist **Lewis**, dass nicht C ➲ A gilt – was ja richtig ist.

Für **Burks** ist die Verkettung (A ➲ B & B ⇨ C) → (A ➲ C) „intuitively correct“[104]. Aber auch hier ist, wie immer beim Beweis logischer Gesetze, die Berufung auf die Intuition belanglos. Gilt A ➲ B, so ist für den Sprecher Satz A, und aufgrund des Schlusses auch Satz B falsch; gilt hingegen B ⇨ C, so ist für den Sprecher die Wahrheit von B ungewiss; aus diesem Grunde können A ➲ B und B ⇨ C nicht zusammen behauptet werden, eine Verkettung ist nicht möglich; derartige Probleme können nie durch Intuition entschieden werden, sondern nur durch den Bezug auf die Wahrheitsbedingungen der Konditionale, die von der logischen Analyse vollständig zu erarbeiten sind.

2.2.6.2. Für das problematische Konditional sollen Transitivitäts- und Kontrapositionsgesetz nicht gelten

Viele Vertreter der Logistik bestreiten generell die Kontraposition für Konditionale. So behaupten **W.** und **M. Kneale**: „Conditionals are not subject to the principle of contraposition“, denn das „Konditional“ sei für die Falschheit von B gar nicht bestimmt[105]. Bei A ⇨ B ist die Wahrheit von B und damit die von ~B zwar ungewiss, wie man jedoch bei A ⇨ B vom ungewissen A unter Wahrheitsvorbehalt auf B schließen kann, so kann man vom ungewissen ~B bei Voraussetzung von $\mathcal{N}^e$(A,B) unter Wahrheitsvorbehalt auf ~A schließen.

Peter Downing referiert die folgende falsche Beweisführung für die Nicht-Kontraposition der Konditionale: Sätze der Form „Wenn A, dann B“ und „Wenn A, dann ~B“ könnten nicht zugleich wahr sein (sie seien contraries), während „Wenn A, dann B“ und „Wenn ~A, dann B“ verträglich seien. Wenn nun für die Konditionale die Kontraposition gelten würde, wäre die Kontraposition zu „Wenn A, dann B“ die Beziehung „Wenn ~B, dann ~A“, und die Kontraposition von „Wenn ~A, dann B“ wäre „Wenn ~B, dann A“; „Wenn ~B, dann A“ und „Wenn ~B, dann ~A“ aber seien unverträglich. „Consequently contraposition applies to no conditionals, of whatever type.“[106] Dieses Argument ist falsch, denn es ignoriert, dass die Konditionale „Wenn A, dann B“ und „Wenn ~A, dann B“ genau so unverträglich und konträr wie die Konditionale „Wenn A, dann B“ und „Wenn A, dann ~B“ sind; implizites Bezugsgesetz für A ⇨ B ist ($E_A \rightarrow E_B$), implizites Bezugsgesetz für ~A ⇨ B ist jedoch ($E_A \vee E_B$) – beide logische Formen stehen in der Beziehung 𝔻. Der Fall, dass zugleich zwei Konditionale A ⇨ B und ~A ⇨ B gelten, ist unmöglich, daher können auch ihre Kontrapositionen ~B ⇨ ~A und ~B ⇨ A nicht zugleich gelten.

Verschiedentlich werden konkrete Beispiele zur Widerlegung der Kontraposition des Konditionals angeführt. **Burks** sieht die Kontraposition des Konditionals durch die intuitiv gefühlte Unzulässigkeit der Behauptung „If it rains he’ll wear his raincoat; therefore if he doesn’t wear his raincoat it won’t rain“ widerlegt[107]. Auch dieses Argument ist nicht stichhaltig; denn wenn diese betreffende Person *immer*, wenn es regnet einen Regenmantel trägt (und die Person sich im Freien befindet), dann ist die Tatsache, dass sie außer Hauses keinen Regenmantel trägt, ein untrügliches Anzeichen dafür, dass es nicht regnet; damit ist nicht gesagt, dass die Kleidung der betreffenden Person das Wetter *verursacht* (Bedingung des Zusammenhangs wäre vielmehr das konstante Verhalten der Person bei Regenwetter), sondern nur, dass immer, wenn ein Ereignis bestimmter Art nicht der Fall ist, dann auch ein Ereignis bestimmter anderer Art nicht der Fall ist.

M. Kneale und **W. Kneale** versuchen die angebliche Nicht-Kontraposition folgendermaßen zu erhärten: Das Konditional „Wenn das Wasser ruhig ist ($\mathfrak{A}$), gewinnt Oxford den Ruderwettkampf ($\mathfrak{B}$)“ hat als Kontraposition das Konditional „Wenn Oxford den Ruderwettkampf nicht gewinnt ($\sim\mathfrak{B}$), dann ist das Wasser nicht ruhig ($\sim\mathfrak{A}$)“; es könne, so die Autoren, keine Äquivalenz zwischen beiden Konditionalen bestehen, weil die Tatsache, dass das Wasser nicht ruhig ist und Oxford nicht gewinnt, das erste Konditional widerlege, das zweite hingegen verifiziere[108]. Auch dieses Argument ist falsch, denn die Voraussetzung des ersten Konditionals $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$, dass bei ruhigem Wasser Oxford stets gewinnt, wird durch die Tatsache $\sim\mathfrak{A} \frown \sim\mathfrak{B}$ keineswegs widerlegt: eine Widerlegung wäre nur die Tatsache $\mathfrak{A} \frown \sim\mathfrak{B}$ (bei ruhigem Wasser Niederlage). Zweitens wird das Konditional $\sim\mathfrak{B} \Rightarrow \sim\mathfrak{A}$ durch die Tatsache $\sim\mathfrak{A} \frown \sim\mathfrak{B}$ nicht schon verifiziert: hinzukommen muss die Unmöglichkeit von $\mathfrak{A} \frown \sim\mathfrak{B}$.

Als „Gegenbeispiel“ für die Kontraposition führt **Frank Jackson** den Satz „If he has made a mistake, it is not a big mistake, therefore, if he has made a big mistake, he has not make a mistake“ an[109]; dies ist irreführend, denn das implizite Bezugsgesetz dieses Konditional ist nicht „Wenn jemand einen Fehler macht, dann macht er keinen großen Fehler“, sondern die *personenbezogene* Verhaltensregelmäßigkeit, dass diese Person wohl Fehler, nie aber große Fehler macht; dies stellt eine Beziehung der Postnonpendenz dar; dass diese Person große Fehler macht, ist immer und unter allen Umständen unmöglich – und es kann daher auch nie problematisch sein.

Hinter dem Bestreiten der Transitivität und Kontrapositionalität der Konditionale steht das apologetische Bestreben, die logische Inferiorität der umgangssprachlich ausgedrückten Konditionale gegenüber dem fregeschen Gedankengefüge $\mathfrak{C}$ zu belegen. Ständig beschwören die Logistiker eine angebliche Vagheit, Mehrdeutigkeit, Ungenauigkeit und Nichtentscheidbarkeit der umgangssprachlich ausgedrückten Konditionale, ohne dass sie, aufgrund ihres unkritischen Festhaltens an der fregeschen Missdeutung des Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ auch nur eine einigermaßen adäquate Einsicht in die Struktur und Geltungsbedingungen der Konditionale gewinnen können. Ihre durchweg sophistischen Scheinbelege der Mangelhaftigkeit der umgangssprachlich ausgedrückten Konditionale und Implikationen soll es dann als vernünftig, und zumutbar erscheinen lassen, die umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel durch die willkürlichen Erfindungen **Frege**s zu ersetzen; nur dann, so etwa **Downing** sei überhaupt erst eine klare Entscheidung über die Gültigkeit der „logischen Gesetze“ möglich[110]. Nun, die von mir dargelegten Wahrheitsbedingungen und Strukturen der Konditionale ermöglichen ohne weiteres die eindeutige Entscheidung über die Korrektheit von Konditionalen und die Gültigkeit ihrer Gesetze. Die fregeschen Gedankengefüge, ihre Gesetzmäßigkeiten und die Weisen ihrer Entscheidung sind, sofern sie in ihrer tatsächlichen Bedeutung aufgenommen werden, für das Verständnis der Konditionale, oder irgendwelche anderer logischer Zusammenhänge völlig belanglos; werden sie logisch missdeutet, so ist dies für die Logik verheerend. Das zeigt nicht zuletzt der Zustand der gegenwärtigen „Konditionallogik“, die auf **Frege**s unsachgemäßen Konstruktionen aufbaut: obwohl die Literatur einen nicht mehr überschaubaren Umfang annimmt, ist ihr Ertrag minimal und von chaotischer Uneinheitlichkeit: es kann sich kein sachgerechtes Verständnis gewonnen werden, solange die Orientierung an **Frege**s Vorschlägen beibehalten wird.

2.2.6.3. Der „Conditional Proof“

Anhänger des fregeschen Logikentwurfs versuchen mit Hilfe eines „*Conditional Proof*“ nachzuweisen, dass immer wenn „$A \Rightarrow B$“ wahr ist, auch das umgangssprachlich formulierte Konditional „Wenn_2 A, dann B“ wahr ist. Ausgangspunkt dieses „Beweises“ ist das Schema $\mathfrak{C}/\alpha$ – nämlich die Behauptung, dass $A \Rightarrow B$ und A zusammen die Wahrheit von B „implizieren“. Der in diesem Schema ausgedrückte Zusammenhang wird als *Sonderfall* des *logischen* Verhältnisses: *ein erster Sachverhalt p impliziert zusammen mit einem zweiten Sachverhalt q einen dritten Sachverhalt r* genommen; abkürzend sei dieser Zusammenhang durch den Ausdruck „$(p\wedge q) \to r$" dargestellt. Dieses logische Verhältnis $(p\wedge q) \to r$ soll nun seinerseits implizieren, dass das Vorliegen von p impliziert, dass q das r impliziert: behauptet wird also das Gesetz „Wenn p und q zusammen das r implizieren, dann impliziert q das r, wenn p vorliegt", abgekürzt: $[(p\wedge q) \to r)] \to [p \to (q \to r)]$. Aus der Anwendung dieses logischen Gesetzes, das intuitiv und ohne Beweis als gültig vorausgesetzt wird, auf den Sachverhalt „$(A\Rightarrow B)$ und A implizieren zusammen die Aussage B", soll sich ergeben, dass wenn $(A\Rightarrow B)$ gilt, dann auch „Wenn A, dann B" und das als bedeutungsgleich angesehene „A impliziert B" wahr sind. Der „Conditional Proof" besteht in folgendem Schluss:

logisches Bezugsgesetz:	$[(p\wedge q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$
Subsumtionsprämisse:	Mit [$(A \Rightarrow B)$ *und A implizieren zusammen die Aussage B*] gilt ein Verhältnis der Art $[(p\wedge q) \to r]$
Konklusion:	Mit „Wenn $A\Rightarrow B$, dann: wenn A, dann B" gilt also ein Verhältnis der Art $[p \to (q \to r)]$[111].

In diesem Beweis kommen *nebeneinander* der umgangssprachliche Ausdruck der implikativen Wenn$_1$-dann-Beziehung, und jener begriffsschriftliche Ausdruck vor, der angeblich eben diese Wenn$_1$-dann-Beziehung mit Hilfe des Gedankengefüges **C** präzise und explizit bestimmt. Die Bedeutungsgleichheit dieser Ausdrücke soll durch den Beweis erst erwiesen werden; dies bedeutet jedoch, dass dieser „Conditional Proof" in folgender Hinsicht auf Voraussetzungen beruht, die im Widerspruch zu seinem angeblichen Resultat stehen: der Beweis soll untermauern, dass das Gedankengefüge **C** identisch ist mit der üblicherweise umgangssprachlich durch „Wenn-dann", „…impliziert…", „aus … folgt …" ausgedrückten Form der Implikation bzw. des Konditionals; diese umgangssprachlichen Bezeichnungen und das begriffsschriftliche Zeichen „$\Rightarrow$" sollen deshalb durcheinander ersetzbar sein. Es geht im „Conditional Proof" vordringlich um das Verhältnis zwischen dem intuitiv-vortheoretischen Verständnis der Wenn-dann-Beziehung und **FREGE**s Definition (und nachträgliche Umdeutung) des Gedankengefüges **C**. Prinzipiell kann es jedoch nicht auf der einen Seite ein vortheoretisches, an die Umgangssprache gebundenes intuitives Verständnis der Wenn-dann-Beziehung geben, auf der anderen Seite eine *davon unabhängige* theoretische Bestimmung dieser Beziehung. Eine explizite Kenntnis der Bedeutung (= Wahrheitsbedingungen) der umgangssprachlich ausgedrückten Implikation als solche in ihrer Allgemeinheit kann vielmehr nur von den reflektierend-verallgemeinernden Analysen der Logiker geliefert werden, wobei diese Analysen am vortheoretischen (umgangssprachlichen) Verständnis ansetzen *müssen*. Das theoretisch-begriffliche Verständnis, das aus diesen Analysen, sofern sie Erfolg haben, resultiert, stellt eine verallgemeinernde, verbegrifflichende Umarbeitung, Transformation des vortheoretisch-intuitiven Verständnisses dar. Erst durch diese Verbegrifflichung der intuitiven, noch untrennbar mit den je besonderen gegenständlichen Inhalten vermischten Vorstellung implikativer Zusammenhänge kommen wir zu einer expliziten Kenntnis logischer Formen als solcher, erst dann können logische Gesetze erkannt und begründet werden.

Der „Conditional Proof" unterstellt nun gerade eine solche vortheoretische Kenntnis logischer Formen und Gesetze; er lässt die diachrone Abhängigkeit zwischen dem vorgängigen intuitiv-unreflektierten Verständnis des Logischen und dem nachfolgenden, daran anknüpfenden Versuch seiner theoretischen Verbegrifflichung außer Acht. Als theoretische Konzeption der Implikation gilt ihm **FREGE**s Bestimmung des Gedankengefüges **C**. Von diesem Gedankengefüge soll aber der Beweis erst noch zeigen, dass es mit der umgangssprachlich-intuitiven Verwendung des Wenn übereinstimmt – diese Übereinstimung darf also noch nicht vorausgesetzt werden, da sonst die Argumentation einen zirkulären Charakter erhielte. Das umgangssprachlich formulierte logische Bezugsgesetz des „Conditional Proof" muss daher als bekannt und gültig vorausgesetzt worden, ganz unabhängig von den Bemühungen **FREGE**s. Im „Conditional Proof" kommen *nebeneinander* die Ausdrücke „$\Rightarrow$" und „Wenn, dann"/„impliziert"/„entails" usw. vor – es muss dabei vorausgesetzt werden, dass diese Ausdrücke und ihre Bedeutungen unabhängig voneinander konzipiert, verstanden und begründet sind; diese Ausdrücke dürfen in der Darstellung des Beweises auch nicht durcheinander ersetzt werden[112]. **FREGE**s begriffsschriftlich dargestelltes theoretisches und das umgangssprachlich ausgedrückte intuitive Verständnis der Implikation wird ins Verhältnis eines äußeren Vergleichs von zueinander unabhängigen Konzepten gesetzt. Als Resultat soll sich aber Bedeutungsgleichheit und völlige Ersetzbarkeit ergeben.

Der „Beweis" müsste seinen Gehalt und seine Gültigkeit bewahren, wenn das umgangssprachliche *Wenn* in der Gesetzesprämisse überall durch die Bezeichnung des Gedankengefüges **C** ersetzt würde. Dass dies nicht der Fall ist, wird evident, wenn wir dem begriffsschriftlichen Zeichen $\Rightarrow$ keine andere Bedeutung geben, als **FREGE** festgesetzt hat. Das logische Bezugsgesetz könnte, wäre der „Conditional Proof" richtig, durch den Ausdruck „$[(A\&B) \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$" ersetzt werden; dieser Ausdruck besagt nichts anderes, als dass es falsch ist, dass $(A\&B\&\neg C)$ zugleich wahr und falsch ist – ein Aussagegehalt, der offenkundig verschieden ist von dem des umgangssprachlich formulierten logischen Gesetzes, wonach, wenn zwei Sachverhalte zusammen einen dritten implizieren, der erste Sachverhalt impliziert, dass der zweite den dritten impliziert. Wenn wir also in der Darstellung des „Conditional Proof“ das umgangssprachliche „wenn, dann“/„impliziert“ durch das fregesche Zeichen „$\Rightarrow$“ ersetzen, verändert dieser Beweis grundlegend seinen Aussagegehalt; dies dürfte nicht der Fall sein, wäre dieser Beweis richtig.

Indem der „Conditional Proof“ intuitiv, ohne jede Bezugnahme auf eine Theorie logischer Formen die Geltung des Bezugsgesetzes unterstellt, setzt er die Möglichkeit einer vortheoretischen Kenntnis und Begründung logischer Formen und Gesetze voraus; eine solche Kenntnis logischer Gesetze vor aller theoretischer Logik und unabhängig von ihr kann es nicht geben. Wer im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs für den „Conditional Proof“ einsteht, hat zwar präzise Vorstellungen über die Wahrheitsbedingungen des Gedankengefüges $A \Rightarrow B$ (sofern er dieses Gedankengefüge nicht der nachträglichen logischen Missdeutung unterzieht); er kann klarlegen, dass die Ausdrücke „$(A \,\&\, B) \Rightarrow C$“ und „$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$“ dasselbe bedeuten – nämlich, dass es falsch ist, dass A und B wahr und C falsch ist, und dass es deshalb falsch ist, dass das eine wahr und das andere falsch ist – wie im Fregegesetz $[(A \,\&\, B) \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$ behauptet wird. Er darf die Wahrheitsbedingung von „$A \Rightarrow B$“ jedoch nicht schon mit denen von „Wenn A, dann B“ bzw. „A impliziert B“ identifizieren – denn die Berechtigung einer solchen Identifikation soll erst erwiesen werden. Hinsichtlich der Geltungsbedingungen der Verhältnisse „p impliziert q“, „p und q zusammen implizieren r“ und „p impliziert, dass q das r impliziert“ muss er sich auf das unreflektierte, intuitive Verständnis stützen. Auf der Basis solcher vortheoretischer Intuitionen lässt sich die Geltung logischer Gesetze nicht begründen. Die Unschärfe und Mehrdeutigkeit des rein intuitiven Verständnisses der Wendungen „Wenn A, dann B“/„A impliziert B“ erhellt schon daraus, dass die Verfechter des „Conditional Proof“ ungeklärt lassen, ob das benutzte umgangssprachliche „Wenn“ das „Wenn_1“ zum Ausdruck implikativer Gesetzeszusammenhänge oder das „Wenn_2“ zum Ausdruck problematischer Konditionale darstellt – dass ohne Klärung dieser Frage der ganze Beweis keinen rechten Sinn besitzt, ist den Verfechtern dieses „Beweises“ gar nicht bewusst.

Als Bezugsgesetz dieses Beweises kommt nur das logische Gesetz $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ in Frage, denn nur diesem Gesetz lässt sich der behauptete implikative Zusammenhang „$A \Rightarrow B$ und A zusammen implizieren B“ subsumieren. Die Geltung dieses Gesetzes muss jedoch erst nachgewiesen werden. Das umgangssprachliche Wenn, das an mehreren Stellen in der Gesetzesprämisse des „Conditional Proof“ auftritt, ist das Wenn_1 zum Ausdruck der Implikation; da diese Wenn_1-Beziehung anders als das Gedankengefüge **C** keine Aussagen zu Relata hat, kann sie auf keinen Fall auch durch das Gedankengefüge-Zeichen $\Rightarrow$ ausgedrückt werden.

Ob das Bezugsgesetz des „Conditional Proof“ ein gültiges logisches Gesetz ist, lässt sich auf der Grundlage eines intuitiven Verständnisses logischer Zusammenhänge niemals entscheiden – aber auch die Kenntnis der Wahrheitsbedingungen des Gedankengefüges **C** hilft nicht weiter[113]. Welche Gesetzmäßigkeit der Ausdruck „$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$“ behauptet und ob dieses Gesetz gültig ist, kann hingegen mit dem im ersten Teil der vorliegenden Arbeit entwickelten Begriff der logischen Implikation leicht überprüft werden: Ein Sachverhalt oder Ereignis s impliziert einen Sachverhalt oder ein Ereignis t genau dann, wenn bei s das Ereignis t notwendig, bei $\sim$s hingegen t möglich im Sinne von $\mathcal{K}$ ist; dies bedeutet, dass s und t zusammen vorliegen können, dass s jedoch nicht ohne t vorliegen kann; bei $\sim$s kann sowohl t wie $\sim$t vorliegen. Damit gelten für die dreistellige logische Relation „$\mathbf{(p \wedge q) \rightarrow r}$“ die folgenden Wahrheitsbedingungen: beim gemeinsamen Vorliegen von p und q (also bei $p \frown q$), ist r notwendig; liegen p und q nicht zusammen vor (also bei $\sim(p \frown q)$), ist r möglich ($\mathcal{K}$). Es gilt $\sim(p \frown q)$ genau dann, wenn entweder $p \frown \sim q$ (Vorkommenskombinationen III und IV) oder $\sim p \frown q$ (Vorkommenskombinationen V und VI) oder $\sim p \frown \sim q$ (Vorkommenskombinationen VII und VIII) gilt: in zumindest einem dieser drei Fälle muss demnach sowohl r wie $\sim$r realmöglich sein.

Diese Bedingungen legen die folgende dreistellige logische Relation von (p, q, r) fest:

> Da bei $p \frown q$ das r notwendig ist, ist Vorkommenskombination I realmöglich ($\text{I} = 1$) und Vorkommenskombination II nicht-realmöglich ($\text{II} = 0$);
>
> bei $\sim$r ist $p \frown q$ unmöglich, es ist also $\sim$r mit $p \frown q$ nichtrealmöglich ($\text{II} = 0$); hingegen ist $\sim$r mit $\sim(p \frown q)$ realmöglich, es gilt also $\text{IV} = 1 \vee \text{VI} = 1 \vee \text{VIII} = 1$
>
> Liegen p und q nicht zusammen vor (also bei $\sim(p \frown q)$), ist r möglich ($\mathcal{K}$). Es gilt $\sim(p \frown q)$ genau dann, wenn entweder $p \frown \sim q$ (Vorkommenskombinationen III und IV) oder $\sim p \frown q$ (Vorkommenskombinationen V und VI) oder $\sim p \frown \sim q$ (Vorkommenskombinationen VII und VIII) gilt: in zumindest einem dieser drei Fälle muss demnach sowohl r wie $\sim$r realmöglich sein.

Außerdem muss es realmöglich sein, dass keines der drei Ereignisse vorliegt: p und q sollen zusammen r unter allen Bedingungen implizieren; bei der selbständigen Implikation $s \rightarrow t$ gilt ja, dass weder die hinreichende Bedingung noch ihre Folge vorliegen kann.

Für die Relation $(p \wedge q) \rightarrow r$ gelten also die folgenden Bedingungen:

1. I = 1
2. II = 0
3. (III = IV = 1) ∨ (V = VI = 1) ∨ (VII = VIII = 1)
4. VIII = 1

Insgesamt 23 dreistellige Totalformen genügen diesen Bedingungen[114]:

p q r	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13	R14	R15	R16	R17	R18	R19	R20	R21	R22	R23
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 0 1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1 0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1 1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0 1 0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0 0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Nun wird im „Conditional Proof“ behauptet, dass die logische Relation $(p \wedge q) \rightarrow r$ die Relation $\mathbf{p \rightarrow (q \rightarrow r)}$ impliziert; dies ist dann der Fall, wenn die Menge der Bedingungen für das Vorliegen von $(p \wedge q) \rightarrow r$ Obermenge der Menge der Bedingungen für das Vorliegen von $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ist. Dem Begriff der Implikation entsprechend besagt der Ausdruck „$p \rightarrow (q \rightarrow r)$“, dass bei p die Beziehung $q \rightarrow r$ notwendig gilt, bei $\sim p$ die Beziehung $q \rightarrow r$ hingegen möglich ($\mathcal{K}$) ist. Durch diese Bestimmungen ist die dreistellige logische Relation $[p, q, r\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$ festgelegt: Bei p gilt $(q \rightarrow r)$. Bei $\sim p$ ist die Beziehung $q \rightarrow r$ hingegen möglich ($\mathcal{K}$), und deshalb müssen die Vorkommenskombinationen V ($\sim p \frown q \frown r$), VII ($\sim p \frown \sim q \frown r$) und VIII ($\sim p \frown \sim q \frown \sim r$) alle realmöglich sein. Auch Vorkommenskombination VI muss realmöglich sein, denn sonst würde auch in allen Fällen von $\sim p$ $q \rightarrow r$ gelten, und es wäre damit von p unabhängig, dass q das r impliziert; bei $\sim p$ aber ist $q \rightarrow r$ nur möglich ($\mathcal{K}$); das Verhältnis $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ kann somit durch „$[p, q, r\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$“ dargestellt werden[115].

Um die Beziehung zwischen den beiden Relationen $(p \wedge q) \rightarrow r$ und $p \rightarrow (q \rightarrow r) = [p, q, r\ (1011)(1111)]$ festzustellen, brauchen wir nur zu prüfen, ob beide Verhältnisse zusammen, keines der beiden Verhältnisse, oder das eine ohne das andere vorliegen kann. Es liegen beide Verhältnisse genau dann vor, wenn [p, q, r (1011)(1111)] gilt; es liegt $(p \wedge q) \rightarrow r$ ohne $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ vor, wenn beispielsweise [p, q, r (1000)(0111)] gilt. Dass $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ohne $(p \wedge q) \rightarrow r$ vorliegt, ist nicht realmöglich, denn bei [p, q, r (1011)(1111)] gilt notwendig auch $(p \wedge q) \rightarrow r$; dass von beiden Verhältnissen keines vorliegt, ist der Fall etwa, wenn [p, q, r (0111)(1111)] gilt. Es ergibt sich, dass nicht $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ gilt, wie es die Intuition der Verfechter des „Conditional Proof“ glauben machen will, sondern $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$; das Bezugsgesetz des „Conditional Proof“ erweist sich als falsch. Zwar lässt sich im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs die Richtigkeit des Fregegesetzes „$[(A \& B) \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$“ nachweisen, damit steht aber noch lange nicht die Richtigkeit der logischen Gesetzesaussage „$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$“ fest. Schon die Falschheit des Bezugsgesetzes macht den „Conditional Proof“ zu einer hoffnungslosen Angelegenheit.

Dass das SFG-Schema **C**/α dem logischen Verhältnis $(p \wedge q) \rightarrow r$ subsumiert werden kann, beweist also nicht, dass bei $A \Rightarrow B$ die Wahrheit von A die Wahrheit von B impliziert; denn $(p \wedge q) \rightarrow r$ impliziert nicht das Verhältnis $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$. Das Verhältnis zwischen den SFG-Sachverhalten $A \Rightarrow B$, A und B lässt sich – unter Bezug auf **Frege**s Festsetzungen – jedoch genauer bestimmen, als es im Ausdruck „$((A \Rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$“ geschieht.

Vorkommenskombination			Begründung
I	$(A \Rightarrow B)\frown A\frown B$	1	Bei A und B ist A⇒B richtig
II	$(A \Rightarrow B)\frown A\frown\sim B$	0	Bei A und ¬B ist A⇒B falsch
III	$(A \Rightarrow B)\frown\sim A\frown B$	1	Bei ¬A und B ist A⇒B richtig
IV	$(A \Rightarrow B)\frown\sim A\frown\sim B$	1	Bei ¬A und ¬B ist A⇒B richtig
V	$\sim(A \Rightarrow B)\frown A\frown B$	0	Bei A und B ist ~(A ⇒ B) falsch
VI	$\sim(A \Rightarrow B)\frown A\frown\sim B$	1	Bei A und ¬B ist ~(A ⇒ B) richtig
VII	$\sim(A \Rightarrow B)\frown\sim A\frown B$	0	Bei ¬A und B ist ~(A ⇒ B) falsch
VIII	$\sim(A \Rightarrow B)\frown\sim A\frown\sim B$	0	Bei ¬A und ¬B ist ~(A ⇒ B) falsch

Es ergibt sich das Verhältnis [A⇒B, A, B ℂ𝕃], gleichbedeutend mit [A, A⇒B, B 𝔼𝕀] und [B, A⇒B, A 𝕀𝕁] – ein Gesetz des SFG[116]. *Diese* Beziehung involviert nun tatsächlich, dass bei A⇒B gilt: $\vdash A \rightarrow\ \vdash B$, d.h. wenn A wahr ist, dann ist B wahr. Ist damit die Behauptung – obwohl sie im „Conditional Proof" in der üblichen Form nicht korrekt bewiesen – also doch richtig, dass unter der Voraussetzung A⇒B „Wenn A, dann B" gilt, das Gedankengefüge **C** also einen implikativen Zusammenhang darstellt und angemessen durch das umgangssprachliche Wenn ausgedrückt werden kann?

Dies ist dennoch nicht der Fall – bei A⇒B besteht kein tatsächlicher implikativer Zusammenhang zwischen den Aussagen A und B. Die Tatsache, dass bei A⇒B gilt A → B (Wenn A wahr ist, dann ist B wahr) bedeutet nichts anderes, als dass die Behauptung A⇒B in zwei Fällen richtig ist – wenn A und B beide wahr, oder wenn A falsch ist[117]; jeder dieser disjunkten Fälle stellt eine hinreichende Bedingung für die Wahrheit von A⇒B dar; andere hinreichende Bedingungen gibt es nicht – genau dies drückt das Gesetz des SFG [A⇒B, A, B ℂ𝕃] aus. Das Gedankengefüge **C** wird auf beide Fälle bezogen – und nur wenn für den Sprecher beide Möglichkeiten gleichermaßen bestehen, kann es sagen „Wenn A wahr ist, ist B wahr".

Im *konkreten* Falle kann ein Gedankengefüge A⇒B jedoch nur dann *als Wahrheitsfunktion* behauptet werden, wenn schon bekannt und entschieden ist, welche der zwei möglichen hinreichenden Bedingungen tatsächlich gegeben sind. Und in diesem Fall der konkreten, hinreichend begründeten Behauptung eines Gedankengefüges **C** durch die Wahrheit von A und B oder die Falschheit von A lässt sich nicht mehr behaupten „Wenn A wahr ist, dann ist B wahr"; dies würde voraussetzen, dass dem Sprecher der Wahrheitswert von A nicht bekannt ist – für ihn demnach beide hinreichenden Bedingungen gleichermaßen möglich sind.

Wir sind in zwei Fällen berechtigt, von zwei Aussagen A und B zu behaupten: „Jedenfalls ist nicht A wahr und B falsch"; im ersten Falle des Gedankengefüges **C** ist die Behauptung eine informationsverschleiernde Kundgabe der Voraussetzung, dass A und B beide wahr oder dass A falsch ist; im zweiten Falle steht, unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B fest, das die Aussage A die Aussage B impliziert[118].

Es ist definitiv bekannt, welche der dann in Betracht kommenden Wahrheitswertkombinationen – beide Aussagen A und B sind wahr – beide sind falsch – A wahr und B falsch – A und B zuzuordnen sind. Die Aussage, dass jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist – A⇒B – stellt hier eine unnütze Informationsverschleierung dar. In diesem Falle kann keine Rede davon sein, dass die Aussage A die Aussage B impliziert. Da der Sprecher bereits weiß, dass A falsch bzw. A und B wahr sind, kann er jedoch nicht das problematische Konditional „Wenn A, dann B" behaupten. Weder „A und B sind wahr" noch „A ist falsch", die beiden einzigen hinreichenden Gründe für die Behauptung „A⇒B", berechtigen zu den Aussagen „Wenn A, dann B" und „A impliziert B". Nur in der bereits erwähnten abwegigen, konstruierten und gekünstelten Situation, dass jemand gesagt wird, es gelte A⇒B, ohne dass man ihm die Begründung durch die tatsächlichen Wahrheitswerte von A und B mitteilt, und er diese Behauptung auf Treu und Glauben akzeptiert, kann man sagen: „Ich weiß zwar nicht ob A wahr oder falsch ist, aber da mir gesagt wurde, dass nicht A wahr und B zugleich falsch ist, weiß ich, wenn A wahr ist, ist B wahr".

Auch dann, wenn wir wissen, dass eine Aussage A eine Aussage B impliziert, steht fest, dass jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist. Anders als im Falle des Gedankengefüges **C** ist die vorgängige Kenntnis der Wahrheitswerte von A und B nicht Bedingung des Ausschlusses der Wahrheitswertkombination $\mathcal{W}(A)\frown\mathcal{F}(B)$; diese Wahrheitswertkombination ist vielmehr ausgeschlossen, *weil A B impliziert*. Es kommt in diesem Falle nicht auf die Wahrheitswerte, sondern auf die Form der Aussagen A und B an: A muss das Vorliegen eines Sachverhalts/Ereignisses e_A, B muss das Vorliegen eines Sachverhalts/Ereignisses e_B feststellen; e_A und e_B müssen auf dasselbe Ereignis-Bezugsystem bezogen sein; e_A muss der Sachverhalts-/Ereignisklasse E_A, e_B muss der Sachverhalts-/Ereignisklasse E_B zugehören, und diese beiden

Sachverhalts-/Ereignisklassen müssen in der Beziehung der Implikation $E_A \rightarrow E_B$ stehen. Die Tatsache, dass *nicht* (*A wahr und B falsch*) ist, gilt nicht aus „wahrheitsfunktionalen“ Gründen, und beruht nicht wie bei A⇒B auf dem bloßen Faktum, dass die Aussagen eben einer anderen Wahrheitswertkombination angehören, sondern darauf, dass der Fall $E_A \frown {\sim} E_B$ nichtrealmöglich ist. Wenn unter der Voraussetzung, dass A auf diese Weise B impliziert, dem Sprecher die Wahrheitswerte von A und B nicht bekannt sind, kann er das problematische Konditional „Wenn A, dann B“ behaupten. Wer hingegen im Rahmen des SFG die Wahrheitswerte zweier Aussagen nicht weiß, kann den Ausschluss der Wahrheitswertkombination $\mathcal{W}(A) \frown \mathcal{F}(B)$, also das Gedankengefüge **C** gar nicht begründen und behaupten. Wenn der Sprecher unter der Voraussetzung, dass A B impliziert, weiß, dass A wahr ist, kann er das assertorische Enthymem „Weil A, deshalb B“ äußern; im Falle der Wahrheit von A und A⇒B gilt jedoch nicht „Weil A, deshalb B“. Wenn der Sprecher schließlich unter der Voraussetzung, dass A B impliziert, weiß, dass A falsch ist, kann er das kontrafaktische Konditional „Wenn A wahr wäre, wäre B wahr“ formulieren; wenn A⇒B wahr und A falsch ist, gilt hingegen nicht notwendig das entsprechende kontrafaktische Konditional.

Aus allen diesen Gründen ist es unzulässig, das Gedankengefüge **C** als Konditional „Wenn A, dann B“ oder als Behauptung „A impliziert B“ auszudrücken.

2.2.7. Die aus der Verwechslung der Fregegesetze mit logischen Gesetzen resultierenden Paradoxa

Dass **FREGE** die *schon definierten* Gedankengefüge im Nachhinein durch logische Partikeln bezeichnet, z.B. den Ausdruck „es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ als „Wenn A, so B“ formuliert , könnte man vielleicht noch als die Festlegung einer neuartigen, möglicherweise originellen, anderweitig nirgendwo praktizierten Verwendung des *Wenn* und anderer logischer Partikeln ansehen; dass das *Wenn* in der fregeschen Verwendung aufhört, eine logische Partikel zu sein, müsste dann freilich immer im Auge behalten werden. Unannehmbar ist es jedoch, wenn **FREGE** die beiden unvereinbaren Verwendungen der logischen Partikeln in ein- und demselben Ausdruck praktiziert und dabei ihren tief greifenden Unterschied ignoriert; dies geschieht dann, wenn er einerseits die Gedankengefüge, andererseits die logischen Beziehungen zwischen diesen Gedankengefügen durch ein und dieselben logischen Partikeln ausdrückt; diese Vermengung der unverträglichen „Lesearten“ der logischen Partikeln führt unvermeidlich zu logischen Ungereimtheiten. Viele *richtige* Gesetze des SFG erhalten einen widersinnig-paradoxen Charakter, wenn das Gedankengefüge **C** für die logische Relation der Implikation gehalten wird; es resultieren die sog. „Paradoxa der ›materialen Implikation‹“[119]; ich führe die wichtigsten an:

FREGEs Definition des Gedankengefüges A⇒B besagt, dass für jede falsche Aussage A das Gedankengefüge A⇒B wahr ist; dies ist der Gehalt des Gesetzes des SFG $(\neg A) \rightarrow (A \Rightarrow B)$; solange dem Zeichen „⇒“ keine andere als die festgelegte Bedeutung geben wird und die Bedeutungen von „→“ und „⇒“ nicht identifiziert werden, ist dieser Ausdruck zwar trivial, aber zweifellos richtig und in keiner Weise paradox: Wenn eine Aussage A falsch ist, dann ist es falsch, dass sie wahr und eine andere Aussage B falsch ist. Auch das aus dem Ausdruck dieses Gesetzes des SFG dadurch resultierende Fregegesetz, dass „→“ durch „⇒“ ersetzt wird, hat nichts Paradoxes an sich, wenn an der festgelegten Bedeutung des Zeichens „⇒“ festgehalten wird; „$(\neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ bedeutet: es ist falsch, dass eine Aussage A zugleich wahr und falsch und eine andere Aussage B falsch ist. Erst wenn das Gedankengefüge **C** aufgrund der „Wenn-dann“-Deutung mit der Implikation verwechselt wird, ergibt sich Widersinn: „Wenn eine Aussage A falsch ist, dann impliziert A jede beliebige Aussage B“, gleichbedeutend „Eine falsche Aussage impliziert jede andere Aussage“ oder auch „Wenn eine Aussage A falsch ist, dann gilt: Wenn A, dann B“ usw.

Die Behauptung $(A \& \neg A)$ ist für jede Aussage A ein Widerspruch und falsch; es ist deshalb falsch, dass $(A \& \neg A)$ wahr und eine andere Aussage B falsch ist: $(A \& \neg A) \Rightarrow B$. Wäre die Deutung des Gedankengefüges **C** als Implikation zulässig, müssten wir den Unsinn behaupten, dass ein Widerspruch jede beliebige Aussage impliziert.

Aus der festgesetzten Bedeutung des Zeichens „⇒“ ergibt sich, dass für jede wahre Aussage A die Gedankengefüge-Behauptung B⇒A wahr ist: $A \rightarrow (B \Rightarrow A)$ ist ein zwar triviales, aber richtiges und sinnvolles Gesetz des SFG; auch das entsprechende Fregegesetz $A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \equiv \neg(A \& \neg A \& B)$ hat nichts Widersinniges an sich. Erst wenn dem Zeichen „⇒“ die logische Bedeutung des Implikations-Wenn gegeben wird, ergibt sich die paradoxe Behauptung „Eine wahre Aussage folgt aus (wird impliziert von) jeder beliebigen Aussage“, gleichbedeutend „Wenn eine Aussage A wahr ist, dann gilt für jede beliebige Aussage B: wenn B, dann A“.

Aus den fregeschen Festlegungen geht hervor, dass für zwei beliebige wahrheitswertdefinite Aussagen A und B von den Gedankengefüge-Behauptungen A⇒B und B⇒A zumindest eine wahr ist; es gilt das 𝔸-Gesetz des SFG (A⇒B) ∨ (B⇒A)[120], an dem nichts Paradoxes beanstandet werden kann. Auch das entsprechende richtige Fregegesetz (A⇒B) ⊽ (B⇒A) mit der Bedeutung ¬(A&¬A&B&¬B) kann nicht als logisch unsinnig angesehen werden. Erst die logische Missdeutung dieses Gesetzes durch Identifizierung von **C** und Implikation führt zur widersinnigen Vorstellung, dass von zwei beliebigen Aussagen zumindest eine die andere „impliziert".

Das Gesetz des SFG ¬(A⇒B) → (B⇒A) drückt die nicht-paradoxe Trivialität aus, dass dann, wenn A wahr und B falsch ist, es falsch ist, dass B wahr und A falsch ist; auch das entsprechende Fregegesetz¬(A⇒B)⇒(B⇒A) ≡ ¬(A&¬A&B&¬B) besitzt keinen paradoxen Gehalt. Erst die logische Missdeutung des Gedankengefüges **C** als logische Implikationsbeziehung gibt dem Ausdruck eine sinnwidrige Bedeutung: „Ist A nicht hinreichende Bedingung für B, dann ist B hinreichende Bedingung für A", gleichbedeutend „Wenn B nicht aus A folgt, dann folgt A aus B".

Das Gesetz des SFG (A⇒B) ∨ (¬A⇒B) besagt ohne jede Paradoxität, dass zwei Aussagen zumindest eines der Gedankengefüge **C** und **A** zukommt; das entsprechende Fregegesetz (A⇒B) ⊽ (¬A⇒B) sagt aus, dass es falsch ist, dass eine Aussage A zugleich wahr und falsch und eine Aussage B falsch ist; erst die logische Missdeutung des Zeichens „⇒" führt zur logisch abwegigen Annahme, dass jede Aussage B entweder aus jeder anderen Aussage A, oder ihrer Negation ¬A oder gar aus beiden „folge" (von ihr impliziert werde).

Das gültige, nicht-paradoxe Gesetz des SFG (A⇒B) ∨ (A⇒¬B) besagt unter anderem, dass es Aussagen A gibt, für welche sowohl (A⇒B) wie (A⇒¬B) wahr ist; im Rahmen der logischen Missdeutung des Zeichens „⇒" würde dies die Möglichkeit einschließen, dass eine Aussage A eine Aussage B und ihre Negation ¬B „impliziert", dass jede Aussage A von einer beliebigen Aussage B und ihrer Negation zumindest eine „impliziert".

Da der festgesetzten Bedeutung des Zeichens „⇒" gemäß (A⇒¬A) genau dann wahr ist, wenn A falsch ist, und (¬A⇒A) genau dann wahr ist, wenn A wahr ist, gilt das Gesetz des SFG: (A ⇒ ¬A) ≻≺ (¬A⇒A). Wird die logische Missdeutung des Gedankengefüges **C** akzeptiert, würde der Ausdruck „(A ⇒ ¬A) ≻≺ (¬A⇒A)" besagen: entweder gilt, dass wenn A wahr, ¬A wahr ist, oder es gilt, dass wenn ¬A wahr ist, A wahr ist. Während das nicht missdeutete Gesetz des SFG besagt, dass entweder ¬(A&¬¬A) (≡ ¬A) oder ¬(¬A&¬A) (≡ A) wahr ist, also das PNW ausdrückt, verstößt die logische Missdeutung des Ausdruck gegen das PNW.

Diese der logischen Missdeutung des Gedankengefüges **C** entspringenden Ungereimtheiten, die sich beliebig vermehren ließen, werden als „Paradoxa der ‚materialen Implikation'", also als „Paradoxa des Gedankengefüges **C**" bezeichnet; diese Kennzeichnung trifft nicht den Kern der Sache, denn weder dieses Gedankengefüge selbst, noch irgendeine der gesetzmäßigen Beziehungen, die zwischen **C** und anderen Gedankengefügen bestehen (Gesetze des SFG), noch die Fregegesetze sind in irgendeiner Weise logisch widersinnig und abwegig, solange man sich an die klar definierte Bedeutung der Gedankengefüge hält; Paradoxa treten erst auf, wenn das Gedankengefüge logisch als Implikation missdeutet wird. Es gibt – sachlich betrachtet – also gar keine „Paradoxa des Gedankengefüges **C** (Paradoxa der ‚materialen Implikation'[121])", es gibt nur *Paradoxa der logischen Missdeutung des Gedankengefüges* **C**.

Auch die logische Missdeutung anderer Gedankengefüge führt zu logischen Paradoxa[122]. Würde das Gedankengefüge **A** das Verhältnis der verträglichen Alternativen ausdrücken, wäre jede beliebige wahre oder falsche Aussage eine Alternative zu jeder wahren Aussage; die Rede von Alternativen verlöre jeden Sinn. Das Gedankengefüge A⇑B – die Aussagen A und B sind jedenfalls nicht beide wahr – soll die logische Beziehung der Unverträglichkeit oder des konträren Gegensatzes (𝔻) darstellen. Wäre diese nachträgliche Deutung richtig, wäre jede falsche Aussage mit sich selbst unverträglich (sie ist identisch mit sich selbst) – ja, unter Voraussetzung der logischen Missdeutung von **C**, wäre sie nicht nur mit sich selbst unverträglich, sie würde sich *zugleich* selbst implizieren! Dass die logische Deutung des Gedankengefüges **D** sachlich falsch ist, ergibt sich auch aus der Tatsache, dass die logische Beziehung der Unverträglichkeit gar nicht zwischen *Feststellungen* A und B, bzw. den *Einzelereignissen* e_A und e_B, deren Vorliegen bzw. Nichtvorliegen von A und B konstatiert wird, bestehen kann. Wenn etwa die Aussage „In Hamburg scheint an der bestimmten Zeitstelle **t** die Sonne" (abgekürzt: $\mathfrak{A}$) wahr und die Aussage „In Stuttgart scheint an eben dieser bestimmten Zeitstelle **t** die Sonne" (abgekürzt: $\mathfrak{B}$) falsch ist, so bedeutet dies noch in keiner Weise Unverträglichkeit; von einer Unverträglichkeit könnte erst dann gesprochen werden, wenn es überhaupt, d.h. zu jeder Zeit unmöglich wäre, dass in Hamburg und Stuttgart gleichzeitig die Sonne scheint; nicht zwischen den Einzelereignissen $e_{\mathfrak{A}}$ und $e_{\mathfrak{B}}$, sondern zwischen den entsprechenden Ereignisklassen $E_{\mathfrak{A}}$ und $E_{\mathfrak{B}}$ besteht Verträglichkeit oder Unverträglichkeit. Wenn an der Zeitstelle **t** in

Hamburg und Stuttgart nicht zugleich die Sonne scheint, so sind die beiden Ereignisklassen, dass es in Hamburg und in Stuttgart zu bestimmter Zeit zugleich die Sonne scheint, doch verträglich.

FREGEs unterstellt (BLF 55f), das nicht-ausschließende *Oder* (das mit **A** verwechselt wird) sei umfassender als das (mit **J** verwechselte) ausschließende *Oder* und schließe es mit ein. Das trifft wohl für die beiden nicht-missdeuteten Gedankengefüge **A** und **J** zu – es gilt das Gesetz des SFG: $(A \bowtie B) \rightarrow (A \,\overline{\triangledown}\, B)$ – nicht aber für das ausschließende und nicht-ausschließende *Oder*: diese logischen Formen stehen in der Beziehung der Unverträglichkeit. Es ist doch offensichtlich, dass zwei Aussagen nicht zugleich ausschließende und nicht-ausschließende Alternativen sein können. Für die logische Missdeutung der Gedankengefüge **A** und **J** ergibt sich das Paradox: „Wenn zwei Aussagen im Verhältnis des ›ausschließenden Oder‹ dann stehen sie im Verhältnis des ›nicht-ausschließenden Oder‹".

Es ist zumindest seit ARISTOTELES bekannt, dass es zu jedem Urteil nur ein kontradiktorisches Urteil geben kann; im Rahmen der Missdeutung des Gedankengefüges **J** als Beziehung der Kontradiktion oder Widerspruchs stünde jedes wahre Urteil zu *jedem* falschen und jedes falsche Urteil zu *jedem* wahren in der Beziehung der Kontradiktion. Der kontradiktorische Gegensatz zur Aussage „$2 < 3$" ist „$2 \geqslant 3$", nicht aber etwa auch „Frege ist in Jena geboren". Es ist auch schon lange bekannt, dass die logischen Beziehungen der Kontrarietät und Kontradiktion selbst konträr sind (zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q können nicht zugleich im Verhältnis $\mathbb{D}$ und $\mathbb{J}$ stehen); wäre die logische Deutung der Gedankengefüge **J** und **D** richtig, wären die Verhältnisse der Kontradiktion und Kontrarietät verträglich. Im Rahmen der logischen Deutung der Gedankengefüge **A**, **C**, **D** und **J** könnten weiterhin zwei Aussagen A und B *zugleich* in den Beziehungen der verträglichen Alternativen, der Implikation, der Kontrarietät und der Kontradiktion stehen, wenn die Aussage A falsch und die Aussage B wahr ist. Die logischen Formen verschwämmen ineinander und lösten sich auf.

Die Paradoxa von der eben besprochenen Art haben ihren Grund allein in der nachträglichen logischen Deutung der Gedankengefüge. Diese irreführenden Deutungen beruhen darauf, dass nach der Konstruktion der Gedankengefüge „vergessen" wird, dass diese Konstruktion auf dem Prinzip der Beziehungslosigkeit beruht und keinerlei logische und andersartige Beziehung zwischen den durch Gedankengefüge prädizierten Aussagen voraussetzen darf. Wenn die logische Deutung der Junktoren im Widerspruch dazu dann doch solche logischen Beziehungen zwischen den durch Gedankengefüge prädizierten Aussagen unterstellt – Beziehungen der Alternative, der Implikation, Replikation, Äquivalenz, Kontrarietät, Kontradiktion, usw. –, sind Widersprüche und logischer Unsinn unvermeidlich. Es ist widersprüchlich, wenn einerseits gefordert wird, dass zwischen Aussagen Beziehungslosigkeit (genauer: die Beziehung der echten Independenz $\mathbb{V}$) besteht, andererseits ihr Verhältnis als Verhältnis logischer Dependenz ausgeben wird.

Die Tatsache, dass weder die Gedankengefüge, noch die Gesetze des SFG und Fregegesetze in ihrer festgelegten Bedeutung zu irgendwelchen logischen Unstimmigkeiten führen, und dass der Eindruck des Paradoxen und logischen Widersinns sich erst dann aufdrängt, wenn die Gedankengefüge im Widerspruch zu ihren Definitionen als logische Verhältnisse, die Gesetze des SFG und die Fregegesetze als logische Gesetze missdeutet werden, zeigt unmissverständlich, dass die Gedankengefüge, ungeachtet ihrer gänzlichen Nutzlosigkeit, wohl präzis definierte Prädikate sind, dass sie jedoch nicht als logische Formen gedeutet werden dürfen; dies bedeutet allerdings, dass FREGEs Theorie der Gedankengefüge (die so genannte „Aussagenlogik") keine Logik ist. Der Ausdruck der Gedankengefüge mit Hilfe der umgangssprachlichen Partikeln „wenn", „oder", „genau dann, wenn" usw. stellt in *jedem* Falle eine logische Missdeutung dar.

2.2.8. Die relevanzlogistischen Versuche, die Paradoxa der Missdeutung der Gedankengefüge durch die Erweiterung des SFG zu beseitigen

Manche Autoren haben die sich aus der Missdeutung der Gedankengefüge ergebenden Widersinnigkeiten zu Recht als Belege für schwerwiegende Mängel des fregeschen Systems angesehen, und deshalb eine Reihe von Versuchen unternommen, die Implikation anders und sachgerechter als FREGE zu bestimmen. Um die „Paradoxa der materialen Implikation" zu vermeiden, sollte insbesondere das die „materiale Implikation" auszeichnende Prinzip der Beziehungslosigkeit verworfen werden[123]. Die Kritik an der Deutung des Gedankengefüges **C** als Implikations- bzw. Folgerungsbeziehung zielt besonders auf das Fehlen der „Relevanz", d.h. das Fehlen eines *Sinnzusammenhanges* zwischen den Relata der Gedankengefüge[124]; die Versuche, gerade diesen Mangel des fregeschen Systems zu beseitigen, fasst man daher unter dem Titel der „Relevanz-Logik" zusammen; ich spreche, um diese Versuche als genuine Ableger des fregeschen

Logikentwurfs zu kennzeichnen, von „Relevanz-Logistik". In keinem dieser Versuche wurde **FREGE**s Konstruktion der Gedankengefüge einer durchgreifend kritischen Überprüfung unterzogen; der tatsächliche Grund der Paradoxa, die nachträgliche Missdeutung der zuvor präzis und paradoxienfrei definierten Gedankengefüge, wurde auch hier ignoriert. Die Relevanz-Logistiker versuchten im Gegenteil, die Neubestimmung der Implikation, bzw. der logischen Folgerung *durch eine Erweiterung und Modifikation des SFG* zu erreichen. Ich versuche, die wesentlichen Züge dieser Versuche und die Gründe ihres Scheiterns darzulegen.

Es fehlt den relevanzlogistischen Versuchen einer Neubestimmung der Implikation durchweg an der notwendigen Unterscheidung der Folgerungsbeziehung zwischen Prämissen und Konklusion in einem Schluss und der Beziehung der Implikation[125]; in einem *Schluss* haben wir es mit einer Beziehung von Aussagen zu tun, während die Relata einer *Implikation* nicht Aussagen sind, sondern Sachverhalts-/Ereignisklassen[126]. Nicht zuletzt wegen dieser Gleichsetzung von Folgerungsrelation und Implikation lassen die Relevanz-Logistiker ungeklärt, welcher Art die Relata der gesuchten Implikation („Entailment") sind; wie aber soll eine Relation bestimmt werden können, ohne dass klar ist, auf welche Relata sich die Relation bezieht?

Obwohl die Relevanz-Logistiker ohne Prüfung davon ausgehen, die neu zu bestimmende Implikation habe wie die Gedankengefüge als Relata Aussagen, führen sie unter der Hand jedoch ganz andere Relata für diese gesuchte Implikation ein, nämlich Gedankengefügeschemata wie (A⇒B), d.h. allgemeine Sachverhalte der Art, dass zwei Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zukommt. Die gesuchte Beziehung kann daher weder ein Gedankengefüge, noch die Folgerungsrelation sein (in beiden Fällen wären die Relata Aussagen), sondern sie ist als eine Beziehung zwischen Sachverhalts-Ereignisklassen stets eine zweistellige *logische Relation*. Ich verwende für die gesuchte logische Beziehung den gebräuchlichen Namen „*Entailment*". Da die Relata der jeweiligen Entailmentbeziehung nie Aussagen, sondern immer Gedankengefügeschemata sind, verwende ich zu ihrer Bezeichnung nicht die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen A, B, C, …, sondern die Beliebig-Element-Zeichen für Gedankengefüge Γ_1, Γ_2, Γ_3, …

In der Relevanzlogistik bedient man sich hauptsächlich zweier Vorgehensweisen, durch „Erweiterung" des SFG die Beziehung des Entailment zu bestimmen:

Im ersten Falle werden *zusätzliche* Bedingungen dafür festgelegt, dass bei Geltung eines Fregegesetzes der Form $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ *zugleich* zwischen Γ_1 und Γ_2 die Entailmentbeziehung besteht. Dabei wird stets als zumindest notwendige Bedingung für die Entailment-Beziehung zwischen Γ_1 und Γ_2 gefordert, $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ müsse ein Fregegesetz, eine „aussagenlogische Tautologie" sein. Schon diese Festsetzung schließt aus, dass die Relata des Entailment Aussagen sind. Immer wenn $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ ein gültiges Fregegesetz (eine „aussagenlogische Tautologie") ist und evtl. noch zusätzliche restriktive Bedingungen erfüllt sind, soll gelten, dass zwischen den Gedankengefügen Γ_1 und Γ_2 die zweistellige logische Relation des Entailment besteht.

Die zweite relevanzlogistische Vorgehensweise ist der Versuch einer „axiomatischen" Bestimmung des Entailment.

2.2.8.1. Die „strikte Implikation"

Damit zwischen zwei Gedankengefügen Γ_1 und Γ_2 die Entailmentbeziehung besteht und Γ_2 *aus* Γ_1 „ *folgt*"[127] beziehungsweise Γ_1 das Γ_2 *impliziert*[128], genügt es manchen Autoren zufolge, dass $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ ein Fregegesetz, eine „Tautologie" ist[129]. Auch die „strikte Implikation" von **C.I.LEWIS** fällt unter *diesen* Bestimmungsversuch des Entailment; ich bezeichne diese Beziehung der „strikten Implikation" durch den Ausdruck „$\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$". Genau dann, wenn eine wahrheitsfunktionale „Implikation" (eine „truth-implication" $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$) eine „Tautologie" darstelle, gelte die „strikte Implikation" $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$ und könne Γ_2 aus Γ_1 gefolgert („deduced") werden; jeder Ausdruck einer SFG-„Tautologie" mit dem Hauptjunktor ⇒ könne durch den Ausdruck ersetzt werden, in dem dieser Junktor „⇒" durch das Zeichen der „strikten Implikation" ↠ ersetzt sei[130]. Nach **LEWIS** schließt eine Implikation eine *Unmöglichkeit* aus und nicht bloß, wie das Gedankengefüge A ⇒B, eine *faktische* Falschheit. Ein Gedankengefüge kann die faktisch vorgegebenen Wahrheitswerte nur mit oder ohne Informationsverschleierung wiedergeben – die Bedeutungen der Gedankengefüge betreffen nicht das Unmögliche noch irgendwelche andere Modalitäten. So ist es bei Geltung der strikten Implikation (A&B) ↠ (A⇒B)[131] nicht nur für irgendwelche zwei konkreten Aussagen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ faktisch falsch, dass ($\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$) wahr und ($\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$) falsch ist, sondern es gibt kein Aussagenpaar (A,B), für das (A&B) wahr und (A⇒ B) falsch sein könnte – dies ist unmöglich – anders als das Gedankengefüge $\mathfrak{C}$ stellt die „strikte Implikation" einen Gesetzeszusammenhang, eine bestimmte, zweistellige *logische* Relation zwischen speziellen Sachverhaltsklassen dar[132].

Eine „strikte Implikation“ $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$ gilt genau dann, wenn es unmöglich ist, dass irgendwelchen Aussagen wohl das Gedankengefüge Γ_1, nicht aber das Gedankengefüge Γ_2 zukommt; auf der Grundlage des im ersten Teil dargelegten Systems der logischen Formen lässt sich die „strikte Implikation“ unschwer als die *logische Relation* $(\circ 0 \circ\circ)(p,q)$ bestimmen – allerdings auf Gedankengefügeschemata beschränkt. Die Ausdrücke „$\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$“, „$(\circ 0 \circ\circ)(\Gamma_1,\Gamma_2)$“ und „$\mathrm{nrm}(\Gamma_1 \frown \neg\Gamma_2)$“ haben dieselbe Bedeutung. Besteht zwischen zwei Gedankengefügen Γ_1 und Γ_2 die Beziehung der strikten Implikation, dann besteht eine der folgenden (nichtleeren) Funktorrelationen: $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{X}$; die strikte Implikation $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$ kann auch durch „$\mathbb{C} \Cup \mathbb{E} \Cup \mathbb{F} \Cup \mathbb{H} \Cup \mathbb{K} \Cup \mathbb{M} \Cup \mathbb{X}(\Gamma_1,\Gamma_2)$“ bezeichnet werden. Diese „strikte Implikation“ ist zwar im Gegensatz zum Gedankengefüge $\mathbf{C}$ eine logische Relation – dass **Lewis** diese Relation jedoch als Implikation/Entailment ausgibt, ist eine nicht folgenlose Missdeutung von „$\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$“: bei $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$ soll die Geltung von Γ_1 die Geltung von Γ_2 implizieren, d.h. *echt* notwendig machen; die Unmöglichkeit von $\Gamma_1 \frown \neg\Gamma_2$ ist hierfür zwar eine notwendige, aber noch keine hinreichende Bedingung. Die Geltung eines Gedankengefüges Γ_1 macht die Geltung eines Gedankengefüges Γ_2 nur dann *echt notwendig*, wenn entweder die Implikation $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ oder die Äquivalenz $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$ gilt, d.h. wenn $(10{\bullet}1)(\Gamma_1,\Gamma_2) \equiv \mathbb{C} \Cup \mathbb{E}(\Gamma_1,\Gamma_2)$ gilt; ich schreibe auch „$\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$“. Nur im Falle von $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$ haben wir die gesuchte echte Entailmentbeziehung. Bei $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$ gilt wohl wie bei $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$ dass der Fall $\Gamma_1 \frown \neg\Gamma_2$ nicht-realmöglich ist – darüber hinaus müssen bei $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$ die Fälle $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$, und $\neg\Gamma_1 \frown \neg\Gamma_2$ realmöglich sein; nicht immer, wenn die „strikte Implikation“ gilt, gilt das echte Entailment. In jenen Fällen, in denen $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$, nicht aber $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$ gilt, nämlich genau dann, wenn Γ_1 und Γ_2 in den logischen Verhältnissen $\mathbb{M}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{X}$, $\mathbb{K}$, und $\mathbb{H}$ stehen, führt es zu paradoxen Ungereimtheiten, wenn von Implikation oder Entailment geredet wird[133]. In genau diesen Fällen treten die so genannten „Paradoxien der strikten Implikation“ auf: nämlich dann, wenn entweder Γ_1 eine „Antilogie“ (die Negation eines Fregegesetzes – was immer auf die Behauptung eines Widerspruchs wie „$A \& \neg A$“ hinausläuft) ist[134], oder wenn Γ_2 eine „Tautologie“ (ein Fregegesetz wie $\neg(A \& \neg A)$“ ist[135]. Wäre die Deutung der „strikten Implikation“ als Implikation/Entailment richtig, müsste ein Widerspruch wie $(A \& \neg A)$ jede beliebige Aussage implizieren, und ein (Frege-)Gesetz wie $\neg(A \& \neg A)$ müsste von jeder beliebigen Aussage (ob wahr oder falsch) impliziert werden[136]. **Lewis**’ Konstruktion der „strikten Implikation“ ist ein misslungener Versuch, das Entailment zu bestimmen[137].

2.2.8.2. Das WGS-Entailment als sachgerechte Bestimmung des Entailment

Da die Deutung der „strikten Implikation“ $\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_2$ als Entailment nur dann zu Ungereimtheiten führt, wenn Γ_1 ein Widerspruch („Antilogie “) oder Γ_2 ein Fregegesetz (eine „Tautologie“) ist, genügt es für eine adäquate Bestimmung des Entailment zwischen Γ_1 und Γ_2, wenn für die „Tautologie“ $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ gefordert wird, dass Γ_1 keine „Antilogie“ und Γ_2 keine „Tautologie“ ist; diese Restriktion verhindert, dass zwischen Γ_1 und Γ_2 das logische Verhältnis $\mathbb{F}$ (Γ_1 ist ein Widerspruch), oder $\mathbb{X}$ (Γ_1 und Γ_2 sind Widersprüche), oder $\mathbb{H}$ (Γ_2 ist eine „Tautologie“), oder $\mathbb{K}$ (Γ_1 und Γ_2 sind „Tautologien“) oder $\mathbb{L}$ (Γ_1 ist ein Widerspruch, Γ_2 eine „Tautologie“) besteht; es bleiben nur die logischen Verhältnisse $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$, bei welchen die Geltung von Γ_1 die Geltung von Γ_2 echt notwendig macht. Da dieses Kriterium des Entailment von **v.Wright**, **Geach** und **Smiley** vorgeschlagen wurde – spricht **Wessel** vom „WGS-Kriterium“ für die Entailmentbeziehung[138].

Trifft das WGS-Kriterium auf einen Ausdruck „$\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$“ zu, dann gilt das logische Verhältnis des Entailment $(10{\bullet}1)(\Gamma_1,\Gamma_2)$: der Fall, dass Γ_1 ohne Γ_2 gilt (Vorkommenskombination II = 0), ist nicht möglich („strikte Implikation“); da Γ_1 nach dem WGS-Kriterium für manche Aussagen wahr ist, muss es möglich sein, dass Γ_1 zusammen mit Γ_2 gilt (Vorkommenskombination I = 1)[139]; da sowohl Γ_1 und Γ_2 jeweils nicht gelten können, ist es möglich, das beide Gedankengefüge nicht gelten (Vorkommenskombination IV = 1). Ob Γ_2 ohne Γ_1 gelten kann (Vorkommenskombination III), bleibt durch das WGS-Kriterium unbestimmt. Jedem dem WGS-Kriterium genügenden SFG-Ausdruck „$\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$“ entspricht ein Entailment-Gesetz des SFG $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$. Wenn wir nur dann zwischen Γ_1 zu Γ_2 eine Entailment-Beziehung behaupten, wenn „$\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$“ dem WGS-Kriterium genügt, sind alle Paradoxa ausgeschlossen, die aus der Missdeutung des Gedankengefüge $\mathbf{C}$ oder der „strikten Implikation“ als Entailment resultieren.

Von den Vorschlägen der Relevanzlogistiker gestattet es einzig das WGS-Kriterium, für beliebige Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 definitiv festzustellen, ob zwischen Γ_1 und Γ_2 die Entailmentbeziehung besteht[140]. **Wessel** irrt deshalb mit der Behauptung, dass *jedes* dieser verschiedenen „Entailment-Kriterien“ in einem begrenzten Bereich des Wissens gültig und anwendbar sein könne, die fregesche Konzeption, nach der schon das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ ein Entailment bezeichnet, könne etwa angewendet werden in einer wissenschaftlichen Theorie, deren Widerspruchsfreiheit schon nachgewiesen sei[141]; in einer empirischen Theorie, die einen Widerspruch aufweise, werde am günstigsten nach der „strikten logischen Folgebeziehung“ (dem WGS-Entailment) geschlossen, weil sich der Widerspruch dann leicht lokalisieren und ausschließen lasse[142].

2.2.8.2.1. WGS-Entailment und „Relevanz“ (Sinnzusammenhang)

Wie bestimmen die Relevanz-Logistiker die geforderte „Relevanz“ (Sinnzusammenhang, „connection of meaning“) zwischen den Relata des SFG-Entailment[143]? Eine notwendige Bedingung für die Geltung einer bedingungslogischen Dependenzrelation zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen ist der Bezug dieser Sachverhalts-/Ereignisklassen auf ein gemeinsames Ereignis-Bezugsystem. Für das SFG-Entailment bedeutet dies, dass die beiden Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 bei Geltung von $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$ jeweils auf dieselben Aussagen bezogen sein müssen; die Ausdrücke der Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 müssen also zumindest ein gemeinsames Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen („Aussagevariablen“) enthalten. **W.T.Parry** und **Horst Wessel** fordern jedoch als Bedingung eines Entailment $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$, dass jede „Aussagevariable“ im Ausdruck von Γ_2 auch „Aussagevariable“ im Ausdruck von Γ_1 ist; denn nur diese Restriktion könne die „Deutung“ der beiden „Paradoxa der ›strikten Implikation‹“ $((A\&\neg A) \leftrightarrows B)$ und $(B \leftrightarrows (A \triangledown \neg A)$ als SFG-Entailments verhindern[144].

Für **Wessel** wird schon durch Restriktionen dieser Art der Sinnzusammenhang (die „Relevanz“) zwischen den Relata des SFG-Entailment garantiert: er nennt die „Aussagevariablen“, die im Ausdruck von Γ_1 und Γ_2 vorkommen, die „Sinneinheiten“ oder „Sinnelemente“ der Entailment-Relata. Es soll „$A_{\Gamma 1}$“ die Menge der Aussagevariablen im Ausdruck von Γ_1 und „$A_{\Gamma 2}$“ die Menge der „Aussagevariablen“ im Ausdruck von Γ_2 bezeichnen; nach **Wessel** erhält man, je nachdem, welche Beziehung zwischen den Mengen $A_{\Gamma 1}$ und $A_{\Gamma 2}$ besteht, unterschiedliche, aber doch gleichermaßen gültige Arten des „Entailment“. Zwischen den Mengen $A_{\Gamma 1}$ und $A_{\Gamma 2}$ können die folgenden Verhältnisse bestehen[145]:

(1)	$A_{\Gamma_1} \subset A_{\Gamma_2}$	Alle „Aussagevariablen“ von Γ_1 sind auch „Aussagevariablen“ von Γ_2, aber nicht umgekehrt.
(2)	$(A_{\Gamma_1} \cap A_{\Gamma_2} \neq \varnothing) \& (A_{\Gamma_1} \setminus A_{\Gamma_2} \neq \varnothing) \& (A_{\Gamma_2} \setminus A_{\Gamma_1} \neq \varnothing)$	Γ_1 und Γ_2 haben gemeinsame „Aussagevariablen“, aber jeweils auch „Aussagevariablen“, die das andere Gedankengefüge nicht enthält.
(3)	$A_{\Gamma_1} = A_{\Gamma_2}$	Alle „Aussagevariablen“ von Γ_1 sind auch „Aussagevariablen“ von Γ_2 und umgekehrt.
(4)	$A_{\Gamma_2} \subset A_{\Gamma_1}$	Alle „Aussagevariablen“ von Γ_2 sind auch „Aussagevariablen“ von Γ_1, aber nicht umgekehrt.

Die Restriktion auf eine dieser Möglichkeiten stellt eine unzulässige Einschränkung des echten Entailment $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}(\Gamma_1,\Gamma_2)$ dar; dieses echte und einzige SFG-Entailment kann in allen diesen vier Fällen zutreffen: ein Beispiel für den Fall (1) ist etwa das SFG-Entailment $A\&B \leftrightarrows A \triangledown B \triangledown C$; für den Fall (2) ist das SFG-Gesetz $A\&B\&C \leftrightarrows B \triangledown C \triangledown D$ ein Beispiel; für Fall (3) stellt $(A\&B) \leftrightarrows (A \Rightarrow B)$ und für Fall (4) ist $(A\&B) \leftrightarrows B$ ein Beispiel. Mit der unzulässigen Einschränkung auf Fall (4) wollten **Parry** und **Wessel** erreichen, dass angeblich paradoxe Formeln des fregeschen Systems wie $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ und $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ und die vermeintlichen „Paradoxa der ›strikten Implikation‹“ ((A&¬A) ➼ B) und (B ➼ (A▽¬A) nicht auftreten[146].

Für **Wessel** ist der geforderte Sinnzusammenhang („Relevanz“) zwischen den Relata des Entailment schon vollständig durch die in den Ausdrücken von Γ_1 und Γ_2 gemeinsam enthaltenen „Aussagevariablen“ gegeben[147]. Ein solches gemeinsames Sachverhalts/Ereignis-Bezugsystem für die Gedankengefüge-Prädikatoren Γ_1 und Γ_2 garantiert jedoch noch keine logische Abhängigkeitsbeziehung zwischen diesen Sachverhalten, denn obwohl z.B. für die beiden Gedankengefüge-Prädikatoren $(A \Leftrightarrow B)$ und $(A \equiv B)$ ein gemeinsames Sachverhalts/Ereignis-Bezugsystem besteht, stehen sie doch in der Beziehung der Independenz[148]. Der Sinnzusammenhang (die „Relevanz“) zwischen den Relata des SFG-Entailment beinhaltet wesentlich mehr: während die Aussage-Relata A und B der Gedankengefüge $(A\&B)$ und $(A \Rightarrow B)$ jeweils durch Beziehungslosigkeit (Nicht-Relevanz) gekennzeichnet sind, gilt dies für Gedankengefüge-Prädikatoren wie

(A&B) und ($A \Rightarrow B$) nicht mehr: denselben Aussagen A und B sprechen die Gedankengefüge-Prädikatoren ihren vorgegebenen Wahrheitswerten gemäß ein Gedankengefüge zu; das Entailment betrifft darüber hinaus einen Zusammenhang der Wahrheitsbedingungen dieser Gedankengefüge: ein Gedankengefüge Γ_1 steht zu einem Gedankengefüge Γ_2 genau dann im Entailment-Verhältnis, wenn die Menge der von Γ_1 nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate echt oder unecht in der Menge der von Γ_2 nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate enthalten ist. Genau darin besteht der Sinnzusammenhang eines SFG-Entailments: wenn die Wahrheitsbedingungen für das Gedankengefüge Γ_1 gegeben sind, dann auch die Wahrheitsbedingungen für Γ_2; die Wahrheitsbedingungen für Γ_2 umfassen die Wahrheitsbedingungen von Γ_1 – dieser Sinnzusammenhang ist immer vorhanden, wenn $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ dem WGS-Kriterium genügt.

2.2.8.2.2. Die Untauglichkeit der Relevanz-Logistik

Die Unstimmigkeiten in **FREGE**s Logikentwurf (die Paradoxa, die aus der logischen Missdeutung der Gedankengefüge resultieren) haben die Relevanzlogistiker veranlasst, das fregesche System etwas kritischer zu betrachten. Mit der Aufstellung des WGS-Kriteriums ist es schließlich gelungen, für vorgegebene Gedankengefügeschemata ein stimmiges Kriterium für das Vorliegen der *logischen Beziehung* des Entailment zu gewinnen. Dennoch bleiben die relevanzlogistischen Versuche unzulänglich. Weil die logische Missdeutung der Gedankengefüge nicht als der einzig wahre Grund der „Paradoxa der ›materialen Implikation‹" erkannt und weil teilweise sogar an dieser Missdeutung festgehalten wurde, musste die Kritik oberflächlich und inkonsequent bleiben. Die Relevanz-Logistik wurde Opfer des falschen Augenscheins: zwar erweist sich die logische Deutung mancher Fregegesetze als widersinnig, doch wird für offensichtlich gehalten, dass viele logisch missdeutete Fregegesetze mit unbestreitbaren und teilweise schon in der traditionellen Logik bekannten logischen Gesetzen identisch sind. So führt beispielsweise die logische Deutung der *Fregegesetze* „$[(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$" und „$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$" zu ihrer Identifizierung mit den gültigen *logischen Gesetzen* der Transitivität und der Kontraposition der Implikation: es wird unterstellt, in *diesen* „nichtparadoxen" Fällen könne das Gedankengefüge **C** der Implikation gleichgesetzt werden[149]. Nicht zuletzt dieser Umstand dürfte die Relevanz-Logistiker bewogen haben, die Lösung der mit den „Paradoxa der ›materialen Implikation‹" zusammenhängenden Problematik in einer Erweiterung und Modifikation des SFG unter der Voraussetzung zu suchen, dass Implikation/Entailment zwar nicht mit **C** identisch ist, aber doch ausgehend und mit Hilfe von **C** bestimmt werden kann; zur Bestimmung der Implikation/des Entailment genüge es, die Bedeutung von **C** in der Weise abzuändern, dass „alle paradoxen Formeln nicht beweisbar, alle nichtparadoxen Formeln aber beweisbar sind"[150]. Diese Konzeption hält arglos an **FREGE**s Kardinalfehler, der falschen logischen Deutung der Gedankengefüge, fest. Außerdem wird die Entscheidung über die Geltung der logischen Gesetze zu einer Angelegenheit der vortheoretischen, willkürlichen Intuition.

Wenn wir uns an **FREGE**s von Missdeutungen noch freie Definition des Gedankengefüges **C** halten, können weder die angeblich paradoxen noch die angeblich nicht-paradoxen Fregegesetze mit logischen Gesetzen verwechselt werden[151]. Es gibt, wie gesagt, gar keine „Paradoxa der ›materialen Implikation‹", sondern nur „Paradoxa der logischen Missdeutung der ›materialen Implikation‹". Diese Missdeutung ist ohne Einschränkung zurückzuweisen; konsequenterweise muss man dann allerdings auch die Auffassung, die Gedankengefüge stellten logische Formen dar und die „Aussagenlogik" sei ein logisches System, aufgeben und das Scheitern des fregeschen Logikentwurfs eingestehen. Für die Erkenntnis logischer Formen sind die fregeschen Gedankengefüge belanglos. Die Relevanzlogistiker hätten sich der Aufgabe der Untersuchung und Bestimmung aller logischen Formen erneut und ganz unabhängig von **FREGE** stellen müssen – so wie dies im ersten Teil dieser Abhandlung geschehen ist. Da **FREGE**s Logikentwurf jedoch auch für die relevanzlogistischen Kritiker prinzipiell sakrosankt und jeder grundlegenden Kritik entzogen war, und weil das Entailment mit Hilfe des Gedankengefüges **C** bestimmt werden sollte, wurde das Gedankengefüge **C** auch in der Relevanzlogistik nicht strikt von seiner Missdeutung unterschieden und in der Folge synkretistisch mit der logischen Relation des Entailment konfundiert; es stellte sich unvermeidlich ein heilloses Durcheinander von Fregegesetzen, Entailment-Gesetzen des SFG, Gesetzen des SFG-Entailments und von logischen Gesetzen ein.

Der Versuch, das Entailment mit Hilfe der Gedankengefüges **C** zu bestimmen, und die damit verbundene synkretistische Identifizierung von Gedankengefügen und logischen Formen verhindert von vorneherein eine scharfe begriffliche Erfassung und Unterscheidung der Gedankengefüge und logischen Relationen und ihrer tief greifenden strukturellen Verschiedenheit. Die exakte begriffliche Abgrenzung der Implikation bzw. des Entailment von den anderen logischen Relationen ist nur auf der Basis des Wissen um die allgemeine, spezifische Struktur der logischen Relationen möglich – dies setzt die exakte Abgrenzung von Gedankengefügen und logischen Formen voraus. Nur innerhalb des *vollständigen* Systems aller logischen Relation, wie ich es im ersten Teil dargestellt habe, kann darüber hinaus der Begriff des Entailment (wie der Begriff jeder beliebigen anderen logischen Relation) klare Konturen und scharfe Bestimmtheit gewinnen. Die Relevanz-Logistik hingegen berücksichtigt nur eine einzige logische Relation; in dieser Vereinzelung bleibt die Bestimmung des Entailment unvermeidlich vage und verschwommen; das Entailment kann weder von den Gedankengefügen, noch von anderen logischen Verhältnissen angemessen abgegrenzt werden.

Eine weitere schädliche Folge des Versuchs, das Entailment mit Hilfe des Gedankengefüges **C** zu bestimmen, ist, dass das Entailment nicht in voller logischer Universalität, sondern nur beschränkt auf den sehr begrenzten und wissenschaftlich völlig bedeutungslosen Bereich der Gedankengefüge bestimmt wird. Nur das Entailment, sofern es zwischen Gedankengefügeschemata vorliegt, nicht die universale logische Relation des Entailment – (10•0)(p, q) – wird berücksichtigt und fließt in die Definition ein, auf Entailment-Verhältnisse etwa von mathematischen, logischen, physikalischen oder anderen Sachverhalten können die SFG-Entailmentkriterien nicht angewendet werden[152] – das WGS-Entailment hat so keinerlei theoretische und praktische Bedeutung.

Aber selbst dieses auf Gedankengefüge eingeschränkte SFG-Entailment wird durch das WGS-Kriterium nur mangelhaft, nämlich *indirekt* bestimmt. Das WGS-Kriterium ist indirekt, weil nur von ganz bestimmten, *vorgegebenen* Gedankengefügen Γ_1 und Γ_2 *nachträglich* entschieden werden kann, ob Γ_1 zu Γ_2 in der Entailment-Beziehung steht oder nicht; die Bedingungen, die für zwei *beliebige* Gedankengefüge gelten müssen, wenn das eine zum anderen in der Entailment-Beziehung steht, werden unabhängig von jeweils konkret vorgegebenen Gedankengefügen durch das WGS-Kriterium nicht angegeben. Es können daher Aussagen über das SFG-Entailment – etwa die Gesetze der Reflexivität, Transposition, Transitivität des Entailment – weder formuliert, geschweige denn bewiesen werden; die Relevanz-Logistik berücksichtigt zwar Entailment-Gesetze des SFG, nicht aber solche Gesetze des SFG-Entailment[153].

Die Indirektheit der Entailmentbestimmungen macht es den Relevanz-Logistikern unmöglich zu begründen, weshalb gerade das jeweils von ihnen vorgeschlagene Kriterium eine Entailment-Beziehung zwischen zwei Gedankengefügen verbürgen soll; diese Tatsache macht verständlich, dass die Relevanz-Logistiker keinerlei Übereinstimmung erzielen konnten, welche der verschiedenen Bestimmungen des Entailment sachgerecht ist. Eine solche Begründung setzt voraus, dass man genau bestimmen kann, auf welche logische Relation ein relevanzlogistisches Kriterium führt: wenn eine Formel $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ dem WGS-Kriterium genügt, besteht zwischen den beiden Gedankengefügen stets die logische Relation $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}$, im Falle der „strikten Implikation“ Γ_1 ➻ Γ_2 gilt hingegen die logische Relation $(\circ 0 \circ \circ)(\Gamma_1, \Gamma_2)$; nur im ersten Falle kann man berechtigt von einem Entailment sprechen, da nur dann die Geltung von Γ_1 *immer* die Geltung von Γ_2 tatsächlich und nicht eventuell scheinbar verbürgt. In der Relevanz-Logistik können die Entailment-Kriterien nicht auf klar bestimmte logische Relationen bezogen werden, denn die unkritische Anknüpfung an **FREGE** verhindert die Bildung eines tragfähigen Begriffs der logischen Relationen. In der Relevanz-Logistik ist nur eine indirekte und provisorische und obendrein auf falschen Voraussetzungen beruhende Begründung der vorgeschlagenen Kriterien möglich: man kann darauf verweisen, dass ein Entailment-Kriterium angeblich paradoxe Formeln im Gegensatz zu angeblich nicht-paradoxen Formeln nicht herzuleiten gestattet; im Falle des WGS-Kriteriums kann man z.B. betonen, dass das WGS-Entailment die Behauptung verhindert, dass etwa eine wahre Aussage aus jeder Aussage folge (eine Konsequenz der Missdeutung des Gedankengefüges **C** als Implikation) oder dass ein Widerspruch $A \,\&\, \neg A$ jede Aussage impliziere (eine Konsequenz der Deutung der „strikten Implikation“ als Implikation). Auf diese Weise lässt sich nicht erkennen, was die Zeichen $\Rightarrow$, ➻ und ⇆ jeweils genau zum Ausdruck bringen.

Überdies nimmt hier die Beurteilung der Geltung logischer Gesetze einen sehr merkwürdigen Charakter an: dank **FREGE** lassen sich beliebig viele Fregegesetze konstruieren, deren Gültigkeit strikt nachgewiesen werden kann – solange man den Gedankengefügen keine andere als die definierte Bedeutung gibt; werden diese Fregegesetze jedoch auf der Grundlage der Missdeutung der Gedankengefüge als logische Gesetze „interpretiert“, erhalten wir etliche offensichtlich unhaltbare paradoxe „logische Gesetze“. Die Relevanzlogistiker meinen nun, man müsse von einem vorgegebenen, schon als gültig erwiesenen Fregegesetz noch *zusätzlich*, unabhängig von **FREGE**s SFG und jeder anderen logischen Theorie ganz intuitiv-gefühlsmäßig entscheiden, ob es als gültiges logisches Gesetz akzeptiert wird oder nicht. Die Logik bleibt hier eine vortheoretisch-intuitive Disziplin, die allenfalls provisorische Behauptungen aufstellen kann. Der Begriff der Implikation (wie der Begriff jeder anderen logischen Form) bleibt ebenfalls vortheoretisch und intuitiv. Ob ein logisches Entailment-Gesetz gültig ist, wird nicht aus dem Begriff des Entailment hergeleitet – sondern umgekehrt, der Begriff des Entailment soll danach gebildet werden, ob irgendein logisches Entailment-Gesetz gefühlsmäßig-intuitiv (unabhängig von der logischen Theorie!) als gültig und nicht-paradox angesehen wird oder nicht: was man unter der Implikation bzw. dem Entailment zu verstehen hat, ist hier Sache des „logischen Gefühls“; der Begriff der Implikation/ des Entailments wäre stets so zu formen, dass er gerade auf die gültig erscheinenden Gesetze passt. Die Konzeption der

Implikation wäre dann abzuändern, wenn ein bislang noch nicht beachtetes Fregegesetz auftaucht, das von der Intuition verschmäht wird – das Verständnis der Implikation müsste provisorisch und vorläufig bleiben. Außerdem – und die „moderne Logik“ liefert genügend Beispiele – lässt sich auf der Basis der vortheoretischen Intuitionen niemals eine sachgerechte, begründete Entscheidung über den nichtparadoxen, logisch sinnvollen Gehalt logisch gedeuteter Fregegesetze erzielen. Die Relevanzlogistiker können für die Entscheidung, ob ein gültiges Fregegesetz auch ein vertretbares logisches Gesetz darstellt, (im Gegensatz zur Entscheidung der Gültigkeit eines Fregegesetzes) kein allgemeines und exaktes Entscheidungsverfahren angeben – die Entscheidung bleibt der Intuition, damit der subjektiven Willkür überlassen.

Nur vom Begriff der logischen Form her, können die logischen Gesetze erkannt und begründet werden: Der Begriff einer logischen Form fasst alle notwendigen Bedingungen der Geltung dieser Form zusammen; logische Gesetze sagen aus, welche logischen Relationen zwischen logischen Formen selbst bestehen – um zu erkennen, welche logische Beziehung zwischen logischen Formen bestehen, müssen wir diese begrifflichen Geltungsbedingungen der betreffenden logischen Formen in Beziehung setzen. Nur der *Begriff* der logischen Form kann Grundlage für die Aufstellung und Begründung logischer Gesetze sein, nicht aber die unbegründbare intuitive Überzeugung, diese oder jene logische Gesetzesaussage sei gültig oder auch nicht.

Die Meinung, ein Entailment-Kriterium sei dann gerechtfertigt, wenn es die Herleitung „paradoxer“ Formeln verhindere, die Herleitung „nicht-paradoxer“ Formeln hingegen gestatte, gründet in der falschen Prämisse, es könne zwischen „paradoxen“ und „nicht-paradoxen“ SFG-Formeln unterschieden werden; diese Prämisse involviert den Widerspruch, das Gedankengefüge **C** stelle in manchen Fällen die Implikation dar, in anderen Fällen nicht, und verhindert eine strikte Abgrenzung von Gedankengefüge **C** und Entailmentrelation. Nur wenn die Bedeutungen des **C**-Zeichens „⇒“ und des Entailmentzeichens „⇆“ klar bestimmt und gegeneinander abgegrenzt sind, kann erkannt werden, dass der Ausdruck „A⇒(B⇒A)“ ein richtiges Fregegesetz darstellt, keineswegs jedoch ein das Entailment betreffendes „paradoxes“ logisches Gesetz – es wäre unangebracht zu fordern, die Gültigkeit dieses richtigen Fregegesetzes solle ausgeschlossen sein. Nur bei klarer Abgrenzung von **C** und Entailment ist erkennbar, dass der Ausdruck „A⇆(B⇒A)“ ein richtiges Entailment-Gesetz des SFG ist und besagt, dass für zwei Aussagen A und B, wenn A wahr ist, dann oder genau dann B⇒A wahr ist; ohne klare Abgrenzung der Bedeutungen von „⇒“ und „⇆“ kann der Ausdruck gar nicht verstanden werden. Spätestens dann, wenn in einer Formel beide Zeichen „⇒“ und „⇆“ vorkommen, wäre dringend zu klären, was denn das Zeichen „⇒“ bedeutet, da doch offenbar nicht das Entailment. Es ist unbillig zu fordern, die Gültigkeit dieses richtigen Entailment-Gesetzes des SFG solle verworfen werden[154].

Die Vorherrschaft der begrifflosen Intuition zeigt sich in der Willkür, mit der die Gültigkeit von Fregegesetzen, von Entailment-Gesetzen des SFG und von logischen Gesetzen behauptet oder verworfen wird, und die unterschiedlichsten logischen Relationen verwechselt und als Entailment ausgegeben werden. Häufig wird die echte Entailmentrelation ℂ⋓𝔼 mit der Pränonpendenz 𝔽 und der Postpendenz ℍ konfundiert. **C.I.Lewis**’ Versuch, eine angebliche Unvermeidbarkeit der „Paradoxien der ›strikten Implikation‹“ – (A&¬A) impliziert jede beliebige Aussage; A▽¬A wird von jeder beliebigen Aussage impliziert – zu rechtfertigen, fußt in dieser Verwechslung. Der so genannte *Independent Proof*[155] soll belegen, dass die Behauptung, A&¬A „impliziere“ jede beliebige Aussage B, nur um den Preis der Leugnung der unbestreitbar gültigen Gesetze (a) bis (c) zurückgewiesen werden könne:

(a) (A&B) impliziert A, bzw. (A&B) impliziert B;
man spricht von den Gesetzen der sog. „**K**-Beseitigung“, „&-Elimination“; mit der Gesetzen des SFG (A&B) → A und (A&B) → B sind auch die Entailment-Gesetze (A&B) ⇆ A und (A&B) ⇆ B gültig.

(b) A impliziert (A▽B)
das Gesetz der sog. „**A**-Einführung“, „▽-Introduction“; auch hier haben wir ein gültiges Entailment-Gesetz A ⇆ (A▽B))

(c) [(A▽B) & ¬A] impliziert B
das Gesetz der sog. „**A**-Beseitigung, „▽-Elimination“, auch irreführend „disjunktiver Syllogismus“ genannt; das Entailment-Gesetz [(A▽B) & ¬A] ⇆ B ist gültig.

Diese Entailment-Beziehungen – es handelt sich jeweils um SFG-Implikationen – werden von den Autoren wohlweislich nicht mit Hilfe des Symbols „⇒“ dargestellt, sondern durch umgangssprachliche Ausdrücke wie „implies“, „entails“, „from … infer …“, „aus … folgt …“ u.ä.; dies ist richtig, denn es handelt sich hier tatsächlich um die Entailmentbeziehung, die durch das **C**-Symbol „⇒“ nicht ausgedrückt wird. **Lewis** geht dann aus von der „Konjunktion“ (A&¬A); werde auf diese „Annahme“ die Entailment-Regel der „**K**-Beseitigung“ (a) angewendet, so erhalte man:

(1-1) ¬A;

durch die Anwendung derselben Gesetzes auf die „Annahme“ (A&¬A) erhalte man auch

(1-2) A;

werde auf (1-2) das Gesetz (b) der „**A**-Einführung“ angewendet, ergebe sich

(1-3) A▽B;

werde auf (1-1) und (1-3) das Gesetz der „A-Beseitigung“ angewendet, erhielten wir

(1-4) B.

Damit sei durch die Anwendung gültiger Entailmentgesetze erwiesen, dass die Annahme A&¬A die Aussage B im Sinne des Entailment *impliziere*.

Das einzig Erstaunliche an diesem „Beweis“ ist, dass er überhaupt publiziert und ernsthaft diskutiert wurde. **Lewis** lässt außer Acht, dass die SFG - Entailmentgesetze (A&B) ⇆ A und (A&B) ⇆ B nur auf *wahre* Gedankengefüge **K** angewendet werden können; sie besagen ja, wenn von zwei Aussagen A und B *beide wahr* sind, dann ist A bzw. B wahr; da (A&¬A) *kein wahres* Gedankengefüge **K** ist, weil von A und ¬A niemals beide Aussagen wahr sind, kann man dieses Gesetz der **K**-Beseitigung nicht anwenden[156]. Es gelten nicht die Entailments (A&¬A)⇆A bzw. (A&¬A)⇆¬A, sondern die Pränonpendenzen (A&¬A)⎤A bzw. (A&¬A)⎤¬A. Aber auch der Versuch, zuerst aus A das Gedankengefüge A▽B zu folgern, und dann aus ¬A und dem Gedankengefüge A▽B, das ja aus dem zu ¬A in Widerspruch stehenden A gefolgert wurde, die Aussage B „herzuleiten“, spottet jeder Beschreibung; wenn man auf diese Weise das PNW außer Kraft setzt, indem man zugleich A und ¬A zu „Prämissen“ macht, kann man natürlich alles und jedes „beweisen“!

Um sich den angeblichen Konsequenzen dieses doch eigentlich indiskutablen Scheinbeweises zu entziehen, haben Relevanzlogistiker gemeint, sie müssten zumindest eines der bei der „Beweisführung“ vorausgesetzten gültigen Entailmentgesetze (a), (b) und (c) verwerfen. Aber nicht diese unzweifelhaft gültigen Entailments, sondern einzig die unkorrekte Weise ihrer Anwendung in **Lewis**’ Pseudobeweis sind zurückzuweisen.

Auf ebenso verquere Weise versucht **C.I.Lewis** zu zeigen, dass jede Aussage A die Aussage (B▽¬B) „impliziert“, und dass auch dies nur um den Preis der Leugnung der Gültigkeit unzweifelhafter SFG-Entailmentgesetze bestritten werden könne. **Lewis**’ Beweisgang setzt die Gültigkeit der folgenden Gesetze des SFG voraus.

(d) A impliziert (A & B) ▽ (A & ¬B);
(e) (A & B) ▽ (A & ¬B) impliziert A&(B▽¬B)
(a) (A&B) impliziert A, bzw. (A&B) impliziert B

Die Gesetze (d) und (e) sind beides unanfechtbar gültige Äquivalenzgesetze, damit auch Entailmentbeziehungen ℂ⋓𝔼: genau dann, wenn A wahr bzw. falsch ist, ist [(A&B) ▽ (A & ~B)] wahr bzw. falsch, und genau dann, wenn (A & B) ▽ (A & ¬B) wahr bzw. falsch ist, ist A&(B▽¬B) wahr bzw. falsch. Im Beweis werden folgende Implikationen/Äquivalenzen verkettet:

(2-1) (A) ↔ [A & (B▽¬B)]

Die Gültigkeit dieser Äquivalenz (damit auch des Entailment ℂ⋓𝔼) ergibt sich aus der korrekten Verkettung von (d) und (e) gemäß des Verkettungsgesetzes 𝔼𝔼𝔼;

(2-2) [A & (B▽¬B)] → (B▽¬B)

Diese Implikation *soll* sich aus der Anwendung des Gesetzes (a) der „**K**-Beseitigung“ auf [A & (B▽¬B)] als Sonderfall ergeben; hier besteht aber weder eine Implikation noch eine Äquivalenz, weil das Hinterglied (B▽¬B) gar nicht ungültig sein kann[157]. Der *falsche* Implikationsausdruck (2-2) muss durch den Ausdruck des richtigen Postpendenzgesetzes (2-2′) [A & (B▽¬B)] ⎣ (B▽¬B) ersetzt werden.

(2-3) (A) → (B▽¬B)

Diese Implikation ergibt sich angeblich aus der Subsumtion der Gesetze (2-1) und (2-2) unter das logische Verkettungsgesetz 𝔼ℂℂ; weil jedoch das ungültige (2-2) durch (2-2′) ersetzt werden muss, ergibt sich aus (2-1) und (2-2′) gemäß des Verkettungsgesetzes 𝔼ℍℍ als Konklusion: (2-3′) (A) ⎣ (B▽¬B); ob nun A als wahr oder falsch gesetzt wird, (B▽¬B) ist in beiden Fällen wahr, folglich impliziert die Wahrheit von A nicht die Wahrheit von (B▽¬B). Es besteht auch hier eine Beziehung scheinbarer Dependenz.

Auch hier meinen viele Autoren, die Zurückweisung der falschen Beweisführung erfordere die Leugnung gültiger SFG-Gesetze. **ANDERSON** und **BELNAP** z.B. glauben, dass man das SFG-Gesetz der „**A**-Einführung“ verwerfen müsse, damit auch den sog. „*modus ponens*“ des SFG[158]. **WESSEL** bestreitet aufgrund dieses lewisschen Scheinbeweises die Transitivität des WGS-Entailment, da sonst gelten müsste $A \rightarrow (B \triangledown \neg B)$; in Wirklichkeit ist die lewissche Beweisführung falsch und das WGS-Entailment $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}$ ist transitiv (wie auch das „strikte Implikation“ $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E} \Cup \mathbb{F} \Cup \mathbb{H} \Cup \mathbb{K} \Cup \mathbb{M} \Cup \mathbb{X}$ transitiv ist). **C.LEWY** meint, die Ungültigkeit des lewisschen Scheinbeweises und damit die Transitivität der Entailmentrelation nur dadurch sichern zu können, dass er die Entailmentbestimmung so einschränkt, dass das Entailment $A \leftrightarrows A \;\&\; (B \triangledown \neg B)$ ungültig würde: im Ausdruck $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$ solle weder Γ_1 als **K**-Glied einen Widerspruch, noch Γ_2 als **K**-Glied ein Fregegesetz („Tautologie“) enthalten dürfen. Dieses Kriterium ist zu eng, denn natürlich gilt das Entailment $A \leftrightarrows A \;\&\; (B \triangledown \neg B)$: genau dann wenn A wahr ist, ist $A \;\&\; (B \triangledown \neg B$ wahr.

All diese fehlerhaften Erörterungen zeigen, wie wenig es die intuitiv-probierende, tastende und indirekte relevanzlogistische Bestimmung des Entailment erlaubt, zwischen richtigen und falschen Entailmentbeziehungen und zwischen Gedankengefügen zu unterscheiden, und wie die rein intuitive Basis der Erörterung logischer Probleme der Willkür Tür und Tor öffnet. Anstatt die logische Relation des Entailment durch die präzise und vollständige Angabe der Bedingungen ihrer Geltung zu bestimmen, und ausgehend von diesem Begriff zu untersuchen, welche Gesetze für diese Relation gelten, wird an intuitiv-vagen, ungefährigen Bestimmung herumprobiert, was weder das Problem klären kann, um das es hier geht, geschweige denn eine Lösung ermöglicht.

Auf Grund dieser Anknüpfung an und Modifikation von **C** bleibt auch in der der Relevanz-Logistik der Unterschied zwischen **C** und dem Entailment (bzw. dem ganzen Schwarm unterschiedlicher logischer Relationen, die mit der Entailment-Beziehung konfundiert werden) unbestimmt und ungenau: als Folge ebenso die Unterschiede zwischen den **Fregegesetzen, den Entailment-Gesetzen des SFG, den Gesetzen des SFG-Entailment und den logischen Gesetzen** – alle diese völlig strukturverschiedenen Gesetze bilden ein einziges synkretistisches Durcheinander. Genauer gesagt – es gibt keinerlei Bewusstsein darüber, dass diese Gesetze und ihre Ausdrücke einen ganz verschiedenen Gehalt besitzen und strikt zu scheiden sind. So wenig wie **FREGE** zur Kenntnis nimmt, dass die Fregegesetze keine logischen Gesetze sind, so wenig merkt der Relevanz-Logistiker, dass die Entailment-Gesetze des SFG keine logischen Gesetze sind.

2.2.8.2.3. Fregegesetze – Entailment-Gesetze des SFG – Gesetze des SFG-Entailment – Logische Gesetze

Wenn wir das Gedankengefüge **C** so auffassen, wie es durch **FREGE** definiert wurde, und wenn wir die Entailmentbeziehung als die logische Relation $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}$ erkennen, ergeben sich folgende Arten unterschiedlicher Ausdrücke, die jeweils unterschiedliche Sachverhalte und Gesetzeszusammenhänge bezeichnen; nur wenn wir diese Arten von Ausdrücken klar unterscheiden, können wir uns die Unterschiede und Zusammenhänge von SFG und Relevanz-Logistik und ihr Verhältnis zur Logik klarmachen. Diese verschiedenen Arten von Ausdrücken versuche ich ausgehend vom SFG-Ausdruck „$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$“, zu erläutern:

Konkrete Gedankengefügeaussagen machen eine überflüssige tautologische oder informationsverschleiernde Aussage über die Wahrheitswerte vorgegebener Aussagen wie etwa „1 + 1 = 1“ und „Der Schnee ist schwarz“, indem sie diesen Aussagen ein Gedankengefügeprädikat prädizieren; sowohl „›1 + 1 = 1‹ ⇒ ›Der Schnee ist schwarz‹“[159] wie auch „¬(›Der Schnee ist schwarz‹) ⇒ ¬(›1 + 1 = 1‹)“[160] sind wahre konkrete Gedankengefügeaussagen.

Allgemeine Gedankengefügeprädikate/Gedankengefügeschemata: in der Gedankengefügeaussage „›1 + 1 = 1‹ ⇒ ›Der Schnee ist schwarz‹“ wird zwei Aussagen das Gedankengefügeprädikat $(A \Rightarrow B)$, in der Gedankengefügeaussage „¬(›Der Schnee ist schwarz‹) ⇒ ¬(›1 + 1 = 1‹)“ das Gedankengefügeprädikat $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ zugesprochen.

Fregegesetze der Form $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$: auch den beiden Gedankengefügeschemata) $(A \Rightarrow B)$ und $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ können wir ein Gedankengefüge, nämlich **C**, zuschreiben; wir erhalten den Ausdruck des Fregegesetzes „$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$“, welches besagt, dass es für alle Aussagen A und B falsch ist, dass $(A \Rightarrow B)$ wahr und $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ falsch ist; der Grund dafür geht unmittelbar aus der Bedeutung des Fregegesetzes hervor: $\neg[\neg(A \& \neg B) \;\&\; (A \& \neg B)]$. Die Verwechslung des Gedankengefüges **C** mit der Implikation führt zur Verwechslung dieses Fregegesetzes mit dem logischen Gesetz der Kontraposition der Implikation. Die relevanzlogistische Zurückweisung der logischen Deutung von **C** als Implikation verlangt auch die Zurückweisung der logischen Missdeutung dieses und aller anderen Fregegesetze. – Im Rahmen des SFG und ihrer begriffsschriftlichen Darstellungsmittel kommen nur Ausdrücke der Art (1) bis (3) vor.

Entailmentgesetze des SFG der Form $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$: Auf das Fregegesetz $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ trifft das WGS-Kriterium zu und deshalb gilt $(A\Rightarrow B) \leftrightarrows (\neg B\Rightarrow\neg A)$; es besagt, dass jedem Aussagenpaar A, B, dem das Gedankengefüge $(A \Rightarrow B)$ zukommt, auch das Gedankengefüge $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ zukommt, wobei offen bleibt, ob ebenso das Umgekehrte gilt. Erst die Relevanzlogistik ermöglicht mit der Aufstellung des WGS-Kriteriums die Berücksichtigung dieser Entailment-Gesetze des SFG; es ermöglicht festzustellen, ob zwischen *gegebenen* Gedankengefügeschemata die *logische* Beziehung des Entailment besteht oder nicht besteht; im Rahmen des SFG selber ist diese Feststellung nicht möglich.

Gesetze des SFG-Entailment: Die Beziehung des SFG-Entailment kann nicht nur Gedankengefügen als seinen Relata prädiziert werden, sie kann selbst zum Gegenstand einer (Gesetzes-)Aussage werden. Wir können etwa sagen „Jedes Gedankengefügeschema Γ_1 steht zu sich selbst im Verhältnis des Entailment: $\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_1$“ – oder gleichbedeutend „Die Relation des SFG-Entailment ist reflexiv“. Es kann weiterhin bestimmten Entailmentverhältnissen selbst die Beziehung des Entailment zugeschrieben werden. Die Transitivität des SFG-Entailments kann z.B. als Entailmentbeziehung ausgedrückt werden: „Die SFG-Entailmentbeziehungen $\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_2$ und $\Gamma_2\leftrightarrows\Gamma_3$ stehen zum SFG-Entailment $\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_3$ in der Beziehung des Entailment“; gleichbedeutend ist die Aussage: „Wenn $\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_2$ und $\Gamma_2\leftrightarrows\Gamma_3$ gilt, entweder dann oder genau dann gilt $\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_3$“. Auch die Kontraposition des SFG-Entailment kann als Gesetz des SFG-Entailment ausgedrückt werden: „Das SFG-Entailment $\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_2$ steht zum SFG-Entailment $\neg\Gamma_2\leftrightarrows\neg\Gamma_1$ in der Entailmentbeziehung“ (oder gleichbedeutend: „Wenn $(\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_2)$ gilt, entweder dann oder genau dann gilt $(\neg\Gamma_2\leftrightarrows\neg\Gamma_1)$“. Aufgrund der konkretistischen und indirekten Definition des Entailment durch das WGS-Kriterium können solche Entailment-Gesetze des SFG-Entailment im Rahmen der Relevanzlogistik aus den folgenden Gründen weder dargestellt noch bewiesen werden:

Der Ausdruck solcher Gesetze des SFG-Entailments wie „$(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrows (\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$“ ist durch das WGS-Kriterium nicht legitimiert, denn dieses Kriterium definiert das Entailment nur als zwischen konkreten Gedankengefügeschemata wie (A&B) und $(A\Rightarrow B)$ bestehend; im Ausdruck „$(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrows (\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$“ aber sind die Relata nicht Gedankengefügeschemata, sondern allgemeine Sachverhalte (Sachverhalte die einer bestimmten Sachverhaltsklasse angehören) der Art, dass ein erstes Gedankengefüge Γ_1 ein zweites Gedankengefüge Γ_2 im Sinne des Entailment impliziert und zweitens, dass die Bestreitung des zweiten Gedankengefüges die Bestreitung des ersten im Sinn des Entailment impliziert. Das WGS-Kriterium informiert nicht darüber, welchen Bedingungen *beliebige* Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 genau dann genügen, wenn zwischen ihnen die Beziehung des Entailment besteht; es ist deshalb nicht möglich, mit Hilfe des WGS-Kriteriums zu prüfen, in welchen logischen Beziehungen das SFG-Entailment selbst zu anderen logischen Formen steht – eine solche Prüfung müsste die jeweiligen *allgemeinen* Bedingungen der Geltung dieser logischen Formen in Beziehung setzen. Das WGS-Kriterium lässt sich nur im Nachhinein auf *schon vorgegebene* Ausdrücke der Form „$\Gamma_1\Rightarrow\Gamma_2$“ anwenden; und aus der Anwendung resultiert dann immer eine wahrheitswertdefinite Aussage wie „Dieses konkrete Gedankengefüge (etwa A&B) steht zu jenem konkreten Gedankengefüge (etwa $A\Rightarrow B$) in der Beziehung des Entailment“. Man kann z.B. nachprüfen, dass mit $(A\&B)\leftrightarrows(A\Rightarrow B)$ auch $\neg(A\Rightarrow B)\leftrightarrows\neg(A\&B)$ gilt, und dass mit $(A\leftrightarrows A\veebar B)$ auch $(\neg(A\veebar B)\leftrightarrows\neg A)$ gilt, usw. Da das WGS-Kriterium nicht auf den allgemeinen Fall, dass zwischen irgendwelchen beliebigen Gedankengefügen die Entailment-Beziehung besteht anwendbar ist, also weder auf den Ausdruck „$\Gamma_1\leftrightarrows\Gamma_2$“ noch auf den Ausdruck „$\neg\Gamma_2\leftrightarrows\neg\Gamma_1$“, kann mit Hilfe des WGS-Kriteriums ein Gesetz des SFG-Entailment wie $[(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2)\leftrightarrows(\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \Rightarrow\neg\Gamma_1)]$ nicht bewiesen werden[161].

Auf der Basis der oben vorgeschlagenen direkten und allgemeineren Definition des SFG-Entailment kann das Gesetz des SFG-Entailment $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrows (\neg\Gamma_2\leftrightarrows\neg\Gamma_1)$ hingegen leicht bewiesen werden. $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$ gilt genau dann, wenn die Menge der von Γ_1 nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate echt oder unecht in der Menge der von Γ_2 nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate enthalten ist[162]. Das Gedankengefüge $\neg\Gamma_1$ schließt genau jene Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich aus, welche von Γ_1 definitiv ausgeschlossenen werden; wenn also die Menge der von Γ_1 nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate enthalten ist in der Menge der nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate von Γ_2, dann ist die Menge der von $\neg\Gamma_2$ ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate enthalten in der Menge der von $\neg\Gamma_1$ ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate; folglich gilt die Äquivalenz: $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrow (\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$, und damit auch das Entailmentgesetz des SFG-Entailment $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrows (\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$. Der *besondere* Fall $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrows (\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$ lässt sich natürlich auch beweisen, wenn man mit den im ersten Teil dieser Arbeit dargestellten Verfahren die Gültigkeit des logischen Gesetzes $(p\leftrightarrows q) \leftrightarrows (\sim q\leftrightarrows\sim p)$ aufzeigt – dies überschreitet jedoch erst recht die Möglichkeiten der Relevanzlogistik.

Wir müssen schließlich von den Gesetzen des SFG-Entailment die **schließende Subsumtion** konkreter Entailmentbeziehungen **unter ein Gesetz des SFG-Entailment** unterscheiden. Durch Anwendung des WGS-Kriteriums auf den

Ausdruck „$[(A\&B)\Rightarrow A]$" lässt sich die Gültigkeit von $(A\&B)\leftrightarrows A$, durch Anwendung auf den Ausdruck „$\neg A \Rightarrow \neg(A\&B)$" die Gültigkeit von $\neg A \leftrightarrows \neg(A\&B)$ zeigen, nicht aber der notwendige Zusammenhang beider Entailments. Dass aus der Geltung von $[(A\&B)\leftrightarrows A]$ die Geltung von $[\neg A \leftrightarrows \neg(A\&B)]$ *folgt*, anders ausgedrückt, dass $[\neg A \leftrightarrows \neg(A\&B)]$ gilt, *weil* $[(A\&B)\leftrightarrows A]$ gilt, lässt sich nicht durch das WGS-Kriterium, sondern nur durch die schließende Subsumtion dieser Einzelfälle des SFG-Entailment unter das Gesetz $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrows (\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$ aufzeigen[163]. Dieser notwendige *Folgerungs*zusammenhang wäre im Ausdruck „$[(A\&B)\leftrightarrows A] \leftrightarrows [\neg A \leftrightarrows \neg(A\&B)]$" falsch ausgedrückt, weil in diesem Ausdruck als Relata des logischen Entailment keine Sachverhalts-/Ereignisklassen, sondern die wahrheitswertdefinite Aussagen „$[(A\&B)\leftrightarrows A]$" und „$[\neg A \leftrightarrows \neg(A\&B)]$" vorkommen; wahrheitswertdefinite Aussagen können keine Relata logischer Relationen sein[164].

Wir können festhalten: obwohl in der Relevanzlogistik an der logischen Missdeutung des Gedankengefüges **C** und an der Missdeutung mancher Fregegesetze erste Zweifel aufkommen und das Gedankengefüge **C** als falsche Folgerungsrelation mit Hilfe des WGS-Kriteriums durch eine echte logische Entailmentbeziehung ersetzt wird, gelingt es im Rahmen dieser Konzeption nur, von vorgegebenen Gedankengefügen festzustellen, ob zwischen ihnen die Entailmentrelation besteht oder nicht; weil das Entailment auf Gedankengefüge beschränkt ist, können die Gesetze dieser Entailment-Relation selbst nicht dargestellt werden; wegen der Indirektheit und der fehlenden Allgemeinheit des WGS-Kriteriums können die Gesetze des SFG-Entailments nicht bewiesen werden. Logische Gesetze des Entailment selbst können überhaupt nicht berücksichtigt werden; denn die Entailmentbeziehung bleibt ja auf Gedankengefüge beschränkt. Diese Beschränktheit ihrer Systeme scheint den Relevanzlogistikern selbst nicht bewusst zu sein.

Die dem Verallgemeinerungsniveau der Logik entsprechende universale Bestimmung der **Entailmentrelation** bezieht diese logische Beziehung auf *beliebige* Sachverhalts-/Ereignisklassen: zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q besteht die Beziehung des Entailment $p\leftrightarrows q$ genau dann, wenn die Vorkommenskombinationen $p\frown q$ und $\sim p\frown\sim q$ realmöglich und der Vorkommenskombination $p\frown\sim q$ nicht-realmöglich ist; die Normalmatrix dieser zweistelligen logischen Relation ist (10•1), die Modalitätenmatrix ist $(\mathcal{NCPU})$.

Logische Gesetze des Entailment drücken die logische Beziehung aus, die zwischen logischen Entailmentformen selbst bestehen: dazu gehören etwa das Gesetz der Transitivität $[(p\leftrightarrows q)\wedge(q\leftrightarrows r)] \rightarrow (p\leftrightarrows r)$, das Gesetz der Kontraposition $(p\leftrightarrows q) \leftrightarrow (\sim q\leftrightarrows\sim p)$, das Kontrarietätsgesetz $(p\leftrightarrows q) \uparrow (p\leftrightarrows\sim q)$. Die Gültigkeit dieser logischen Gesetze lässt sich mit Hilfe der im ersten Teil dieser Arbeit vorgetragenen Verfahren leicht zeigen.

Die Relevanzlogistiker halten sowohl die Entailment-Gesetze des SFG wie auch die Gesetze des SFG-Entailment selbst schon für logische Gesetze. Dies ist nicht korrekt, weil das Entailment auf Gedankengefüge beschränkt ist. Die Relevanlogistiker fallen so in die Fehler zurück, die zu korrigieren sie eigentlich ausgezogen sind. Wenn sie ein Entailment-Gesetz des SFG als logisches Gesetz auffassen, annullieren sie gerade den Unterschied der Bedeutungen von $\Rightarrow$ und $\leftrightarrows$, der doch den spezifischen Charakter ihres Systems ausmacht. Weder kann in der Relevanzlogistik die Entailmentbeziehung in ihrer logischen Reinheit und Allgemeinheit dargestellt werden, noch können logische Entailmentgesetze behandelt werden. Die Gesetze des SFG-Entailment können außerdem mit Hilfe des WGS-Kriteriums nicht bewiesen werden.

2.2.8.2.4. Die „axiomatische" Bestimmung des Entailment

Die verschiedenen Versuche, den Begriff des Entailment „axiomatisch" zu entwickeln, fußen durchweg auf globalen, nicht weiter explizierten und begründeten Intuitionen. Ausgangspunkt des „axiomatischen" Vorgehens, wie es in der „modernen Logik" üblicherweise praktiziert wird, ist die Festlegung einer „symbolischen" Bezeichnung für eine vage, rein verbale Intuition; beispielsweise wird versichert, dass der Ausdruck „A ➔ B" *bedeuten* soll „A entails B" oder „A impliziert B strikt/analytisch/streng/relevant/usw.", wobei Art und Struktur der jeweils gemeinten Beziehung und ihrer Relata undefiniert und unerläutert bleiben. Solange die Bedeutung der Ausdrücke wie „A entails B" usw. nicht eindeutig definiert ist, bedeutet „A ➔ B" nur, dass zwischen zwei nicht näher bestimmten Relata irgendeine nicht näher bestimmte zweistellige Relation besteht; dass mit den verbalen Etiketten „… entails …" usw. irgendwelche intuitive Vorstellungen von logischem Zusammenhang verbunden sind, ist irrelevant, da sich vor einer exakten Erläuterung des Entailmentrelation sich jeder unter dieser Beziehung vorstellen kann, was er gerade will. Erst in einem zweiten Schritt wird dann versucht, diese noch ganz unbestimmte Relation durch die „axiomatische" Angabe einiger Eigenschaften näher zu bestimmen: es wird etwa gesagt, dass diese Relation reflexiv ist („Axiom": A ➔ A[165]), oder dass bestimmte Sachverhalte in dieser Relation stehen (z.B. „Axiom": (A&B) ➔ A[166] oder („Axiom" A&(B▽C) ➔ (A&B)▽(B&C)[167]). Jedes „Axiom" formuliert so eine Bedingung, der die Entailmentrelation genügen muss. Da diese „Axiome" die Entailmentbeziehung *definieren* sollen, müssten sie es zusammen ermöglichen, die zunächst verbal-unbestimmte zweistellige Relation A ➔ B schrittweise einzugrenzen und zu bestimmen, so dass sie von *jeder anderen* zweistelligen Relation klar unterschieden und jederzeit eindeutig identifiziert werden kann. Die relevanzlogistischen „Axiomatiken" sind jedoch prinzipiell außerstande, diese Aufgabe zu leisten, wiederum weil sie auf dem Niveau eines ausschließlich intuitiv-vortheoretischen Verständnisses logischer Beziehungen verharren.

Die in der „modernen Logik " gebräuchliche „axiomatische" Methode hat dieselbe Struktur wie das bekannte Fragespiel, bei dem ein zunächst völlig unbekannter Gegenstand schrittweise näher bestimmt und schließlich eindeutig identifiziert werden muss; dieses Spiel kann nur gespielt werden, wenn wir bereits über eine hinreichend umfassende *begriffliche* Kenntnis[168] aller in Frage kommenden Gegenstände verfügen, denn nur dann können wir eindeutig entscheiden, dass gerade dem und nur dem gemeinten Gegenstand alle besagten Eigenschaften zukommen. Um zu entscheiden, ob es überhaupt logische Relationen gibt, die in den „Axiomen" formulierten Bedingungen des Entailment genügen, und wenn ja, für welche logischen Relationen dies zutrifft, wäre schon eine klare und vollständige Kenntnis der logischen Relation erforderlich. Nun aber sollen diese Definitionen durch die „Axiome" erst vorgenommen werden – ein aussichtsloses Unterfangen.

Angenommen ich bestimme eine zweistellige Relation x **R** y dadurch, dass ich festlege, sie sei symmetrisch, transitiv und es gelte für sie die Kontraposition. Wir formulieren für eine noch ganz unbestimmte, durch „x **R** y" bezeichnete Relation die „Axiome" „Wenn (x **R** y), genau dann (y **R** x)"; „Wenn x **R** y und y **R** z, dann x **R** z" und „Wenn x **R** y, genau dann (nicht-y) **R** (nicht-x)". Ich kann dann von beliebigen zweistelligen Relationen, *die ich bereits kenne*, prüfen, ob sie den „Axiomen" genügen. Diese drei „Axiome" gelten für eine unbestimmte Vielzahl heterogener Relationen. So genügen etwa die zweistelligen Prädikate „A und B sind ein Aussagenpaar" und „zwischen p und q besteht eine zweistellige logische Totalform" allen drei Bedingungen[169].

Wenn ich zusätzlich voraussetze, dass **R** ein zweistelliges Gedankengefüge sein soll, kann ich herausfinden, dass alleine das Gedankengefüge 🅴 allen drei Bedingungen genügt[170]; *Voraus*setzung ist die Kenntnis aller zweistelligen Gedankengefüge. Wenn ich zu den drei „Axiomen" zusätzlich voraussetze, dass **R** eine zweistellige logische Totalrelation sein soll, ist es ein Leichtes herauszufinden, dass von allen 15 nichtleeren Totalformen die Funktoren 𝕍, 𝔸, 𝔻, 𝔼, 𝕁, 𝕂 und 𝕏 symmetrisch, die Funktoren 𝔹, ℂ, 𝔼, 𝕂 und 𝕏 transitiv sind, und dass genau für die Funktoren 𝕍, 𝔹, ℂ, 𝔼, 𝕁, 𝕃, 𝕄 die Kontraposition gilt[171]; dass es also genau und nur der Funktor 𝔼 ist, der allen drei Bedingungen genügt. Wiederum muss ich, um dies entscheiden zu können, alle zweistelligen Totalformen schon kennen.

Ob eine oder mehrere zweistellige logische Relationen den Entailment-„Axiomen" genügen, kann ich entsprechend ebenfalls nur entscheiden, wenn ich bereits über die Begriffe der im ersten Teil dieser Arbeit dargestellten zweistelligen logischen Relationen verfüge; dies ist in der sich FREGE anschließenden Relevanzlogistik gerade nicht der Fall. Es können durch eine derartige „axiomatische" Vorgehensweisen niemals logische oder andere Relationen *definiert* werden; umgekehrt – ich kann nur von bereits wohldefinierten Relationen im Nachhinein überprüfen, ob sie den in den „Axiomen " angegebenen Bedingungen genügen oder nicht. Die durch die jeweiligen „Axiome" der verschiedenen relevanzlogistischen Systeme herausgehobenen Eigenschaften der gesuchten Entailmentbeziehung sind viel zu unspezifisch, um eine bestimmte Beziehung zu festzulegen und von andersartigen Beziehungen eindeutig abzugrenzen. Ich kann beispielsweise die logische Form p ↔ q nicht dadurch *definieren*, dass ich festsetze, diese Beziehung solle symmetrisch und transitiv sein sowie dem Kontrapositionsgesetz unterliegen, auch wenn nur die Form 𝔼 unter den zweistelligen Funktoren allen drei Bedingungen genügt[172].

In der Darstellung eines so genannten „Systems der ›*relevanten Implikation*‹"[173] wird die unbestimmte, verbale Leerformel „A impliziert relevant B" durch den „symbolischen", ebenso unbestimmten Ausdruck „A ➡ B" abgekürzt; aus diesem Ausdruck geht zunächst nur hervor, dass wir es mit irgendeiner zweistelligen Relation zu tun haben, wobei diese Relation wie auch die Relata dieser Relation völlig unbestimmt sind. Diese unbestimmte Beziehung soll dann durch die folgenden „Axiome" näher bestimmt und eingegrenzt werden.

(1) A ➡ A
(2) (A ➡ B) ➡ ((C ➡ A) ➡ (C ➡ B))
(3) (A ➡ (B ➡ C)) ➡ (B ➡ (A ➡ C))
(4) (A ➡ (A ➡ B)) ➡ (A ➡ B).

Auf welche Relationen diese „Axiome" zutreffen könnten, kann nur *indirekt* erschlossen werden. Wir haben nach „Axiom" (1) mit einer nicht näher bestimmten *zweistelligen reflexiven* Relation zu tun. Aus den „Axiomen" (2) bis (4) geht zunächst hervor, dass diese ➨-Relation *selbstbezüglich* ist: zwischen Sachverhalten, dass zwischen irgendwelchen Relata diese ➨-Beziehung besteht, kann die nämliche ➨-Beziehung bestehen. Für die ➨-Relation kommen also nur selbstbezügliche Relationen in Frage. Da Gedankengefüge und logische Relationen selbstbezüglich sind, können die zweistelligen Gedankengefüge und logischen Relationen überprüft werden, ob sie den Bedingungen (1) bis (4) genügen. Ersetzen wir das Zeichen ➨ durch das Zeichen ⇒ ergeben sich beispielsweise die folgenden gültigen Fregegesetze:

(1') $(A \Rightarrow A) \equiv \neg(A \& \neg A)$
(2') $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \equiv \neg[\neg(A \& \neg B) \& \neg(C \& \neg A) \& (C \& \neg B)]$[174]
(3') $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \equiv \neg[\neg(A \& B \& \neg C) \& (A \& B \& \neg C)]$
(4') $(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \equiv \neg[\neg(A \& \neg B) \& (A \& \neg B)]$

Das Gedankengefüge **C** genügt also den „Axiomen“[175]; das ist fatal, denn diese „Axiome“ sollten eigentlich die Entailment-Beziehung exakt und eindeutig abgrenzen, die als *Alternative* zu **C** gedacht war. Auch kann ich nur dann feststellen, ob **C** den „Axiomen“ genügt, wenn ich über den Begriff dieses Gedankengefüges schon verfüge; diese vier „Axiome“ definieren also weder **C**, noch andere, eventuell ebenfalls den „Axiomen“ genügenden Relationen.

Die entscheidende Frage, welche der 65.536 überhaupt möglichen zweistelligen logischen Relationen durch diese Axiome gekennzeichnet werden, und ob es überhaupt eine zweistellige logische Relation gibt, die den angegebenen Bedingungen genügt, lässt sich im Rahmen dieser relevanzlogistischen „Axiomatik“ nicht einmal stellen, da es hier allenfalls eine vage, intuitive Kenntnis einiger weniger logischer Relationen gibt. Im Rahmen des im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellten System logischer Formen lässt sich für jede der vorgeschlagenen relevanzlogistischen „Axiomatiken“ systematisch und exakt nachprüfen, welche der überhaupt möglichen zweistelligen logischen Relationen diesen „Axiomen“ genügt, oder ob überhaupt eine logische Relation diesen „Axiomen“ genügen kann.

Ich werde mich darauf beschränken nachzuprüfen, ob die Entailment-Beziehung ℂ⋓𝔼 den angeführten „Axiomen“ der „relevanten Implikation“ genügt, da nur bei dieser Relation verständigerweise von Entailment geredet werden kann. Aber selbst wenn dies der Fall sein sollte, ist der Versuch dieser „axiomatischen“ Kennzeichnung schon deshalb gescheitert, weil diese vier Bedingungen das Entailment nicht von **C** abgrenzen können. Wenn „A ➨ B“ eine logische Relation bezeichnet, sind A, B, C Sachverhalts-/Ereignisklassen; ich gebrauche daher Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen.

Das Entailment ℂ⋓𝔼 genügt dem „Axiom“ (1), denn für jede Sachverhalts-/Ereignisklasse p gilt p↔p, also auch **p⇆p**.

Die bedingungslogische Implikation ℂ genügt dem „Axiom“ (2): Falls $p \rightarrow q$ gilt, gilt dann, wenn $r \rightarrow p$ gilt, auch $r \rightarrow q$. Dies ist ein gültiger Gesetzeszusammenhang zwischen den drei Klassen logischer Formen $p \rightarrow q$, $r \rightarrow p$ und $r \rightarrow q$: wenn nun $p \rightarrow q$ gilt, kann $r \rightarrow p$ gelten oder auch nicht; wenn $r \rightarrow p$ aber bei $p \rightarrow q$ gilt, gilt notwendigerweise auch $r \rightarrow q$. Dieser logische Zusammenhang kann durch $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$ ausgedrückt werden; weil bei ℂ immer auch ℂ⋓𝔼 gilt, ist auch (p ⇆ q) ⇆ ((r ⇆ p) ⇆ (r ⇆ q)) richtig; am genauesten wird der Zusammenhang durch den Ausdruck „[(p → q),(r → p),(r → q) ℂ𝕍]“ dargestellt.

Erfüllt das Entailment ℂ⋓𝔼 die im „Axiom“ (3) dargelegte Bedingung, gilt also das Gesetz des Entailment **[p ⇆ (q ⇆ r)] ⇆ [q ⇆ (p ⇆ r)]**? Prüfen wir zuerst die Beziehung, die zwischen den dreistelligen logischen Verhältnissen *Bei p impliziert q das r*, also $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ und *bei q impliziert p das r*, also $q \rightarrow (p \rightarrow r)$ besteht. Der Ausdruck „$p \rightarrow (q \rightarrow r)$“ bedeutet: bei p gilt notwendig $q \rightarrow r$, bei ∼p hingegen ist $q \rightarrow r$ nur möglich ($\mathcal{K}$); die bedeutet, dass im Falle von ∼p unter bestimmten Bedingungen s ebenfalls $q \rightarrow r$ gilt, und dass, wenn diese Bedingungen s nicht gegeben sind, $q \rightarrow r$ nicht gilt. Es gilt dann (ohne Berücksichtigung von s) die dreistellige Relation [p, q, r ℂ𝕍][176]; dieser Funktor ist äquivalent mit [q,p,r ℂ𝕍][177]; der Ausdruck „[p, q, r ℂ𝕍]“ aber bedeutet dann $q \rightarrow (p \rightarrow r)$, die zweite logische Form, um deren Beziehung es uns geht; beide Formen stehen in der Beziehung der Äquivalenz, und es gilt: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$; a fortiori gilt [p ⇆ (q ⇆ r)] ⇆ [q ⇆ (p ⇆ r)].

Die in „Axiom“ (4) formulierte Bedingung stellt kein mögliches logisches Verhältnis dar; die Vorstellung, beim Vorliegen eines Sachverhalts/Ereignisses p stehe eben dieses p zu einem Sachverhalt/Ereignis q im Verhältnis des Entailment (oder in irgendeinem anderen logischen Verhältnis), ist ungereimt[178]: p steht zu q entweder in diesem Verhältnis oder nicht; es wäre allenfalls die triviale, für alle logischen Relationen gültige Behauptung (p⊞q) ↔ (p⊞q), also auch (p⇆q) ↔ (p⇆q) richtig.

Da das „Axiom“ (4) von keiner logischen Relation erfüllt wird, gibt es keine logische Beziehung, die mit dem anderson-belnapschen Entailment, das durch diese vier „Axiome“ bestimmt sein soll, äquivalent ist. Das echte Entailment ℂ⋓𝔼 erfüllt die „Axiome“ (1) bis (3); aber diese Bedingungen werden auch von anderen logischen Relationen – etwa der „strikten Implikation“ (∘0∘∘)(p, q) erfüllt[179]. Welche logischen Formen diesen „Axiomen“ genügen, lässt sich nur erkennen, wenn man die Gesamtheit der zweistelligen logischen Relationen bereits zu konstruieren in der Lage ist. Dies ist in der Relevanzlogistik nicht der Fall; das Entailment kann deshalb durch ein solches tastendes, probierendes, vage-intuitives Vorgehen nicht bestimmt werden; es besteht im Rahmen der Relevanzlogistik keine Möglichkeit festzustellen, für welche logischen Relationen die formulierten „Axiome“ gelten.

Auf dieselbe Weise versucht **Parry**[180] seine „*analytische Implikation*“ (*Parry-Entailment*) zu bestimmen; zuerst legt er als „symbolische“ Abkürzung für die (zumindest *noch*) leere Worthülse „A impliziert B analytisch“ den Ausdruck „A ➔ B“[181] fest, und will dann durch eine Reihe von „Axiomen“, d.h. von Bedingungen, die den Kreis von in Frage kommenden zweistelligen Relationen beschränken, vollständig und eindeutig definieren, was es bedeutet, dass ein A ein B „analytisch impliziert“. Um was für Relata und Relation es sich bei dieser „analytischen Implikation“ *tatsächlich* handelt, kann aus den „Axiomen“ wiederum nur indirekt und unvollständig erschlossen werden. Um zu prüfen, ob eine *logische* Relation die formulierten Bedingungen erfüllt, müssen wir wiederum das ganze System der bedingungslogischen Formen voraussetzen, weshalb im Rahmen der relevanzlogistischen Konzeption eine solche Prüfung gar nicht möglich ist.

(1)	(A&B) ➔ (B&A)	(7)	((A➔B) & (B➔C)) ➔ (A➔C)
(2)	A ➔ (A&A)	(8)	(A ➔ B&C) ➔ (A ➔ B)
(3)	A ➔ ¬¬A	(9)	((A ➔ B) & (C ➔ D)) ➔ (A&C ➔ B&D)
(4)	¬¬A ➔ A	(10)	((A ➔ B) & (C ➔ D)) ➔ (A▽C ➔ B▽D)
(5)	A & (B▽C) ➔ (A&B) ▽ (A&C)	(11)	(A ➔ B) ➔ (A ⇒ B)
(6)	[A▽(B& ¬B)] ➔ A		

Neben der zunächst ganz unbestimmten zweistelligen Relation A➔B, kommen definierte Gedankengefügebezeichnungen wie „A⇒B“, „A▽B“ und „A&B“ vor[182]; es ist deshalb möglich, dass der Pfeil ➔ ein Gedankengefüge bezeichnet; das Gedankengefüge **C** kommt wohl nicht in Frage, denn es wird bereits durch das Zeichen „⇒“ ausgedrückt („Axiom“ 11); andere Gedankengefüge erfüllen jedoch diese 11 Bedingungen nicht[183]. Es bleibt nur die Möglichkeit, dass „➔“ eine logische Relation bezeichnet, denn wenn etwa „(A&B) ➔ (B&A)“ nicht das Fregegesetz (A&B) ⇒ (B&A) bezeichnet, kann dieser Ausdruck nur ein Gesetz des SFG ausdrücken. Was unter diesen Bedingungen die Buchstaben A, B, C, … bedeuten, kann wiederum nur indirekt und nur unter Voraussetzung der Begriffe der Gedankengefüge einerseits und der logischen Formen andererseits *indirekt* erschlossen werden. In den „Axiomen“ (1) bis (6) bezeichnen A, B, C, … beliebige Aussagen, einschließlich beliebiger Gedankengefügeschemata: das „Axiom“ (1) etwa ist für beliebige Aussagen und für beliebige Gedankengefügeschemata gültig. Ein für den Bereich der wahrheitswertdefiniten Aussagen geltendes Gesetz des SFG, z.B. „Für beliebige Aussagen A, B gilt: (A&B) → (A⇒B)“ gilt immer auch für beliebige Gedankengefügeschemata, z.B. „Für beliebige Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2: $(\Gamma_1 \& \Gamma_2) \rightarrow (\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2)$“. In den „Axiomen“ (7) bis (11) sind A, B,… Bezeichnungen für Relata der logischen Relation des Parry-Entailment; wahrheitswertdefinite Aussagen kommen nicht in Frage, sondern nur Sachverhalts-/Ereignisklassen (wenn wir davon ausgehen, dass das Parry-Entailment eine logische Relation ist); da in „Axiom“ (11) A, B einmal Relata der logischen Relation des Parry-Entailment, dann Relata des Gedankengefüge **C** bezeichnen, kommen als Bedeutung der Buchstaben A, B, … nur Gedankengefügeprädikate/Gedankengefügeschemata in Frage; die Buchstaben A, B, … bezeichnen also entweder Aussagen oder Gedankengefügeschemata. Die „Axiome“ (1) bis (6) bezeichnen dann Gesetze des SFG (logische Relationen wahr Gedankengefügeschemata), die Axiome (7) bis (11) bezeichnen Gesetze des parryschen SFG-Entailment (logische Relationen zwischen dem Parry- Entailment).

Welche logische Relation wird durch die „Axiome“ unter diesen (von **Parry** nicht offen dargelegten, sondern von uns erschlossenen) Voraussetzungen gekennzeichnet? In den „Axiomen“ (1) bis (6) stellt die durch „➔“ bezeichnete Relation die logische Relation 𝔼 oder eine Relation, die von 𝔼 impliziert wird, dar[184]; „Axiom“ (7) soll die Transitivität der durch „➔“ bezeichneten Relation ausdrücken, und deshalb bezeichnet „➔“ an der dritten Stelle seines Vorkommens in dem Ausdruck die logische Relation ℂ, oder jede logische Relation, die von ℂ impliziert wird[185]; der Pfeil ➔ bezeichnet demnach die logische Relation $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}$ und jede gröbere logische Relation – etwa (∘0∘∘), die von $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}$ impliziert wird.

Wird der Pfeil $\rightarrow$ durch das Symbol der Relation $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}$, also durch $\leftrightarrows$ ersetzt, ergeben die Ausdrücke (1) bis (6) gültige Gesetze des SFG. „Axiom" (7) drückt dann die Transitivität der Relation $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}$ aus:
$[(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \& (\Gamma_2 \leftrightarrows \Gamma_3)] \leftrightarrows (\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_3)$[186]. „Axiom" (8) ergibt das richtige Gesetz des SFG-Entailment
$[\Gamma_1 \leftrightarrows (\Gamma_2 \& \Gamma_3)] \leftrightarrows (\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2)$[187]. „Axiom" (9) hingegen führt nicht auf ein gültiges Gesetz des SFG-Entailment
$[(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \& (\Gamma_3 \leftrightarrows \Gamma_4)] \leftrightarrows [(\Gamma_1 \& \Gamma_3) \leftrightarrows (\Gamma_2 \& \Gamma_4)]$, denn es ist möglich, dass wohl $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \& (\Gamma_3 \leftrightarrows \Gamma_4)$ – z.B. $[(A\&B)\leftrightarrows(A \triangledown B)] \& [(\neg A\&\neg B)\leftrightarrows(A\Rightarrow B)]$ – gilt, ohne dass auch $(\Gamma_1 \& \Gamma_3) \leftrightarrows (\Gamma_2 \& \Gamma_4)$ gilt, denn (A&B) und (¬A&¬B) sind unverträglich[188]. Dass ein nachweislich falsches Gesetz des SFG-Entailment zum „Axiom" gemacht wird, belegt wiederum den willkürlichen, unsicher-probierenden Charakter der Intuitionen, auf deren Grundlage diese „Axiomatiken" zusammengestoppelt werden, aber auch, dass dieses Vorgehen keine echte Axiomatisierung darstellt. „Axiom" (10) führt wieder auf ein richtiges Gesetz des SFG-Entailment:
$[(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \& (\Gamma_3 \leftrightarrows \Gamma_4)] \leftrightarrows [(\Gamma_1 \triangledown \Gamma_3) \leftrightarrows (\Gamma_2 \triangledown \Gamma_4)]$[189]. Das „Axiom" (11) besagt, dass das echte WGS-Entailment $\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2$ zur „strikten Implikation" $(\circ 0 \circ\circ)(\Gamma_1,\Gamma_2)$ in der Entailmentbeziehung steht.

Die parryschen „Axiome" kennzeichnen also nicht durchweg jene logische Relation, die alleine das Entailment repräsentiert, nämlich $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}$; Axiom (9) ist für das Entailment falsch. Diese „Axiome" sind *in ihrer Gesamtheit* nur für solche logischen Relationen gültig, die kein Entailment darstellen, etwa für die Relationen (1•••), (•••1) und (1••1). Bei **Parry** bleibt die Vorstellung von „analytischer Implikation" (als der angeblich adäquaten Entailmentbeziehung) völlig intuitiv und vage; alleine aus seinen Pseudoaxiomen kann nicht erkannt werden, von welcher Relation oder welchen Relationen überhaupt die Rede ist; nur wenn wir das System der logischen Formen voraussetzen, können wir mühsam rekonstruieren, ob es überhaupt zweistellige logische Relationen gibt, die allen „Axiomen" genügen; unter dieser Voraussetzung allerdings können wir auf diese „Axiomatik" verzichten, da wir mit der Relation $\mathbb{C}\Cup\mathbb{E}$ eine klaren Begriff des Entailment haben.

Horst Wessel[190] setzt zunächst das SFG voraus und erweitert es durch eine nicht näher bestimmte, verbale Beziehung „Aus A folgt B strikt logisch", die er durch „$A \rightarrow B$" darstellt; als Relata dieses „Wessel-Entailment" werden ausdrücklich „Satzformeln" A, B, C,… bestimmt, d.h. Aussagen und Gedankengefügeschemata. Die durch „$\rightarrow$" bezeichnete Relation soll dann durch die folgenden „Axiome" bestimmt sein:

$A \rightarrow \neg\neg A$	$\neg A \triangledown \neg B \rightarrow \neg(A\&B)$
$\neg\neg A \rightarrow A$	$(A \triangledown B)\&C \rightarrow (A\&C) \triangledown B$
$A\&B \rightarrow A$	$(A\&B) \triangledown (B\&C) \rightarrow (A \triangledown B) \& C$
$A\&B \rightarrow B\&A$	$A \rightarrow A \& (B \triangledown \neg B)$
$\neg(A\&B) \rightarrow \neg A \triangledown \neg B$	

Als „Schlussregeln" formuliert er **Wessel** weitere Eigenschaften des Wessel-Entailment die Transitivität „Wenn $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$, so $A \rightarrow C$" und das Gesetz „Wenn $A \rightarrow B$ und $A \rightarrow C$, dann $A \rightarrow B \wedge C$", wobei er den logischen Zusammenhang umgangssprachlich ausdrückt, obwohl gerade dieser Zusammenhang präziser durch sein Entailment bestimmt sein soll.

Durch diese Bestimmungen ist nicht festgelegt, um welche Art von Beziehung es sich handelt. Wenn wir das Zeichen „$\rightarrow$" durch die Gedankengefügebezeichnungen „$\Rightarrow$" oder „$\Leftrightarrow$" ersetzen, ergeben sich aus allen „Axiomen" gültige Fregegesetze; auch die „Schlussregeln" bleiben für diese Gedankengefüge gültig (sie sind Gesetze des SFG, wobei der logische Zusammenhang korrekt nicht durch das Zeichen für **C**, sondern umgangssprachlich ausgedrückt ist); auch in diesem Fall wird das Entailment $A \rightarrow B$, das eigentlich als echte Implikation/Entailment an die Stelle von $A \Rightarrow B$ treten soll, von diesem Gedankengefüge gar nicht abgegrenzt. Die „Axiome" und „Schlussregeln" ergeben auch richtige und sinnvolle Gesetze des SFG und Gesetze des SFG-Entailment, wenn „$\rightarrow$" durch das Zeichen „$\leftrightarrow$" oder durch die Bezeichnung irgendeiner logischen Relation ersetzt wird, die von $\mathbb{E}$ impliziert wird (etwa durch „(∘0∘∘)" oder „(10•1)"). Was ist nun gemeint? Mit den Methoden und Konzepten der Relevanzlogistik kann nicht geklärt werden, welche Relationen den „Axiomen" genügen. Bei **Wessel** kommen nebeneinander die Zeichen „$\Rightarrow$" und „$\rightarrow$" und das umgangssprachliche „Wenn-dann" vor; warum drückt er den Zusammenhang in den Schlussregeln umgangssprachlich aus? Soll „$\rightarrow$" nicht gerade solche implikativen Zusammenhänge präzisierend bezeichnen? Da allen drei Zeichen die Bedeutung der Implikation (Entailment, „Folgerung“ bei **WESSEL**) gegeben wird, wäre es vordringlich, die tatsächlichen Bedeutungen dieser Ausdrücke und ihr Verhältnis kritisch zu untersuchen – aber genau diese Unterschiede bleiben völlig in der Schwebe.

Dass derartigem Vorgehen das Etikett der „axiomatischen Methode“ angeheftet wird, soll sicherlich seinen blind-probierenden, willkürlichen und völlig intuitiven Charakter vertuschen. Man kann eine Relation nicht dadurch – auch nicht „axiomatisch“ – definieren und eindeutig von allen anderen Relationen abgrenzen, wenn man eine intuitiv-unbestimmte Leerformel wie „A entails B“ durch die mehr oder weniger zufällige und probeweise Zusammenstellung von Eigenschaften wie Reflexivität, Transitivität usw., oder durch das unsystematische Aufzählen einiger Sachverhalte, zwischen denen man das Bestehen dieser Relation annimmt (z.B.: zwischen (A&B) und (B&A) oder zwischen A und ¬¬A besteht die Entailment-Relation, usw.), kennzeichnet; das Entailment lässt sich auf solche Weise nicht eindeutig und klar bestimmen. Im Gegenteil, um entscheiden zu können, ob überhaupt logische Relationen diesen pseudoaxiomatischen Bestimmungen gerecht werden, muss ich schon klare Begriffe der logischen Relationen besitzen. Gerade die Möglichkeit, dass von jeder dieser relevanzlogistischen „Axiomatiken“ unter Voraussetzung des System der logischen Formen überprüft werden kann, ob und welche logische Relationen den „Axiomen“ genügen, belegt, dass Pseudoaxiomatiken präsentiert werden.

Eine Relation ist zuerst gattungsmäßig zu bestimmen – es ist also zuerst zu klären, wie sich z.B. Gedankengefüge oder logische Relationen von allen Nicht-Gedankengefügen oder nicht-logischen Relationen unterscheiden; auf dieser Basis können dann die verschiedenartigen Relation betreffender Gattung gegeneinander abgegrenzt werden. Eine *echte* axiomatische Explikation der logischen Formen einschließlich der Entailmentrelation kann nur in der Darlegung der wenigen grundlegenden und konstitutiven Bestimmungen bestehen, auf deren Grundlage sich jede logische Relation in ihren spezifischen Unterschieden zu allen anderen logischen und nichtlogischen Beziehungen konstruieren lässt. Für das System der bedingungslogischen Formen bestehen diese grundlegenden, als Axiome darstellbaren Bestimmungen in den Begriffen der Sachverhalts-/Ereignisklassen, des Ereignisbezugsystems, der kombinatorisch zu konstruierenden Vorkommenswertkombinationen (dadurch lassen sich die logischen Relationen in ihrer spezifischen Äquivalenz, d.h. in ihrem Unterschied zu den nichtlogischen Relationen bestimmen) und der jeweiligen ebenfalls kombinatorischen Bestimmung der Vorkommenswertkombinationen als realmöglich oder nicht-realmöglich (dies macht den spezifischen Unterschied der logischen Relationen untereinander aus); auf der Basis dieser wenigen fundamentalen Bestimmungen lässt sich jede beliebige logische Form konstruieren, in ihrer spezifischen Bedeutung und in ihren gesetzmäßigen Zusammenhängen explizieren. Die Aufstellung dieser Prinzipien ist nicht willkürlich und nicht subjektiv-intuitiv, sondern geht aus einer systematischen und sachbezogenen Reflexion jener logischen Formen hervor, die schon vor jeder theoretischen Logik umgangssprachlich zum Ausdruck gebracht werden. Axiomatischen, d.h. grundlegenden und elementaren Charakter haben diese Prinzipien nur insofern, als sie innerhalb der Logik selber nicht gerechtfertigt und begründet werden können[191]. Auch das fregesche System der Gedankengefüge kann axiomatisch dargestellt werden; als *echte* Axiome taugen aber allein die Konstruktionsprinzipien; nur auf ihrer Grundlage lassen sich alle Gedankengefüge konstruieren und in ihren gesetzmäßigen Zusammenhänge darlegen[192].

Wir können festhalten, dass die verschiedenen Versuche, in einer Relevanzlogistik die Unstimmigkeiten, die sich aus der logischen Deutung der Gedankengefüge ergeben, zu beseitigen, durchweg erfolglos geblieben sind[193]; der entscheidende Grund liegt in der Scheu, auch angesichts der besprochenen Paradoxien ein prinzipielles Scheitern des fregeschen Logikentwurfs auch nur ins Auge zu fassen.

Anmerkungen zu Teil II, Kapitel 2

1 Sogar in Abhandlungen, die zu rechtfertigen vorgeben, **FREGE**s Gedankengefüge stellten *logische Konstanten* dar, findet sich von tatsächlicher Rechtfertigung und Begründung keine Spur: vielmehr wird nur auf die bloßen unbegründeten Versicherungen **FREGE**s und die Tatsache verwiesen, dass alle Welt diesen Versicherungen Glauben schenkt. Vgl. etwa **KRAMPITZ, KARL-HEINZ**: Die Begründung der logischen Konstanten bei Frege, in: Jenaer Frege-Konferenz, Jena 1979 S.179-195; **HANS LENK**: Kritik der logischen Konstanten. Philosophische Begründungen der Urteilsformen vom Idealismus bis zur Gegenwart. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1968, Kapitel XIX: Freges Rechtfertigung der ‚Gedankengefüge‘, S. 500-513. Trotz einiger partieller Kritik an zweitrangigen Ungereimtheiten bei **FREGE** gilt auch

für **LENK** die entscheidende Streitfrage, ob es sich bei den Gedankengefügen um logische Konstanten handelt, ohne jede Begründung als im Sinne **FREGE**s entschieden: **FREGE** stelle nur „echte logische Konstanten“ dar (S. 513).

2 Junktor, HWP 4, Sp. 659

3 Elementare Logik und Mengenlehre I, S. 23f; so auch **EPSTEIN, RICHARD L.**: The Semantics of Logic, S. 8

4 **STEKELER-WEITHOFER**, Grundprobleme der Logik, S. 211. – **U.WOLF** schreibt: „In der Logik werden auch Sätze der Form ‚Wenn p, so q‘ als rein wahrheitsfunktionale Verknüpfungen aufgefasst.“ (**TUGENDHAT/WOLF**, Logisch-semantische Propädeutik, S. 107) In Wirklichkeit wird *zuerst* die „Wahrheitsfunktion“ *nicht(A und nicht B)* definiert, und diese Bildung dann *nachträglich* – ohne jede Rechtfertigung – durch *Wenn A, dann B* ausgedrückt. — **LENK** und **HEGSELMANN** (Partikeln, logische, HWP 7, Sp.147) führen die Gedankengefüge in ihrer logischen Missdeutung von vornherein als *die* logischen Konstanten ein, **FREGE**s Konstruktionen werden so *in ihrer Missdeutung* zu den absoluten Voraussetzungen aller Logik, die keinerlei Rechtfertigung bedürfen.

5 **LENK** und **HEGSELMANN** schreiben, es sei **FREGE** gelungen, „das System der (heute als die logischen Konstanten anerkannten) Junktoren sukzessive aus der Verneinung und der Konjunktion aufzubauen.“ (Logische Partikeln, HWP 7, Sp. 150); dabei ist zu beachten, dass die Partikeln *nicht* und *und* die einzigen sind, die **FREGE** korrekt und zulässig verwendet!

6 Wollen wir das **J**-Gedankengefüge „A ⋈ B“ nur mit Hilfe der Zeichen „¬“ und „⇒“ darstellen, *muss* hierbei von der Festlegung (A ⇒ B) $\stackrel{\text{def}}{=}$ ¬(A & ¬B) ausgegangen werden – nicht etwa von einer nur in der Einbildung bestehenden einfach-ursprünglichen Wenn-Bedeutung des Zeichens „⇒“; erst auf der Basis dieser Festlegung ergibt sich dann die Bedeutungsgleichheit (A & B) ≡ ¬(A ⇒ ¬B) – über den Umweg: ¬¬(A & ¬¬B); ausgehend von dieser Bedeutungsgleichheit lässt sich dann das Gedankengefüge „¬(A & B) & ¬(¬A & ¬B)“ – die primäre Darstellung des Gedankengefüges **J** – durch den Ausdruck „¬[(A ⇒ ¬B) ⇒ ¬(¬A ⇒ B)] “ ersetzen – über den Umweg ¬[¬¬(A ⇒ ¬B) ⇒ ¬¬¬(¬A ⇒ ¬¬B)]. Was dann dieser Ausdruck „¬[(A⇒¬B) ⇒ ¬(¬A⇒B)] “ bedeutet, nämlich „¬(A&B) & ¬(¬A&¬B)“, wird wiederum nur verständlich, wenn die indirekte, sekundäre Darstellung auf der Grundlage von (A⇒B) $\stackrel{\text{def}}{=}$ ¬(A&¬B) in die direkte, unmittelbar einsichtige Darstellung mit Hilfe von „&“ „rückübersetzt“ wird. Das Zeichen „⇒“ ist also nicht nur kein „Urzeichen“, sondern durchweg abgeleitet, darüber hinaus völlig überflüssig. Wäre **FREGE** bei der primären und unmissverständlichen Bezeichnung der Gedankengefüge geblieben, wäre es ihm sehr viel schwerer gefallen, die Gedankengefüge nachträglich mit irreführenden, seinen eigenen Festsetzungen widersprechenden logischen Deutungen zu versehen.

7 Ähnlich argumentiert **STRAWSON**: „Since ‚¬‘ and ‚&‘ are more nearly identifiable with ‚not‘ and ‚and‘ than other constant with any other English word, I prefer to emphasize the definability of the remaining constants in terms of ‚&‘ and ‚¬‘… The system might, indeed, be called the System of Negation and Conjunction.“ (Introduction to Logical Theory, S. 82; bei **STRAWSON** statt ‚¬‘ und ‚&‘: ‚~‘ und ‚·‘)

8 **MENNE**, Einführung in die Logik, S. 35

9 Grundzüge der theoretischen Logik, S. 4

10 Lehrbuch der elementaren Logik, Band 1: Aussagenlogik, S. 77

11 An anderer Stelle behauptet Frege, das Konditional "*Wenn* $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ *größer als* $\sqrt[10]{10^{21}}$ *ist, so ist* $\left(\frac{21}{20}\right)^{1000}$ *größer als* 10^{21}" (*Vern* 57 [146]) sei ein Gedankengefüge C. Tatsächlich aber kennen wir – jedenfalls nicht auf Anhieb – die Wahrheitswerte von Vorder- und Nachsatz nicht; ob $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ größer ist als $\sqrt[10]{10^{21}}$ ist also problematisch; diesen problematischen Fall können wir dem impliziten Gesetz subsumieren: Wenn eine Zahl a größer ist als eine Zahl b, dann ist a^{10} größer als b^{10}. Aus dieser Subsumtion resultiert **FREGE**s Wenn$_2$–Satz – und *alleine* aus diesem Gesetz folgt, dass es unmöglich ist, dass der Vordersatz wahr und der Nachsatz falsch ist. Wenn ich mich aber mit dem Taschenrechner überzeugt habe, dass $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ tatsächlich größer ist als $\sqrt[10]{10^{21}}$, muss ich den entsprechenden Weil-Satz formulieren.

12 Truth-Tables and Implication, in: **IRVING M. COPI/ JAMES A GOULD** (Eds.): Readings on Logic, Second Edition, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London, S. 223-228; Auszug aus: **FARIS**, J.A.: Truth-Functional Logic. New York 1962 (Dover Publications Inc.); hier S. 224

13 ebd.

14 Ist dem Sprecher auch nicht bekannt, ob Robinson den Posten bekommt, dann kann er auf der Basis des bedingungslogischen Zusammenhangs das Konditional formulieren „Wenn Robinson den Posten bekommt (bekommen sollte), dann ist er graduiert, wenn er über 21 Jahre alt ist (sein sollte“.

15 Siehe unten S. **Fehler! Textmarke nicht definiert.**

16 Auch **H.P.GRICE** hat versucht, mit Hilfe unzutreffender Beispiele einen angeblichen wahrheitsfunktionalen Charakter von Wenn$_2$- und Oder$_2$-Sätzen zu belegen; vgl. unten Abschnitt „2.2.5. **DAS** gricesche Argument“, S. 118ff — Ebenso falsch sind **U.WOLF**s Beispiele für die Wahrheitsfunktion **A**: Den Satz „Es regnet oder es schneit“ behauptet man, wenn man Anlass hat, von diesen beiden Alternativen auszugehen (es besteht also ein Zusammenhang) und man nicht weiß, welche der beiden Alternativen zutrifft (schon deshalb ist das Bei-

spiel kein „wahrheitsfunktionales“ Gedankengefüge **A**). Auch für das falsche Beispiel „Wir machen heute einen Ausflug oder wir gehen ins Theater“ besteht ein – in einem Entschluss gegründeter – Zusammenhang, und es ist noch nicht bekannt, welche Alternative tatsächlich gewählt; wäre dies bekannt (und nur dann ist eine „Wahrheitsfunktion“ möglich), dann sagt auch der Logistiker, wenn er nicht gerade „Logik“ treibt: „Wir machen eine Ausflug und gehen nicht ins Theater“.

17 **N.RESCHER**, Introduction to Logic, 176

18 Logik, S. 74

19 **WAISMANN**: Logik, Sprache, Philosophie, S.531; ebenso **BORKOWSKI**, Formale Logik, S.16, **QUINE**, Grundzüge der Logik, S.38f; **QUINE** ahnt die Willkür dieser Übertragung, sieht in ihr aber kein ernstes Problem. **U.WOLF** schreibt: „Wahrheitsfunktional sind alle zusammengesetzten Sätze, die mit den Wörtern ‚nicht‘, ‚und‘, ‚oder‘ gebildet sind.“ (**TUGENDHAT/WOLF**, Logisch-semantische Propädeutik, S. 105) Die Behauptung ist nur für *Und* und *Nicht* richtig.

20 **Tabelle: Die logischen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen**

	V	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**X**	**O**
V	K	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	L
A	H	E	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	J	G
B	H	A	E	A	A	B	A	B	A	B	A	B	B	J	B	G
C	H	A	A	E	A	B	B	A	B	A	A	B	J	B	B	G
D	H	A	A	A	E	A	B	B	B	A	B	J	B	B	B	G
E	H	A	C	C	A	E	A	V	V	V	J	B	D	D	B	G
F	H	A	A	C	C	V	E	V	V	J	V	D	D	B	B	G
G	H	A	C	A	C	V	V	E	J	V	V	D	B	D	B	G
H	H	C	A	C	A	V	V	J	E	V	V	B	D	B	D	G
I	H	C	C	A	A	V	J	V	V	E	V	B	B	D	D	G
J	H	C	A	A	C	J	V	V	V	V	E	D	B	B	D	G
K	H	C	C	C	J	C	D	D	C	C	D	E	D	D	D	G
L	H	C	C	J	C	D	D	C	D	C	C	D	E	D	D	G
M	H	C	J	C	C	D	C	D	C	D	C	D	D	E	D	G
X	H	J	C	C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D	E	G
O	M	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	X

21 A ▿ ~A {= ¬(A&¬A)} sind der “Prototyp der aussagenlogischen Wahrheit“. (**HOYNINGEN-HUENE**, S. 82) Es ist die *einzige* Wahrheit dieser „Aussagenlogik“ – eine Wahrheit die zu den konstitutiven *Voraussetzungen* dieses Systems gehört (Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit).

22 **HOYNINGEN-HUENE** sagt richtig, „dass logische Wahrheiten *nichtssagend* sind, oder genauer, dass man mit ihnen *nichts behaupten* kann.“ (S. 83f) Auch dieses durchaus verbreitete Einsicht, dass die Gesetze dieser „Aussagenlogik“ nur nichtssagende Belanglosigkeiten sind, kann den bedingungslosen Glauben an die „moderne Logik“ nicht erschüttern und eine kritische Einstellung anstoßen.

23 Die einfachste Version der Fregegesetze ist die Aussage, dass eine Aussage nicht zugleich wahr und falsch sein kann, z.B.:
“A ⇒ A“ bedeutet ¬**(A&¬A)**
„A ▿ ¬A“ bedeutet ¬(¬A&¬¬A) ≡ ¬**(A&¬A)**
„A ⇒ ¬¬A“ bedeutet ¬(A&¬¬¬a) ≡ ¬**(A&¬A)**
„(A ▿ A) ⇒A“ bedeutet ¬[¬(¬A&¬A)&¬nA] ≡ ¬**(A&¬A)**
„(A ⇒ ¬A) ⇒A“ bedeutet ¬[¬(A&¬¬A)&¬nA] ≡ ¬**(A&¬A)**, usw.

Dann gibt es etwas kompliziertere Versionen, die alle zum Ausdruck bringen, dass eine Aussage nicht zugleich wahr und falsch sein kann, ob nun eine andere Aussage wahr ist (oder ob sie falsch ist), z.B.:
„(A⇒(¬A⇒B)“ bedeutet ¬[A&¬¬(¬A&¬B)] ≡ ¬**(A&¬A&¬B)**
„(A&B)⇒A“ bedeutet ¬**(A&B&¬A)**
„A⇒(A▿B)“ bedeutet ¬[A&¬¬(¬A&¬B)] = ¬**(A&¬A&¬B)**,
„(A&B)⇒(A▿B)“ bedeutet ¬[A&B&¬¬(¬A&¬B)] = ¬**(A&B&¬A&¬B)**

Weiterhin gibt es eine Reihe von Fregegesetzen, die besagen, dass ein bestimmtes Gedankengefüge nicht zugleich wahr und falsch sein kann, z.B.:
„(A⇒B)⇒(¬B⇒¬A)“ bedeutet ¬[¬(A&¬B)&¬¬(¬B&¬¬A)] = ¬**[(A&¬B)&¬(A&¬B)]**

Komplexere Fregegesetze drücken die Unmöglichkeit, dass eine Aussage nicht zugleich wahr und falsch sein kann, indirekt aus, z.B. das Fregegesetz (ein „Kernsatz“ der „Begriffsschrift“) „[C⇒(B⇒A)]⇒[(C⇒B)⇒(C⇒A)]“;

das Fregegesetz bedeutet: ¬[¬(C&¬¬(B&¬A))&¬¬(¬(C&¬B)&¬¬(C&¬A))] ≡ **¬[¬(C&B&¬A)&¬(C&¬B)&C&¬A]**.
Bei diesen Fregegesetzen kann gezeigt werden, dass ihre Nicht-Geltung implizieren würde, dass zumindest eine der Aussagen zugleich wahr und falsch wäre; auch Fregegesetze dieser Art drücken deshalb nur aus, dass Aussagen nicht zugleich wahr und falsch sein können. Die Indirektheit dieser Aussage kann beliebig verkompliziert werden.

24 „In der Aussagenlogik ergibt sich das Zwingende korrekter Folgerungen vor allem durch die Wiederholung bestimmter extensional verknüpfter Aussagen.“ Es lasse sich „beweisen, dass eine aussagenlogische Formel nur dann logisch wahr sein kann, wenn mindestens ein Satzbuchstabe in ihr mehr als einmal vorkommt.“ (**HOYNINGEN-HUENE**, Formale Logik, S. 153) Der Grund dafür liegt darin, dass alle solcherart „logisch wahren“ Aussagen von zumindest einer Aussage aussagen, dass sie nicht zugleich wahr und falsch ist.

25 Tatsächlich verleitet **FREGE** gerade diese Tatsache, die Unterscheidung der logischen Formen als „logisch“ irrelevant zu verwerfen; in Wirklichkeit beginnt die theoretische Logik erst mit der Bewusstwerdung der logischen Formen als solcher.

26 Z.B. ist „(p → q) ↔ (~q → ~p)“ ein gültiges logisches Gesetz, „(A ⇒ B) ⇔ (¬B ⇒ ¬A)“ ist ein gültiges Fregegesetz.

27 Z.B. ist „(p∨q) | (p → q)“ ein gültiges logisches Gesetz, „(A▽B) ⇑ (A⇒B)“ hingegen kein gültiges Fregegesetz.

28 Z.B. ist „A ⋈ ¬A“ ein gültiges Fregegesetz und „p >< ~p“ ein gültiges logisches Gesetz.

29 Z.B. ist „A ▽ ¬A“ ein gültiges Fregegesetz und „p ∨ ~p“ ein ungültiges logisches Gesetz („p∨~p“ behauptet ja u.a., dass es realmöglich ist, dass p und ~p zusammen vorliegen).

30 Ich bezeichne die fregeschen „Schlussschemata“ analog den echten Schlussschemata: wenn Γ_1 ein zweistelliges Gedankengefüge A⊕B ist, dann bezeichnet „Γ_1/α“ den Pseudoschluss von Γ_1 und A, „Γ_1/β“ bezeichnet den „Schluss“ von Γ_1 und ¬A, „Γ_1/γ“ den „Schluss“ von Γ_1 und B, „Γ_1/δ“ schließlich den „Schluss“ von Γ_1 und ¬B.

31 Hier wird das Gedankengefüge ▲ schon einer unzulässigen Umdeutung unterzogen; das Gedankengefüge A▽B darf umgangssprachlich nur durch „es ist falsch, dass A und B beide falsch sind“ ausgedrückt werden – so wie Frege es definiert hat.

32 Auch hier gibt er dem Gedankengefüge ohne Begründung eine falsche logische Deutung; wir dürfen A⇒B aber nur in der *definierten* Bedeutung „es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ auffassen.

33 **WESSEL**, Logik, S. 142. – Bei allen etwaigen Unterschieden zwischen der Bedeutung des umgangssprachlichen *Wenn-dann* und der „materialen Implikation“ **C** besitze letztere „at least the most important feature of ordinary ‚if-then‘ statements: a true material implication rules out completely the possibility of the antecedent’s being true but the consequent false.“ (**RESCHER, N.**: Introduction to Logic, 180; siehe auch **EVERETT J.NELSON**, Intensional Relations, Mind, 1930, S.449f). **SANFORD**: Ein wahres Gedankengefüge **C** („Philonian conditional“) „never has a true if-clause and a false main clause, and a valid argument never has true premises and a false conclusion.“ (If P then Q,, S. 20)

34 **RUSSELL/WHITEHEAD**, PM, Vorwort und Einleitung, S. 15. **RUSSEL/WHITEHEAD** verwenden statt ¬, ▽, ⇒ und A, B, C die Zeichen ~, ∨, ⊃ und p, q, r.

35 **B.RUSSEL**, Einführung in die mathematische Philosophie, S. 166

36 Einführung in die mathematische Philosophie, S. 169. – „Nicht-A oder B“ müsste korrekt durch „nicht(A und nicht B)“ ersetzt werden, um eine Verwechslung des „wahrheitsfunktionalen“ Gedankengefüges ▲ der Logistiker mit dem nicht-„wahrheitsfunktionalen“ Oder-Enthymem A⊻B auszuschließen.

37 Einführung in die mathematische Philosophie, S. 172

38 Logical Studies, 1957, S. 187

39 Auch die angeblichen Schlussschemata **FREGE**s, bei welchen von wahrheitswertdefiniten Aussagen auf die Wahrheit eines Gedankengefüges „geschlossen“ wird, haben diesen Trugschlusscharakter: von der vorgegebenen Wahrheit der beiden Aussagen A und B, wird auf ein Gedankengefüge A⊕B „geschlossen“, etwa „A ist wahr; B ist wahr; also ist (A und B) wahr“ (Gef 76 [39]) oder „A ist falsch; B ist falsch; also ist (weder A noch B) wahr“ (Gef 78 [41]); die „Konklusion“ wiederholt hier nur tautologisch, was in den Prämissen schon gesagt wird (die Tautologie im Sinne der traditionellen Logik ist ein Sonderfall der Petitio Pricipii). – Wäre **FREGE**s Argumentation richtig, dann würde es sich auch bei „A ist falsch, also ist A ⇒ B wahr“, bei „B ist wahr, also ist A ⇒ B wahr“ und bei „A ist wahr, also ist A▽B wahr“ um Schlussschemata handeln; hier wiederholt die „Konklusion“, das, was in der „Prämisse“ schon vorausgesetzt und behauptet wird, mit Informationsverschleierung.

40 **B. RUSSEL**, Einführung in die mathematische Philosophie, S. 169f

41 Das ist natürlich nicht nur kein umständliches, sondern überhaupt kein Erschließen!

42 Sprache und Logik, S. 24, Fn.10; vgl. **WESSEL**, Logik, 146f. Es darf nicht übersehen werden, dass auch dann, wenn A ⇒ B mit A behauptet wird, das B schon zirkulär vorausgesetzt wird – das Schema **C**/α also überhaupt nicht angewendet werden kann.

Sehr klar hat **W.E.JOHNSON** (Logic, Part I, zit. **V.WRIGHT**, Logical Studies, S. 171) den Trugschlusscharakter des Schemas „Wenn A⇒B und A, dann B“ erkannt: „From the affirmation of *A* in combination with the material implication of *B* by *A* we may validly infer *B*. But if the material implication of *B* by *A* has been inferred from the denial of *A*, then we can not use this material implication for drawing inferences in conjunction with the affirmation of *A* without committing a contradiction. Thus the denial of *A* cannot be legitimately used for inferring any arbitrary proposition from *A*. From the affirmation of *B* again we may also validly infer that *A* materially implies *B*. But if the material implication of *B* by *A* has been inferred from the affirmation of *B*, then we cannot use this material implication in conjunction with the affirmation of *A* to infer *B* without circularity. Thus the affirmation of *B* cannot be legitimately used for inferring *B* from any arbitrary proposition. ‚The solution of the paradox, **JOHNSON** says, ‚is therefore found in the consideration that though we may correctly infer an implicative from the denial of its implicans, or from the affirmation of its implicate …, yet the implicative … so reached cannot be applied for purposes of further inference without committing the logical fallacy either of contradiction or of circularity.“ So und nicht anders ist es; dieses angeblichen Schlussschema sind Schemata des widersprüchlichen oder zirkulären Schein-Schließens.

43 Einführung in die mathematische Philosophie, S. 169f

44 Vgl den Abschnitt „2.2.8. Die relevanzlogistischen Versuche, die Paradoxa der Missdeutung der Gedankengefüge durch die Erweiterung des SFG zu beseitigen, S.131

45 **G.PATZIG** schreibt, das „Schlussschema“ „Wenn A ⇒ B und A, dann B“ könne nur dann angewendet werden, wenn „A ⇒ B“ „logisch wahr“, d.h. ein Fregegesetz sei (Sprache und Logik, S. 24, Fn.10); die „Wahrheitsfunktion“ **C** wird durch diesen Vorschlag durch die „strikte Implikation“ ersetzt.

46 Vgl. Abschnitt 2.2.8.1. Die „strikte Implikation“, S.132

47 Die Geltung dieser *bedingungslogischen* Beziehung – tatsächlich handelt es sich nicht um eine Implikation $\mathbb{C}$, sondern um eine $\mathbb{E}$-Beziehung – kann nicht, wie **RUSSEL** willkürlich unterstellt, schon dadurch begründet werden, dass (C ⇒ ¬ D) ⇒ (D ⇒ ¬ C) ein Fregegesetz (eine „Tautologie“) ist.

48 Das Bezugsgesetz dieses Schlusses ist nicht das Gedankengefüge **E**, sondern ein $\mathbb{E}$-Gesetz des SFG: diesem Gesetz kann dann eine konkrete (informationsverschleiernde) Gedankengefüge-Aussage über zwei konkreten Aussagen wie z.B. „Frege ist in Wismar geboren“ (abgekürzt $\mathfrak{F}$) und „Russell ist in London geboren“ (abgekürzt $\mathfrak{R}$) subsumiert werden.

SFG-Gesetz als Bezugsgesetz:	(C ⇒ ~D) ↔ (D ⇒ ~C)
Gedankengefügeaussage als Subsumtionsprämisse:	$\mathfrak{F} \Rightarrow \neg\mathfrak{R}$: Es ist falsch, dass $\mathfrak{F}$ wahr ist und $\neg\mathfrak{R}$ falsch ist
Konklusion:	nach dem Schlussschema $\mathbb{E}/\alpha$ gilt notwendig: $\mathfrak{R} \Rightarrow \neg\mathfrak{F}$ – es ist falsch, dass $\mathfrak{R}$ wahr und $\neg\mathfrak{F}$ falsch ist.

In *diesem* Falle eines echten Schlusses müssen wir, um das *Bezugsgesetz* behaupten zu können, nicht schon wissen, wo **FREGE** und **RUSSELL** geboren sind. Die Richtigkeit der *Subsumtionsprämisse* – eine Gedankengefügeaussage – ist hingegen „wahrheitsfunktional“.

Alle Gesetze des SFG, wie sie in der Tabelle in Anmerkung 20, S. 148 können Bezugsgesetz eines Schlusses sein; die Erkenntnis der Richtigkeit all dieser Gesetze des SFG setzt nicht die Kenntnis der Wahrheitswerte von Aussagen voraus; diese Gesetze des SFG sind keine „Wahrheitsfunktionen“, sondern *spezielle* bedingungslogische Gesetze, die Bezugsgesetze echter, nicht-zirkulärer Schlüsse sein können.

49 The Runabout Inference-Ticket, in: **IRVING M. COPI/ JAMES A. GOULD** (Eds.): Readings on Logic, Second Edition, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London, S.217-218; zuerst in Analysis, Vol.21, No.2 (December, 1960, pp. 39-39

50 Nur für A ⊵ B, für A&B und für A ⫞ B gilt die Regel 2; es sind durchweg zirkuläre Tautologien: Wenn von den Aussagen A und B jedenfalls B wahr ist, dann ist B wahr; Wenn A und B wahr sind, ist B wahr; Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist B wahr.

51 **STEVENSON, JOHN T.** hat die Unzulässigkeit des „tonk “-Gedankengefüges erkannt; die Regel (1) müsse als „A ist wahr, also ist A ⊴ B wahr“, die Regel (2) als „(A ⊵ B) ist wahr, also ist B wahr“ formuliert werden; es sei widersprüchlich, wenn **PRIOR** beide Regeln kombiniere. Dass aber beide „Schlussschemata“ für sich jeweils zirkulär und damit unzulässig sind (wie das „Schlussschema“ „aus A&B folgt B“) übersieht auch **STEVENSON**; die Unzulänglichkeit der priorschen Kritik spricht seiner Meinung nach für die fregesche Auffassung (Roundabout the Runabout Inference-Ticket, in: **IRVING M. COPI/ JAMES A. GOULD** (Eds.): Readings on Logic, Second Edition, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London, S.219-222; zuerst in Analysis, Vol.21, 1961, pp.124-128).

52 **G.PATZIG**: Sprache und Logik, S. 24

53 **BOCHEŃSKI/MENNE**: Grundriss der Logistik, S. 27

54 **GEORG HENRIK VON WRIGHT**, Truth, Knowledge and Modalities, Philosophical Papers, Vol.III; Oxford 1984. S. 27

55 **CARNAP**, Symbolische Logik, S. 7

56 **STRAWSON**, Introduction to Logical theory, S. 78

57 **HILBERT/ACKERMANN**, S.3

58 **FREGE**s Argumentation folgt hier dem Trugschlussschema der Ignoratio elenchi: die zu beweisende Behauptung wird unter der Hand durch eine andere, irrelevante ersetzt.

59 **FREGE** argumentiert nach dem Schema der Petitio principii: der Beweis setzt als gültig voraus, was erst bewiesen werden muss.

60 Dasselbe Argument bemüht **THOMAS, JAMES** (In Defense of ‚⊃'. The Journal of Philosophy, 87, 1990, S. 57-70): man müsse scharf unterscheiden zwischen what one asserts in asserting a conditional and the reasons one might have for asserting it. (S. 55, Fn.3).

61 Vgl. unten Abschnitt „2.2.5. Das gricesche Argument", S. 118

62 **K. DÖHMANN**, Die sprachliche Darstellung logischer Funktoren, in: **A.MENNE/ G.FREY** (Hg.): Logik und Sprache, Bern 1974. S. 28-56; statt A, B, & und ¬ verwendet **DÖHMANN** die Zeichen p, q, · und ~.

63 ebd. S. 52

64 ebd. S. 32

65 ebd. S. 39

66 ebd. S. 52

67 If P then Q, S. 55f

68 **S.HAACKS**, Philosophy of Logics, S. 35 (s. **STRAWSON**, Introduction to Logical Theory, S. 78). Statt der Zeichen ~, &, $\triangledown$ und ⇒ verwendet **HAACK** die Zeichen –, &, ∨ und →. – In gleicher Weise äußern sich **HILBERT/BERNAYS**: Grundlagen der Mathematik I. S. 47, Fn. 1; **H. LENK**, Kritik der logischen Konstanten, S. 510.

69 Die sprachliche Darstellung logischer Funktoren, S. 56

70 Pathetisch spricht **FREGE** von den „Fesseln der Sprache" (Log II 61) und den „Fallstricken …, die von der Sprache dem Denken gelegt werden." (Vern 62 [150]) „Die logischen Verhältnisse werden durch die Sprachen fast immer nur angedeutet, dem Raten überlassen, nicht eigentliche ausgedrückt." (WBB 109 [51]); das Folgern werde umgangssprachlich in mehrdeutigen, vielfältigen, losen und dehnbaren Formen ausgedrückt (WBB 108 [50]). Diese Herabsetzungen sind durchweg pauschale, nur versichernde und sachlich unbegründete Bewertungen, die sich auf keinerlei qualifizierte Analysen der umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel stützen.

71 Diese undurchdachte, vordergründige, auf jede Begründung verzichtende pauschale Diffamierung des logischen Werts der Umgangssprache ist zu einem zentralen Dogma der „modernen Logik" geworden.

72 „Es kann nicht Aufgabe des Logikers sein, der Sprache nachzugehen und zu ermitteln, was in den sprachlichen Ausdrücken liege. Jemand, der aus der Sprache Logik lernen will, ist wie ein Erwachsener, der von einem Kinde denken lernen will. Als die Menschen die Sprache bildeten, befanden sie sich in einem Zustande des kindlichen, bildhaften Denkens." (BFH 41) Es müsse „der Wissenschaft erlaubt sein, ihren eigenen Sprachgebrauch zu haben", und sie könne „sich der Sprache des Lebens nicht immer unterwerfen." (Gef 83 [45]) Der Logiker dürfe seine „Kunstausdrücke … prägen, unbekümmert darum, ob in der Sprache des Lebens die Wörter immer genau so gebraucht werden." (Log II 51) „Keinen Vorwurf braucht der Logiker weniger zu scheuen, als dass seine Aufstellungen dem natürlichen Denken nicht angemessen seien." (Log II 65) Angesichts der Tatsache, dass alle theoretischen, wissenschaftlichen Leistungen bis heute unabhängig von jeder theoretischen Logik mit Hilfe der umgangssprachlichen logischen Ausdrucksmittel erbracht werden, sind diese Behauptungen nicht nachvollziehbar.

73 Es ist dann konsequent, wenn **R.CARNAP** behauptet, was Logik sei, sei Angelegenheit einer willkürlichen und beliebigen Festsetzung: „Jeder mag seine Logik, d.h. seine Sprachform aufbauen, wie er will." **R.CARNAP**: Die logische Syntax der Sprache, Wien 1934, S. 45

Auch wenn man, wie **PIRMIN STEKELER-WEITHOFER**, in den fregeschen Neuerungen nur ein begrenzt relevantes, perspektivisch einseitiges, austauschbares und „frei wählbares" „Modell", ein „Logik-Bild" neben anderen sehen will, das nicht dogmatisch „als allgemeines ‚Kriterium' zur Unterscheidung ‚richtiger' von ‚falschen' oder ‚genauer' von ‚ungenauen' Ausdrucksweisen dienen" kann (Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft. Berlin/New York: de Gruyter, 1986, S. 141f), wird der Gegenstand der Logik der Beliebigkeit anheim gestellt, bevor nicht im Einzelnen dargelegt wird, in welcher Weise der Gehalt umgangssprachlicher logischer Ausdrucksmittel in das „Modell" eingefügt wird. Kann „die neue ‚Sichtweise' der fregeschen Logik" tatsächlich „den internen Sinn vieler mathematischer Beweise und die Funktionsweise logischer Abstraktionen und Gegenstandskonstitutionen" erhellen, wie **STEKELER-WEITHOFER** mutmaßt (S.159)? Mit den Gedankengefügen lassen sich auch in der Mathematik nur schon vorausgesetzte Wahrheitswerte von Aussagen bestenfalls tautologisch wiederkäuen – die Gedankengefüge sind in der Mathematik nicht weniger nutzlos wie allen anderen Bereichen des Erkennens. **STEKELER-WEITHOFER** zufolge lässt sich „die ‚Angemessenheit' eines Logikbildes gewissermaßen nur indirekt beurteilen…: Wir müssen ‚sehen', was uns ein Vergleich zwischen Logik-Bild und faktischem Sprachgebrauch ‚zeigt', bzw. wozu eine Orientierung an dem Bild, etwa bei ‚Sprachnormierungen', dienlich sein kann." (ebd.183) Auf eben diesen Vergleich wird im Rahmen der modernen Logik verzichtet; dieser Vergleich wird dadurch verunmöglicht, dass die tatsächlichen Bedeutungen der Gedankengefüge, wie sie aus den Definitionen **FREGE**s resultieren, stets *von vorneherein* mit ihrer nachträglichen logischen Missdeutung konfundiert werden. Orientieren wir uns an der tatsächlichen Bedeutung der Gedankengefüge, dann „sehen“ wir, dass diese allenfalls zu einer tautologischen oder informationsverschleiernden Mystifikation vorausgesetzten Fürwahrhaltens „dienlich“ sind.

74 „Das ‚wenn-so‘ der gewöhnlichen Sprache hat einen schwierig zu erfassenden und kaum eindeutigen Sinn.“ (**HILBERT**/**ACKERMANN**, Grundzüge der theoretischen Logik, S.5). Es sei zu „vermuten, dass man die Hoffnung fahren lassen muss, die logischen Formen seien unschwer von der Verkehrssprache ausgehend in den Griff zu bekommen. Die logischen Strukturen der Verkehrssprache können wohl nur von einem logischen System aus erkannt werden, das nicht aus der Verkehrssprache entwickelt ist, sondern an die Verkehrssprache gleichsam von außen herangetragen wird.“ (**G.PATZIG**, Sprache und Logik, S.36) „Es verdient bemerkt zu werden, dass die Wenn-so-Aussagen im natürlichen Sprachgebrauch ungemein empfindlich sind. Sie sind so empfindlich, dass es aussichtslos ist, diese Empfindlichkeit nachkonstruieren zu wollen.“ (**HEINRICH SCHOLZ**, Logik, Grammatik, Metaphysik, in: **A.MENNE**/**G.FREY** (Hg.): Logik und Sprache, Bern 1974. S.208)

75 Dies gilt natürlich nicht für die logische Missdeutung der **C**- und **A**-Äußerungen! Der Ausdruck „Es ist falsch, dass es wahr ist, dass Güterzüge langsamer fahren als Personenzüge und es falsch ist, dass Panther schneller laufen als Dackel“ ist trotz seiner Albernheit sinnvoll und richtig, während der Ausdruck „Wenn Güterzüge langsamer fahren als Personenzüge, dann laufen Panther schneller als Dackel“ absurd ist.

76 Der entscheidende Fehler dieses Argument ist wie schon bei **FREGE**, dass mit der trotz Informationsverschleierung logischen Korrektheit der nicht-missdeuteten Gedankengefüge die Zulässigkeit der nachträglichen logischen Missdeutung der Gedankengefüge gerechtfertigt wird.

77 Studies in the Way of Words, S. 22. – **GRICE** erörtert nur den Zusammenhang des problematischen Konditionals und des Oder-Enthymems mit Gedankengefügen; die wichtige Tatsache, dass die Partikeln *Wenn* und *Oder* neben den Enthymemen (Wenn$_2$ und Oder$_2$) auch bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge (Wenn$_1$ und Oder$_1$, also die bedingungslogischen Formen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{A}$) ausdrücken, findet in seinem Rechtfertigungsversuch keine Berücksichtigung: dadurch ist dieser Versuch von vorneherein ein aussichtsloses Unterfangen, setzen diese Enthymeme doch diese logischen Relationen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{A}$ voraus.

78 Studies in the Way of Words, S. 45

79 Studies in the Way of Words, S. 59

80 Vgl. **SANFORD**, If P, then Q, S. 60

81 Studies in the Way of Words, S. 8

82 Vgl. **HANSON, WILLIAM H.**, Indicative conditionals are Truth-Functional, in: *Mind*, 100, 1991, 53-72, S. 55; **S.HAACK**, S. 36; **EDGINGTON DOROTHY**, Do Conditionals Have Truth-Conditions? in: Conditionals, Editor: **F. JACKSON**, S. 180

83 **S.HAACK**, Philosophy of Logics, S. 36

84 Studies in the Way of Words, S. 58, 61f, 77f, 84.

85 „Conversational principles would not allow the word *or* to be used in normal circumstances without at least an implicature of the existence of non-truth-functional grounds…“ (Studies in the Way of Words, S. 47)

86 Studies in the Way of Words, S. 76f

87 Studies in the Way of Words, S. 78, 49.

88 Dass Konditionale im Gegensatz zum Gedankengefüge **C** sich auf implizite Gesetzmäßigkeiten stützen, wird in der logistischen Literatur öfters angesprochen; es gebe einen Bezug auf „*some* set of laws and true statements“, der aber schwierig zu bestimmen sei, konstatiert **NUTE** i.A.a. **CHISHOLM**, **GOODMAN**, **SELLARS**, **RESCHER** u.a. Einen Bezug auf „the set of *all* physical laws and the set of *all* true propositions contenable with“ A, fordert **GOODMAN**; **NUTE** selbst spricht von einer nicht näher bestimmten „physical or causal connection“ (Conditional Logic, S.392ff) Es wird auf notwendige „background assumptions“, die „various conditions“ genügen müssten, verwiesen; es würden gewöhnlich some scientific laws dazugezählt; aber es bestünden große Schwierigkeiten in specifying other conditions (**SANFORD**, S.80). B folge aus A „together with certain facts and laws.“ (ebd. 81) **QUINE** verweist auf „kausale Verknüpfungen oder ähnliche Beziehungen zwischen den Sachverhalten…, von denen Vorder- und Hinterglied des Konditionals handeln“; er verneint die Möglichkeit, dass diese Voraussetzungen je präzise rekonstruiert werden könnten (Grundzüge der Logik, S.41). Die Anwendung des so genannten Ramsey-Tests erfordert, dass man das problematische antecedent mit seinem ganzen Wissensbestand (stock of beliefs) verbinde, dann erforderliche „Anpassungen“ vollziehe, damit auch weiterhin die Kohärenz des Wissens gesichert sei; unter diesen Bedingungen könne geprüft werden, ob das consequent wahr sei (**PENDLEBURY**, S. 60, **SANFORD**, S. 88). In einem Überblick über die Versuch, im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs den Konditionalen gerecht zu werden, schreibt **MATES**, vielen Autoren zufolge müsste, damit entsprechend eines Konditionals A ⇨ B die Aussage B als logische Folge von B angesehen werden könne, die Aussage A durch „background assumptions“, gewöhnlich „some scientific laws“, die „various conditions“ genügten, ergänzt werden; es bestünden aber große Schwierigkeiten in specifying other conditions (**MATES, B.**: Review of Walters, 1967, Journal of Symbolic Logic, vol. 35, S. 303f, zit. **SANFORD**, S.79f). All dies ist richtig, aber noch viel zu global, zu vage und zu ungenau: um ein Enthymem A ⇨ B, A ⊃ B oder A ⇉ B zu behaupten, ist nicht der Bezug auf *irgendwelche*, oder gar auf *alle* Gesetze und Aussagen usw., auf irgendwelche nicht genau bestimmbaren Ahnungen notwendig, sondern auf

ein *wohlbestimmtes* Gesetz, dass einen notwendigen Zusammenhang zwischen den wohlbestimmten Ereignisklassen E_A und E_B aufzeigt. Nur wenn sich dieses bestimmte Gesetz eindeutig rekonstruieren lässt, ist das entsprechende Enthymem korrekt.

89 Das Gedankengefüge **C** ist eindeutig allerdings nur, wenn es nicht der logischen Missdeutung unterzogen wird, wenn es also *nicht* als Präzisierung von Implikation oder Konditional ausgegeben wird.

90 Bei **DAVID LEWIS** „Wenn Cäsar im Koreakrieg Befehlshaber gewesen wäre, hätte er Atomwaffen/Wurfmaschinen eingesetzt“ (Counterfactual Dependence and Time's Arrow, S.48)

91 Wort und Gegenstand, S.383. **QUINE** versetzt Cäsar in die heutige Zeit.

92 **SANFORD**, S.82

93 **SANFORD**, S.82f; **WALETZKI**, S.37; **QUINE**, Grundzüge der Logik, S.41

94 Auch die von **WALETZKI** vorgeschlagene Abwandlung des Konditionals ist richtig: „Wenn Verdi ein Landsmann Bizets gewesen wäre {der ein Franzose war}, wäre er Franzose gewesen“ — „Wenn Bizet ein Landsmann Verdis gewesen wäre {der ein Italiener war}, wäre er Italiener gewesen“. (Vgl. S.65f)

95 The Contrary-to-Fact Conditional, *Mind*, 55, 1946, S. 289-307, hier S. 298

96 Fact, Fiction and Forecast, S.18

97 Ein anderes gleichermaßen irreführendes Beispiel stammt von **O'CONNOR** (The Analysis of Conditional Sentences, S. 348): Hans hat mehrere Hunde, die zufällig alle schwarz sind; wenn ich nun kontrafaktisch unterstelle, dass der weiße Spitz Senta dem Hans gehören würde, dann folgt nicht, dass Senta schwarz wäre, sondern dass Hans nicht nur schwarze Hunde besäße; wenn ich aber kontrafaktisch unterstelle, dass Senta einer der schwarzen Hunde (und nicht der weiße Spitz) wäre, muss ich dies ausdrücklich sagen: „Wenn Senta einer der Hunde von Hans wäre, wäre sie ein schwarzer Hund (und nicht der weiße Spitz, der sie ist)“. – **CHISHOLM** (S.304) meint zu Unrecht, dem feststellenden Allsatz „Alle Männer, die heute Vormittag auf dieser Bank gesessen haben, sind Iren“ müsse das Konditional „Wenn der deutsche Michel auf der Bank gesessen hätte. wäre er ein Ire“ entsprechen. Richtig sind jedoch nur die Konditionale „Wenn der deutsche Michel (als derjenige, der er ist) auf der Bank gesessen hätte, wären nicht nur Iren auf der Bank gesessen“ oder auch „Wenn der deutsche Michel einer der Männer auf der Bank gewesen wäre (und nicht derjenige, der er tatsächlich ist), dann wäre er ein Ire (und nicht der deutsche Michel)“. – Ebenso falsch ist es zu glauben, dem Feststellungsallsatz „Alle Bücher auf diesem Schreibtisch sind deutsch“ entspreche das Konditional „Läge das Buch ‚Principia Mathematica‘ auf dem Schreibtisch, wäre es deutsch“ (**BURKS**, S.374). Richtig ist im Hinblick auf den Allsatz „Läge das Buch ‚Principia Mathematica‘ auf dem Schreibtisch, lägen dort nicht nur deutsche Bücher“ und „Wäre das Buch ‚Principia Mathematica‘ eines der Bücher auf dem Schreibtisch (und nicht das Buch, das es ist), dann wäre es deutsch (und nicht das englische Buch, das es ist)“.

98 **O'CONNOR**, S. 355, 361

99 **VON WRIGHT**, On Conditionals, S.161

100 **NUTE**, Conditional Logic, S. 394

101 Hier ist auch einzuwenden, dass man normalerweise von einer toten Person, die an einer Wahl gar nicht teilnehmen kann, nicht sagen kann, sie habe die Wahl verloren.

102 **NUTE**, Topics in Conditional Logic, S. 17; vgl. **H.WESSEL**, Logik, S.295; **WESSEL** hat den Fehler in diesem Argument richtig gesehen.

103 Kausalität, S.113f; auch **POSCH**, Zur Problemlage beim Kausalitätsproblem, S. 20

104 **BURKS, ARTHUR W.** The Logic of Causal Propositions, in: Mind 60, 1951, S.363–382, S.370. Die Beziehung (A➲B & B⇨C) → (A➲C) wird bei **BURKS** durch den Ausdruck „p **s** q · q **c** r : ⇒ .p **s** r“ dargestellt.

105 Die Autoren halten das problematische Konditional für eine defekte, unvollständige „Wahrheitsfunktion“, die bei w(A)⌢w(B) wahr, bei w(A)⌢f(B) falsch, bei f(A)⌢w(B) und bei f(A)⌢f(B) aber unbestimmt sei (The Development of Logic, S.136).

106 Conditionals, Impossibilities and Material Implications. S.90

107 The Logic of Causal Propositions, S.369.

108 The Development of Logic. S.136

109 Introduction, S.3

110 Conditionals, Impossibilities and Material Implications, S.92; vgl. auch **FRANK JACKSON**, Introduction, S.3.

111 **CLARK MICHAEL** (Ifs and Hooks, in: Analysis, 32.2, 1971, S.33-39, hier 34f; vgl auch **BAKER**, ‚If ‘ and ‚ ⊃ ‘, in: Mind 76, S.437-438) stellt den „Conditional Proof“ wie folgt dar: Man könne generell sagen „if *p*, *q* entail *r*, then *p* entails, that if *q* then *r*“. Da es unstrittig sei,

dass bei A⇒B gelte: A entails B, gelte, wegen des Prinzips „*if p, q* entails *r*, then *p* entails, that if *q* then *r*“, auch: *A⇒B entails if A then B* (35). – Bei **CLARK** statt der Zeichen ⇒, A, B die Zeichen ⊃, p, q.

In der Darstellung **LEO SIMONS**’ (Intuition and Implication, Mind, 74, 1965, S. 79-83, hier S. 80) lautet der „Conditional Proof“: aus „p, q, therefore r“ folge „p, therefore, if q, then r“. Als Sonderfall gelte dann, dass aus „not both p and not q, but p, therefore q“ folge „not both p and not q, therefore if p then q“.

J.A. FARIS (Truth-Tables and Implication, in: **IRVING M. COPI/ JAMES A GOULD** (Eds.): Readings on Logic, Second Edition, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London, S.223-228; Auszug aus: **FARIS, J.A.**: Truth-Functional Logic. New York 1962 (Dover Publications Inc.)) argumentiert folgendermaßen: Falls *Wenn A, dann B* gelte, genau dann müsse es irgendeine Menge von Sätzen geben, mit denen zusammen aus A die Aussage B ableitbar sei; diese Bedingung würde von A⇒B erfüllt: denn B sei aus A zusammen mit A⇒B herleitbar; wenn A⇒B wahr sei, dann sei auch (Wenn A, dann B) wahr, denn dann könne aus A zusammen mit anderen Aussagen (nämlich gerade A⇒B), die Aussage B gefolgert werden. – Bei **FARIS** statt ⇒ das Zeichen ⊃.

Der „Conditional Proof“ bei **HANSON WILLIAM H**. (Indicative conditionals are Truth-Functional, Mind, 100, 1991, S. 53-72, S. 53f): Da bei ¬(A&¬B) ≡ A⇒B und A die zusätzliche Annahme ¬B zum Widerspruch ¬(A&¬B)&(A&¬B) führe, gelte bei ¬(A&¬B) und A notwendig B; dann aber könne bei ¬(A&¬B) aus A das B „gefolgert“ werden, es gelte demnach *Wenn A, dann B*. Wer die Äquivalenz von A⇒B und *Wenn A, dann B* leugne, müsse erst einmal diese „Ableitung“, den „*Conditional Proof*“ widerlegen.

PAUL GRICE (Studies in the Way of Words, S. 84f) stellt den „Conditional Proof“ folgendermaßen dar:

¬(A&¬B) ist wahr;
dann ist wenigstens eines von ¬A und B wahr; daraus folgt:
wenn nicht-A falsch ist, dann ist B wahr; wegen der Äquivalenz von *Falsch(nicht-A)* und *Wahr(A)* folgt
Wenn A wahr ist, dann ist B wahr; das führe notwendig auf das Konditional
„Wenn A, B“. – Bei **GRICE** statt ⇒ das Zeichen ⊃.

112 Dies wird in den Darstellungen des „Conditional Proof“ stets sorgfältig beachtet.

113 **HOYNINGEN-HUENE** nennt das logisch irrelevante Fregegesetz [(A&B) ⇒ C] ⇔ [A ⇒ (B ⇒ C), das doch nur besagt, dass es falsch ist, dass es zugleich wahr und falsch ist, dass A und B wahr und C falsch ist, „Deduktionsäquivalenz“ oder „Deduktionstheorem“; er verwechselt dieses Fregegesetz mit dem (ungültigen!) logischen Gesetz: $[(p\wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ (Formale Logik, S. 140f)

114 Es lässt sich jetzt rekonstruieren, welche mannigfachen bedingungslogischen Totalrelationen durch den Ausdruck „$(p\wedge q) \rightarrow r$“ dargestellt werden:

1. R1 = [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{V}$]: bei p impliziert q das r, d.h. p und q implizieren zusammen r; alleine impliziert weder p noch q das r (ob p bzw. q auch mit anderen Ereignissen das r impliziert, ist ungewiss); es gibt noch andere hinreichende Bedingungen für r (bei denen p und q nicht vorliegen müssen).
2. R2 = [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{B}$]: p und q zusammen implizieren r; es gibt noch andere hinreichende Bedingungen für r; wenn p ohne q vorliegt, kann r vorliegen; wenn jedoch p nicht vorliegt, dann ist q notwendig, damit r vorliegt. — p und q sind zusammen nichteinzige hinreichende Bedingung für r; liegt p nicht vor, dann ist q notwendige Bedingung für r.
3. R3 = [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{C}$]: bei p wie bei ∼p impliziert q das r; q impliziert r also unabhängig davon ob p vorliegt oder nicht (ohne Berücksichtigung von p gilt $q \rightarrow r$). q ist nicht die einzige hinreichende Bedingung von r.
4. R4 = [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{E}$]: p und q zusammen sind nicht-einzige hinreichende Bedingung von r; bei p ohne q kann r vorliegen (Möglichkeit $\mathcal{K}$); ohne p ist q notwendige und hinreichende Bedingung von r.
5. R5 = [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{D}$]: p und q zusammen sind nicht-einzige hinreichende Bedingung von r; bei p ohne q ist r möglich ($\mathcal{K}$); bei ∼p sind q und r unverträglich (q ohne p verhindert das Vorliegen von r).
6. R6 = [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{F}$]: p und q zusammen sind nicht-einzige hinreichende Bedingung von r; bei p ohne q ist r möglich ($\mathcal{K}$); q kommt nur mit p zusammen vor (p ist notwendige Bedingung von q — ohne Berücksichtigung von r gilt $p \leftarrow q$).
7. R7 = [p, q, r $\mathbb{C}\equiv$]: p und q zusammen sind nicht-einzige hinreichende Bedingung von r; bei p ohne q ist r möglich ($\mathcal{K}$), aber ohne p ist r nicht möglich, d.h. p ist notwendige Bedingung von r (ohne Berücksichtigung von q gilt $p \leftarrow r$). p ist auch notwendige Bedingung von r (ohne Berücksichtigung von q gilt $p \leftarrow r$
8. R8 = [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{X}$]: p ist notwendige Bedingung von q und notwendige Bedingung von r (ohne Berücksichtigung von q gilt $p \leftarrow r$, und ohne Berücksichtigung von r gilt $p \leftarrow q$; q ist hinreichende Bedingung von r (ohne Berücksichtigung von p gilt $q \rightarrow r$).
9. R9 = [p, q, r $\mathbb{E}\mathbb{V}$] : bei p liegt r nur vor, wenn zugleich q vorliegt – nur mit q zusammen ist p hinreichende Bedingung von r; p kommt mit und ohne q vor, aber mit q ist p hinreichende Bedingung von r; bei q ohne p und ebenso bei q ohne p kann r vorliegen oder nicht vorliegen.
10. R10 = [p, q, r $\mathbb{E}\mathbb{B}$]: p ist mit q hinreichende, q ist notwendige Bedingung für r.

11. R11 = [p, q, r $\mathbb{E}\mathbb{C}$]; p ist nur mit q zusammen hinreichende Bedingung von r; q ist auch ohne p hinreichende Bedingung von r.
12. R12 = [p, q, r $\mathbb{E}\mathbb{D}$]: nur mit q zusammen ist p hinreichende Bedingung von r; ohne p sind q und r unverträglich.
13. R13 = [p, q, r $\mathbb{E}\mathbb{F}$]: p ist notwendige Bedingung von q (ohne Berücksichtigung von r gilt $p \leftarrow q$) und q ist hinreichende Bedingung von r (ohne Berücksichtigung von p gilt $q \rightarrow r$).
14. R14 = [p, q, r $\mathbb{H}\mathbb{V}$] : bei p jedenfalls r, ob nun q oder $\sim$q, d.h. p ist unabhängig von q hinreichende Bedingung von r (ohne Berücksichtigung von q gilt $p \rightarrow r$).
15. R15 = [p, q, r $\mathbb{H}\mathbb{B}$]: p ist unabhängig von q hinreichende Bedingung von r; ohne p ist q notwendige Bedingung von r.
16. R16 = [p, q, r $\mathbb{H}\mathbb{C}$]: p ist unabhängig von q nicht-einzige hinreichende Bedingung von r; ohne p ist q hinreichende Bedingung von r.
17. R17 = [p, q, r $\mathbb{H}\mathbb{D}$]: p ist ohne und mit q hinreichende Bedingung von r; ohne p sind q und r unverträglich.
18. R18 = [p, q, r $\mathbb{H}\mathbb{F}$]: ohne Berücksichtigung von r gilt $p \leftarrow q$; ohne Berücksichtigung von p gilt $q \rightarrow r$; ohne Berücksichtigung von q gilt $p \rightarrow r$. D.h. p ist notwendige Bedingung von q und hinreichende Bedingung von r; q ist hinreichende Bedingung von r.
19. R19 = [p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{V}$]: p ist hinreichende Bedingung für die nichtäquivalenten q und r.
20. R20 = [p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{B}$]: p ist hinreichende Bedingung für die nichtäquivalenten q und r; q ist notwendige Bedingung für r.
21. R21 = [p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{C}$] : p ist hinreichende Bedingung für die nicht-äquivalenten q und r; q ist hinreichende Bedingung für r.
22. R22 = [p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{D}$]: p ist hinreichende Bedingung für die nicht-äquivalenten q und r; ohne p sind q und unverträglich.
23. R23 = [p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{F}$]: ohne Berücksichtigung von r gilt $p \leftrightarrow q$; ohne Berücksichtigung von p gilt $q \rightarrow r$; ohne Berücksichtigung von q gilt $p \rightarrow r$. D.h. p und q sind äquivalent und hinreichende Bedingung von r.

Der begriffsschriftliche Ausdruck „[(A&B) $\Rightarrow$ C]“, der doch nur besagt, dass es falsch ist, dass A und B wahr sind, C aber falsch ist, bringt diese logischen Zusammenhänge gewiss nicht zum Ausdruck!

115 Der ganze Zusammenhang lässt sich präziser fassen, wenn mehr als die drei Sachverhalts-/Ereignisklassen p, q, r berücksichtigt werden. Es müssen drei realmögliche Konstellationen unterschieden werden: (1) bei p gilt $q \rightarrow r$; (2) bei $\sim$p gilt $q \rightarrow r$; in diesem Falle liegen Umstände bestimmter Art vor, die in ihrer Gesamtheit durch s bezeichnet werden sollen; (3) bei $\sim$p gilt nicht $q \rightarrow r$. Die Sachverhalts-/Ereignisklasse q impliziert das r nur, wenn es entweder mit p oder mit s vorliegt; aber ob q ohne s und p möglich ist (ohne r zu implizieren), geht aus den Bestimmungen ebenso wenig hervor, wie der Umstand, ob es für r andere hinreichende Bedingungen gibt außer q mit p oder q mit s. Für $\sim s \frown \sim p$ gilt die zusätzliche Restriktion: $\sim(q \rightarrow r)$. Wir erhalten die folgende vierstellige logische Totalform:

Vorkommenskombination			
I	$s \frown p \frown q \frown r$	0	Diese Konstellation kommt nicht vor, denn s liegt nur vor, wenn p nicht vorliegt.
II	$s \frown p \frown q \frown \sim r$	0	
III	$s \frown p \frown \sim q \frown r$	0	
IV	$s \frown p \frown \sim q \frown \sim r$	0	
V	$s \frown \sim p \frown q \frown r$	1	Konstellation (II) Bei s gilt $q \rightarrow r$
VI	$s \frown \sim p \frown q \frown \sim r$	0	
VII	$s \frown \sim p \frown \sim q \frown r$	1	
VIII	$s \frown \sim p \frown \sim q \frown \sim r$	1	
IX	$\sim s \frown p \frown q \frown r$	1	Konstellation (I) Bei p gilt $q \rightarrow r$
X	$\sim s \frown p \frown q \frown \sim r$	0	
XI	$\sim s \frown p \frown \sim q \frown r$	1	
XII	$\sim s \frown p \frown \sim q \frown \sim r$	1	
XIII	$\sim s \frown \sim p \frown q \frown r$	•	Konstellation (III) ausgeschlossen ist $\sim s \frown \sim p$: $(q \rightarrow r)$ und ebenso $(q \perp r)$
XIV	$\sim s \frown \sim p \frown q \frown \sim r$	•	
XV	$\sim s \frown \sim p \frown \sim q \frown r$	•	
XVI	$\sim s \frown \sim p \frown \sim q \frown \sim r$	1	

116 Es gilt also nicht $[(A \Rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)] \equiv [(A \Rightarrow B), A, B\ \mathbb{C}\mathbb{V}]$, wie im „Conditional Proof“ fälschlich unterstellt wird.

117 Diese Möglichkeit umfasst die Fälle, dass A falsch und B wahr ist, und dass beide Aussagen falsch sind.

118 Die Aussage „A impliziert B“ soll besagen, dass der Sachverhalt/das Ereignis e_A, dessen Vorliegen von A konstatiert wird, das Vorliegen des Sachverhalts/Ereignisses e_B, von dem die Aussage B spricht, impliziert.

119 Vgl. etwa **H.WEIDEMANN**, Modallogik II, Historisches Wörterbuch der Philosophie, Bd.6, Sp.23; **H.WESSEL**, Logik, S.142f; **CHARLES F. KIELKOPF**, The binary operation called ‚material implication‘ soberly understood, in: *Mind*, ..., S.338-347; **W.C.SALMON**, Logik, 80; **S.HAACK**, S.37; **BERKA/KREISER**, 154; **G.PATZIG**, Logistik, Fischer-Lexikon Philosophie, S.152; **HOYNINGEN-HUENE**, S. 117ff

120 Nach der Definition von **C** sind für zwei Aussagen A und B die Gedankengefüge-Behauptungen $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow A)$ genau dann wahr, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind – Vorkommenskombination I ist realmöglich; es ist genau dann $(A \Rightarrow B)$ wahr und $(B \Rightarrow A)$ falsch, wenn A falsch und B wahr ist – Vorkommenskombination II ist realmöglich; es ist genau dann $(A \Rightarrow B)$ falsch und $(B \Rightarrow A)$ wahr, wenn A falsch und B wahr ist (Vorkommenskombination III ist realmöglich); $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow A)$ können beide nicht falsch sein, denn gilt $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \& \neg B$ ist $(B \Rightarrow A)$ wahr, und gilt $\neg(B \Rightarrow A) \equiv \neg A \& B$, ist $(A \Rightarrow B)$ wahr (Vorkommenskombination IV ist nicht-realmöglich).

121 Schon dass das Gedankengefüge **C** „materiale *Implikation*“ genannt wird, stellt eine logische Missdeutung, die falsche Vorspiegelung einer logischen Beziehung dar.

122 Nur die Gedankengefüge **K**, **M**, **L** und **X**, die die vorgegebenen Wahrheitswerte der Aussagen ohne Informationsverschleierung ausdrücken und die Gedankengefüge **F**, **G**, **H** und **I**, welche besagen, dass von zwei Aussagen jedenfalls eine wahr bzw. falsch ist, werden keiner logischen Missdeutung unterzogen.

123 **S.HAACK**, S. 198ff; **H.WESSEL**, S. 140ff; **JOHN P. CLEAVE**, An Account of Entailment Based on Classical Semantics, Analysis 34 (1974/75), S. 118-122; **GEORGE HENRIK VON WRIGHT**: The Concept of Entailment, in: Logical Studies, S. 166-191

124 **ANDERSON** und **BELNAP** schreiben über die Zielsetzung der „Relevanzlogik“: „The fancy that relevance is irrelevant to validity strikes us as ludicrous, and we therefore make an attempt to explicate the notion of relevance of A to B.“ (Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol.1, Princeton U.P. 1975, S.17f) Erstrebt wird ein Begriff der Folgerung, „which requires relevance of premises to conclusion“ (**S.HAACK**, Philosophy of Logics, 16)

125 Implikation/Entailment und Folgerungsbeziehung werden in der „modernen Logik“ generell nicht klar unterschieden, sehr oft sogar identifiziert. Die Beziehung des *Entailment* soll die Konverse der Relation „ … folgt aus …“ sein (vgl. **GEORGE HENRIK VON WRIGHT**: The Concept of Entailment, in: Logical Studies, S. 166f); **RUSSELL** und **LEWIS** bezeichnen die Folgerungsrelation als *Implikation* (166). **RUSSELL**: „When a proposition *q* follows from a proposition *p*, so that if *p* is true, *q* must also be true, we say that ‚*p implies q*‘ (PM, Bd. I, S. 94) Die Theorie der Implikation sei „the theory of how one proposition can be inferred from another.“ Auch **WESSEL** identifiziert logische Folgerungsbeziehung, Implikation und Entailment (Logik, S. 140ff). – Hinzu kommt, dass hinsichtlich der Folgerungsbeziehung nicht zwischen *vollständigen* Schlüssen der Form „Aus A und B folgt C“ und den problematischen Konditionalen, d.h. *enthymematischen* Schlüssen der Form „Wenn A, dann B“ (A⇨B) unterschieden wird.

126 Wie schon erwähnt kann jeder Schluss (als Beziehung von Aussagen) nur im Rahmen eines Schlussschemas, d.h. eines speziellen Implikationsgesetzes vorgenommen werden.

127 **BORKOWSKI**, Formale Logik, S. 35, S.96f; **HORST WESSEL**, Logik, 145;

128 **P.LORENZEN** will den Ausdruck „Implikation“ nur noch für das Entailment (die „logische Folgerung“) verwenden, das Gedankengefüge **C** wird als „Subjunktion“ bezeichnet (Formale Logik, S. 32); nur diese „Implikation“ stelle einen logischer Zusammenhang dar (**MENNE**, HWP 4, Sp. 264; vgl. auch **WILLARD V.O.QUINE**, Grundzüge der Logik, S. 22, 63ff; **SANFORD**, If P, then Q, S. 52; **WESSEL**, S.142). **RUDOLF CARNAP** spricht im Falle eines Fregegesetzes der Form „$\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$“ von einer „L-Implikation“; dieser sei das Explikat für den traditionellen Begriff der Implikation oder logischen Implikation (Symbolische Logik, S. 20)

129 Die „Auffassung der logischen Folgebeziehung, nach der in den Tautologien (Theoremen) der klassischen Aussagenlogik die „Subjunktion“ nur dann als Folgebeziehung gedeutet werden darf, wenn sie als Hauptoperator auftritt, wurde zu den am stärksten verbreiteten.“ (**H.WESSEL**, Logik, S. 145)

130 **LEWIS/LANGFORD**, S. 244f

131 Weil $(A \& B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ ein Fregegesetz (eine „Tautologie“) ist, ist (A&B) ➸ $(A \Rightarrow B)$ eine strikte Implikation und umgekehrt.

132 Im Falle der „strikten Implikation“ (A&B) ➸ $(A \Rightarrow B)$ ist es die logische Relation zwischen der Klasse der Sachverhalte, dass von zwei beliebigen Aussagen beide wahr sind, und der Klasse der Sachverhalte, dass von diesen beiden Aussagen jedenfalls nicht die erste wahr und die zweite falsch ist.

133 Gilt die „Tautologie“ $(A \& B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, haben wir das $\mathbb{C}$-Gesetz: $(A \& B) \rightarrow (A \Rightarrow B)$
Gilt die „Tautologie“ $[(A \triangledown B) \Leftarrow (A \Uparrow B)] \Rightarrow (A \triangledown B)$, haben wir das $\mathbb{E}$-Gesetz $[(A \triangledown B) \Leftarrow (A \Uparrow B)] \leftrightarrow (A \triangledown B)$
Gilt die „Tautologie“ $(A \& \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, haben wir das $\mathbb{F}$-Gesetz $(A \& \neg A) \nwarrow (A \Rightarrow B)$

Gilt die „Tautologie“ (A⇒B) ⇒ (A⩒¬A), haben wir das ℍ-Gesetz (A⇒B) ⥰ (A⩒¬A)
Gilt die „Tautologie“ (A⩒¬A) ⇒ [(A ⇒(B ⇒A)], haben wir das 𝕂-Gesetz (A⇒B) ∧ (A⩒¬A)
Gilt die „Tautologie“ (A&¬A) ⇒ [(A ⇒(B ⇒A)], haben wir das Präsektionsgesetz (A⇒B) ⋞ (A⩒¬A)
Gilt die „Tautologie“ ¬(A⩒¬A) ⇒ ¬[(A ⇒(B ⇒A)], haben wir das Rejektionsgesetz (A⇒B) ⇓ (A⩒¬A).

Nicht in allen diesen Fällen entspricht der „Tautologie“ ein Entailment!

134 Es gilt dann entweder Γ_1 ⋞ Γ_2 (Γ_1 ist eine „Antilogie“, Γ_2 ist eine „Tautologie“), oder Γ_1 † Γ_2 (Γ1 und Γ_2 sind „Antilogien“), oder Γ_1 ⎤ Γ_2 (Γ_1 ist eine „Antilogie“, Γ_2 weder eine „Antilogie“ noch eine „Tautologie“).

135 Es gilt dann entweder Γ_1 ⋞ Γ_2 (Γ_1 ist eine „Antilogie“, Γ_2 ist eine „Tautologie“), oder Γ_1&Γ_2 (Γ1 und Γ_2 sind „Tautologien“), oder Γ_1 ⎣ Γ_2 (Γ_1 ist weder eine „Antilogie“ noch eine „Tautologie, Γ_2 ist eine „Tautologie“).

136 Gemäß der fregeschen Definition von ◖ bezeichnet der Ausdruck „(A&¬A) ⇒ B“ ein richtiges Fregegesetz, nämlich „es ist falsch, das A wahr und zugleich falsch und B falsch ist“; die Behauptung „(A&¬A) ➻ B“ ist also richtig – wir haben eine gültige „strikte Implikation“; falsch ist nur die Deutung dieses Gesetzes als Entailment-Gesetz, d.h. die Behauptung, dass die Wahrheit von A&¬A die Wahrheit einer Aussage B bedinge (impliziere). Wenn der „strikten Implikation“ Γ_1 ➻ Γ_2 keine andere Bedeutung gegeben wird, als „(∘0∘∘)(Γ_1,Γ_2), wodurch sie ja definiert wird, treten keine Paradoxien auf. Wie die „Paradoxien der ›materialen Implikation‹“ resultieren die „Paradoxien der ›strikten Implikation‹“ aus falschen, im Widerspruch zur jeweiligen Definition stehenden Deutungen.

137 Vgl. **AUSTIN E. DUNCAN-JONES**, Is Strict Implication the Same as Entailment, in: Analysis, 2, 1934, 35, S. 70-78, S. 75; **H. WESSEL**, S. 1457ff; **S. HAACK**, S. 197f

STRAWSON gibt als Bedingung dafür, dass eine Formel Γ_1 zu einer Formel Γ_2 in der *logischen Relation* des Entailment steht, an, dass für keine Belegung der Aussagevariablen in beiden Formeln die Formel Γ_1 wahr und die Formel Γ_2 falsch ist. Dies entspricht genau der lewisschen Bestimmung und teilt deren Unzulänglichkeit. Ebenso unzulänglich sind die anderen logischen Beziehungen, die **STRAWSON** für SFG-Formeln festlegt. Erhalten bei keiner Belegung der Aussagevariablen die Formeln Γ_1 und Γ_2 verschiedene Wahrheitswerte, bestünde die Beziehung der *logischen Äquivalenz*; in Wirklichkeit besteht nicht die Äquivalenz-Beziehung ($\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$) ≡ (1001)($\Gamma_1$, Γ_2), sondern die Beziehung (∘00∘)(Γ_1, Γ_2). Zwei SFG-Formeln Γ_1 und Γ_2 stünden in der Beziehung der Kontradiktion, wenn sie bei jeder Belegung der Aussagevariablen unterschiedliche Wahrheitswerte erhielten; tatsächlich besteht dann jedoch nicht die Beziehung (0110)(Γ_1, Γ_2), sondern die Beziehung (0∘∘0)(Γ_1, Γ_2). Ebenso verwechselt **STRAWONS** die Beziehung der Kontrarietät von SFG-Formeln (0111)(Γ_1, Γ_2) mit der Beziehung (0∘∘∘)(Γ_1, Γ_2), und die Beziehung der Subkontrarietät (1110)(Γ_1, Γ_2) mit der Beziehung (∘∘∘0)(Γ_1, Γ_2) (Introduction to Logical Theory, S. 72).

138 **WESSEL**, Logik, 153; **KONINGSVELD** formuliert das WGS-Kriteriumso: „‚*p* entails c‘ means that c cannot be false if p is true, while *p* and c themselves are contingent. (What does ‚*p* Entails c‘ Mean? *Mind*, 82, 1973, S. 118-122, hier S. 120) „Contingent“ bedeutet: p kann bald wahr, bald falsch sein; es ist klar, dass „p“ dann keine Aussage bezeichnen kann, denn eine Aussage ist entweder wahr oder falsch (Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit); p und c bezeichnen Gedankengefüge-Prädikate, die jeweils den einen Aussagen zukommen, anderen Aussagen nicht zukommen.

139 Wäre Γ_1⌢Γ_2 wie Γ_1⌢¬Γ_2 nicht-realmöglich, dann wäre Γ_1 eine „Antilogie“.

140 **H.WESSEL** bestreitet dies: auch durch das WGS-Kriterium sei das SFG-Entailment nicht korrekt bestimmt; denn während vom echten Entailment Transitivität zu fordern sei, könne auf folgende Weise die Nicht-Transitivität des WGS-Entailment nachgewiesen werden: Nach dem WGS-Kriterium seien folgende Entailmentbeziehungen gültig:

(1) A ⇆ A& (B⩒¬B) — Da die Äquivalenzbeziehung A ↔ A& (B⩒¬B) gilt, ist die Behauptung (1) richtig

(2) A& (B⩒¬B) ⇆ (B⩒¬B)

Wäre die ⇆-Beziehung transitiv, müsse gelten:

(3) A ⇆ (B⩒¬B);

diese Formel dürfe als eine „Paradoxie der ›strikten Implikation‹“ aber nicht gültig sein (Logik, S. 153). In Wirklichkeit ist **WESSEL**s Argumentation falsch, denn schon die Formel (2) behauptet zu Unrecht ein Entailment – sie wird deshalb dem WGS-Kriterium nicht gerecht, da „B⩒¬B“ eine „Tautologie“ ist; zwischen den Relata von (2) besteht keine Entailment-, sondern eine Postpendenzbeziehung vor. Aus (1) und der berichtigten Formel (2) A&(B⩒¬B)⎣(B⩒¬B) folgt dann nach dem Schlussschema ℂ⋓𝔼/ℍ/ℍ das Postpendenzgesetz A⎣ (B⩒¬B) – ob eine Aussage A wahr oder falsch ist, jedenfalls ist B⩒¬B wahr. **WESSEL** begeht denselben Fehler wie **LEWIS**: er hält die Relation ℍ für die Entailment-Beziehung. – Statt A, B, ⇆, ⩒, &, ¬ der Reihe nach bei **WESSEL**: p, q, →, ∨, ∧, ∼.

141 Wie sollte es denn möglich sein, *zuerst* eine wissenschaftliche Theorie aufzustellen, *danach* ihre Widerspruchsfreiheit nachzuweisen, und *erst dann* die Logik ins Spiel zu bringen? Eine solche Nachhinein-Logik wäre so überflüssig, wie es diejenige von **FREGE** tatsächlich ist.

142 **H. WESSEL**, Logik, S. 175 – **WESSEL** übersieht, dass die verschiedenen relevanzlogistischen Entailment-Konzepte nur auf Gedankengefüge anwendbar sind, damit auf mathematische, naturwissenschaftliche, wissenschaftlich relevante Sachverhalte überhaupt nicht anwendbar sind.

143 *SFG-Entailment* nenne ich die Entailmentbeziehung ℂ⋓𝔼, sofern sie zwischen Gedankengefügen besteht.

144 Diese Deutung wird jedoch bereits durch das WGS-Kriterium ausgeschlossen.

145 **H.WESSEL**, Logik, S. 161 – die erste Möglichkeit fehlt bei **WESSEL**.

146 **H.WESSEL**, Logik, S. 170f. Wenn weder die „materiale Implikation" noch die „strikte Implikation" Γ_1➽Γ_2 mit dem Entailment Γ_1⇆Γ_2 verwechselt wird, ist keine dieser Formeln paradox; nicht die Formeln sind paradox, nur ihre den festgelegten Bedeutungen von „⇒" und „➽" widersprechende Missdeutung als Implikationsbeziehungen.

147 Logik, S. 161f

148 Sowohl bei A⇔B wie bei ~(A⇔B) kann jeweils sowohl A≡B wie ~(A≡B) gelten.

149 Wenn ich im Ausdruck des Fregegesetzes „(A⇒B) ⇒ (¬B⇒¬A)" die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen durch Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen, das Zeichen ⇒ durch das Implikationszeichen → und das Bestreitenzeichen ¬ durch das Negationszeichen ~, erhalte ich den Ausdruck des gültigen logischen Kontrapositionsgesetzes „(p → q) → (~q → ~p)". Diese Tatsache, dass aus einer Vielzahl von Fregegesetzen durch solche Ersetzungen Ausdrücke gültiger logischer Gesetze werden – wobei die Gültigkeit durch die im ersten Teil dargelegten nicht-intuitiven Methoden gesichert ist – ist aber ohne Belang; denn was diese und andere SFG-Ausdrücke bedeuten, hängt ja nicht davon ab, welcher Ausdruck sich ergibt, wenn begriffsschriftliche Zeichen durch andere Zeichen ersetzt werden, sondern alleine von der festgelegten Bedeutung der begriffsschriftlichen Zeichen.

150 **H. WESSEL**, Logik, S. 157; **ALAN ROSS ANDERSON** (An Intensional Interpretation of Truth-Values, in: *Mind*, 83, 1972, S.348-371) fordert „an alternative system which saved the many important parts of the calculus" (d.h. des SFG), und einen „attempt to reconstruct a theory, so as to save the good bits and discard the bad." (364)

151 Wenn ich z.B. die als nichtparadoxe logische Gesetze missverstandenen Fregegesetze „[(A⇒B)&A]⇒B" und „(A⇒B) ⇒ (¬B⇒¬A)" nach ihrer tatsächlich definierten Bedeutung fasse, verbietet es sich, sie, wie in der Logistik üblich, mit dem logischen Gesetz des Modus Ponens oder mit dem Kontrapositionsgesetz zu identifizieren. *Beide* Fregegesetze besagen dasselbe, dass es nicht zugleich wahr und falsch ist, dass A wahr und B falsch ist. Das logische Kontrapositionsgesetz und der „Modus ponens" haben erstens nicht dieselbe Bedeutung, und zweitens sicherlich nicht die triviale Bedeutung dieser Fregegesetze; ihr Beweis ist auch nicht so simpel wie der der Fregegesetze.

152 Das WGS-Kriterium ist z.B. nicht auf die beiden arithmetischen Sachverhalte „eine Zahl a ist größer als 1" und „das Quadrat einer Zahl a ist größer als 1" anwendbar, obwohl diese Sachverhalte in der Beziehung des Entailment stehen, da die Relata hier keine Gedankengefüge-Schemata sind.

153 Die Bestimmung, die ich oben für das SFG-Entailment angegeben habe – ein Gedankengefüge Γ_1 steht zu einem Gedankengefüge Γ_2 genau dann im Entailment-Verhältnis, wenn die Menge der von Γ_1 nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate echt oder unecht in der Menge der von Γ_2 nicht ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate enthalten ist –, ist direkt; nur eine solche direkte Bestimmung des SFG-Entailment ermöglicht den Beweis von Gesetzen des SFG-Entailment selbst.

154 So führt **H. WESSEL** zu Gunsten einer sog. „strikten logischen Folgebeziehung" (es handelt sich um das WGS-Kriterium mit der zu starken Restriktion, dass bei Γ_1⇆Γ_2 alle „Aussagevariablen" von Γ_2 auch „Aussagevariablen" von Γ_1 sein sollen) an, dass die Formeln „A⇆(B⇒A)", „A⇆(¬A⇒B)", „A⇆(B▿A)" „nicht beweisbar" seien ((Logik, S. 170; bei **WESSEL** statt der Zeichen ⇆ und ⇒ die Zeichen → und ⊃): tatsächlich aber sind diese Formel allesamt gültige Entailment-Gesetze des SFG.

155 **C.I.LEWIS/C.H.LANGFORD**, Symbolic Logic (1932), S.250f; vgl. **JONATHAN BENNET:** Meaning and Implication, in: *Mind*, 63, 1954, S.451-463; **PETER M. SIMONS**: Lewy on C.I.Lewis and Entailment, in: *Analysis*, 38, 1978, S.126-129; **ISEMINGER, GARY**: Is Relevance Necessary for Validity? in: *Mind*, 89,. 1980, S.196-213; **KIELKOPF, CHARLES F**.: Adjunction and Paradoxical Derivations Analysis, 35, 1974/75, S.127-129

156 Dass ein Widerspruch wie die „Konjunktion" (A&¬A) explizit und völlig arglos zur Voraussetzung einer Beweisführung gemacht wird, ist erst im Rahmen der „modernen Logik" hoffähig geworden. – **HOYNINGEN-HUENE** schreibt, „das Folgern von A aus A&¬A" sei „ein spezieller Fall des Folgerns von A aus A&B", und „die Gültigkeit dieses Schlusses" sei „noch nie bezweifelt worden" (Formale Logik, S. 124) – ein vernichtendes, wenn auch indirektes und ungewolltes Urteil über die „modernen Logik".

157 Die Ausdrücke „A&B" und „A&(B▿¬B)" sind grundlegend verschieden; der erste Ausdruck bezeichnet den allgemeinen Sachverhalt, dass zwei Aussagen A und B das Gedankengefüge **K** zukommt; dieser Sachverhalt liegt nicht vor, wenn entweder A oder wenn B oder wenn beide Aussagen falsch sind; der durch „A&(B▿¬B)" Sachverhalt liegt hingegen nur dann nicht vor, wenn A falsch ist; es genügt also, im Gegensatz zum Ausdruck „A&B", dass A wahr ist, damit „A&(B▿¬B)" wahr ist; der Wahrheitswert von B ist ohne Belang.

158 Vgl. **S.Haack**, Philosophy of Logics, S. 200

159 „Es ist falsch, dass ›1 + 1 = 1‹ wahr und ›der Schnee ist schwarz‹ falsch ist“

160 „Es ist falsch, dass es falsch ist, dass der Schnee schwarz ist und es zugleich falsch ist, dass es falsch ist, dass 1 + 1 gleich 1“

161 Ich kann nicht prüfen, ob der Ausdruck „[(A&B ⇆ A) ⇒(¬A ⇆ ¬(A&B)]“ eine WGS-Tautologie ist, denn die Relata von ⇒ sind jetzt ja keine Gedankengefüge, sondern Aussagen über die Entailment-Beziehung zwischen Gedankengefügen; ja, die gültige Entailmentrelation [(A&B ⇆ A) ⇆ (¬A ⇆ ¬(A&B)] müsste nach dem WGS-Kriteriumsogar verneint werden, denn [(A&B ⇆ A) ⇒(¬A ⇆ ¬(A&B)] ist kein Fregegesetz.

Wenn ich im Ausdruck „[(A&B ⇆ A) ⇒(¬A ⇆ ¬(A&B)]“ das Entailment-Zeichen „⇆“ durch das Gedankengefüge-Zeichen „⇒“ ersetze, erhalte ich den Ausdruck „[(A&B ⇒ A) ⇒(¬A ⇒ ¬(A&B)]“; auch dieser Ausdruck kann die WSG-Kriterien nicht erfüllen, denn der Teilausdruck „(¬A ⇒ ¬(A&B)“ ist eine „Tautologie“!

162 Jedes Gedankengefüge beliebiger Stelligkeit ist durch die Menge der nicht ausdrücklich ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate definiert; dass n gegebenen wahrheitswertdefiniten Aussagen eines der nicht ausdrücklich ausgeschlossenen Wahrheitswertprädikate zukommt, ist eine der hinreichenden, paarweise unverträglichen Bedingungen für die Wahrheit des betreffenden n-stelligen Gedankengefüges. Ein Gedankengefüge Γ_1 steht zu einem Gedankengefüge Γ_2 genau dann in der Entailmentbeziehung, wenn die Menge der hinreichenden Bedingungen für Γ_1 eine echte oder unechte Teilmenge der Menge der hinreichenden Bedingungen für die Wahrheit von Γ_2 sind.

163 Diese schließende Subsumtion nach dem Schlussschema ℂ⋓𝔼/α wird durch das Schema dargestellt:

Bezugsgesetz: $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2) \leftrightarrows (\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$
Subsumtionsprämisse: Die Beziehung (A&B)⇆A ist ein Entailment der Form $(\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_2)$

Konklusion: Notwendig gilt unter diesen Bedingungen mit ¬A ⇆ ¬(A&B) ein Entailment der entsprechenden Form $(\neg\Gamma_2 \leftrightarrows \neg\Gamma_1)$

164 Korrekt hingegen ist der Ausdruck „[(A&B)⇆A]⇒[¬A ⇆ ¬(A&B)]“; er drückt als konkrete **C**-Behauptung mit Informationsverschleierung die Voraussetzung aus, dass beide Entailmentbehauptungen richtig sind; „[(A&B)⇆A]⇒[¬A ⇆ ¬(A&B)]“ ist die Aussage, dass **C** den beiden wahren Aussagen „[(A&B)⇆A]“ und „[¬A ⇆ ¬(A&B)]“ zukommt.

165 Diese Bestimmung ist bei **H.Wessel** eine „axiomatisch“ festgelegte Eigenschaft der „strengen Implikation“ (Logik, S. 150).

166 Bei **Wessel** ist dies eine „axiomatisch“ festgelegte Eigenschaft der Entailmentbestimmung von **Anderson** und **Belnap** (Logik, S. 152); es gibt freilich viele unterschiedliche Relationen zwischen den Gedankengefügen A&B und A – das „Axiom“ sagt uns nicht, welche gemeint ist.

167 Ein „Axiom“ der „analytischen Implikation“ (**Wessel**, Logik, S. 157)

168 Eine solche Kenntnis ist die Fähigkeit, einen Gegenstand gedanklich-sprachlich eindeutig von allen anderen Gegenständen im Rahmen eines Systems hierarchisch geordneter Begriffe abzusondern; den intuitiven Kenntnissen fehlt gerade diese klare und sprachlich explizierbare Abgegrenztheit.

169 Wenn (A, B) ein Aussagenpaar ist, genau dann auch (B, A); wenn (A, B) und (B, C) Aussagenpaare sind, dann ist auch (A,C) ein Aussagenpaar; Wenn (A, B) ein Aussagenpaar ist, genau dann auch (¬B, ¬A).

Wenn p zu q in einer logischen Relation steht, genau dann auch q zu p; wenn p zu q, und q zu r in einer logischen Relation steht, dann auch p zu r; wenn p zu q in einer logischen Relation steht, genau dann auch ∼q zu ∼p.

170 Symmetrisch sind die Gedankengefüge **V**, **A**, **D**, **E**, **J**, **K** und **X**; transitiv die Gedankengefüge **B**, **C**, **E**, **K** und **X**, für die Gedankengefüge **V**, **B**, **C**, **E**, **J**, **L** und **M** gilt die Kontraposition. Nur das Gedankengefüge **E** genügt allen drei Bedingungen.

171 Die Kontraposition bedeutet, dass eine logische Relation (p ⊞ q) äquivalent ist mit der logischen Relation (∼q ⊞ ∼p). Für welche logischen Formen die Kontraposition gilt, lässt sich mithilfe der in den Tabellen der äquivalenten Negationen und Inversionen zweistelliger logischer Relationen (Kapitel 3.3.1.) feststellen; die normale Anordnung der Totalform von (p, q) (I II III IV) verändert sich bei der Inversionstransformation (q, p) zu (I III II IV), bei der Negationstransformation von (p, q) zu (∼p,∼q) verändert sich die normale Anordnung zu (IV III II I); beim Übergang von (p, q) zu (∼q,∼p) muss ich beide Transformationen hintereinander ausführen, dabei wird die normale Anordnung zu (IV II III I) verändert; dies bedeutet, dass für diejenigen logische Formen die Kontraposition gilt, die die Vorkommenskombinationen I und IV gleich bestimmen.

Aus der Tatsache, dass einerseits die Gedankengefüge **V**, **A**, **D**, **E**, **J**, **K** und **X**, andererseits die logischen Totalformen 𝕍, 𝔸, 𝔻, 𝔼, 𝕁, 𝕂 und 𝕏 symmetrisch, dass einerseits die Gedankengefüge **B**, **C**, **E**, **K** und **X**, andererseits die Totalformen 𝔹, ℂ, 𝔼, 𝕂 und 𝕏 transitiv sind, dass für die Gedankengefüge **V**, **B**, **C**, **E**, **J**, **L** und **M** einerseits, für die logischen Beziehungen 𝕍, 𝔹, ℂ, 𝔼, 𝕁, 𝕃, 𝕄 die Kontraposition gilt, darf auf keine Isomorphie oder gar Strukturgleichheit der logischen Formen und Gedankengefüge 𝕍 und **V**, 𝔸 und **A**, 𝔹 und **B**, usw. geschlossen werden.

172 Die „Axiome“

Wenn p ↔ q, genau dann q ↔p
Wenn p ↔ q und q ↔ r, dann p ↔ r
Wenn p ↔ q, genau dann ∼q ↔ ∼p

können nicht die Totalform 𝔼 definieren, denn auch eine unbestimmbare Anzahl anderer Relationen (etwa das Gedankengefüge **E**) genügt den drei Bedingungen. Die Form 𝔼 muss bereits definiert sein, wenn erkannt werden soll, ob sie den „Axiomen“ genügt.

173 Vorgeschlagen von **ANDERSON/BELNAP**, vgl. **HAACK**, S. 200, **MICHAEL DUNN**, Relevance Logic and Entailment, S.125.

174 Wäre [¬(A&¬B) & ¬(C&¬A) & (C&¬B)] nicht falsch, käme es zum Widerspruch, dass einerseits A, C und ¬B wahr sind, aber andererseits zugleich C und ¬B ausgeschlossen werden; das Fregegesetz verneint diesen Widerspruch.

175 Das Gedankengefüge **C** wird freilich durch diese „Axiome“ nicht definiert und eindeutig von allen anderen Relationen abgegrenzt: die einzige Bestimmung („Axiom“, wenn man will), die das Gedankengefüge **C** eindeutig festlegt, besagt nichts anderes als: für zwei Aussagen A und B wird nur die Wahrheitswertkombination 𝒲(A) und ℱ(B) definitiv ausgeschlossen.

176 Für das Verhältnis von s, p, q und r gilt (unter der Voraussetzung der Unverträglichkeit von s und p) die vierstellige logische Relation [s, p, q, r 𝕆ℂℂ(•••1)], wobei bei ∼s⌢∼p nicht q→r gelten darf.

177 Vgl. die Tabellen der äquivalenten Inversionen der dreistelligen logischen Relationen, Abschnitt I, 3.3.2.

178 Der Ausdruck „p → (p→q)“ bezeichnet einen Widerspruch; es müsste ja, falls p nicht vorliegt, möglich (𝒦) sein, dass bei p q notwendig vorliegt, p und ∼p also zugleich vorliegen können. Es kann nur (p→q) ↔ (p→q) gelten, also (p⇆q) ⇆ (p⇆q). Diese vierte Axiom scheint in Analogie zum SFG-Gesetz [A ⇒ (A⇒B)] ↔ (A⇒B) gebildet zu sein; „A ⇒ (A⇒B)“ und „A⇒B“ haben ja dieselbe Bedeutung, nämlich „¬(A&¬B)“

179 Da gilt (10•1)(p, q) → (∘0∘∘)(p, q) – wenn zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q im Verhältnis des WGS-Entailments stehen, dann stehen sie auch im Verhältnis der „strikten Implikation“ –, erhält man aus einem gültigen logischen Gesetz der Form $F_1 \leftrightarrows F_2$ (wobei F_1 und F_2 irgendwelche logischen Formen bezeichnen) ein anderes gültiges logisches Gesetz, wenn man im Ausdruck des ersten das Zeichen des WGS-Entailments „⇆“ oder „(10•1)“ durch das Zeichen der „strikten Implikation“ „➸“ oder „(∘0∘∘)“ ersetzt.

180 „Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation)“, S. 163f.

181 Statt der Zeichen ➔, &, ▽, ⇒, ¬, A, B, C, D bei **PARRY** die Zeichen →, ·, ∨ und ⊃, ∼, p, q, r, s.

182 Es wird also auch das System er fregeschen Gedankengefüge unausgesprochen vorausgesetzt.

183 Wird zugelassen, dass „➔“ auch das Gedankengefüge **C** bezeichnen darf (es gibt dann für **C** zwei verschiedene Bezeichnungen), ergeben sich bei Ersetzung von „➔“ durch „⇒“ gültige Fregegesetze; d.h. auch die parryschen „Axiome“ gestatten es nicht, das Entailment von derjenigen Relation abzugrenzen, deren Alternative es darstellen und die es ersetzen soll.

184 Es gelten ja die Äquivalenzgesetze des SFG

(A&B) ↔ (B&A)
A ↔ (A&A)
A ↔ ¬¬A
¬¬A ↔ A
A & (B▽C) ↔ (A&B) ▽ (A&C)
[A▽(B& ¬B)] ↔ A

Da beispielsweise (p↔q) → (1•••)(p,q) gilt, gilt mit „Axiom“ (1) auch (1•••)[(A&B), (B&A)]; entsprechend für die anderen Gesetze des SFG.

185 Eine zwischen Gedankengefügen bestehende logische Relation $(\Gamma_1 \boxplus \Gamma_2)$ ist genau dann transitiv, wenn gilt: $[(\Gamma_1 \boxplus \Gamma_2) \wedge (\Gamma_2 \boxplus \Gamma_3)] \rightarrow (\Gamma_1 \boxplus \Gamma_3)$.

186 Dieses Gesetz des SFG-Entailment ist schon durch die Gültigkeit des logischen Verkettungsgesetzes [(p⇆q) & (q⇆r)] ⇆ (p⇆r)] bewiesen.

187 Die Gültigkeit ergibt sich aus der Gültigkeit des logischen Gesetzes (p ⇆ q∧r) ⇆ (p⇆q).

188 Auch das logische Gesetz [(p⇆q) & (r⇆s)] ⇆ [(p&r) ⇆ (q&s)] ist ungültig; denn wenn (p⇆q) & (r⇆s) gelten, dann kann es möglich sein, dass sowohl p und r wie q und s unverträglich sind; in diesem Falle ist es möglich, dass (p⇆q) & (r⇆s)gilt, ohne dass auch (p&r) ⇆ (q&s) gilt.

189 Seine Richtigkeit ergibt sich aus der Gültigkeit des logischen Gesetz [(p⇆q) & (r⇆s)] ⇆ [(p▽r) ⇆ (q▽s)]; dabei bedeutet „p▽q“ dasselbe wie „p⌣q“, nämlich dass von p und q zumindest eines vorliegt, also (∘∘∘0)(p, q).

190 Logik, S. 165f. Statt der Zeichen ➔, ¬, &, ▽ benutzt **WESSEL** die Zeichen ⊢, ∼, ∧ und ∨.

191 Die theoretische Logik selber kann mit ihren reflexiven und konstruktiven Methoden nicht erklären und rechtfertigen, warum die logischen Formen gerade diejenige Struktur aufweisen, die die kategoriale, verallgemeinernde logische Reflexion in unserem begrifflichen Wissen entdeckt. Bezüglich ihrer fundamentalen Begriffe ist die Logik, wie jede andere Wissenschaft, auf die Erträge anderer Wissenschaften verwiesen.

192 **FREGE**s Versuch einer „axiomatischen Darstellung“ des SFG beruht nicht auf der Darlegung der elementaren, konstitutiven Konstruktionsprinzipien der Gedankengefüge, er stellt vielmehr eine für die gesamte „moderne Logik“ charakteristische Verballhornung der axiomatischen Methode dar; vgl. Abschnitt 3.4.1.

193 Die dogmatischen Vertreter des fregeschen Logikentwurfs und Gegner der Kritik und der Reparaturversuche der Relevanzlogistiker verweisen stets auf das Unvermögen der Relevanzlogistik, klar anzugeben, worin die für **C** und die anderen Gedankengefüge vermisste Relevanz („meaning-connection“, Sinnzusammenhang) des relevanzlogistischen Entailment eigentlich besteht; sie verweisen auf das Vorherrschen intuitiver Auffassungen, auf das Fehlen eines klaren Entscheidungsverfahrens für die Gültigkeit von Gesetzen, ganz im Gegensatz zum SFG. Während unter den Relevanzlogistikern ein unentschiedener Streit etwa um die Transitivität des Entailment, auch um die Gültigkeit vieler anderer Gesetze des SFG ausgetragen werde, würde der Streit gegenstandslos, wenn man das SFG, seine Entscheidungsverfahren und die logische Deutung der Gedankengefüge akzeptiere; das Scheitern der relevanzlogistischen Bemühungen gilt als Bestätigung der logischen Missdeutung des SFG; vgl. etwa **J.DALE,** A Defence of Material Implication, Analysis, 34, 1973/74, S.91-95; **LEO SIMONS**, Intuition and Implication, in: *Mind*, 74, 1965, S.79-83

Dieser Mangel an begrifflicher Klarheit, das Fehlen an eindeutiger Entscheidbarkeit der Behauptungen, die Befangenheit in nicht-begründbaren Intuitionen, usw. wird zu Recht bloßgestellt; in der Tat bleibt die Aufstellung des WGS-Kriteriums die einzig positive Leistung der Relevanzlogistik: das Kriterium setzt uns in Lage, für beliebige vorgegebene Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 festzustellen, ob zwischen ihnen die Entailmentrelation ℂ⋓𝔼 besteht oder nicht; warum dies möglich ist, kann allerdings schon nicht mehr begründet werden, so wenig wie Gesetze des Entailment selbst. Dies Scheitern der Relevanzlogistik bedeutet jedoch nicht, dass sich auch die kritische Haltung dieser Richtung gegenüber der logischen Missdeutung der Gedankengefüge als unrichtig erwiesen hätte, und dass gar die logische Deutung des SFG durch dieses Scheitern gerechtfertigt wäre. Alle Einwände der Relevanzlogistiker gegen die logische Deutung der Gedankengefüge bleiben berechtigt – die Kritik bkeibt aber halbherzig und inkonsequent.

II, Kapitel 3: Freges Versuch einer „Verallgemeinerung“ des Funktionsbegriffes. Das System der Fregealgebra

3.1. Freges Verständnis der Abbildung

Obwohl **Frege** die Gedankengefüge eindeutig definiert hat, missdeutet er sie dann, indem er sie im Widerspruch zu ihrer Definition als bedingungslogische Verhältnisse ausgibt; die Folge dieser Missdeutungen ist ein verwirrender Synkretismus von Fregegesetzen, Gesetzen des SFG und von logischen Gesetzen; mit dem aus dieser Missdeutung resultierenden Widersinn, mit der dogmatischen Leugnung oder Verharmlosung dieser Paradoxa und mit den vergeblichen Versuchen die Folgen der Missdeutung auszuräumen, haben wir uns im letzten Kapitel befasst. **Frege** verwechselt die Gedankengefüge jedoch nicht nur mit den logischen Relationen, er hält die Gedankengefüge, die von ihm als (tautologische und informationsverschleiernde) *Prädikate* von Aussagen konstruiert worden sind, *zugleich* für *Abbildungen* oder *Funktionen*.

Frege hat die Gedankengefüge als „Wahrheits*funktionen*“ bestimmt; die Rede von „Wahrheitsfunktion“ besagt hier nichts anderes, als dass die Wahrheit der Gedankengefüge ausschließlich von den vorgegebenen Wahrheitswerten der Aussagen *abhängt*, denn die Gedankengefüge sind *Prädikate*[1], die diese vorausgesetzten Wahrheitswerte entweder nur tautologisch oder informationsverschleiernd wiederholen. Prädikate sind allgemeine begriffliche Bestimmungen, die Gegenständen bestimmter Art zugeschrieben werden, und die diesen Gegenständen eine Bestimmtheit zuweisen; wir haben ein Verhältnis von Allgemeinem (Prädikat, Begriff) und Einzelnem (Gegenstand, Prädikand); durch die Operation der Prädikation werden die prädizierten Gegenstände zugleich einer Klasse gleichartiger Gegenstände eingeordnet. Gedankengefüge sind Prädikate von vorgegebenen (den prädizierten) Aussagen – Aussagen über die vorgegebenen, stets vorausgesetzten Wahrheitswerte der prädizierten Aussagen. Die Bestimmungen „Wahrheitsfunktion“, „wahrheitsfunktional“ und „Wahrheitsfunktionalität“, wie ich sie bislang zur Kennzeichnung der Gedankengefüge gebraucht habe, dienen alleine dem Ausdruck der Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Gedankengefüge-Aussagen von den vorgegebenen Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen[2]; sie bringen keineswegs zum Ausdruck, dass die Gedankengefüge echte Funktionen oder Abbildungen im Sinne der modernen allgemeinen Algebra sind, nämlich spezielle Relationen, bei welchen alle Gegenstände, die Elemente einer bestimmten Menge sind, jeweils durch eine Zuordnungsvorschrift eindeutig auf ein Element einer anderen oder derselben Menge abgebildet wird; deshalb markiere ich die Wörter *Wahrheitsfunktion* und *wahrheitsfunktional* stets durch Anführungszeichen.

Frege ist überzeugt, dass er im Zuge einer „Verallgemeinerung“ des Begriffs der mathematischen Funktion/Abbildung nachgewiesen hat, dass jedes Prädikat *unmittelbar* eine Funktion darstellt; dass die Gedankengefüge-Prädikate zugleich Funktionen sind, steht für ihn außer Frage. Auch später scheint **Frege**s Deutung der Gedankengefüge als Funktionen/Abbildungen nie problematisiert worden zu sein. **Frege** hält seine Identifizierung von Prädikation (Begriff) und Abbildung (Funktion) für eine bedeutende Errungenschaft logischer Theoriebildung; die Berechtigung dieser Identifizierung muss jedoch zuerst einmal unvoreingenommen geprüft werden. Können die Gedankengefüge wirklich ohne weiteres als „Wahrheitsfunktionen“ im Sinne *echter* Abbildungen begriffen werden? Tatsächlich führt die Auffassung der „Wahrheitsfunktionen“ als *echter* Abbildungen zu einem System, das sich *nach Form und Inhalt* vom System der Gedankengefüge – trotz einer bestimmten Isomorphie – grundlegend unterscheidet. Ich werde jetzt versuchen, die Konstruktionsprinzipien und Gesetzmäßigkeiten, auf denen dieses System echter „Wahrheitsfunktionen“ beruht, dazulegen, und dann die logischen Deutungen dieses Systems prüfen. Die Vorstellungen, die **Frege** über die Struktur der Funktionen im allgemeinen, der „Wahrheitsfunktionen“ im besonderen vorträgt, können alleine im Lichte des präzisen Begriffs der Abbildung, wie ihn die moderne Strukturalgebra vorgibt, bewertet werden. Jede *Abbildung* oder *Funktion*[3] ist danach als *spezielle* zweistellige Relation gefasst, wobei der Begriff der zweistelligen Relationen seinerseits auf der Grundlage des Begriffs des kartesischen Produktes von zwei Mengen bestimmt ist. Anders als **Frege** – zum Zwecke der Immunisierung seiner verwaschenen Abbildungs-Konzeption – postuliert (WF 89f [665]; EMN 290), ist eine präzise Definition des Begriffs der Abbildung/Funktion nicht nur möglich, sondern auch unverzichtbar.

Für beliebige wohlbestimmte Mengen M und N heißt die Menge aller geordneten Paare (m, n), die sich mit den Elementen von m aus M und n aus N bilden lassen, ***kartesisches Produkt*** *von M und N*; es wird beschrieben durch den Ausdruck: „$M \times N = \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}$"[4]. Für „$M \times M$" wird auch „$M^2$" geschrieben.

A und B seien Mengen; r = (A,B,R), mit $R \subseteq A \times B$, heißt ***zweistellige Relation*** r zwischen $x \in A$ und $y \in B$. R heißt der *Graph* der Relation r. D und Z seien Mengen; die zweistellige Relation f = (D,Z,F), mit F als Graph der Relation f, heißt genau dann ***Abbildung*** *von D nach Z* – „f: D ➡ Z" – , wenn gilt: *für jedes* $d \in D$ gibt es *genau ein* $z \in Z$ mit $(d, z) \in F$. D heißt *Definitionsmenge*, Z heißt *Zielmenge*; die Festlegung, die bestimmt, welches Element der Zielmenge in eindeutiger Weise jeweils jedem Element der Definitionsmenge zugeordnet wird, heißt *Zuordnungsvorschrift*. Für $(d, z) \in F$ schreibt man auch $f(d) = z$; d heißt „*Urbild*", $f(d)$ heißt „*Bild* von d bezüglich f". Die Menge aller Bilder einer Abbildung heißt *Wertemenge*. *Eine exakte und vollständige Beschreibung einer Abbildung liegt nur dann vor, wenn Definitionsmenge, Zielmenge und durch die Zuordnungsvorschrift der Graph der Abbildung eindeutig angegeben sind; nur wenn alle drei Komponenten einer Abbildung präzise, nachvollziehbar und überprüfbar bestimmt sind, ist man berechtigt, von einer Abbildung (Funktion) zu reden*.

Unter den Abbildungen gibt es spezielle Abbildungen, sog. ***algebraische Verknüpfungen*** oder ***algebraische Operationen***. Die Mengen zusammen mit den in ihnen festgelegten algebraischen Verknüpfungen heißen ***algebraische Strukturen***. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ und M seien Mengen. Unter einer *n-stelligen algebraischen Verknüpfung* versteht man eine Abbildung **V** des kartesischen Produktes $M_1 \times M_2 \times M_3 \times \ldots \times M_n$ in M; jedem n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in M_i$ wird dadurch eindeutig ein Element $\mathbf{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M$ zugeordnet. Werden Elemente aus $M_1 \times M_2$ in M abgebildet, spricht man von einer *binären Verknüpfung* oder *binären Operation*. Gilt $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, spricht man von einer *inneren Verknüpfung*.

Im Lichte dieser einfachen, nichtintuitiven und exakten Bestimmungen erweisen sich **Frege**s Vorstellungen über Funktionen, insbesondere seine Darstellungen der Begriffe als „Funktionen" als verworren und unrichtig. Es zeigt sich, dass das Systems der Gedankengefüge trotz einer bestimmten „Isomorphie" nicht als eine bestimmte algebraische Struktur echter Funktionen/Abbildungen gedeutet werden kann. **Frege** gibt also seinen Gedankengefügen nicht nur eine unzulässige nachträgliche logische Deutung, er fasst die Gedankengefüge darüber hinaus in zweideutig-widersprüchlicher Weise auf: einmal als Prädikatoren, dann als algebraische Verknüpfungen.

In **Frege**s Verständnis der arithmetischen Funktionen wird die von der eben angeführten korrekten Definition geforderte untrennbare Einheit von Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift/Graph, die *erst zusammen* eine Abbildung ausmachen, ausdrücklich bestritten. Das „Wesen der Funktion" besteht nach **Frege** darin, dass sie *als Funktion* „ungesättigt" ist, und erst noch durch die *Argumente*, d.h. durch die Elemente der Definitionsmenge „gesättigt" oder vervollständigt werden muss. Die „übliche Darstellung" einer Funktion wie „x^2+3x"[5] erschwere die Einsicht in das „Wesen der Funktion", weil sie die angebliche Ergänzungsbedürftigkeit der Abbildung nicht kenntlich mache. Um aus dem „üblichen" Funktionsausdruck die „eigentliche Funktion" in ihrer Ergänzungsbedürftigkeit und „Ungesättigtheit" zu isolieren, wählt **Frege** die Darstellung „$(\ )^2 + 3(\ )$" (WF 87f; auch (FB 21 [6])). Die fregesche Vorstellung des „Ungesättigtseins" jeder Funktion beinhaltet die dissoziative Verselbständigung der „Funktion" gegenüber der Definitions- und der Zielmenge: „Es kommt mir darauf an zu zeigen, dass das Argument nicht mit zur Funktion gehört, sondern mit der Funktion zusammen ein vollständiges Ganzes bildet; denn die Funktion für sich allein ist unvollständig, ergänzungsbedürftig oder ungesättigt zu nennen." (FB 21f [7]) Ausdrücklich betont **Frege**, dass die Argumente, d.h. die Elemente der Definitionsmenge, auf keinen Fall als zur „Funktion" gehörig betrachtet werden dürfen (FB 22 [7f]; ASB 26; GGA I, 5f). Was könnte das „vollständige Ganze", welche die Argumente und die Funktion als seine Teile umfasst, sein, von dem **Frege** spricht? Dieses Ganze kann nur die Funktion selbst sein; nur weil **Frege** diese Funktion als spezielle Relation gegenüber ihren Relata verselbständigt, wird das Ganze bei ihm zu seinem Teil. Eine zweistellige Relation (Abbildung) wie „y ist das Quadrat von x" kann nie von den Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ abgespalten werden, zwischen denen diese Relation besteht; keine Relation kann unabhängig von ihren Relata definiert werden; die Metapher des Ungesättigten behauptet gerade Möglichkeit einer solchen Abspaltung der Relation von ihren Relata.

Bei **Frege** treten Definitionsmenge, Zielmenge und Abbildung (Funktion) auseinander; die „ungesättigte", ergänzungsbedürftige „Funktion" wird seiner Meinung nach durch das selbständige, gesättigte Argument erst noch zu einem ebenfalls selbständigen, „gesättigten" Funktionswert ergänzt. Es ist aber unmöglich, irgendeine Abbildung ohne ausdrücklichen und expliziten Bezug auf Definitionsmenge *und* Zielmenge zu beschreiben; es lässt sich keine Zuordnungsvorschrift formulieren, ohne dass diese Zuordnung von vorneherein auf eine ganz bestimmte Definitions- und Zielmenge bezogen wäre. **FREGE** bestreitet jedoch ausdrücklich, dass eine Abbildung nur korrekt bestimmt sein kann, wenn sie auf eine wohlbestimmte Definitionsmenge bezogen ist; für ihn ist „die Abgrenzung der Bereiche für die Frage nach dem Wesen der Funktion unwesentlich" (WF 86 [661]). Diese Behauptung basiert auf seiner recht schiefen Ansicht über die Allgemeinheit von Logik und Mathematik; für **FREGE** sind diese Disziplinen in dem Sinne die „allgemeinsten" Wissenschaften, als sie nicht, wie andere Wissenschaften, begrenzte Bereiche von Erscheinungen untersuchen, so wie etwa die Allgemeinheit der Biologie insofern eingeschränkt ist, als sie von allen realmöglichen Erscheinungen nur die lebenden Systeme untersucht. Die Aussagen von Logik und Mathematik sollen sich nach **FREGE** auf *alle Dinge* erstrecken. Da ihre Gesetze Anspruch auf „uneingeschränkte Geltung" hätten, dürfe nicht verlangt werden, „eine Mannigfaltigkeit sorgsam prüfend vorher abzugrenzen, innerhalb derer wir uns dann bewegen dürfen." (SVAL 97) „Nur das Allgemeinste, was für alle Gebiete des Denkens Geltung hat, anzugehen, weisen wir der Logik als Aufgabe zu." (Log II, 38; auch FTA 103 [95]) Die Funktionen erhielten erst dann wahrhafte logisch-mathematische Allgemeinheit, wenn der universelle Bereich die Definitionsmenge einer jeden mathematischen Abbildung und jeder beliebige Gegenstand so ein mögliches Argument einer jeden (logisch-mathematischen) Funktion sei.

Eine mathematische Funktion $\Phi(\xi)$, so **FREGE**, solle immer eine Bedeutung gewinnen, durch welchen Eigennamen „ξ" auch immer ersetzt werde. „Sonst würde ich $\Phi(\xi)$ nicht Funktion nennen. Danach bedeutete dann ‚$x \cdot (x - 1) = x^2 - x$' das Wahre, wenigstens, wenn die Bezeichnungen der Multiplikation, Subtraktion und Quadrierung auch für Gegenstände, die nicht Zahlen sind, so definiert wären, dass die Gleichung allgemein gälte." (GGA I, 11) **FREGE**s Forderung, „die Funktionen so zu erklären, dass sie für jedes Argument einen Wert erhalten", verlangt eine „Definition" der mathematischen Verknüpfungen, die es zulässt, dass auch die Sonne ins Quadrat gesetzt werden kann (BR 230 [374f;]; EL 81), oder dass die Sonne zum Summand einer Summe wird (FB 30f), oder dass man entsprechend die siebente Wurzel aus Napoleon ziehen kann, usw.

FREGEs Auffassung, die logisch-mathematische Allgemeinheit bestünde darin, dass diese Wissenschaften nur solche Aussagen treffen könnten, die für jeden beliebigen Gegenstand richtig sind (es wären dann nur absolut gehaltlose und nichtssagende Aussagen möglich), ist falsch; die Universalität des mathematischen Abbildungs-/ Funktionsbegriffes besteht keineswegs darin, dass die einzelnen mathematischen Funktionen Zusammenhänge beschreiben würden, die stets alle nur denkbaren Gegenstände einbezögen und direkt beurteilten, und dass deshalb der universelle Bereich die Definitionsmenge einer jeden mathematischen Funktion sein müsste; der Begriff der Funktion bestimmt vielmehr alle notwendigen Bedingungen, die gegeben sein müssen, wenn zwischen *beliebigen abgegrenzten Mengen* mit geeigneten Elementen eine bestimmte Abbildungsrelation bestehen soll. Es wird dabei nicht, wie **FREGE** befürchtet, eine Beschränkung auf einen ganz bestimmten Bereich von Gegenständen vorgenommen, sondern der universelle Abbildungsbegriff spezifiziert die Normen, denen *beliebige* abgegrenzte Bereiche von Gegenständen genügen müssen, wenn zurecht zwischen ihren Elementen eine bestimmte funktionale Abhängigkeit behauptet werden soll. Der Begriff der Abbildung ist universell insofern, als er in beliebigen Bereichen der Wirklichkeit Anwendung finden kann (sofern die Gegenstände dieses Bereichs gewissen wohlbestimmten Bedingungen etwa der Zählbarkeit, der Messbarkeit usw. genügen), und in allen nur möglichen Sphären der Wirklichkeit zum Gewinnen objektiver Erkenntnisse beiträgt.

Auch den Graphen einer Abbildung – bei **FREGE** *Wertverlauf* –, der doch unmittelbar die Verbindung von Definitions-, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift, und damit die Abbildung selbst zum Ausdruck bringt, verselbständigt **FREGE** gegenüber der „Funktion". So meint er, der Graph oder Wertverlauf einer Funktion müsse gegenüber der „Funktion" eine eigene Darstellung erhalten; er bezeichnet den Wertverlauf (Graphen) der Funktion $y = x^2 - 4x$ durch den Ausdruck „$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$". Dies ist jedoch eine völlig überflüssige Neuerung, denn jede exakte Darstellung einer Abbildung ist notwendig zugleich eine exakte Bestimmung des Graphen, weil der Graph die unmittelbare Einheit von Definitions-, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift ist.

In **FREGE**s Konzeption der Abbildung/Funktion wird die Struktur der (arithmetischen) Abbildungen als *notwendige* Zuordnung der Elemente von Definitions- und Zielmenge zerstört; die arithmetischen Funktionen bringen notwendige Zusammenhänge zwischen Größen zum Ausdruck, sie sind wie die ereignislogisch/bedingungslogischen Relationen mögliche gesetzmäßige Zusammenhänge; eine Funktion erstreckt sich in ihrer Geltung auf *alle* Elemente der Definitionsmenge, denen sie durch eine allgemeine Rechenvorschrift *genau ein* Element der Zielmenge zuordnet. **FREGE**s Vorstellung der „Ungesättigtheit" aber zerstört gerade diesen Beziehungscharakter. Eine an sich „ungesättigte" Funktion wird nach **FREGE** durch einen selbständigen Gegenstand „gesättigt", aus der „Sättigung" resultiert der Funktionswert als wiederum selbständiger Gegenstand[6] – und der Sinn einer Funktion besteht nach **FREGE** nicht darin, gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen den Elementen der Definitionsund Zielmenge zum Ausdruck zu bringen, sondern darin, eine Zahl, nämlich den Funktionswert zu *benennen*: „Was bedeutet nun eine solche Verbindung aus einem Funktionszeichen und einem Zahlzeichen, wie ‚sin 1'; ‚$\equiv$1', ‚*l* 1'? Jedes Mal eine Zahl. So erhalten wir Zahlzeichen, die aus ungleichartigen Teilen zusammengesetzt sind, indem der ungesättigte durch den anderen ergänzt wird." (WF 88 [664]) Die Funktion ist für **FREGE** also ein unfertiger Zahlname; die Frage wäre dann allerdings, warum wir eine Zahl umständlicherweise so bezeichnen sollen, dass wir eine „gesättigte" Zahl eine „ungesättigte" Funktion zu dieser wiederum „gesättigten" Zahl ergänzen, da wir jede Zahl auch direkt bezeichnen können – als umständliche Zahlbezeichnung wäre der arithmetische Funktionsbegriff bestimmt überflüssig! Die Funktionsausdruck „$f(x) = \equiv x$" ist jedoch keine Bezeichnung *einer* Zahl, sondern bezeichnet eine gesetzmäßige *Beziehung* zwischen *zwei* Zahlen: für *jede* reelle Zahl kann genau eine Zahl konstruiert werden, mit der sie in der Relation „… ist Quadratwurzel aus …" steht; das ist ja wohl etwas ganz anderes als ein Zahlname. Der Begriff der linearen Funktion der Form $f(x) = a \cdot x + b$ gibt uns nicht die Möglichkeit, auf umständliche Weisen Zahlen zu benennen, sondern versetzt uns in die Lage, die generellen Eigenschaften aller nur möglichen Strukturen gesetzmäßiger linearer Abhängigkeit zu bestimmen. Gerade die entscheidende Leistung der Theorie der Funktionen, nämlich alle möglichen Strukturen gesetzmäßiger Abhängigkeiten bestimmter Art rein theoretisch, ohne jede Stützung auf empirisch-faktische Zusammenhänge, in normativer Vollständigkeit und Exaktheit zu beschreiben, wird durch **FREGE**s Dissoziation der Funktionen von ihren spezifischen Argumenten und Funktionswerten unbegreiflich; die Verselbständigung der Funktionen zerstört sie als mögliche Strukturen gesetzmäßiger Abhängigkeiten – sie karikiert den Begriff der Funktion.

Auf der Basis der eben skizzierten unhaltbaren Vorstellungen über die Operation der Abbildung/Funktion versucht **FREGE**, den Funktionsbegriff einer „Verallgemeinerung" zu unterziehen, die, wie er hofft, der Erweiterung der Zahlbereiche an Bedeutung nicht nachsteht. Bislang seien es allein die „Rechnungsarten" gewesen, die zur Bildung einer Funktion beigetragen hätten; **FREGE** will die Verallgemeinerungen weiterführen, indem er nicht bloß Verknüpfungsoperationen wie Addition, Multiplikation usw., sondern auch andere Relationen zwischen Zahlen zur Bildung von Funktionen heranziehen will. „Zunächst nehme ich zu den Zeichen +, - usw., die zur Bildung eines Funktionsausdrucks dienen, noch hinzu Zeichen wie =, >, <, so dass ich z.B. von der Funktion $x^2 = 1$ sprechen kann, wo x wie früher das Argument vertritt." So ergebe sich

$x \Rightarrow f(x) = (x^2 = 1)$, z.B.

$1 \Rightarrow f(1) = (1^2 = 1)$,

$2 \Rightarrow f(2) = (2^2 = 1)$, usw. (FB 26 [12f])

Wie ist diese „Verallgemeinerung" zu bewerten? Zunächst ist $x^2 = 1$ keine Funktionsgleichung wie etwa $f(x) = x^2$, sondern eine *Bestimmungsgleichung*. Einer solchen entspricht die Aufgabe, die Menge all jener Zahlen aufzufinden, die den in der Bestimmungsgleichung angegebenen Bedingungen genügen; in **FREGE**s Beispiel besteht diese Bedingung darin, dass die gesuchte(n) Zahl(en) ins Quadrat erhoben, 1 ergeben soll(en); es müssen also die Elemente der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ bestimmt werden; das ist die Menge $\{1, -1\}$. Eine Bestimmungsgleichung ist ein arithmetischer Sachverhalt ganz anderer Art als eine Funktionsgleichung. Weder der Ausdruck „$x^2 = 1$" noch der „$f(x) = (x^2 = 1)$" bezeichnet eine Abbildung; denn diese Ausdrücke legen *in keiner Weise* klar und verständlich fest, durch welche Zuordnungsvorschrift *jedes* Element eines Zahlenbereiches auf welche Elemente welcher Zielmenge abzubilden ist; aus den Ausdrücken geht weder die Definitionsmenge, noch die Zielmenge, noch eine Zuordnungsvorschrift hervor.

FREGE *meint* etwas ganz anderes, als er *sagt*; er spricht zwar von der „Funktion $x^2 = 1$", aber der Ausdruck „$x^2 = 1^2$" stellt nur einen *Teil* der Formulierung der Zuordnungsvorschrift der von **FREGE** gemeinten, sehr speziellen *charakteristischen Abbildung* $\mathfrak{C}$ dar. **FREGE** hat im Sinn, dass z.B. die Gleichsetzung $(-1)^2 = 1$ wahr und die Gleichsetzung $2^2 = 1$ falsch ist. „Ich sage nun: ‚der Wert unserer Funktion ist ein Wahrheitswert' und unterscheide den Wahrheitswert des Wahren von dem des Falschen… Hiernach bedeutet z.B. ‚$2^2 = 4$' das Wahre."[7] (FB 26 [13]) **FREGE** hat also eine sehr spezielle charakteristische Abbildung $\mathfrak{C}$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in die Menge der beiden Wahrheitswerte $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$ im Sinn. Diese *gemeinte* Abbildung ist durch den Ausdruck „$x^2 = 1$" *allein* noch nicht beschrieben; die Abbildung kann präzise durch den Ausdruck „für alle $x \in \mathbb{R}$: $x \Rightarrow \mathfrak{C}(x) = \mathfrak{w}(x^2 = 1)$" bezeichnet werden, wobei „$\mathfrak{w}(A)$" den Wahrheitswert einer Aussage A bezeichnet. Wir haben es dann nicht mit einer arithmetischen Funktion zu tun, bei der Definitions- und Zielmenge Zahlbereiche sind, sondern mit einer charakteristischen Abbildung der reellen Zahlen in die Menge der beiden Wahrheitswerte $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$. Hätte **FREGE** diese spezielle Abbildung korrekt und vollständig erfasst und formuliert, hätte er nie durch die synkretistische Identifikation der beiden unterschiedlichen Operationen der Prädikation und der Abbildung soviel Verwirrung stiften können.

Für Zahlen sind beliebig viele nicht rein arithmetische Abbildungen definierbar; die Möglichkeit, die Elemente eines Zahlenbereichs exakt auf alle nur möglichen wohlbestimmten Mengen abzubilden, sofern Zuordnungsvorschrift und Zielmenge eindeutig bestimmt sind, ist mit der Bestimmtheit der Zahlen und dem oben dargelegten Begriff der Abbildung selbst gegeben. Ich kann etwa die Menge der natürlichen Zahlen in die Dreiermenge {♣,♥,♠} abbilden mit der Zuordnungsvorschrift: $\mathfrak{f}(n)$ = ♣, genau dann, wenn n gerade ist, und $\mathfrak{f}(n)$ = ♥, genau dann, wenn n ungerade und eine Primzahl ist, $\mathfrak{f}(n)$ = ♠, genau dann wenn n ungerade und keine Primzahl ist. Für die Bildung derartiger Abbildungen sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt, es muss nur, der Definition der Abbildungsoperation entsprechend, Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift eindeutig und für alle Elemente der Definitionsmenge entscheidbar festgesetzt sein. Mit einer „Verallgemeinerung" des Abbildungsbegriffs haben solche Spielchen nichts zu tun.

Was **FREGE** als eine „Verallgemeinerung" des Funktionsbegriffes im Sinne einer Gleichsetzung von Begriff und Funktion ansieht, ist in Wirklichkeit ein ganz spezieller Typ von Abbildung, nämlich eine *charakteristische Abbildung* $\mathfrak{C}$*;* ist M eine nichtleere, wohlbestimmte Menge, dann versteht man unter einer charakteristischen Abbildung $\mathfrak{C}$ auf M eine Abbildung $\mathfrak{C}$: M ➡ $\{0,1\}$ von M in die Zweiermenge $\{0,1\}$, wobei die Ziffern 0 und 1 keine Zahlen, sondern zwei komplementäre Werte, etwa auch $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$ bezeichnen. Zu jeder *Bestimmungsgleichung* in $\mathbb{R}$ gibt es eine solche charakteristische Abbildung $\mathfrak{C}$: $\mathbb{R}$ ➡ $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$. Da jeder arithmetische Prädikator wie „… ist das vierfache Quadrat von 7 weniger 31", „… ist die Hälfte der Quadratwurzel aus 1", usw. in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation festlegt, und da auch jede zweistellige arithmetische Relation in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – etwa $>$, $<$, „… ist um 5 kleiner als …", usw. – eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ darstellt, gibt es für jedes derartige Prädikat und für jede derartige Relation die folgende charakteristische Funktion: jedes Element aus $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{R}^n$, das den definierten Bedingungen entspricht wird auf $\mathcal{W}$, alle restlichen Elemente werden auf $\mathcal{F}$ abgebildet. Es lässt sich dann beispielsweise die charakteristische Abbildung [$\mathfrak{C}$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ➡ $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$] festlegen:

für alle (x,y) aus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ gelte:

(x,y) ➡ $\mathfrak{C}(x,y) = \mathcal{W}$, genau dann, wenn $x>y$;

(x,y) ➡ $\mathfrak{C}(x,y) = \mathcal{F}$, genau dann, wenn $x \leq y$.

Der Ausdruck „$x > y$" bezeichnet selbst weder eine Abbildung, wie **FREGE** meint, noch die Zuordnungsvorschrift einer Abbildung, sondern ist *Bestandteil der Zuordnungsvorschrift*. Wenn **FREGE** arithmetische Bestimmungsgleichungen wie $x > 1$ oder $(x + 1)^2 = 2(x + 1)$ für Funktionen ausgibt (FB 28), ist dies keine Verallgemeinerung, sondern die synkretistische Konfusion verschiedenartiger arithmetischer Sachverhalte.

3.2. Begriffe als „Funktionen"

Weil immer, wenn einem beliebigen Gegenstand x irgendeine bestimmte prädikative Bestimmung P zugesprochen wird, eine entweder wahre oder falsche Aussage resultiert, ist für **FREGE** jeder Begriff eine Funktion; diese Auffassung hält er für „eine Erweiterung {des Abbildungsbegriffes}…, nämlich hinsichtlich dessen, was als Argument auftreten kann. Es sind nicht bloß mehr Zahlen zugelassen, sondern Gegenstände überhaupt… Als Funktionswerte sind … die beiden Wahrheitswerte eingeführt." (FB 29 [17]) Diese Gleichsetzung von Prädikation und Abbildung verwischt wichtige Unterschiede zwischen beiden Operationen; schreibe ich einem Gegenstand ein Prädikat zu, bestimme ich diesen Gegenstand näher: in einer Prädikation ordne ich also niemals ein einzelnes Element aus einer wohlbestimmten Definitionsmenge einem einzelnen Element aus einer wohlbestimmten Zielmenge zu, wie dies bei einer Abbildung geschieht.

Zu jeder eindeutig entscheidbaren Prädikation kann eine *charakteristische Funktion* $\mathfrak{C}$ gebildet werden; dann ist jedoch die Prädikation P(x) bzw. ~P(x) nicht selbst die Funktion, wie **FREGE** unterstellt, sondern nur Teil der Zuordnungsvorschrift dieser charakteristischen Funktion: Es sei x ein beliebiger Gegenstand, P irgendein nichtleeres Prädikat; es gibt dann die folgende charakteristische Funktion $\mathfrak{C}$ von der „Menge aller Gegenstände" in die zweielementige Menge $\{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$:

$x \Rightarrow \mathfrak{C}(x) = \mathcal{W}$, *genau dann, wenn* $P(x)$,
$x \Rightarrow \mathfrak{C}(x) = \mathcal{F}$, *genau dann, wenn* $\sim P(x)$.

Dass für jedes wohlbestimmte Prädikat eine charakteristische Funktion gebildet werden kann, hat seinen Grund im PNW, das nur solche Prädikate zulässt, für die es hinsichtlich eines jeden Gegenstandes entscheidbar ist, ob das Prädikat ihm zukommt oder nicht. Einen Erkenntniswert, der über diese durch das PNW erforderte Wohlbestimmtheit hinausginge, haben diese charakteristischen Funktionen nicht. Es kommt bei der Prädikation von P nur darauf an, ob das Prädikat einem Gegenstand zukommt oder nicht – die Zuordnung des Gegenstandes auf einen Wahrheitswert ist davon abhängig und selbst ohne Belang.

Weil **FREGE** den Begriff mit der charakteristischen Funktion, die mit seiner Hilfe gebildet werden kann, gleichsetzt, konfundiert er auch den Umfang eines Begriffes (die Menge der Gegenstände, denen der Begriff zukommt) mit dem Graphen der entsprechenden charakteristischen Funktion. Die Bestimmungsgleichung $x^2 = 1$ hat die Lösungsmenge {1,-1}; diese Menge nennt **FREGE** zu Recht den „Umfang des Begriffs ‚Quadratwurzel aus 1'". Nun hat diese *Bestimmungs*gleichung dieselbe Lösungsmenge wie die *Bestimmungs*gleichung $(x+1)^2 = 2 \cdot (x+1)$, und **FREGE** sagt, diese beiden „Funktionen" $x^2 = 1$ und $(x+1)^2 = 2 \cdot (x+1)$ hätten denselben *Wertverlauf*. „In der Logik nennt man dies Gleichheit des Umfanges der Begriffe. Wir können demnach als Begriffsumfang den Wertverlauf einer Funktion bezeichnen, deren Wert für jedes Argument ein Wahrheitswert ist." (FB 28 [16]) „Bei solchen Funktionen, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist, kann man demnach statt ‚Wertverlauf der Funktion' sagen ‚Umfang des Begriffs'". (GGA I, 8) **FREGE** verwechselt hier die Zweiermenge {1,-1} (den Begriffsumfang des Begriffs ‚Quadratwurzel aus 1') mit dem Graphen der entsprechenden charakteristischen Funktion, der eine infinite Menge von Paaren ist, nämlich: $\{ \ldots, (-2,\mathcal{F}), (-1,\mathcal{W}), (0,\mathcal{F}), (1,\mathcal{W}), (2,\mathcal{F}), \ldots\}$ – alle Zahlen außer 1 und -1 werden auf $\mathcal{F}$ abgebildet. **FREGE**s Bestimmung des „Wertverlaufs" einer Funktion ist unklar und mehrdeutig; weil er den Unterschied zwischen den Bestimmungs- und Funktionsgleichungen ignoriert, verwechselt er den Begriff des Begriffsumfangs (die Menge der Gegenstände, denen der betreffende Begriff zukommt, bzw. die Menge der Lösungen einer Bestimmungsgleichung) mit dem Begriff des Graphen (die Menge der Paare von Urbildern und zugehörigen Bildern[8]) und obendrein noch mit dem Begriff der Wertemenge (die Menge der Bilder)[9]. **FREGE** initiiert einen unsinnigen Streit darüber, ob nun die „Funktion" oder der „Wertverlauf" logische Priorität besitzt. Alle durch **FREGE** geschaffenen Unklarheiten lösen sich auf, wenn die Funktion/Abbildung korrekt als Einheit von Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift verstanden wird.

Es ist die Verworrenheit der fregeschen Vorstellung von Abbildung selbst, die allen diesen Verwechslungen zu Grunde liegt[10]. **FREGE**s Dissoziation von Definitionsmenge, Zuordnungsvorschrift und Zielmenge verhindert eine klare Unterscheidung der speziellen charakteristischen Funktionen, die sich auf der Basis von Bestimmungsgleichungen, aber auch von Prädikationen bilden lassen, von diesen Bestimmungsgleichungen und Prädikationen selber. **FREGE** erkennt nicht den Unterschied zwischen den arithmetischen Verknüpfungen, die spezielle Abbildungen sind (binäre Operationen), und den arithmetischen Relationen, die *keine* Abbildungen sind, mit deren Hilfe sich aber, wie mit jedem wohlbestimmten n-stelligen Prädikat, charakteristische Abbildungen definieren lassen. Die falsche Gleichsetzung von Begriffen und Abbildungen führt dann auch dazu, dass die Gedankengefüge, die doch Prädikate von Aussagen sind, *zugleich* unmittelbar als Abbildungen, als Funktionen angesehen werden.

3.3. Die Konstruktion der Fregealgebra. Fregeverknüpfungen und Substitutionsgesetze

Die charakteristischen Funktionen bilden Gegenstände in die Menge der „Wahrheitswerte", genauer in eine Menge *irgendwelcher* komplementären Werte ab. Die Menge $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W},\mathcal{F}\}$ ist in der Regel Zielmenge der charakteristischen Funktionen – sie kann aber wie jede andere wohlbestimmte Menge auch Definitionsmenge einer Abbildung sein. Wenn $\mathfrak{W}$ zugleich auch Definitionsmenge ist, wird die Menge $\mathfrak{W}$ auf sich selber abgebildet. „Wir haben die Wahrheitswerte bisher nur als Funktionswerte, nicht als Argumente betrachtet… {Es} muss eine Funktion auch dann einen Wert erhalten, wenn als Argument ein Wahrheitswert genommen wird." (FB 31 [20]) Aufgrund der Endlichkeit von $\mathfrak{W}$ lassen sich für beliebige natürliche Zahlen *n* und *m* jeweils alle überhaupt möglichen Abbildungen der Form $\mathfrak{W}^n \Rightarrow \mathfrak{W}^m$ konstruieren. **FREGE** hat ein System von Abbildungen der Werte aus $\mathfrak{W}$ und aus $\mathfrak{W}^2$ in $\mathfrak{W}$ konstruiert – das System der Abbildungen $\{\mu \mid \mu: \mathfrak{W} \Rightarrow \mathfrak{W}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathfrak{W}^2 \Rightarrow \mathfrak{W}\}$[11], das er für identisch mit dem SFG hält. Dieses System der Abbildungen von Wahrheitswerten auf Wahrheitswerte ist jedoch nicht mit dem SFG identisch.

Die Gedankengefüge-Prädikate selbst sind keine Abbildungen; wie für alle anderen wohlbestimmten Prädikate gibt es jedoch zu jedem Gedankengefüge eine charakteristische Funktion. Ergibt sich, wenn einem vorgegebenen Paar wertdefiniter Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zugeschrieben wird, ein wahrer bzw. ein falscher Satz, dann wird dieses Aussagenpaar durch die charakteristische Funktion auf den Wert „das Wahre“ bzw. auf „das Falsche“ abgebildet. Wenn diese charakteristischen Abbildungen auch jeweils auf der Grundlage von Gedankengefügen gebildet werden, die sich allein auf die Wahrheitswerte der betreffenden Aussagen beziehen, ist ihre Definitionsmenge nicht die Zweiermenge $\mathfrak{W}$ der beiden Wahrheitswerte, sondern die infinite Menge der wertdefiniten Aussagen $\mathfrak{A}$. Für das Gedankengefüge $\mathfrak{C}$ kann die folgende charakteristische Funktion festgelegt werden ($\mathfrak{A}$ ist die Menge der wahrheitswertdefiniten Aussagen, A, B sind beliebige wahrheitswertdefinite Aussagen):

Definitionsmenge ist die infinite, anzahlmäßig unbestimmbare Menge $\mathfrak{A}$, Zielmenge ist die Zweiermenge $\mathfrak{W}$; die Zuordnungsvorschrift der Abbildung $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{W}$ lautet

$$(A,B) \Rightarrow \mathfrak{C}(A,B) = \mathcal{W}, \text{ gdw } A \Rightarrow B,$$
$$(A,B) \Rightarrow \mathfrak{C}(A,B) = \mathcal{F}, \text{ gdw } \neg(A \Rightarrow B)$$

Die Gedankengefüge-Prädikate sind hier *Teil* der Zuordnungsvorschrift. Auch das System dieser charakteristischen Funktionen ist nicht identisch mit dem SFG.

FREGE legt die folgende monadische „Wahrheitsfunktion“ Φ_T dar: $\Phi_T(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ und $\Phi_T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$; jeder der beiden Wahrheitswerte wird auf sich selbst abgebildet (FB 31). Definitionsmenge *dieser* Abbildung ist nicht die Menge der wertdefiniten Aussagen, denn es kann beispielsweise nicht gelten: $\Phi_T(1+3 = 4) = \mathcal{W}$; die von **FREGE** definierte Abbildung Φ_T kann nicht die Aussage „1+3=4“, sondern nur den Wahrheitswert $\mathfrak{w}(1+3 = 4)$ dieser Aussage als Argument haben, und es muss heißen „$\Phi_T[\mathfrak{w}(1+3 = 4)] = \mathcal{W}$“; dies jedoch bedeutet nichts anderes als $\Phi_T(\mathcal{W})=\mathcal{W}$; Definitionsmenge ist nicht die infinite Menge der wertdefiniten Aussagen, sondern die zweielementige Menge $\mathfrak{W}$. Das System der Wahrheitsfunktionen $\{\mu \mid \mu: \mathfrak{W} \Rightarrow \mathfrak{W}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathfrak{W}^2 \Rightarrow \mathfrak{W}\}$ ist weder mit dem SFG, noch mit der Menge der charakteristischen Funktionen auf der Basis der Gedankengefüge identisch; dass **FREGE** die Verschiedenheit dieser drei Systeme übersieht, verdankt sich der Oberflächlichkeit seiner Vorstellungen von der Struktur der Abbildungsoperation.

Aus folgenden Gründen ist die Identifikation von SFG und SFA falsch:

Ein Gedankengefüge beurteilt direkt *Aussagen*, wenn diese Beurteilung auch noch so gehaltlos und überflüssig ist; im Ausdruck „$(1>5) \Rightarrow (2 \cdot 2 = 4)$“ wird von zwei Aussagen ausgesagt, dass jedenfalls nicht die erste Aussage wahr und die zweite falsch ist; bezogen auf zwei Wahrheitswerte würde die Aussage sinnlos, denn es können ja nicht die Prädikate *wahr* und *falsch* selbst als wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Für das System von Abbildungen $\{\mu \mid \mu: \mathfrak{W} \Rightarrow \mathfrak{W}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathfrak{W}^2 \Rightarrow \mathfrak{W}\}$ besteht im Gegensatz zum SFG kein konstitutiver Zusammenhang mit Aussagen und Urteilen mehr; es spielt für die Konstruktion dieser Abbildungen keine Rolle, aus welchen konkreten Elementen man sich die grundlegende Zweiermenge $\mathfrak{W}$ gebildet denkt; wesentlich für diese Konstruktion sind alleine die Komplementarität der beiden Werte, der Begriff der Abbildung selbst sowie die kombinatorischen Gesetzmäßigkeiten, die der Bildung aller nur möglichen Abbildungen von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}^2$ in $\mathfrak{W}$ zu Grunde liegen. Ohne jede Rücksicht darauf, aus welchen zwei Werten sich die Grundmenge $\mathfrak{W}$ zusammensetzt, lassen sich alle Elemente der Definitionsmenge $\mathfrak{W}^2$ rein kombinatorisch ermitteln, ebenso alle möglichen verschiedenen 16 Weisen, die Elemente von $\mathfrak{W}^2$ auf $\mathfrak{W}$ abzubilden. Wenn **FREGE** eine Abbildung der Form $\mathfrak{W}^2 \Rightarrow \mathfrak{W}$ festlegt und etwa für beliebige Paare (x,y) aus $\mathfrak{W}^2$ bestimmt, der Funktionswert sei „dann das Falsche, wenn als *y*-Argument das Wahre und zugleich als *x*-Argument ein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; in allen anderen Fällen sei der Wert dieser Funktion das Wahre“ (FB 37 [28]), dann nimmt die von ihm so festgesetzte Zuordnungsvorschrift nicht auf Aussagen und ihre Wahrheitswerte Bezug – im Gegensatz zur Konstruktion der Gedankengefüge, die sich immer auf die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen beziehen müssen. Bei der Konstruktion dieser Abbildungen ist jeder Bezug zu Aussagen und ihren Wahrheitswerten völlig irrelevant; ob die beiden Komplementärwerte als wahr und falsch, als weiblich und männlich, als gut und böse, oder als was auch immer „interpretiert“ werden, ist für die Festlegung der Abbildungen unerheblich;

das System der entsprechenden Abbildungen wird nicht dadurch zu keiner Theorie der Geschlechterbeziehungen, wenn ich die Grundmenge {männlich, weiblich} nehme, sie wird keine Theorie der Moral, wenn ich die Werte {gut, böse} nehme; und *das System dieser Abbildungen wird auch nicht zu einer Logik oder Erkenntnistheorie, wenn ich die Werte {wahr, falsch} nehme*. Die Abbildungen geben über die Bedeutung und den Zusammenhang dieser komplementären Werte keinerlei Aufschluss.

Der falschen Identifikation des SFG mit einem System algebraischer Verknüpfungen von „Wahrheitswerten" entspricht die falsche synkretistische Identifikation von „Aussagevariablen" und „Wahrheitswertvariablen". Werden in Ausdrücken des SFG die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen („Aussagevariablen") durch die Bezeichnungen konkreter, wahrheitswertdefiniter Aussagen ersetzt, ergeben sich wahrheitswertdefinite Gedankengefügeprädikationen dieser wahrheitswertdefiniten (prädizierten) Aussagen. Wird im Ausdruck „$A \Rightarrow B$" die „Aussagevariable" A durch die Aussagenbezeichnung „$2 < 7$" und die „Aussagevariable" B durch die Aussagenbezeichnung „Frege war Mecklenburger" ersetzt, resultiert die wahrheitswertdefinite Gedankengefügeaussage „Es ist falsch, dass ›$2 < 7$‹ wahr und ›Frege war Mecklenburger‹ falsch ist"; wäre das Gedankengefüge eine Fregeverknüpfung müssten die Aussagevariablen A und B durch Wahrheitswerte ersetzbar sein; der Ausdruck $A \Rightarrow B$ würde etwa in den *sinnlosen* Ausdruck „$\mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{F}$" transformiert, der *nach der Definition von* $\boldsymbol{C}$ die Bedeutung hätte „es ist falsch, dass $\mathcal{W}$ wahr und zugleich $\mathcal{F}$ falsch ist". Ein Wahrheitswert kann aber nicht wahr oder falsch sein, denn ein Wahrheitswert ist ein Prädikat und keine Aussage. Wenn Gedankengefüge auch vorgegebene Aussagen alleine nach ihren Wahrheitswerten beurteilen, können sie dennoch nie Prädikate von Wahrheitswerten selbst sein. Nur Aussagen können wahr und falsch sein – dieses Prinzip ist eine der wesentlichen Präsuppositionen der fregeschen Konstruktion der Gedankengefüge, die **FREGE** aber bisweilen selber einfach vergisst.

Um **FREGE**s falsche Meinung, das System dieser Abbildungen habe einen konstitutiven Zusammenhang mit den Begriffen *wahr* und *falsch*, zurückzuweisen und um die daraus resultierende irreführende Verwechslung dieses Systems mit einem System binärer algebraischer Verknüpfungen auszuschließen, wähle ich für die Menge dieser zwei Komplementärwerte eine angemessenere neutrale Bezeichnung; die Menge $\mathcal{A}$ hat die zwei komplementären Werte a_1 und a_2 als Elemente: $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$. Die Menge der Abbildungen $\{\mu \mid \mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\} \cup \{\delta \mid \delta: \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}\}$ nenne ich *System der Fregealgebra* (abgekürzt: SFA). Die einzelnen Abbildungen nenne ich *Fregeverknüpfungen*. Die 16 möglichen Abbildungen der Form $\mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ und ihre Bezeichnungen sind in der untenstehenden Tabelle dargestellt; es sind innere binäre algebraische Verknüpfungen; zur Darstellung dieser Verknüpfungen benutze ich die Zeichen der Gedankengefüge, mit denen **FREGE** die jeweiligen Fregeverknüpfungen verwechselt, die aber doppelt unterstrichen sind; die Fregeverknüpfungen selbst bezeichne ich durch „Φ_V", „Φ_A", „Φ_B", „Φ_C", usw.

Tabelle 10: Die binären fregealgebraischen Verknüpfungen (Fregeverknüpfungen)

$\Phi_{\mathbf{V}}$	$\Phi_{\mathbf{A}}$	$\Phi_{\mathbf{B}}$	$\Phi_{\mathbf{C}}$
$a_1 \underline{\underline{\triangledown}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\triangledown}} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\triangledown}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\triangledown}} a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\veebar}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\veebar}} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\veebar}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\veebar}} a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\Leftarrow}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\Leftarrow}} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Leftarrow}} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Leftarrow}} a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2 = a_1$
$\Phi_{\mathbf{D}}$	$\Phi_{\mathbf{E}}$	$\Phi_{\mathbf{F}}$	$\Phi_{\mathbf{G}}$
$a_1 \underline{\underline{\Uparrow}} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\Uparrow}} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Uparrow}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Uparrow}} a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\Leftrightarrow}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\Leftrightarrow}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Leftrightarrow}} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Leftrightarrow}} a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\nwarrow}} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\nwarrow}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\nwarrow}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\nwarrow}} a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\equiv} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\equiv} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\equiv} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\equiv} a_2 = a_1$
$\Phi_{\mathbf{H}}$	$\Phi_{\mathbf{I}}$	$\Phi_{\mathbf{J}}$	$\Phi_{\mathbf{K}}$
$a_1 \underline{\underline{\searrow}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\searrow}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\searrow}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\searrow}} a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\swarrow}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\swarrow}} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\swarrow}} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\swarrow}} a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\bowtie}} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\bowtie}} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\bowtie}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\bowtie}} a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\&}} a_1 = a_1$ $a_1 \underline{\underline{\&}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\&}} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\&}} a_2 = a_2$
$\Phi_{\mathbf{L}}$	$\Phi_{\mathbf{M}}$	$\Phi_{\mathbf{X}}$	$\Phi_{\mathbf{O}}$
$a_1 \underline{\underline{\models}} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\models}} a_2 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\models}} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\models}} a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\Dashv}} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\Dashv}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Dashv}} a_1 = a_1$ $a_2 \underline{\underline{\Dashv}} a_2 = a_2$	$a_1 \underline{\underline{\Downarrow}} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\Downarrow}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Downarrow}} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\Downarrow}} a_2 = a_1$	$a_1 \underline{\underline{\triangle}} a_1 = a_2$ $a_1 \underline{\underline{\triangle}} a_2 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\triangle}} a_1 = a_2$ $a_2 \underline{\underline{\triangle}} a_2 = a_2$

Zu den 16 binären Fregeverknüpfungen kommt die monäre Abbildung Φ_N, definiert durch $\Phi_N(a_1) = a_2$ und $\Phi_N(a_2) = a_1$; für $\Phi_N(x)$ schreibe ich auch „$-x$“. Ob eine Fregeverknüpfung ein Komplementärwertpaar aus $\mathcal{A}^2$ auf a_1 oder auf a_2 (bzw. auf $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{F}$) abbildet, betrifft die „Wahrheit“ (besser Richtigkeit, Korrektheit) oder „Falschheit“ (Nichtkorrektheit) dieser Verknüpfung überhaupt nicht; für jede dieser Abbildungen ist nur zu fordern, dass sie für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ eindeutig ein Bild bestimmt. Während alle 16 binären Fregeverknüpfungen für jedes Element aus $\mathcal{A}^2$ in korrekter Weise erklärt sind, können die Gedankengefüge außer $\mathbf{V}$ nicht jeder Kombination von wertdefiniten Aussagen wahrhaft zugeschrieben werden. Die Aussage „$(2 \cdot 2 = 5) \veebar (1 > 3)$“ ist falsch und deshalb unzulässig[12], die Verknüpfung ($a_2 \underline{\underline{\veebar}} a_2 = a_2$) ist hingegen korrekt und zulässig. Die Aussage „$(2 \geqslant 1) \Rightarrow (1 \geqslant 2)$“ ist falsch und deshalb inkorrekt, während die fregealgebraische Operation ($a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2 = a_2$) korrekt ist; falsch und inkorrekt, weil der Festlegung von Φ_C widersprechend, wäre nur die Verknüpfung ($a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2 = a_1$). Eine Fregeverknüpfung mit dem Bild a_1 darf nicht als wahr, und eine Verknüpfung mit dem Bild a_2 darf nicht als falsch angesehen werden, denn wenn für eine solche Abbildung das Bild a_2 festgelegt ist, wird diese Abbildung dadurch ja nicht falsch[13]. Dies belegt, dass es im SFA, anders als im SFG, nicht mehr um „wahr“ oder „falsch“ geht und dass das System der Fregealgebra sich grundlegend vom SFG unterscheidet. Mit diesem Unterschied hängt zusammen, dass wohl zwischen Gedankengefügen, nicht aber zwischen Fregeverknüpfungen bedingungslogische Zusammenhänge bestehen können. Zwischen den Gedankengefügen (A&B) und (A⇒B) besteht die Beziehung der Implikation: (A&B) → (A⇒B) – kommt irgendwelchen zwei Aussagen A und B das Gedankengefüge $\mathbf{K}$ zu, dann auch das Gedankengefüge $\mathbf{C}$. Algebraische Verknüpfungen sind anders als Gedankengefüge keine Prädikate, die sich dadurch unterscheiden, dass sie Gegenständen in unterschiedlicher Weise zukommen und nicht zukommen; ich kann von den beiden fregealgebraischen Verknüpfungen ($x \underline{\underline{\&}} y$) und ($x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$) nicht sagen, wem die erste Verknüpfung zukommt, dem kommt auch die zweite Verknüpfung zu. Der Ausdruck „Für alle x,y aus $\mathcal{A}$ gilt: ($x \underline{\underline{\&}} y$) → ($x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$)“ ist im Gegensatz zum Ausdruck „Für alle Aussagen A und B: (A&B) → (A⇒B)“ sinnlos. Zwischen Fregeverknüpfungen besteht sowenig ein bedingungslogischer Zusammenhang wie etwa zwischen den arithmetischen Zahlenverknüpfungen $a+b$ und $a \cdot b$; auch dies belegt, das SFA ein völlig anderes System ist als das SFG.

Das SFA ist ein simples algebraisches System, in welchem man nach Herzenslust herumrechnen kann; es lassen sich Verknüpfungsausdrücke beliebiger Komplexität bilden – alle Gesetzmäßigkeiten sind durch die in der obigen Tabelle 10 dargelegten Definitionen der Verknüpfungen begründet; um irgendeinen Ausdruck, irgendein Gesetz des SFA zu begründen, muss auf diese Festlegungen Bezug genommen werden. Das SFG enthält alle möglichen Untersysteme (z.B. Boolesche Algebren), man kann für alle diese Verknüpfungen die spezifischen Eigenschaften prüfen (Kommutativität), die Eigenschaften ihrer Kombination (Assoziativität, Distributivität) – das alles ist elementare, einfachste Algebra. Der algebraische Charakter dieses System bedeutet freilich noch nicht, dass es sich um ein System logischer Formen handelt – dass wir es hier mit einer „mathematischen Logik" zu tun hätten. Für uns ist dieses System nur deshalb von Belang, weil es unzulässigerweise mit dem SFG konfundiert wird, und wie dieses eine irreführende logische Deutung erhält. Diese logische Deutung des SFA nährt die Illusion, dass jedes beliebige logische Gesetz durch simples fregealgebraisches Rechnen entschieden werden kann. Wir müssen also ganz genau die Beziehungen (die Morphismen) untersuchen, die zwischen dem im ersten Teil dargestellten System logischer Formen, dem SFG und dem SFA bestehen (oder auch nicht) – drei wohlunterschiedene Systeme, die in der Logistik heillos und mit den fatalsten Folgen verquickt werden. Zuerst müssen wir uns einen Überblick über den tatsächlichen Charakter und die Gesetzmäßigkeiten des SFA verschaffen.

Das SFA kann aus dem Begriff der Abbildung und der Menge $\mathcal{A}$ vollständig entwickelt werden und ist in seinen *wesentlichen* Grundzügen *vollständig* in obiger Tabelle 10 dargestellt. Es kann in diesem System gerechnet werden; die Abbildungen sind ja innere binäre Verknüpfungen, die ohne Begrenzung mit einander verbunden werden können, etwa in folgender Weise[14]:

$$(a_1 \underline{\Rrightarrow} a_2) \underline{\veebar} ((a_2 \underline{\Uparrow} a_1) \underline{\Lleftarrow} a_2) \quad = \quad a_2 \underline{\veebar} (a_1 \underline{\Lleftarrow} a_2)$$
$$= \quad a_2 \underline{\veebar} a_1$$
$$= \quad a_1$$

Eine wichtige Eigenschaft der Fregeverknüpfungen (wie der algebraischen Verknüpfungen überhaupt) ist diese unbeschränkte Verknüpfbarkeit; werden in Bezug auf zwei beliebige Werte x und y aus $\mathcal{A}$ irgendwelche Verknüpfungen kombiniert, ist die *komplexe Verknüpfung* immer ergebnisgleich einer der 16 *elementaren Verknüpfungen*: $((x \underline{\Uparrow} y) \underline{\veebar} x) \underline{\Rrightarrow} ((y \underline{\barwedge} x) \underline{\Lleftarrow} (x \underline{\Leftrightarrow} y))$ ist eine komplexe Verknüpfung von x und y aus $\mathcal{A}$, und diese komplexe Verknüpfung ist ergebnisgleich der elementaren Verknüpfung $x \underline{\veebar} y$. Es gilt das *Substitutionsgesetz*:

Für alle $x, y \in \mathcal{A}$: $((x \underline{\Uparrow} y) \underline{\veebar} x) \underline{\Rrightarrow} ((y \underline{\barwedge} x) \underline{\Lleftarrow} (x \underline{\Leftrightarrow} y)) = x \underline{\veebar} y$ Für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ führt die linke *komplexe* Verknüpfung für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ jeweils auf dasselbe Ergebnis wie die rechte *elementare* Verknüpfung Φ_A. Ich nenne ein derartiges „Rechengesetz" eine „*Φ_A-Substitution*". Entsprechend ist eine komplexe Verknüpfung von x und y, die ergebnisgleich ist der Verknüpfung x $\underline{\Rrightarrow}$ y eine Φ_C-Substitution. Diese Gesetze der Substituierbarkeit von verschiedenen ergebnisgleichen Verknüpfungen sind die fundamentalen Gesetze der Fregealgebra; ein solches „Rechengesetz" ist etwa: $(x \underline{\dashv} y) \underline{\veebar} (x \underline{\preceq} y) = (x \underline{\Uparrow} y) \underline{\Rrightarrow} (x \underline{\bowtie} y)$. Diese Substitutionsgesetze können nur durch den Bezug auf die exakte Definitionen und Abgrenzungen der Abbildungen, wie sie sich aus der Konstruktion des Systems ergeben und in obiger Tabelle 10 dargestellt sind, gerechtfertigt werden; ihre Gültigkeit lässt sich leicht mithilfe dieser Tabelle überprüfen[15].

Es ist möglich, beliebig viele komplexe fregealgebraische Verknüpfungen zu bilden und dann auszurechnen, welche elementare Verknüpfung sie jeweils substituieren. Dies führt zu keinem tieferen Verständnis der Substitutionsgesetze. Sinnvoller ist es, verschiedene Arten solcher Substitutionen zu unterscheiden, und ihre unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten zu bestimmen. Alle diese unbegrenzt vielen Substitutionen der elementaren Fregeverknüpfungen scheiden sich in zwei grundlegende Arten; man könnte von den *unechten oder partiellen* und den *echten oder vollständigen* Substitutionen reden; dieser Unterschied spielt für den speziellen Gebrauch, der in der „modernen Logik" vom SFA gemacht wird, eine wichtige Rolle; denn es sind bestimmte unechte Substitutionen von Fregeverknüpfungen, die missdeutet und zu „logischen Gesetzen" mystifiziert werden.

> In der Verknüpfung $x \underline{\Uparrow} y$ sind die Werte x und y von einander unabhängig in dem Sinne, dass x jeden Wert aus $\mathcal{A}$ annehmen kann, unabhängig davon, welchen Wert y annimmt; dasselbe gilt für y in Bezug auf x. Anders ist es bei der Verknüpfung $x \underline{\Uparrow} x$; hier sind die beiden verknüpften Werte von einander abhängig, denn das Beliebig-Element-Zeichen x steht auf beiden Seiten der Verknüpfung Φ_D und kann immer nur denselben Wert annehmen. Es wird im Ausdruck „$x \underline{\Uparrow} x$" nur entweder das Paar (a_1,a_1) oder das Paar (a_2,a_2) durch Φ_D in $\mathcal{A}$ abgebildet, nicht aber die Urbilder (a_1,a_2) und (a_2,a_1). Weil die Substitution $x \underline{\Uparrow} x$ nicht alle Paare aus $\mathcal{A}^2$ verknüpft, ist sie eine *unechte Substitution von* $\Phi_N(x)$. Ebenso ist die komplexe Verknüpfung $(x \underline{\Lleftarrow} y) \underline{\Rrightarrow} x$ eine unechte Substitution der elementaren Verknüpfung $(x \underline{\veebar} y)$, weil die Hauptverknüpfung Φ_C[16] nur drei der vier Elemente aus $\mathcal{A}^2$ verknüpft; es fehlt das Element (a_2,a_1)[17]. Im Ausdruck „$(x \underline{\Lleftarrow} y) \underline{\Rrightarrow} x$" sind

die Werte, die Φ_C verknüpft, nicht unabhängig von einander, da das Zeichen „*x*“ links *und* rechts von „$\underline{\underline{\Rightarrow}}$“ steht.

b) Die komplexe Verknüpfung $-x \underline{\underline{\veebar}}\, y$ ist eine *echte Substitution* von $x \underline{\underline{\Rightarrow}}\, y$, weil die Hauptverknüpfung Φ_A alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ verknüpft; im Ausdruck „$-x \underline{\underline{\veebar}}\, y$“ sind die Werte, die die Hauptverknüpfung Φ_A verknüpft, unabhängig von einander. Wird in einer beliebigen elementaren fregealgebraischen Verknüpfung zumindest eine Seite der Abbildung Φ_N unterzogen, wobei die ganze Verknüpfung selber noch der Abbildung Φ_N unterworfen sein kann, entstehen nur echte Substitutionen von der Form der so genannten De-Morganschen Gesetze. Für jede binäre fregealgebraische Verknüpfung gibt es genau 7 derartige De-Morgan-Substitutionen; es gilt etwa für alle $x,y \in \mathcal{A}$:

$$x \underline{\underline{\veebar}}\, y = -x \underline{\underline{\Rightarrow}}\, y = x \underline{\underline{\Leftarrow}} -y = -x \underline{\underline{\Uparrow}} -y = -(x \underline{\underline{\Downarrow}}\, y) = -(-x \underline{\underline{\models}}\, y) = -(x \underline{\underline{\dashv}} -y) = -(-x \underline{\underline{\&}} -y);$$

$$x \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\, y = -x \underline{\underline{\bowtie}}\, y = x \underline{\underline{\bowtie}} -y = -x \underline{\underline{\Leftrightarrow}} -y = -(x \underline{\underline{\bowtie}}\, y) = -(-x \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\, y) = -(x \underline{\underline{\Leftrightarrow}} -y) = -(-x \underline{\underline{\bowtie}} -y) \text{ usw.}$$

3.4. Die Mystifikation der Fregealgebra als „Kalkül des logischen Schließens“

3.4.1. Der generelle Aufbau eines Kalküls; Kalkül und „axiomatische“ Darstellung

Die logischen Ansprüche, die mit dem SFA verbunden werden:

Auf der Grundlage und im Rahmen der Fregealgebra werden verschiedene Versionen eines „Aussagenkalküls“ entwickelt, die ein kalkülmäßig-rechnerisches „logisches Schließen“ ermöglichen sollen. Es sind drei verschiedene Zielsetzungen, die den Aufbau dieser angeblichen Aussagenkalküle leiten: die Idee einer kalkülmäßig-algorithmischen Lösung von Problemen, die Idee der „Formalisierung“, die Idee der „Axiomatisierung“. Wie schon im Zusammenhang des SFG müssen wir zwei Problembereiche trennen. Das SFA ist ein wohldefiniertes, vollständiges algebraisches System, als solches für die kalkülmäßige Darstellung geeignet; diese Darstellung muss natürlich dem speziellen Charakter des SFA gerecht werden. Wir müssen erstens prüfen, ob dieses System der Fregealgebra im Rahmen der „modernen Logik“ sachgerecht dargestellt wird. Zum zweiten haben wir dann die logischen Deutungen und Prätentionen zu bewerten, die an diese „Kalküle“ geknüpft sind.

Ein Kalkül ist noch nicht unbedingt ein theoretisches, axiomatisches System; ein Kalkül soll es ermöglichen, strikt regelgeleitet bestimmte Problem zu lösen, z.B. die n-te Wurzel einer Zahl bestimmen, die Multiplikation oder Division beliebiger Zahlen durchführen, die Werte bestimmter Funktionen ausrechnen, usw. Wenn ein solches Vorgehen schließlich so „mechanisch“ wird, dass es *scheinbar* nur noch in der regelgeleiteten Manipulation von Symbolen besteht und keine aufmerksame Berücksichtigung der Bedeutung dieser Symbole mehr erfordert, spricht man von einem „formalisierten Kalkül“, einem System der Umformung der Ausdrücke nach rein „formalen“, d.h. *angeblich* rein ausdrucksbezogenen Regeln.

Die „Aussagenkalküle“ aber sollen mehr leisten, nämlich die axiomatische Deduktion eines theoretischen Zusammenhangs. In einem „Aussagenkalkül“ soll nicht nur ein „rechnendes logisches Schließen“ möglich sein, die Gesetze der Logik selbst sollen kalkülmäßig deduziert und ihre Gültigkeit durch diese Herleitung gerechtfertigt werden. Beide Zielsetzungen sind nicht notwendig verbunden, *zumindest* in vielen Fällen sind diese Zielstellungen unverträglich (was die Vertreter des fregeschen Logikentwurfs nicht weiter zu stören scheint); denn ein kalkülmäßig aufgebauter arithmetischer Algorithmus kann beispielsweise nicht zugleich die Darlegung der Gesetze der Arithmetik sein, sondern er setzt diese Gesetze voraus und macht von ihnen nur einen spezifischen Gebrauch. Die von den Logistikern gemachte Voraussetzung, dass ein „Kalkül“ einerseits ein „schlussfolgerndes Rechnen“ in Bezug auf alle möglichen Inhalte ermöglichen (BRL 30) und dabei zugleich die logischen Gesetze erschließen kann, die dieses Rechnen voraussetzen muss, ist fragwürdiger als gemeinhin angenommen wird. Soll das „logische Schließen“ seine eigenen Gesetze deduzieren? Kann die Arbeit im Rahmen eines Kalküls die Gesetze entfalten, auf denen er selbst beruht, und die er nutzt? Kann der Gegenstandsbereich, dessen Gesetze in einem Kalkül entfaltet werden, dieser Kalkül selbst sein? Zunächst will ich untersuchen, was diese „Aussagenkalküle“ effektiv leisten, und welche Gesetze tatsächlich deduziert werden. Kennzeichnen die „Axiome“ und „Theoreme“ dieser Kalküle das System der Fregeverknüpfungen, und ist dieses System tatsächlich ein System logischer Formen?

Für den Aufbau der verschiedenen „logischen Kalküle“ hat sich das folgende allgemeine Schema eingebürgert; der Aufbau geschieht auf zwei wohlunterschiedenen Ebenen: einmal der Ebene der Bildung der zulässigen Ausdrücke des Systems; hier werden aus den Grundtermen (den im „Alphabet“ aufgeführten „Atomarausdrücken“) mithilfe exakt definierter *Bildungsregeln* die im System zulässigen Ausdrücke hergestellt; die Regeln lassen eine eindeutige Entscheidung zu, ob irgendein Ausdruck korrekt gebildet ist oder nicht, ob er damit ein zulässiger Ausdruck des Systems ist oder nicht. Es gibt zweitens die Ebene jener ausgezeichneten Ausdrücke des Systems, die als „Sätze“ oder „Gesetze“ gelten; diese zerfallen in die im System vorausgesetzten „Axiome“, und in die aus diesen „Axiomen“ nach ganz bestimmten Regeln hergeleiteten „Theoreme“. Wenn wir uns an den axiomatisch aufgebauten Theorien von **EUKLID**, **PEANO** oder **NEWTON** orientieren, dann müssten diese „Axiome“ und „Theoreme“ eigentlich die Gesetze des im axiomatischen System behandelten Gegenstandsbereiches sein, in den „logischen Kalkülen“ müssten die grundlegenden Strukturmerkmale der Fregeverknüpfungen und die Gesetze, denen diese unterliegen, entwickelt werden.

3.4.1.1. Die Ausdrucksebene der „Aussagenkalküle“

Da der Aufbau von „Aussagenkalkülen“ das System *aller* nur möglichen Fregeverknüpfungen, zur Grundlage hat, kann es nur das SFA sein, das eine kalkülmäßige, axiomatische Darlegung erfährt, und die Eigenschaften dieser speziellen Fregeverknüpfungen legen damit von Anfang an alle Erfordernisse fest, denen die Ausdruckskomponente des Kalküls genügen muss. Es steht fest, welche Grundzeichen benötigt werden, was diese Grundzeichen ausdrücken, und was durch die geregelte „syntaktische“ Aneinanderreihung dieser Grundzeichen bezeichnet wird; unverrückbar vorgegeben ist, was ausgedrückt werden muss – eben das SFA; Spielraum gibt es nur in der Frage, mit welchen Zeichen dies geschehen soll. Alle nur möglichen Fregeverknüpfungen beliebiger Komplexität und ihre Gesetze müssen darstellbar sein, ebenso die Regeln und die Schemata der Herleitung oder Deduktion dieser Gesetze. Benötigt werden Zeichen für die Komplementärwerte selbst (z.B. die Zeichen „a_1“ und „a_2“), dann Beliebig-Element-Zeichen für diese beiden Werte (z.B. „x“, „y“,…), dann die Zeichen für die Fregeverknüpfungen (z.B. „$\underline{\underline{\nabla}}$“, „$\underline{\underline{\vee}}$“, „$\underline{\underline{\Leftarrow}}$“,…) selbst. Damit lassen sich konkrete Verknüpfungen der Komplementärwerte wie $a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2$, und allgemeine elementare oder komplexe Verknüpfungsausdrücke wie $x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$ oder $(x \underline{\underline{\Rightarrow}} y) \underline{\underline{\bowtie}} (x \underline{\underline{\Downarrow}} y)$ darstellen oder auch Verknüpfungen eines konkreten mit einem beliebigen Komplementärwert wie z.B. $x \underline{\underline{\Rightarrow}} a_2$. Die Bildungsregeln müssen die klare und eindeutige Darstellung beliebiger Verkettungen dieser Verknüpfungen ermöglichen. Es muss Bezeichnungen der Reihenfolge der Durchführung von aneinander gereihten Verknüpfungen geben, z.B. Klammerzeichen oder Äquivalente der Klammern; die Verknüpfung $(a_2 \underline{\underline{\&}} a_1) \underline{\underline{\Rightarrow}} a_1$ und die Verknüpfung $a_2 \underline{\underline{\&}} (a_1 \underline{\underline{\Rightarrow}} a_1)$ haben ja ein unterschiedliches Ergebnis. Genau dieselben Erfordernisse gelten für die Bezeichnung arithmetischer Verknüpfungen; es muss Zeichen für jede konkrete Zahl, Beliebig-Element-Zeichen für Zahlen „a“, „b“. usw., Bezeichnungen der arithmetischen Verknüpfungen „+“, „-“ usw. und ihrer Reihenfolge, geben[18]. Im Gegensatz zu den Ausdrucksregeln der geläufigen arithmetischen Zeichensysteme schleichen sich in den „Aussagenkalkülen“ schon auf der Ausdrucksebene Nachlässigkeiten ein. Es werden meistens nicht alle Fregeverknüpfungen ausdrücklich durch ein eigenes Zeichen repräsentiert; es wird v.a. auf das in einem derartigen System algebraischer Operationen unverzichtbare Gleichheitszeichen verzichtet, mit dem die Zuordnung von Urbild und Bild bezeichnet wird; weiterhin werden die verschiedenen Terme und Ausdrücke des „Kalküls“ entweder völlig unspezifisch oder gar irreführend charakterisiert.

Das SFA weist genau 16 binäre Fregeverknüpfungen auf; jede beliebige komplexe Verknüpfung zweier Werte ist genau einer dieser 16 elementaren Fregeverknüpfungen ergebnisgleich. Diese grundlegende und für den Aufbau der Kalküle konstitutive Eigenschaft des SFA kann offen nur gerechtfertigt werden, wenn für jede der 16 möglichen binären Fregeverknüpfungen ein eigenes Zeichen zur Verfügung steht. In den „Aussagenkalkülen“ werden nicht für alle elementaren Fregeverknüpfungen eigene Zeichen festgelegt; einige Fregeverknüpfungen werden mithilfe anderer Fregeverknüpfungen dargestellt; eine elementare Fregeverknüpfung wie z.B. $x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$ kann durch eine komplexe (d.h. mehr als eine Fregeverknüpfung aufweisende) Fregeverknüpfung wie z.B. durch $-x \underline{\underline{\vee}} y$ oder $-(x \underline{\underline{\&}} -y)$ ersetzt werden, und deshalb kann man zur Bezeichnung aller Fregeverknüpfungen nur wenige, oder gar nur eine Fregeverknüpfung (entweder Φ_D oder Φ_X) heranziehen. Auch wenn hier bestimmte elementare Fregeverknüpfungen nur als komplexe Verknüpfungen darstellbar sind, setzt dieses Vorgehen implizit die Gesamtheit aller Fregeverknüpfungen voraus. Es werden hierbei bei der Festsetzung der zulässigen Ausdrücke des „Kalküls“ – auf der Ausdrucksebene – bereits unbewiesen vorausgesetzte Substitutionsgesetze genutzt: nur weil etwa das Gesetze gilt: $(\forall x,y \in \mathcal{A})\ (x \underline{\underline{\Uparrow}}\ y) = (-x \underline{\underline{\veebar}} -y)$, kann jeder Ausdruck mit „$\underline{\underline{\Uparrow}}$“ durch einen Ausdruck mit „–“ und „$\underline{\underline{\veebar}}$“ ersetzt werden. Damit werden keineswegs die nicht explizit bezeichneten Grundverknüpfungen *entbehrlich*[19], eine elementare Verknüpfung wird vielmehr stets durch eine komplexe Verknüpfung ausgedrückt; diese Substituierbarkeit setzt alle 16 Fregeverknüpfungen voraus. Jedenfalls belegt der Verzicht auf eine Bezeichnung aller Fregeverknüpfungen, dass diese „Kalküle“ das System der Fregeverknüpfungen nicht aus seinen Grundbestimmungen systematisch und vollständig herleiten, sondern schon auf der Ebene der Festlegung der zulässigen Ausdrücke nur einen bestimmten, willkürlichen und selektiven *Gebrauch* von den operativen Möglichkeiten und unbewiesen vorausgesetzten Gesetzmäßigkeiten des SFA machen; die Kalküle bestimmen so nicht das SFA, sondern setzen es in seiner Gesamtheit immer schon voraus.

Jede algebraische Verknüpfung führt auf ein Ergebnis, und dieses Ergebnis muss immer eindeutig bezeichnet werden können; in aller Regel benutzt man hier das Gleichheitszeichen „=“. Ohne das Gleichheitszeichens lassen sich konkrete Verknüpfungen wie $2+3=5$, Bestimmungsgleichungen wie $x+3=5$ oder allgemeine Rechengesetze wie $(a+b=b+a)$ überhaupt nicht darstellen. Auch die Darstellung der Fregealgebra ist ohne das Gleichheitszeichen unmöglich; nur mit seiner Hilfe können die elementaren Fregeverknüpfungen definiert und ihre spezifischen Unterschiede dargestellt werden: der Unterschied der Verknüpfungen Φ_E und Φ_C liegt beispielsweise im unterschiedlichen Resultat der Verknüpfung von a_2 und a_1; $a_2 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\ a_1 = a_2$, aber $a_2 \underline{\underline{\Rightarrow}}\ a_1 = a_1$. Nur mithilfe des Gleichheitszeichens lässt sich eine fregealgebraische Bestimmungsgleichung wie $a_1 \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\ x = a_2$ oder ein Substitutionsgesetz wie $x \underline{\underline{\Uparrow}}\ y = -x \underline{\underline{\veebar}} -y$ darlegen. Ohne Gleichheitszeichen können weder algebraische Verknüpfungen, noch die Gesetze, denen solche Verknüpfungen unterliegen, dargestellt werden. Umso erstaunlicher ist es, dass die „Aussagenkalküle“ unter den Grundzeichen das Gleichheitszeichen, das doch für die Darstellung eines jeden algebraischen Systems unerlässlich ist, nicht enthalten. Dieser Verzicht auf das Gleichheitszeichen hängt zusammen mit der seltsamen Vorstellung von den Gesetzen dieses algebraischen Systems.

Die Ungenauigkeit, mit der das ganze System und seine Ausdrücke dargestellt und erläutert wird, bereitet die Missdeutung vor, der das System dann unterzogen wird – weder Form noch Inhalt des Systems werden *in ihrer unverfälschten Eigenart* dargelegt. Die Erläuterung der verschiedenen Zeichen und Ausdrücke der „Aussagenkalküle“ bleibt stets sehr ungenau und unspezifisch; wo, genau betrachtet, alleine beliebige oder konkrete Komplementärwerte oder bestimmte Fregeverknüpfungen bezeichnet werden, wird ganz unbestimmt und unspezifisch von „Variablen“ und „Konstanten“, von „Ausdrücken“ und „Formeln“ geredet; die Klammern, die ausschließlich die Reihenfolge bezeichnen, in der algebraische Verknüpfungen durchzuführen sind, werden vage oder irreführend als „Hilfszeichen“ oder „Interpunktionszeichen“ angesprochen[20]. Auch das Fehlen des Gleichheitszeichens trägt zur Camouflage des tatsächlichen Charakters der Kalküle bei. Diese absichtlich vage Erläuterung ist sachlich nicht begründet, denn kein operatives System kann dargelegt werden, ohne dass seine Formen und Inhalte eindeutig bestimmt werden; dies gilt auch für das System der Fregeverknüpfungen und die mithilfe dieses Systems errichteten „Aussagenkalküle“. Die Vagheit soll suggerieren, dass die Ausdrücke des „Kalküls“, deren fregealgebraische Bedeutung bereits exakt und unabänderlich feststeht, noch allen möglichen anderen, v.a. logischen „Interpretationen“ offen stünden.

3.4.1.2. Die Ebene der „Gesetze“ der „Aussagenkalküle“

Die „Aussagenkalküle“ setzen die Gesetzmäßigkeiten des SFA voraus und nutzen sie. Zugleich geben sie diesen Gesetzen des SFA ein bizarres Gepräge, denn als „Axiome“ und „Theoreme“ des „Kalküls“ gelten den Logistikern keineswegs die grundlegenden Konstruktionsprinzipien, Eigenschaften und Gesetze der Fregeverknüpfungen, sondern die verschiedenen Substitutionen der elementaren Verknüpfung Φ_V. Im Gegensatz zu allen anderen elementaren und komplexen Fregeverknüpfungen, die als entweder „erfüllbar“ oder „unerfüllbar“ charakterisiert werden, sollen die Φ_V-Substitutionen „allgemeingültig“ sein und Gesetzescharakter besitzen, der den anderen Substitutionsgesetzen abgesprochen wird. Dies ist ein grotesker, unzulässiger Missbrauch der für algebraische Systeme wichtigen Begriffe der Allgemeingültigkeit, Nichterfüllbarkeit und Erfüllbarkeit. Im SFA gibt es, wie in der Arithmetik, einerseits Bestimmungs- und andererseits Gesetzesgleichungen. Es gibt etwa die fregealgebraische Bestimmungsgleichung $(x \underline{\underline{\Leftrightarrow}}\ a_2)\ \underline{\underline{\veebar}}\ (x \underline{\underline{\barwedge}}\ a_2) = a_1$. Die Lösungsmenge dieser Bestimmungsgleichung ist $\{a_2\}$, denn nur für den Wert $x = a_2$ ergibt die links vom Gleichheitszeichen stehende Verknüpfung den Wert a_1; wenn die Lösungsmenge nicht leer ist, sagt man, die Bestimmungsgleichung sei *erfüllbar*. Hingegen ist die Bestimmungsgleichung $(x \mathbin{\underline{\underline{\&}}} a_2) \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\&}}} a_2) = a_1$ sowohl für $x = a_1$ als auch für $x = a_2$ *nicht erfüllbar*. Auch in der Arithmetik und in jedem anderen System algebraischer Verknüpfungen gibt es erfüllbare und nichterfüllbare Bestimmungsgleichungen. Nur von Bestimmungsgleichungen kann gesagt werden, sie seien erfüllbar bzw. nicht erfüllbar (sie haben eine Lösungsmenge oder nicht).

Die gültigen Substitutionsgesetze („Rechengesetze") eines algebraischen Systems sind hingegen *allgemeingültig* – sie gelten für *alle* Elemente der Definitionsmenge; in der Fregealgebra gilt für alle (x,y) aus $\mathcal{A}^2$ z.B. $(x \mathbin{\underline{\underline{\Uparrow}}} y) \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\bowtie}}} y) = x \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} y$; für *jeden* Wert aus $\mathcal{A}^2$ ergibt die linke und rechte Verknüpfung dasselbe Ergebnis. In der Arithmetik gilt für alle Paare von reellen Zahlen (a, b) etwa, dass die Verknüpfung $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2$ dasselbe Ergebnis hat wie die Verknüpfung $a^2+2\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2$. Solche allgemeingültigen Gesetzesgleichungen können nur mithilfe des Gleichheitszeichens dargestellt werden, da es ja *verschiedene* Verknüpfungen sind, die für alle nur möglichen n-Tupel von Elementen nachweisbar auf *dasselbe* Resultat führen. Diese Allgemeingültigkeit von Gleichungen algebraischer Verknüpfungen bezieht sich immer auf zwei verschiedene (oder gleiche[21]) algebraische Verknüpfungen. Nur solchen Substitutionsgesetzen kann Allgemeingültigkeit zugesprochen werden. Während also die Bestimmungsgleichungen entweder erfüllbar sind oder nicht, sind die Gesetzesgleichungen algebraischer Systeme allgemeingültig. Hingegen kann weder arithmetischen Verknüpfungen – z.B. der Verknüpfung $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$ oder $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2$ oder $\mathrm{a}^{1/\mathrm{b}}$ – noch den fregealgebraischen Verknüpfungen, z.B. $(x \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} y)$, sinnvoll einerseits Nichterfüllbarkeit, Erfüllbarkeit oder andererseits Allgemeingültigkeit zugesprochen werden. Eine solche Verknüpfungs-Abbildung ordnet *jedem* Urbild ein eindeutig bestimmtes Bild zu; den Verknüpfungen kommen die Bestimmungen der Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit[22], niemals aber die Bestimmungen der Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit und Nichterfüllbarkeit zu; diese Tatsache wird in den „Aussagenkalkülen" ignoriert, was den Begriffen der (Nicht-)Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit eine ganz neue, absonderliche Bedeutung verleiht: es werden jene Fregeverknüpfungen, die für alle Elemente aus $\mathcal{A}^2$ den Wert a_1 zum Ergebnis haben (die Frege-verknüpfung Φ_V und die Φ_V-Substitutionen), als „allgemeingültige Ausdrücke", die Verknüpfungen, die alle Werte aus $\mathcal{A}^2$ auf a_2 abbilden werden als „nichterfüllbare", und die übrigen Verknüpfungen als „erfüllbare Ausdrücke" bestimmt. Diese Auffassung von Allgemeingültigkeit/Erfüllbarkeit/Nichterfüllbarkeit soll aus einer zulässigen Übertragung des Verständnisses der Allgemeingültigkeit einer arithmetischen Gesetzesgleichung resultieren[23]. Der Ausdruck einer Verknüpfung ist nie Ausdruck einer Gesetzesgleichung, eine Verknüpfung kann nie wie eine Gesetzesgleichung allgemeingültig sein.

Dieser Missbrauch des Begriffs der Allgemeingültigkeit resultiert daraus, dass die Deutung der beiden komplementären Werte als „das Wahre" und „das Falsche" zu einer absurden Interpretation der Fregeverknüpfungen führt. Weil die Fregeverknüpfungen ihre Argumente entweder auf den Wert *wahr* oder den Wert *falsch* abbilden, sollen die Verknüpfungen selbst, je nach ihrem Bild (Funktionswert), wahr oder falsch sein! Das ist die Konfusion einer Abbildungsverknüpfung mit dem Bild dieser Verknüpfung! Da Φ_V und die Φ_V-Substitutionen als Verknüpfungsergebnis immer „das Wahre" hätten, seien sie immer, d.h. für alle möglichen Argumente „wahr", und deshalb „allgemeingültig"[24]. Die Deutung der *korrekten* Fregeverknüpfungen als entweder wahre oder falsche Aussagen ist unzulässig; die Verknüpfung $\mathcal{F} \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} \mathcal{F} = \mathcal{F}$ bzw. $a_2 \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} a_2 = a_2$ ist nicht falsch, sondern richtig, so korrekt wie etwa 2 + 3 = 5, denn sie entspricht der Definition von Φ_A genau so, wie die arithmetische Verknüpfung 2 + 3 = 5 der Definition der Addition entspricht. Falsch wäre nur, wenn, entgegen der Definition von Φ_A, behauptet würde $a_2 \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} a_2 = a_1$ bzw. $\mathcal{F} \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} \mathcal{F} = \mathcal{W}$. Die Richtigkeit einer Abbildung hängt nie von ihrem Bild ab, sondern alleine davon, ob dem Urbild das von der Zuordnungsvorschrift bestimmte Bild zugeordnet wird.

Von den fregealgebraischen Substitutionsgesetzen lässt sich, anders als von den bloßen Verknüpfungsausdrücken, die Allgemeingültigkeit der Geltung behaupten. $x \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} y)$ ist ein bloßer Verknüpfungsausdruck, $x \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} y) = x \mathbin{\underline{\underline{\nabla}}} y$ hingegen ist der Ausdruck einer allgemeingültigen Gesetzesgleichung[25]. Nicht nur für jede komplexe Φ_V-Substitution, für jede andere komplexe Substitution einer elementaren Fregeverknüpfung gibt es eine solche allgemeingültige Gesetzesgleichung; wie jede Φ_V-Gleichung ist jedes andere Substitutionsgesetz wie $(x \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} y) \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} y = x \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} y$ oder $(x \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} y) \mathbin{\underline{\underline{\dashv}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\Leftrightarrow}}} y) = a_2$ allgemeingültig. Allgemeingültigkeit bedeutet also nicht, dass jedes Element aus $\mathcal{A}^2$ auf a_1 abgebildet wird, sondern dass *jedes* Element aus $\mathcal{A}^2$ von beiden Verknüpfungen, die jeweils auf einer Seite einer Gesetzesgleichung stehen, auf dasselbe Element aus $\mathcal{A}$ abgebildet wird. Würde im Rahmen der „Aussagenkalküle" das Gleichheitszeichen benutzt, so würde diese Falschdeutung des Begriffs der Allgemeingültigkeit in den „Aussagenkalkülen" schnell sichtbar. Die grundlegenden Gesetze des SFA, die Gleichungsgesetze, lassen sich ohne die Beziehung der Ergebnisgleichheit verschiedener Verknüpfungen (bezeichnet durch „=") nicht darlegen. Das Gleichheitszeichen ist für jedes algebraische System unverzichtbar, und kann nicht durch irgendeine Verknüpfung eines besonderen algebraischen Systems ersetzt werden. Genau dies aber unterstellen die Logistiker. Die Ergebnisgleichheit ist ein Spezialfall der bedingungslogischen $\mathbb{E}$-Relation: genau dann, wenn eine bestimmte erste Verknüpfung von bestimmten Werten auf ein bestimmtes Ergebnis führt, führt eine zweite Verknüpfung für dieselben Werte auf dasselbe Ergebnis. Um zu suggerieren, die in den Substitutionsgleichungen vorliegenden Beziehungen der Ergebnisgleichheit zwischen Fregeverknüpfungen sei selbst wieder eine Fregeverknüpfung, wird unterstellt, das Gleichheitszeichen zur Bezeichnung der Gesetzesgleichung könne durch das Zeichen für die Fegeverknüpfung Φ_E vertauscht werden. Aus der Bezeichnung einer *Gesetzesgleichung* wie „$-(-x \mathbin{\underline{\underline{\&}}} -y) = (x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} y)$“ wird dann die Bezeichnung einer zu Φ_V ergebnisgleichen *Verknüpfung*, im Beispiel „$-(-x \mathbin{\underline{\underline{\&}}} -y) \mathbin{\underline{\underline{\Leftrightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} y)$“. Die Substitutionsgleichung „$-(-x \mathbin{\underline{\underline{\&}}} -y) = (x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} y)$“ ist ein völlig anderer Sachverhalt als die Fregeverknüpfung „$-(-x \mathbin{\underline{\underline{\&}}} -y) \mathbin{\underline{\underline{\Leftrightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} y)$“. Dieser Verschiedenheit steht nicht entgegen, dass aus jedem fregealgebraischen Substitutionsgesetz eine solche Φ_V-Substitution durch die Ersetzung von „=“ durch „Φ_E“ hergestellt werden kann. Wegen der Ergebnisgleichheit von zwei verschiedenen fregealgebraischen Verknüpfungen, die im Substitutionsgesetz mit Hilfe des Gleichheitszeichens formuliert wird, wird durch die an die Stelle von „=“ gesetzte Verknüpfung Φ_E entweder nur (a_1, a_1), oder nur (a_2, a_2) abgebildet; da beide Paare durch Φ_E (aber auch durch Φ_B, Φ_C und Φ_V!) auf a_1 abgebildet werden, ergibt sich eine zu Φ_V ergebnisgleiche komplexe fregealgebraische Verknüpfung. Bei einer solchen Ersetzung von „=“ durch „$\underline{\underline{\Leftrightarrow}}$“ ändert sich jedoch die Bedeutung des Ausdrucks. Das Gleichheitszeichen gehört zum konstitutiven Bestand eines jeden algebraischen Systems, es kann nicht durch irgendeine Verknüpfung des jeweiligen algebraischen Systems ersetzt werden.

Wir können festhalten: im Rahmen der auf der Grundlage des SFA konstruierten „Aussagenkalküle“ werden Ausdrücke bloßer Verknüpfungen als allgemeingültig oder erfüllbar/nicht erfüllbar charakterisiert; dies ist falsch, denn eine Verknüpfung wie $x \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} y)$ oder $x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\Downarrow}}} y)$ ist wie eine arithmetische Verknüpfung $(a+b)$ oder $a \cdot (a+b)$ weder allgemeingültig, noch erfüllbar, noch nicht erfüllbar: sie ordnet, wie es der Definition der Abbildung entspricht, jedem Wert $(x,y) \in \mathcal{A}^2$ eindeutig einen bestimmten Funktionswert aus der Zielmenge $\mathcal{A}$ zu. Der Begriff der Erfüllbarkeit ist auf Bestimmungsgleichungen beschränkt; wie in der Menge $\mathbb{R}$ die arithmetische Bestimmungsgleichung $x^2 = 1$ erfüllbar, die Bestimmungsgleichung $x^2 = -1$ nicht-erfüllbar ist, so ist in der Menge $\mathcal{A}^2$ die Bestimmungsgleichung $x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\Downarrow}}} a_1)$ erfüllbar (für $x = a_2$) und die Bestimmungsgleichung $x \mathbin{\underline{\underline{\Downarrow}}} a_1$ unerfüllbar. Allgemeingültigkeit kann nur Gesetzes*gleichungen* zugesprochen werden; so sind die Substitutionsgleichungen $x \mathbin{\underline{\underline{\Rightarrow}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} y) = x \mathbin{\underline{\underline{\triangledown}}} y$ und $x \mathbin{\underline{\underline{\vee}}} (x \mathbin{\underline{\underline{\Downarrow}}} y) = x \mathbin{\underline{\underline{\Leftarrow}}} y$ gleichermaßen allgemeingültig: für *jeden* Wert aus $\mathcal{A}^2$ ergibt sich für die links und rechts des Gleichheitszeichens stehenden Verknüpfungen dasselbe Resultat; es spielt dabei überhaupt keine Rolle, auf welchem Wert ein Wertepaar aus $\mathcal{A}^2$ von beiden Verknüpfungen abgebildet wird. Es ist deshalb eine Entstellung der algebraischen Begriffe der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit, wenn eine Verknüpfung, die alle Werte der Definitionsmenge auf nur einen („ausgezeichneten“) Wert der Zielmenge abbildet, als allgemeingültig, eine Verknüpfung, die nur einige bzw. keine Werte der Definitionsmenge auf diesen „ausgezeichneten“ Wert abbildet als erfüllbar bzw. nicht erfüllbar bezeichnet wird.

3.4.1.3. Die Ebene der Herleitungen

In den „Aussagenkalkülen“ werden aus vorgegebenen Φ_V-Substitutionen (den sog. „Axiomen“) mithilfe von Umformungsregeln andere (abgeleitete) Φ_V-Substitutionen (die sog. „Theoreme“) hergestellt.

1. Die erste dieser Umformungsregeln, die **Einsetzungsregel**, besteht darin, dass Beliebig-Element-Zeichen für Komplementärwerte $x, y, \ldots$ an allen Stellen ihres Vorkommens durch allgemeine fregealgebraische Verknüpfungsausdrücke ersetzt werden; diese Regel soll, wie die anderen Umformungsregeln der „Aussagenkalküle“, ein universales „Schema des logischen Schließens“ sein, ist jedoch nichts weiter als ein spezielles *fregealgebraisches* Implikationsgesetz: Wenn in einer komplexen fregealgebraischen Φ_V-Substitution $\Phi(x,y,\ldots,z)$ irgendeines der Beliebig-Element-Zeichen für Komplementärwerte an allen Stellen seines Vorkommens durch den Ausdruck einer fregealgebraischen Verknüpfung ersetzt wird, dann resultiert aus dieser Ersetzung wiederum eine Φ_V-Substitution. Erst wenn dieses Implikationsgesetz auf einen geeigneten Ausdruck angewendet wird, findet ein (fregealgebraisches) Schließen statt, und zwar gemäß dem universellen logischen (nicht fregealgebraischen) Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$.

2. Auch die sog. **Ersetzungsregel** ist ein rein fregealgebraisches (und kein logisches) Implikationsgesetz: wenn im Ausdruck einer komplexen Fregeverknüpfung ein Teilausdruck, der eine bestimmte Fregeverknüpfung be-

zeichnet, durch den Ausdruck einer ergebnisgleichen Verknüpfung ersetzt wird, so bezeichnet der resultierende Gesamtausdruck eine Verknüpfung, die ergebnisgleich ist zu jener, die durch den ursprünglichen Gesamtausdruck bezeichnet wird. Diese Regel setzt die Geltung der fregealgebraischen Substitutionsgesetze voraus, die im Kalkül und mit den Mitteln des Kalküls gar nicht beweisbar sind.

3. Die sog. **Abtrennungsregel** besagt folgendes: sind „Φ_1" und „Φ_2" Bezeichnungen von beliebigen Fregeverknüpfungen, und ist die Fregeverknüpfung Φ_1 eine Φ_V-Substitution und ist $\Phi_1 \Rrightarrow \Phi_2$ eine Φ_V-Substitution, dann ist auch die Fregeverknüpfung Φ_2 eine Φ_V-Substitution.

Diese drei Umformungsregeln sind Implikationsgesetze im Sinne der logischen Relation $\mathbb{C}$[26]; im „Kalkül" wird in der Herleitungsregeln auf bedingungslogische Relationen Bezug genommen, für die der Kalkül gar keine Ausdrucksmöglichkeiten zur Verfügung stellt; auch die für die Formulierung dieser Regeln unverzichtbare Bezeichnung beliebiger Fregeverknüpfungen ist durch das „Lexikon" und die Bildungsregeln nicht möglich. Die „Aussagenkalküle" beruhen auf Gesetzen, die im Kalkül weder begründet, noch bezeichnet werden können. Die Auffassung, die Φ_V-Substitutionen, die als Ausgangsformeln für die regelgeleiteten Umformungen genommen werden (die „Axiome" der „Aussagenkalküle"), seien tatsächlich grundlegende Gesetzmäßigkeiten (d.h. Axiome im echten Sinne), aus denen der gesetzmäßige Charakter der SFA im Ganzen hergeleitet werden kann, ist abwegig.

Weder die Φ_V-Substitutionen[27], noch die Umformungsregeln, noch die schließende Anwendungen der Umformungsregeln zur Herleitung von Φ_V-Substitutionen aus vorgegebenen Φ_V-Substitutionen dürfen als die allgemeinen Schemata des logischen Schließens ausgegeben werden; erstere sind spezielle algebraische Verknüpfungen, die als Bild nur den Wert a_1 haben; die Umformungsregeln sind *spezielle* Implikationsgesetze, deren Geltung auf den speziellen Eigenschaften von Fregeverknüpfungen beruht; die Anwendung der Umformungsregeln ist ein spezielles fregealgebraisches Schließen nach dem allgemeinen Schlussschema $\mathbb{C}/\alpha$, welches im Rahmen der Logik und nicht im Rahmen der Fregealgebra untersucht wird.

3.4.2. Der „Aussagenkalkül" als spezieller Gebrauch des SFA

Wir erkennen nun, was die „Aussagenkalküle" tatsächlich und effektiv leisten. Es liegt ein besonderer, willkürlicher und kognitiv bedeutungsloser Gebrauch des SFA mit unhaltbaren logischen Ansprüchen vor: aus vorgegebenen Ausdrücken von Φ_V-Substitutionen werden durch regelgeleitete Umformungen Ausdrücke anderer Φ_V-Substitutionen hergestellt, ohne dass dieses zu Grunde liegende System und seine Gesetze, die in den „Kalkülen" benutzt werden, selbst in ihrem spezifischen Charakter dargelegt und gerechtfertigt würden. Zugleich wird dieser spezielle Gebrauch der Fregealgebra einer logischen Deutung unterzogen, für die keine sachliche Berechtigung besteht. Es werden in diesen „Kalkülen" Φ_V-Substitutionen (zumindest eine) vorausgesetzt, auf diese werden dann bestimmte Umformungsoperationen angewendet, woraus dann alle nur möglichen Φ_V-Substitutionen resultieren. Die vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen werden als unbewiesene „Axiome", die hergeleiteten Φ_V-Substitutionen werden als durch die Herleitung bewiesene „Theoreme" ausgegeben; die den Herleitungen zu Grunde liegenden Umformungsregeln sollen „allgemein-logische Schlussregeln" sein. Das Ganze, dieser spezielle Gebrauch der Fregealgebra zur Herstellung von Φ_V-Substitutionen, trägt dann den Titel eines „axiomatischen Aufbaus der Aussagenlogik". In den Kalkülen werden nicht alle elementaren Fregeverknüpfungen explizit dargestellt, sondern durch Substitutionen ersetzt; die „Aussagenkalküle" unterscheiden sich darin, und in der Auswahl der vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen (der „Axiome"); ansonsten dienen sie alle der Herstellung aller möglichen Φ_V-Substitutionen aus (möglichst) wenigen vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen.

Ein derartiges „axiomatisches System" hat mit den echten axiomatischen Theorien von **Euklid**, **Peano**, **Newton** nicht mehr als den Namen gemeinsam; denn während diese axiomatischen Darstellungen die Gegenstände und Beziehungen der Theorie eines bestimmten Gegenstandsbereiches darlegen und deduktiv entfalten, kennzeichnen die als „Axiome" vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen keineswegs den grundlegenden Charakter des darzulegenden Systems, sondern sind nur spezielle, abgeleitete Verknüpfungen, die das komplette System der Fregealgebra und seine Gesetze schon voraussetzen. Die Herstellung von Φ_V-Substitutionen ist ein theoretisch uninteressantes Spiel, dem keine echte theoretische Problematik zu Grunde liegt; dieses Spiel ließe sich auf der Grundlage der vorausgesetzten Fregealgebra endlos variieren: die Forderung, aus vorgegebenen Φ_V-Substitutionen beliebige andere Φ_V-Substitutionen abzuleiten, ist eine willkürliche Auswahl aus sehr vielen Möglichkeiten, die durch das zu Grunde liegende SFA geboten werden; es könnte ja mit demselben Recht gefordert werden, dass mit wohldefinierten Umformungsregeln aus vorausgesetzten Φ_C- Substitutionen alle nur möglichen Φ_A-Substitutionen hergeleitet werden sollen, usw. usf.

3.4.3. Die „Metalogik“ als Rechtfertigung der Kalküle

In den „Aussagenkalkülen“ kann weder bewiesen werden, dass die vorausgesetzten „Axiome“ tatsächlich Φ_V-Substitutionen sind, noch kann gezeigt werden, dass in beliebigen Fällen der korrekten Anwendung der Umformungsregeln tatsächlich nur Φ_V-Substitutionen resultieren, und dass im System jede mögliche Φ_V-Substitution herstellbar ist. Diese mit dem Gebrauch des System verknüpften Ansprüche müssen gerechtfertigt werden, und dies kann nur durch den Bezug auf den grundlegenden *tatsächlichen*, und daher von jeder logischen Missdeutung frei gehaltenen Charakter des Systems der Fregeverknüpfungen geschehen. Der Nachweis, dass das Kalkülspiel so, wie gefordert, funktioniert, kann nicht im „Kalkül“ selbst geschehen, sondern wird einer sog. „Metalogik“ (oder einem „Metakalkül“) anheim gestellt. Die Notwendigkeit dieser „Metalogik“ ist das implizite Eingeständnis, dass die angebliche „axiomatische Darstellung“ der Fregealgebra keine deduktive Entwicklung dieses Systems aus seinen grundlegenden und konstitutiven Bestimmungen ist[28]. Denn erst dieser „Metalogik“ wird als Aufgabe zugewiesen, was schon bei der axiomatischen Darlegung eines solchen Systems geleistet werden müsste; schon beim Aufbau der Kalküle könnte und müsste gesagt werden, dass der Kalkül im vorgegebenen Rahmen der Fregealgebra der Herstellung von Φ_V-Substitutionen dient, und es wäre zu zeigen, ob und weshalb die Regeln des Kalküls eine solche Herstellung erlauben. Die Trennung von „Kalkül“ und „Metakalkül“ ist gekünstelt; denn was da eigentlich gemacht wird, auf welche Gesetzmäßigkeiten man sich stützt, ließe sich schon von Anfang an sagen; diese Trennung von blindem Kalkül und seiner nachträglichen Rechtfertigung in einem „Meta-Kalkül“ scheint wiederum v.a. der Vertuschung des tatsächlichen (logisch irrelevanten) Charakters der Kalküle zu dienen.

Im „Metakalkül“ muss nachgewiesen werden, 1. dass die vorausgesetzten „Axiome“ tatsächlich Φ_V-Substitutionen sind; 2. dass die Umformungsregeln, die vorausgesetzten Φ_V-Substitutionen nur so verändern, dass ihr Charakter als Φ_V-Substitution erhalten bleibt (diese Aufgabe wird als *Nachweis der „Widerspruchsfreiheit“ des Kalküls* mystifiziert); 3. dass alle beliebigen Φ_V-Substitutionen herstellbar sind (*Nachweis der „Vollständigkeit“ des Kalküls*); und schließlich 4. dass nicht mehr Φ_V-Substitutionen als „Axiome“ vorausgesetzt werden, als zur Herstellung jeder beliebigen Φ_V-Substitution notwendig sind (dies soll der *Nachweis der „Unabhängigkeit“ der „Axiome“ des Kalküls* sein). Diese Nachweise sind nur möglich, wenn jetzt explizit auf den wahren Charakter des Systems der Fregealgebra und auf die tatsächliche Leistung der „Aussagenkalküle“ eingegangen wird, und auf jede logische Falschinterpretation der Fregeverknüpfungen und Φ_V-Substitutionen verzichtet wird.

In den „metalogischen“ Erörterungen wird stets eingestanden, dass man es im SFA nicht mit Aussagen, sondern mit Komplementärwerten zu tun hat. Es wird zugegeben, dass es für die zweielementige Grundmenge $\mathcal{A}$ ganz unerheblich ist, ob man ihre Elemente als „wahr“ und „falsch“ oder ganz anders „interpretiert“; von Bedeutung ist alleine, dass die beiden Werte komplementär sind[29]. Da jetzt auf die willkürliche Deutung der Komplementärwerte als „wahr“ und „falsch“ verzichtet wird, können jene Verknüpfungen, die stets einen der beiden Werte zum Ergebnis haben, nicht mehr als „immer wahre Aussagen“ bzw. „immer falsche Aussagen“ mystifiziert werden[30]. Mit Selbstverständlichkeit wird in der „metalogischen“ Argumentation das Gleichheitszeichen benutzt[31].

Von Fregeverknüpfungen, die „wahr“ oder „falsch“ sind, wird jedenfalls nicht mehr geredet. Das Fehleinschätzung, in den „Aussagenkalkülen“ würden logische Probleme behandelt, stützt sich aber entscheidend auf die Auffassung, die Fregeverknüpfungen seien wesentlich mit der Problematik von wahr und falsch verbunden; da bei der Rechtfertigung von Kohärenz und Stimmigkeit der „Aussagenkalküle“ und beim Nachweis der Gründe ihres Funktionierens im „Metakalkül“ auf die „logische Deutung“ der Komplementärwerte als ‚wahr‘ und ‚falsch‘ und auf die „Deutung“ der Fregeverknüpfungen als „Wahrheitsfunktionen“ verzichtet werden muss, spielt für die Kalküle die logische Problematik von Wahrheit und Falschheit von vorneherein keine Rolle – die logische Deutung der „Kalküle“ verfälscht im Nachhinein den tatsächlichen Charakter der Fregealgebra. Wenn bei der Rechtfertigung der Stimmigkeit eines logisch sein sollenden Systems davon abgesehen werden kann, dass es ein logisches System ist, dann kann dieses System von vorneherein kein logisches System sein.

Dass irgendeine vorausgesetzte Fregeverknüpfung eine Φ_V-Substitution ist, ist nicht von vorneherein klar; es kann nicht als „Axiom“ vorausgesetzt werden, sondern es wird stets erst nachgewiesen, indem man die Fregeverknüpfungen alle voraussetzt und einfach nachrechnet, ob diese „Axiome“ tatsächlich für alle möglichen Werte den Wert a_1 ergeben. Da sich darüber hinaus für *jede* beliebige Fregeverknüpfung mühelos nachrechnen lässt, was für eine Substitution sie darstellt, sind die „Aussagenkalküle“ als Entscheidungsverfahren, dass irgendeine Verknüpfung eine Φ_V-Substitution ist, im Grunde völlig überflüssig[32].

Dass die Umformungsregeln den Φ_V-Charakter der Ausgangsformeln erhalten, kann nur durch den Verweis auf die Eigenschaften der beteiligten fregealgebraischen Verknüpfungen gezeigt werden; die „Abtrennungsregel“ gründet z.B. in folgender Eigenschaft von Φ_C: $(\forall x \in \mathcal{A})\ [(a_1 \supseteqq x) = a_1] \leftrightarrow [x = a_1]$. Der Nachweis, dass die korrekte Anwendung der Umformungsregeln auf gegebene Φ_V-Substitutionen stets wieder auf Φ_V-Substitutionen führt, soll ein „Beweis der Widerspruchsfreiheit“ sein. Ein solcher Beweis zeigt jedoch nicht, dass das zu Grunde gelegte SFA kohärent und ohne Widerspruch ist, sondern er setzt das SFA schon als widerspruchsfrei voraus. Es wird auch nicht gezeigt, dass irgendeine Fregeverknüpfung als solche nicht widersprüchlich wäre. Als „widersprüchlich“ erscheint vielmehr der Umstand, dass mit den Umformungsregeln aus Φ_V-Substitutionen auch andere Fregeverknüpfungen als gefordert hergeleitet werden könnten; was als „Widerspruch“ ausgegeben wird, ist demnach abhängig vom speziellen Spielchen, das mit dem SFA angestellt wird. Wenn ich ein analoges Spiel so definiere, dass aus zu Grunde gelegten Φ_V-Substitutionen nur Φ_O-Substitutionen hergestellt werden sollen, würde sich die Bedingung der „Widerspruchsfreiheit“ ändern, die einzig darin besteht, dass die Umformungsregeln das auch wirklich leisten, was von ihnen – jeweils ganz willkürlich – verlangt wird. Es bedeutet nicht, dass eine komplexe Verknüpfung, die nicht ergebnisgleich mit Φ_V ist, an sich selber im Widerspruch stünde zu einer Φ_V-Substitution; unabhängig vom Kalkül sind es einfach verschiedene Verknüpfungen, jeweils ergebnisäquivalent zu unterschiedlichen elementaren fregealgebraischen Operationen. Die Fregeverknüpfung Φ_V kann etwa zur Fregeverknüpfung Φ_O oder Φ_B sowenig im Widerspruch stehen wie die Addition zur Multiplikation im Widerspruch steht. Die Frage, ob durch die vorausgesetzten Umformungsregelns sich aus Φ_V-Substitutionen tatsächlich nur Φ_V-Substitutionen herstellen lassen, hat mit der Frage der Widerspruchsfreiheit des vorausgesetzten SFA selbst gar nichts zu tun.

Die „metalogischen“ Erörterungen zeigen zwar, dass das Kalkülspiel der Herleitung von Φ_V-Substitutionen funktioniert, aber auch der „Metakalkül“ rechtfertigt nicht das zu Grunde liegende SFA, sondern setzt es ebenso wie der Kalkül voraus, jetzt freilich mit weniger irreführenden Deutungen verbunden. Um die grundlegenden Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Fregealgebra zu rechtfertigen, muss die Kohärenz und die Vollständigkeit der Konstruktion des Systems von Abbildungen: $\{\mu \mid \mu\colon \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\} \cup \{\delta \mid \delta\colon \mathcal{A}^2 \Rightarrow \mathcal{A}\}$ gerechtfertigt werden. Diese Konstruktion beruht auf der Wohlbestimmtheit der Grundmenge $\mathcal{A}$, der Komplementarität ihrer beiden Elemente und auf dem allgemeinen und normativen Begriff der Abbildung, von dem die Konstruktion der Verknüpfungen ausgeht. Diese Konstruktion führt zur präzisen, endgültigen und vollständigen Definition der verschiedenen überhaupt möglichen fregealgebraischen Operationen, auf der alle Gesetze des SFA (und die sie ermöglichenden „Kalkül“-Spielchen) beruhen. Erst im Anschluss an diese Konstruktion lassen sich die komplexen fregealgebraischen Verknüpfungen und die Substitutionsgesetze gewinnen. Und erst auf dieser Grundlage kann der „Aussagenkalkül“ als ein sehr spezieller und willkürlicher Gebrauch dieses operativen Systems mit nachträglicher logischer Missdeutung entwickelt werden.

3.5. Fregealgebra, Schaltalgebra und bedingungslogische Formen

Dass die Schaltalgebra, eine Fregealgebra, in der Computertechnologie und für die Analyse von elementaren Vorgängen im Zentralnervensystem eine wichtige Rolle spielt, wird oft als Beleg genommen, dass die Fregealgebra eine Theorie logischer Formen ist. Die Schaltalgebra wird als eine „Anwendung“ der „Aussagenlogik“ oder des „Aussagenkalküls“ ausgegeben[33]. Die Schaltalgebra ist Fregealgebra, und sie wird völlig unabhängig von der Missdeutung der SFA als „Aussagenlogik“ oder „Aussagenkalkül“ entwickelt. Ohne irreführende „Deutung“ werden die beiden Grundelemente, die Komplementärwerte bestimmt, ebenso alle möglichen unitären und binären Abbildungen, die auf der Basis der zweielementigen Grundmenge konstruierbar sind. Das Gleichheitszeichen wird benützt, es werden exakt die verschiedenen Substitutionsgesetze bestimmt, und niemand konfundiert wie im „Aussagenkalkül“ Verknüpfungen mit Gleichungen und Bestimmungsgleichungen mit Gesetzesgleichungen. Niemand kommt auf die abstruse Vorstellung, alle jene Verknüpfungen, die für alle möglichen Werte auf einen der beiden Werte führen, seien die Gesetze der Schaltalgebra.

Die schaltalgebraischen Verknüpfungen dürfen freilich auch nicht mit den logischen Formen als solchen identifiziert werden; jede derartige Schaltung ist ein bestimmter, *spezieller* dynamischer bedingungslogischer Zusammenhang. Wir haben es bei binären elektrischen oder elektronischen Schaltungen mit drei echten und dynamischen Ereignisklassen zu tun, mit den Ereignissen, dass 1. beim ersten Eingang (Kontaktstelle 1) Strom fließt (Ereignisklasse $\mathfrak{x}$), dass 2. beim zweiten Eingang (Kontaktstelle 2) Strom fließt (Ereignisklasse $\mathfrak{y}$) und dass 3. beim Ausgang Strom fließt (Ereignisklasse $\mathfrak{z}$). Bei der „ODER-Schaltung“ (Φ_A) liegt das Ereignis, dass bei beim Ausgang kein Strom fließt, nur dann vor, wenn weder bei Kontaktstelle 1, noch bei Kontaktstelle 2 Strom fließt; in allen anderen Fällen fließt am Ausgang Strom. Zwischen den drei Ereignissen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ liegt also die folgende dreistellige logische Totalrelation vor: $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \mathbb{H}\mathbb{E}] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{A}\mathbb{X}]$.

Jeder *binären* schaltalgebraischen Verknüpfung entspricht ein solcher *dreistelliger* logischer Zusammenhang; für die „UND-Schaltung“ erhalten wir den dreistelligen Funktor $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \mathbb{E}\equiv] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{K}\mathbb{D}]$, für die „NAND-Schaltung“ $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \mathbb{J}\mathbb{H}] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{D}\mathbb{K}]$, für die „NOR-Schaltung“ $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\ \equiv\mathbb{J}] \equiv [\mathfrak{z}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\ \mathbb{X}\mathbb{A}]$, usw. Da für jede mögliche Kombination der Zustände der Eingänge der Zustand des Ausgangs eindeutig determiniert ist (Abbildungen stellen ja aufgrund der Rechtseindeutigkeit notwendige bedingungslogische Zusammenhänge dar), ist von den Vorkommenskombinationspaaren (I,II), (III,IV), (V,VI) und (VII,VIII) der entsprechenden logischen Totalrelation von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ jeweils eine Vorkommenskombination realmöglich (ein Einsfall) und eine Vorkommenskombination nichtrealmöglich (ein Nullfall); in der Modalitätenmatrix kommen nur die Modalitäten $\mathcal{N}$ und $\mathcal{U}$ vor. Es gibt genau 16 solche *drei*stelligen Funktoren – so viele wie *bi*näre schaltalgebraische Verknüpfungen. Jedenfalls ist ersichtlich, dass die schaltalgebraischen Verknüpfungen nicht den logischen Formen gleichgesetzt werden dürfen, da jede schaltalgebraische n-stellige Verknüpfung einen *speziellen* (n+1)-stelligen bedingungslogischen Zusammenhang darstellt; es gibt jeweils viel mehr n-stellige logische Totalformen als n-stellige Schaltungen. Die Φ_A-Verknüpfung entspricht nicht der logischen Alternative $\mathbb{A}$; es gibt überhaupt keine Schaltung, die der zweistelligen logischen Relation der Alternative $\mathbb{A}$ entsprechen kann. Es sind nämlich die unitären Schaltungen, die zweistellige Funktorzusammenhänge darstellen. Die „NICHT-Schaltung“ – am Eingang ($\mathfrak{x}$) fließt Strom genau dann, wenn am Ausgang ($\mathfrak{z}$) kein Strom fließt und umgekehrt – entspricht dem Funktorzusammenhang $(\mathfrak{x} \asymp \mathfrak{z})$. Die drei anderen unitären Schaltungen – am Ausgang nur kein Strom: $(\mathfrak{x} \ulcorner \mathfrak{z})$; am Ausgang nur Strom: $(\mathfrak{x} \llcorner \mathfrak{z})$; Ausgangszustand gleich Eingangszustand: $(\mathfrak{x} \leftrightarrow \mathfrak{z})$ – sind technisch ganz uninteressant[34]. Die den Schaltungen entsprechenden bedingungslogischen Verhältnisse sind spezielle technisch-physikalische Gesetzeszusammenhänge zwischen den speziellen elektrischen Ereignissen Spannung und keine Spannung an bestimmten Positionen. Auch die große Bedeutung der Fregealgebra (Schaltalgebra) in der Computertechnik kann also nicht die Ansicht stützen, die Fregealgebra (oder der „Aussagenkalkül“) sei in irgendeiner Weise ein System von logischen Formen.

3.6. Unterschiede und Entsprechungen von SFA, SFG und Logik

3.6.1. Die große Konfusion: SFG und SFA und ihre logischen Missdeutungen

Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen unterscheiden sich nach Form und Inhalt tiefgreifend; umso erstaunlicher ist es, dass in der logistischen Literatur zwischen diesen Konzepten keinerlei Differenzierung angetroffen wird. In ein und denselben Abhandlungen werden die Junktoren nebeneinander als Gedankengefüge, dann wieder als Fregeverknüpfungen gekennzeichnet und durch dieselben Ausdrücke dargestellt. Bestimmte gebräuchliche Kennzeichnungen der Junktoren passen jedoch nur auf Gedankengefüge, andere nur auf Fregeverknüpfungen. Immer wenn im Zusammenhang mit der Bestimmung von Junktoren von Aussagen gesprochen wird, kann nur von Gedankengefügen, nicht aber von Fregeverknüpfungen die Rede sein. Die Charakterisierung der „Junktoren“ als Beziehungen oder „Verknüpfungen“ von Aussagen, die ihrerseits in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der „Teilaussagen“ wahr oder falsch sind, passt nur für Gedankengefüge; diese Bestimmung legt fest, dass ein Gedankengefüge eine Aussage über die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen ist. Dieser Sachverhalt wird ungenau oder gar irreführend dargestellt, wenn man sagt, eine Gedankengefügeaussage bilde aus einfachen Aussagen neue komplexere und zusammengesetzte Aussagen oder verbänden sie zu solchen; sehr gebräuchlich ist die Kennzeichnung der Gedankengefüge als „Aussageverknüpfungen“[35]. Von **A. Menne** erfahren wir, dass Junktoren „Aussagen umformen … zu einer neuen Aussage.“[36] Eine Gedankengefüge ist jedoch nicht mehr „aussagenbildend“ wie irgendein beliebiges anderes Prädikat, das einem geeigneten Prädikanden zugesprochen wird; diese Operation der Prädikation ist nicht treffend charakterisiert, wenn man die Metapher bemüht, dass aus einfachen Elementen ein komplexeres zusammengefügt wird (wie man etwa aus Ziegeln eine Mauer, aus Baumstämmen ein Floß zusammenbaut oder sich aus Atomen ein Molekül zusammensetzt)[37]. Gedankengefüge sind keine Verknüpfungen im algebraischen Sinne; Fregeverknüpfungen sind zwar algebraische Verknüpfungen, jedoch keine Verknüpfungen von Aussagen. Von einer Umformung von Aussagen kann weder bei Gedankengefügen noch bei Fregeverknüpfungen gesprochen werden. In einer Prädikation wird den Prädikanden ein Prädikat zugesprochen, in einer Gedankengefügeaussage wird vorgegebenen Aussagen ein Gedankengefügeprädikat zugesprochen – der Prädikand wird in einer Prädikation nicht „umgeformt“. Würde man diesen Prädikat-Charakter der Gedankengefüge stärker beachten anstatt diese irreführenden Analogien zu bemühen, wäre die Verwechslung der Gedankengefüge mit Fregeverknüpfungen nicht möglich.

Immer wenn in Analogie zur Arithmetik/Algebra von Verknüpfungen oder echten Funktionen die Rede ist, zielt dies auf Fregeverknüpfungen. Wenn mit „Wahrheitsfunktion“ nicht gemeint ist, dass die Wahrheit einer Aussage von den Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen in dem Sinne abhängig ist, dass er diese vorausgesetzten Wahrheitswerte mehr oder weniger vollständig wiederkäut, sondern dass Wahrheitswerte auf einen Wahrheitswert abgebildet werden, kommen nur Fregeverknüpfungen in Frage. Dieser Übergang von der Betrachtung der Gedankengefüge zur Betrachtung von Fregeverknüpfungen, der den Logistikern allerdings nicht bewusst wird, wird dann vollzogen, wenn anstatt von Aussagen nur mehr von Wahrheitswerten die Rede ist. Die Tatsache, dass es im Rahmen des Systems der Gedankengefüge nur auf die Wahrheitswerte der vorausgesetzten Aussagen ankommt, verleitet zur Annahme, anstatt mit den vorgegebenen Wahrheitswerten von Aussagen könne man sich ebenso gut unmittelbar nur mit Wahrheitswerten befassen – wenn so die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen unter der Hand einfach zu Beliebig-Element-Zeichen für Wahrheits- bzw. Komplementärwerte werden. **FREGE** vollzieht den Übergang von den Gedankengefügen zu den Fregeverknüpfungen, wenn er plötzlich darauf besteht, dass jeder Aussagesatz nicht einen Gedanken oder einen „beurteilbaren Inhalt“, sondern eigentlich nur einen Wahrheitswert benenne. Wenn dann gesagt wird, es würden Wahrheitswerte auf Wahrheitswerte abgebildet, haben wir es nicht mehr mit Gedankengefügen, sondern mit Fregeverknüpfungen zu tun. Wenn **FREGE** etwa über den Ausdruck „$y \Rightarrow x$“ schreibt, „Der Wert der Funktion $y \Rightarrow x$ sei dann das Falsche, wenn als *y*-Argument das Wahre und zugleich als *x*-Argument ein Gegenstand genommen wird, der nicht das Wahre ist; in allen anderen Fällen sei der Wert dieser Funktion das Wahre“ (FB 37 [28]), dann spricht er, ohne es zu merken, nicht mehr vom Gedankengefüge $y \Rightarrow x$ (mit den *Aussage*variablen x,y), sondern von der Fregeverknüpfung $y \underline{\underline{\Rightarrow}} x$ (mit den „*Wahrheitswert*“-Variablen“ x und y). Nachdem **MENNE** die Junktoren zuerst als Gedankengefügeprädikatoren bestimmt hat, bestimmt er sie als Fregeverknüpfungen, ohne dass ihm der Bruch in der Argumentation gewahr wird; ein Junktor (Gedankengefüge) ist plötzlich eine Funktion, die „als Argumente Wahrheitswerte hat und daraus einen Wahrheitswert bildet.“[38] Diese Charakterisierung passt nur auf die Fregeverknüpfung $\mathfrak{W}^n$ ➡ $\mathfrak{W}$. Bei **HILBERT/BERNAYS** ist der (unbemerkte) Sprung vom SFG zum SFA sehr deutlich: nachdem zuerst A&B als Gedankengefüge bestimmt wurden (A&B ist genau dann wahr, wenn beide *Aussagen* A und B wahr sind), heißt es dann: „Wir können demnach die Konjunktion auffassen als eine Funktion zweier Argumente A, B, deren jedes die Werte ‚wahr‘, ‚falsch‘ annehmen kann und welche jedem Wertsystem der Argumente wiederum einen der beiden Werte ‚wahr‘, ‚falsch‘ als Funktionswert zuordnet.“[39]

Von Fregeverknüpfung ist immer dann die Rede, wenn die Junktoren analog zu den arithmetischen Verknüpfungen wie Addition und Multiplikation bestimmt werden: „Junktoren sind Funktionszeichen, wie in der Arithmetik z.*B*. + und – (diese bilden dort aus zwei Zahlen eine weitere Zahl)…“[40] **PERELMAN, CHAIM** führt die Junktoren einfach als algebraische Verknüpfungen ein; die Junktorenzeichen „analog den Operationszeichen der Algebra fungieren (wie ‚+‘, ‚-‘, ‚=‘).“[41] **LARGEAULT** fasst die Junktoren analog zu den arithmetischen und mengenalgebraischen Verknüpfungen: „L‘implication est une opération logique exactement comme l’addition et la multiplication des entiers sont des opérations arithmétiques. $p \underline{\underline{\Rightarrow}} q$ n’est pas un jugement sur *p* et *q*: pas plus que 3×2 n‘est un jugement sur 2 et 3 mais un nombre, ou pas plus que l‘intersection de deux classes n‘est un jugement, mais une classe.“[42] Fregeverknüpfungen sind im Gegensatz zu Gedankengefügen in der Tat keine Urteile über Aussagen.

Da die Fregeverknüpfungen nicht explizit von den Gedankengefügen unterschieden sind, bleibt ihr Verständnis diffus: ein wesentliches Kennzeichen der Gedankengefüge, nämlich die Abhängigkeit ihrer Wahrheit und Falschheit von den Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen, wird unzulässigerweise auf die Fregeverknüpfungen übertragen: eine Fregeverknüpfungen soll wie eine Gedankengefügeaussage falsch sein können – der Funktionswert der Fregeverknüpfungen wird mit ihrem Wahrheitswert konfundiert; eine Fregeverknüpfung ist jedoch immer wahr/korrekt, wenn sie die festgesetzte Verknüpfung vornimmt. Der Wahrheitswert einer Fregeverknüpfung kann vom Funktionswert verschieden sein: Die Verknüpfung ($\mathcal{W} \geqq \mathcal{F} = \mathcal{F}$) ist nicht falsch wie der Funktionswert, sondern richtig (weil der Definition der Verknüpfung Φ_C genügend).

3.6.2. Gedankengefüge, Fregeverknüpfungen und logische Formen

Obwohl sich logische Relationen, Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen nach Form und Inhalt jeweils grundlegend unterscheiden, resultiert, wenn im Ausdruck des Fregegesetzes $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen durch Beliebig-Element-Zeichen für Ereignisklassen, das Bestreitens-Zeichen $\neg$ durch das Negationszeichen $\sim$, das Zeichen für **C** „$\Rightarrow$“ durch das Zeichen „$\rightarrow$“ für $\mathbb{C}$ ersetzt werden, der Ausdruck des logischen Kontrapositionsgesetzes „$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$“. Ersetze ich im ersten Ausdruck nur das zweite **C**-Zeichen durch „$\rightarrow$“, erhalte ich den Ausdruck „$(A \Rightarrow B) \rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$“, der ein Gesetz des SFG darstellt. Ersetze ich die Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen durch Beliebig-Element-Zeichen für Komplementärwerte, das Zeichen „$\neg$“ durch das Zeichen „–“ der Φ_N-Abbildung, das Zeichen „$\Rightarrow$“ durch das Zeichen „$\geqq$“ für die Fregeverknüpfung Φ_C, erhalte ich den Ausdruck der Fregeverknüpfung „$(x \geqq y) \geqq (-y \geqq -x)$“. Trotz der Verschiedenheit (Nichtidentität) der drei Systeme bestehen offenbar bestimmte Zusammenhänge. Es werden ja auf dieselbe kombinatorische Weise in der Logik, im System der Gedankengefüge und in der Fregealgebra Vorkommenskombinationen, bzw. Wahrheitswertprädikate oder Paare von Komplementärwerten konstruiert; diese Elemente werden jeweils einer dichotomen Bewertung unterzogen; die Vorkommenskombinationen werden als realmöglich bzw. als nicht-realmöglich bestimmt, die Wahrheitswertprädikate werden ausgeschlossen oder sie werden nicht ausdrücklich ausgeschlossen, die Paare der Komplementärwerte werden entweder auf a_1 oder auf a_2 abgebildet. Dieser Parallelität entsprechen bestimmte operative Übereinstimmungen, die ich jetzt untersuchen möchte.

Ich werde dabei von „**bedingungslogischer Isomorphie**“ und von „**bedingungslogischer Homomorphie**“ sprechen. Ist ein System S_1 durch die Ereignisklassen $E_1, E_2, \ldots$, ein anderes System S_2 durch die Ereignisklassen $E'_1, E'_2, \ldots$ charakterisiert, und können diese Ereignisklassen einander bijektiv zugeordnet werden – $E_1 \Leftrightarrow E'_1$, $E_2 \Leftrightarrow E'_2$, usw. –, bezeichnen „Ω_1“, „Ω_2“,… irgendwelche bedingungslogischen Totalformen, dann spreche ich von einer „bedingungslogischen Homomorphie“, wenn mit $\Omega_1(E_1,E_2)$ immer auch $\Omega_1(E'_1,E'_2)$ gilt, aber nicht umgekehrt; es gibt dann eine *injektive* Abbildung der bedingungslogischen Gesetze von S_1 auf die Gesetze von S_2. Eine *bedingungslogische Isomorphie* besteht genau dann, wenn bei $\Omega_1(E_1,E_2)$ immer auch $\Omega_1(E'_1,E'_2)$ gilt und umgekehrt; es gibt dann eine *bijektive* Abbildung der bedingungslogischen Gesetze von S_1 auf die bedingungslogischen Gesetze von S_2.

3.6.2.1. Die Beziehungen zwischen SFG- und SFA-Gesetzen und zwischen Fregegesetzen und Φ_V-Substitutionen.

Zuerst will ich die Zusammenhänge zwischen den Elementen und Gesetze des SFG und des SFA untersuchen. Um diese Zusammenhänge übersichtlich darstellen zu können, setze ich einige Bezeichnungen fest: „Ω_1“, „Ω_2“,… seien Beliebig-Element-Zeichen für zweistellige logische Totalformen, „p“, „q“,… seien Beliebig-Element-Zeichen für Ereignisklassen, die auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogen sind; „A“, „B“,… sollen beliebige wertdefinite Aussagen, „Γ_1“, „Γ_2“,… beliebige zweistellige Gedankengefüge bezeichnen; „*x*“, „*y*“,… seien Zeichen für beliebige Komplementärwerte aus der Menge $\mathcal{A} = \{a_1, a_2]$ und „Φ_1“,“Φ_2“,… seien Zeichen für beliebige zweistellige Fregeverknüpfungen. Der Pfeil $\Leftrightarrow$ soll eine bijektive Abbildung bezeichnen.

Ein zweistelliges **Gedankengefüge** kennzeichnet ein Paar von Aussagen und spricht ihnen jedes der vier Wahrheitswertprädikate jeweils entweder ausdrücklich ab oder nicht ausdrücklich ab; eine **Fregeverknüpfung** bildet alle zu $\mathcal{A}^2$ gehörenden Wertepaare jeweils entweder auf a_1 oder auf a_2 ab. Jedem der vier Wahrheitswertprädikate WP_1 bis WP_4 kann in folgender Weise genau eines der vier Wertepaare aus $\mathcal{A}^2$ bijektiv zugeordnet werden:

	Wahrheitswertprädikat		Komplementärwertpaar
WP_1:	*… ist wahr und … ist wahr*	⇔	(a_1,a_1)
WP_2:	*… ist wahr und … ist falsch*	⇔	(a_1,a_2)
WP_3:	*… ist falsch und … ist wahr*	⇔	(a_2,a_1)
WP_4:	*… ist falsch und … ist falsch*	⇔	(a_2,a_2)

Unter allen 16! möglichen bijektiven Zuordnungen der Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen sei eine ***Bijektion*** $\boldsymbol{\beta_A}$ in folgender Weise definiert: Ein Gedankengefüge Γ_1(A,B) sei einer Fregeverknüpfung Φ_1(x,y) genau dann durch β_A bijektiv zugeordnet, wenn die Fregeverknüpfung Φ_1 alle diejenigen Wertepaare auf a_1 abbildet, deren entsprechende Wahrheitswertprädikate das Gedankengefüge Γ_1 nicht ausdrücklich ausschließt. Es ergeben sich die folgenden eineindeutigen Zuordnungen: $\mathbf{V}$ ⇔ Φ_V, $\mathbf{A}$ ⇔ Φ_A, $\mathbf{B}$ ⇔ Φ_B, $\mathbf{C}$ ⇔ Φ_C, usw.; es gilt $\beta_A(\mathbf{A}) = \Phi_A$ und $\beta_A(\Phi_A) = \mathbf{A}$, usw.

Diese eineindeutige Zuordnung β_A ist mit folgender *bedingungslogischer Isomorphie* verbunden: wenn – unter der Voraussetzung $\beta_A(\Gamma_1) = \Phi_1$ und $\beta_A(\Gamma_2) = \Phi_2$ – zwischen dem Sachverhalt Γ_1(A,B), dass zwei Aussagen (A,B) ein Gedankengefüge Γ_1 zukommt, und dem Sachverhalt Γ_2(A,B), dass eben diesen Aussagen zugleich ein Gedankengefüge Γ_2 zukommt, eine bestimmte logische Totalrelation Ω_1 besteht, genau dann besteht zwischen dem Sachverhalt $\Phi_1(x,y) = a_1$, dass die entsprechende Fregeverknüpfung Φ_1 das entsprechende Wertepaar auf a_1 abbildet, und dem Sachverhalt $\Phi_2(x,y) = a_1$, dass die entsprechende Fregeverknüpfung Φ_2 dieses Wertepaar auf a_1 abbildet, dieselbe Totalform Ω_1. Dass irgendeine Fregeverknüpfung Φ_i ein Komplementärwertpaar auf den Komplementärwert a_1 abbildet, ist ebenso ein allgemeiner, realmöglicher Sachverhalt (eine Sachverhaltsklasse) wie der Umstand, dass irgendein Gedankengefüge Γ_i zwei Aussagen A und B zukommt. Die unter der Bedingung der Bijektion β_A für alle Gedankengefüge und Fregeverknüpfungen geltende bedingungslogische Isomorphie ist durch das folgende $\mathbb{E}$-Gesetz festgelegt:

$$\Omega_1[\Gamma_1(A,B), \Gamma_2(A,B)] \leftrightarrow \Omega_1[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1)], \text{ falls } \beta_A(\Gamma_1) = \Phi_1 \text{ und } \beta_A(\Gamma_2) = \Phi_2.$$

Ich führe einige Beispiele einer solchen bedingungslogischen Isomorphie an:

Es besteht beispielsweise der folgende bedingungslogische Zusammenhänge zwischen den Fregeverknüpfungen Φ_A und Φ_X: $(x \,\underline{\underline{\triangledown}}\, y = a_1) \succ\!\!\prec (x \,\underline{\underline{\Downarrow}}\, y = a_1)$ – genau dann, wenn ein Komplementärwertpaar durch die Verknüpfung Φ_A auf a_1 abgebildet wird, wird eben dieses Komplementärwertpaar durch Φ_X nicht auf a_1 abgebildet. Diese Beziehung ist bedingungslogisch isomorph der Beziehung $(A \triangledown B) \succ\!\!\prec (A \Downarrow B)$ – genau dann, wenn einem Aussagenpaar das Gedankengefüge $\mathbf{A}$ zukommt, kommt diesem Aussagenpaar das Gedankengefüge $\mathbf{X}$ nicht zu.

Zwischen den Fregeverknüpfungen Φ_B und Φ_C besteht der Zusammenhang $(x \,\underline{\underline{\Leftarrow}}\, y = a_1) \vee (x \,\underline{\underline{\Rightarrow}}\, y = a_1)$ – ein Komplementärwertpaar wird entweder von Φ_B oder von Φ_C oder von beiden Verknüpfungen auf a_1 abgebildet. Bedingungslogisch isomorph dazu ist das Gesetz des SFG: $(A \Leftarrow B) \vee (A \Rightarrow B)$ – einem Aussagenpaar kommt entweder das Gedankengefüge $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{C}$ oder beide Gedankengefüge zu.

Dem Gesetz des SFG „Wenn das Gedankengefüge $\mathbf{K}$ zwei Aussagen A und B zukommt, dann kommt eben diesen beiden Aussagen das Gedankengefüge $\mathbf{E}$ zu“ ist das SFA-Gesetz isomorph: Wenn ein Paar aus $\mathcal{A}^2$ durch die Fregeverknüpfung Φ_K auf a_1 abgebildet wird, dann wird eben dieses Paar aus $\mathcal{A}^2$ auch durch die Verknüpfung Φ_E auf a_1 abgebildet.

Da im Ausdruck eines solchen bedingungslogischen Gesetzes des SFA die Bezeichnung einer bedingungslogischen Totalform vorkommt, kann ein solches Gesetz weder im Rahmen des SFA noch im Rahmen des SFG dargestellt und entschieden werden.

Zwischen den *Gesetzen des SFG* und den *Fregegesetzen* einerseits, und zwischen den *Gesetzen des SFA* der Form $\Omega_1[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1)]$ und den Φ_V*-Substitutionen* andererseits bestehen jeweils bedingungslogische Homomorphiebeziehungen. Wird im Ausdruck eines begriffsschriftlich nicht darstellbaren Gesetzes des SFG der Ausdruck der bedingungslogischen Totalform durch den Ausdruck des entsprechenden Gedankengefüges ersetzt, das de Totalform durch die **Bijektion** $\boldsymbol{\beta_B}$ zugeordnet wird, resultiert der Ausdruck eines begriffsschriftlich darstellbaren Fregegesetzes. Diese Zuordnung β_B von bedingungslogischen Totalformen und Gedankengefügen basiert auf der folgenden Zuordnung der Wahrheitsprädikate der Gedankengefüge und der Vorkommenskombinationen der ereignislogischen Totalformen:

Vorkommenskombination I:	$p \frown q$	$\Leftrightarrow$	$WP1$: $\mathcal{W}(A)$ & $\mathcal{W}(B)$
Vorkommenskombination II:	$p \frown \sim q$	$\Leftrightarrow$	$WP2$: $\mathcal{W}(A)$ & $\mathcal{F}(B)$
Vorkommenskombination III:	$\sim p \frown q$	$\Leftrightarrow$	$WP3$: $\mathcal{F}(A)$ & $\mathcal{W}(B)$
Vorkommenskombination IV:	$\sim p \frown \sim q$	$\Leftrightarrow$	$WP4$: $\mathcal{F}(A)$ & $\mathcal{F}(B)$

Wenn wir den Sachverhalt, dass eine Totalform eine Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt, eineindeutig dem Sachverhalt zuordnen, dass ein Gedankengefüge das entsprechende Wahrheitswertprädikat nicht ausdrücklich ausschließt, gibt es unter den 16! bijektiven Abbildungen von Totalformen und Gedankengefügen die *Bijektion* β_B: wenn die Totalform Ω_1 einen bestimmte Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt, genau dann soll das entsprechende Gedankengefüge Γ_1 nicht ausdrücklich ausschließen, dass das entsprechende Wahrheitswertprädikat einem Aussagenpaar zukommt. Jedem Gedankengefüge ist damit genau einer der zweistelligen Funktoren bijektiv zugeordnet. Diese Bijektion kommt in meinen Bezeichnungen unmittelbar zur Darstellung: $\mathbb{V} \Leftrightarrow \mathbf{V}$, $\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}$, $\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbf{B}$, usw.; $\beta_B(\mathbb{A}) = \mathbf{A}$; $\beta_B(\mathbf{A}) = \mathbb{A}$, usw. Weil es zwischen den Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen eine bijektive Abbildung gibt, gilt aufgrund der Transitivität bijektiver Abbildungen, auch zwischen Funktoren und Fregeverknüpfungen die folgende ***Bijektion*** $\boldsymbol{\beta_C}$: $\beta_C[\Omega_1(p,q)] = ß_A\{ß_B[\Omega_1(p,q)]\} = \beta_A[\Gamma_1(A,B)] = \Phi_1(x,y)$, also etwa $ß_C(\mathbb{A}) = \Phi_A$ und $ß_C(\Phi_A) = \mathbb{A}$.

Wir erhalten die folgenden Zuordnungen zwischen SEL, SFG und SFA

β_C

β_B β_A

Logik	**SFG**	**SFA**
$\mathbb{V}$	$\mathbf{V}$	Φ_V
$\mathbb{A}$	$\mathbf{A}$	Φ_A
$\mathbb{B}$	$\mathbf{B}$	Φ_B
$\mathbb{C}$	$\mathbf{C}$	Φ_C
$\mathbb{D}$	$\mathbf{D}$	Φ_D
$\mathbb{E}$	$\mathbf{E}$	Φ_E
$\mathbb{F}$	$\mathbf{F}$	Φ_F
$\equiv$	$\mathbf{G}$	Φ_G
$\mathbb{H}$	$\mathbf{H}$	Φ_H
$\mathbb{I}$	$\mathbf{I}$	Φ_I
$\mathbb{J}$	$\mathbf{J}$	Φ_J
$\mathbb{K}$	$\mathbf{K}$	Φ_K
$\mathbb{L}$	$\mathbf{L}$	Φ_L
$\mathbb{M}$	$\mathbf{M}$	Φ_M
$\mathbb{X}$	$\mathbf{X}$	Φ_X
$\mathbb{O}$	$\mathbf{O}$	Φ_O

Für jedes *Gesetz des SFG* ist durch das folgende Implikationsgesetz auf der Grundlage der Bijektion $\boldsymbol{\beta_B}$ ein *Fregegesetz* bestimmt:

$$\Omega_3[\Gamma_1(A,B),\Gamma_2(A,B)] \to \Gamma_3[\Gamma_1(A,B),\Gamma_2(A,B)], \text{ mit } \Gamma_3 = \beta_B(\Omega_3).$$

Es handelt sich hier um ein Implikations-, nicht um ein Äquivalenzgesetz; dies bedeutet, dass durch die definierten Substitutionen wohl aus jedem Gesetz des SFG ein Fregegesetz, nicht aber aus jedem Fregegesetz ein Gesetz des SFG gewonnen werden kann. Das Fregegesetz stellt nämlich eine Abschwächung des Gehalts des entsprechenden Gesetzes des SFG dar. Das Gesetz des SFG (A&B) → (A⇒B) bestimmt gemäß der Definition von ℂ vier Fälle:

es ist realmöglich, dass (A&B) und (A⇒B) zugleich wahr sind.
es ist nicht-realmöglich, dass (A&B) wahr und (A⇒B) falsch ist.
es ist realmöglich, dass (A&B) falsch ist, während (A⇒B) wahr ist.
es ist realmöglich, dass weder (A&B) noch (A⇒B) wahr sind.

Das Fregegesetz (A&B) ⇒ (A⇒B) schwächt die Aussage des SFG-Gesetzes (A&B) → (A⇒B) ab; es behauptet, entsprechend **FREGE**s Definition von **C**, nur noch, dass es nicht möglich ist, dass (A&B) wahr und zugleich (A⇒B) nicht wahr ist (Nichtrealmöglichkeit der Vorkommenskombination II). In gleicher Weise schwächt das Fregegesetz (A⩒B) ⋈ (A ⇓ B) den Gehalt des Gesetzes des SFG (A⩒B) ≻≺(A ⇓ B) ab; während letzteres ausdrücklich behauptet, dass es realmöglich ist, dass beide Gedankengefüge ▲ und **X** jeweils alleine einem Aussagenpaar zukommen, und dass es nicht-realmöglich ist, dass beide oder keines der Gedankengefüge einem Aussagenpaar zukommen, behauptet das Fregegesetz viel weniger, nämlich nur, dass beide Gedankengefüge nicht zugleich wahr und nicht zugleich falsch sein können.

Diese Abschwächung des Aussagegehaltes eines Gesetzes des SFG durch die Vertauschung der Bezeichnung der Totalform durch die Bezeichnung des β_B-entsprechenden Gedankengefüges beruht darauf, dass für ein Aussagenpaar (A,B), dem ein Gedankengefüge Γ_1 zukommt, für welches $\beta_B(\Gamma_1) = \Omega_1$ gilt, auch jedes Gedankengefüge zugesprochen werden kann, das *zumindest* diejenigen Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich ausschließt, die auch Γ_1 nicht ausschließt, während einem Paar von Ereignisklassen (p,q), dem die Totalform Ω_1 zukommt, nicht auch eine Totalform zukommen kann, der eine bei Ω_1 nicht-realmögliche Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt. Kommt zwei Aussagen A und B z.B. das Gedankengefüge **J** zu, dann steht fest, dass A und B jedenfalls nicht denselben Wahrheitswert haben; **J** kann zwei Aussagen zukommen, wenn ihnen auch ▼ zukommt (zumindest ein Wahrheitswertprädikat trifft zu), oder wenn ihnen **D** zukommt (nicht beide Aussagen sind wahr), oder wenn ihnen ▲ zukommt (es sind nicht beide Aussagen falsch) – **J**, **D**, ▲ und ▼ schließen *zumindest* diejenigen Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich aus, die auch **J** nicht ausschließt). Besteht zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q die logische Beziehung 𝕁, können dagegen nicht zugleich auch die logischen Beziehungen 𝕍, 𝔸 und 𝔻 zutreffen. Deshalb ergibt sich aus einem Gesetz des SFG nicht nur bei einer Ersetzung der Totalform Ω_1 durch das entsprechende Gedankengefüge $\Gamma_1 = \beta_B(\Omega_1)$ ein gültiges Fregegesetz, sondern auch bei einer Ersetzung der Totalform durch alle diejenigen Gedankengefüge, die *mindestens* die von Γ_1 nicht ausdrücklich ausgeschlossenen Fälle nicht ausdrücklich ausschließen.

Jedem Gesetz des SFG entspricht auf der Grundlage der oben dargelegten Bijektionen also ein Fregegesetz, nicht jedem Fregegesetz aber entspricht ein Gesetz des SFG; zwischen den Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen besteht eine injektive Abbildung. Aus der Richtigkeit eines Fregegesetzes kann nicht auf die Richtigkeit eines durch die definierten Substitutionen gewonnenen Gesetzes des SFG geschlossen werden. Aus (A ⊧ B) ≻≺ (A ⇒ B) lässt sich durch Vertauschung von Zeichen zwar das Fregegesetz (A ⊧ B) ⋈ (A ⇒ B) gewinnen, aus dem Fregegesetz (A⊧B) ⥣ (A⇒B) aber ergäbe sich durch β_B-Vertauschen das falsche Gesetz des SFG (A⊧B) | (A⇒B). Das SFG beruht auf den Gesetzen des SFG; diese Gesetze des SFG können weder im Rahmen des SFG, noch im Rahmen des SFA durch fregealgebraisches Ausrechnen auf der Basis der Isomorphie von SFG und SFA entschieden werden. **FREGE**s System hängt damit völlig in der Luft: nur vom System der bedingungslogischen Formen her, das **FREGE** freilich nicht kennt, können die Gesetzmäßigkeiten von **FREGE**s System erkannt und bewiesen werden.

Auch aus jedem bedingungslogischen Gesetz des SFA von der Form $\Omega_1[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1)]$ lässt sich, entsprechend dem Verhältnis von Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen und aufbauend auf der Bijektion β_C, eine Φ_V-Substitution durch einfaches Vertauschen von Zeichen herstellen. Auch zwischen den bedingungslogischen Verhältnissen der Fregeverknüpfungen und den Φ_V-Substitutionen gibt es auf der Grundlage der Bijektion β_C folgenden generellen gesetzmäßigen *implikativen* Zusammenhang:

$$\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1] \rightarrow \Phi_3[\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)] = a_1, \text{ mit } \beta_C[\Omega_3(p,q)] = \Phi_3(x,y).$$

Der Grund für diese Gesetzmäßigkeit entspricht dem Grund für den Zusammenhang der Gesetze des SFG mit den Fregegesetzen. Die Totalform ℂ bestimmt, dass die zweite Vorkommenskombination nicht realmöglich ist, und in diesem Sinne besagt das ℂ-Gesetz (x & y = a_1) → (x ⇛ y = a_1), dass jedes Wertepaar, das von Φ_K auf a_1

abgebildet wird, auch von Φ_C auf a_1 abgebildet wird; werden die beiden Fregeverknüpfungen ($x \underline{\underline{\&}} y$) und ($x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$) selbst durch die β_C-entsprechende Fregeverknüpfung verknüpft, so können dabei alle Wertepaare außer (a_1,a_2) verknüpft werden, denn diese Möglichkeit wird durch dieses Gesetz des SFA ausgeschlossen (es gibt kein Komplementärwertpaar, das durch $x \underline{\underline{\&}} y$ auf a_1, durch $x \underline{\underline{\Rightarrow}} y$ aber auf a_2 abgebildet wird). Da die der Totalform $\mathbb{C}$ entsprechende Fregeverknüpfung $\Phi_C = \beta_C(\mathbb{C})$ nur das Paar (a_1,a_2) nicht auf a_1 abbildet, wird das Gesetz $(x \underline{\underline{\&}} y = a_1) \rightarrow (x \underline{\underline{\Rightarrow}} y = a_1)$ zur Φ_V-Substitution $[(x \underline{\underline{\&}} y) \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\Rightarrow}} y) = a_1$. Eine Φ_V-Substitution ergibt sich auch dann, wenn die Fregeverknüpfung, die an die Stelle der Totalform gesetzt wird, *zumindest* die Fälle, die die der Totalform entsprechende Fregeverknüpfung auf a_1 abbildet, auch auf a_1 abbildet; wir erhalten ausgehend von $(x \underline{\underline{\&}} y = a_1) \rightarrow (x \underline{\underline{\Rightarrow}} y = a_1)$ auch die Φ_V-Substitutionen $[(x \underline{\underline{\&}} y) \underline{\underline{\Rightarrow}} (x \underline{\underline{\Rightarrow}} y)] = a_1$[43].

Aus dem bedingungslogischen Gesetz $(x \underline{\underline{\Rightarrow}} y = a_1) \rtimes\!\ltimes (x \underline{\underline{\models}} y = a_1)$, welches besagt, dass jedes Wertepaar (x,y) von Φ_C und Φ_L jeweils auf einen unterschiedlichen Komplementärwert abgebildet wird, kann durch Vertauschung des $\mathbb{J}$-Zeichens „$\rtimes\!\ltimes$" durch das Φ_J-Zeichen „$\underline{\underline{\bowtie}}$" die Φ_V-Substitution $[(x \underline{\underline{\Rightarrow}} y) \underline{\underline{\bowtie}} (x \underline{\underline{\Dashv}} y)] = a_1$ gewonnen werden, denn links und rechts von der Hauptverknüpfung Φ_J stehen nie dieselben Werte, (a_1, a_1) und (a_2, a_2); Φ_J verknüpft nur (a_1,a_2) und (a_2,a_1) zu a_1. Eine Φ_V-Substitution ergibt sich auch in allen Fällen, wo die Hauptverknüpfung zumindest diese beiden Wertepaare auf a_1 abbildet.

Wir können diese Zusammenhänge allgemeiner bestimmen: Gilt ein Gesetz $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1]$, dann bedeutet die Tatsache, dass die Totalrelation Ω_3 eine bestimmte Vorkommenskombination als nicht-realmöglich bestimmt, dass bei der Verknüpfung von $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ diejenigen Komplementärwertpaare wegfallen, die den bei Ω_3 nicht-realmöglichen Vorkommenskombinationen entsprechen. Da die der Totalform Ω_3 entsprechende Fregeverknüpfung Φ_3 alle bei der Verknüpfung von $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ vorkommenden Wertepaare auf a_1 abbildet, resultiert aus der Verknüpfung dieser beiden Fregeverknüpfungen $\Phi_1(x,y)$ und $\Phi_2(x,y)$ durch die Fregeverknüpfung Φ_3=ß$_C(\Omega_3)$ eine Φ_V-Substitution. Es ergibt sich eine Φ_V-Substitution für alle Fregeverknüpfungen, die mindestens die Fälle auf a_1 abbilden, die auch Φ_3 auf a_1 abbildet.

Da es sich beim Gesetz $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1] \rightarrow \Phi_3[\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)] = a_1$, mit ß$_C[\Omega_3(p,q)] = \Phi_3(x,y)$ um eine Implikations-, nicht um eine Äquivalenzbeziehung handelt, kann durch bloße Zeichenvertauschung zwar aus jedem derartigen bedingungslogischen SFA-Gesetz eine Φ_V-Substitution, aber nicht aus jeder Φ_V-Substitution eine solche bedingungslogische Gesetzbeziehung von Fregeverknüpfungen hergestellt werden. Dies zeigt, dass es zwischen den Gedankengefügen und den entsprechenden Fregeverknüpfungen einerseits sowie zwischen den Fregegesetzen und den entsprechenden Φ_V-Substitutionen andererseits *eineindeutige* Entsprechungen gibt; es gibt auf der Grundlage der Bijektion β_A eine bijektive Abbildung der Fregegesetze auf die Φ_V-Substitutionen, die durch das $\mathbb{E}$-Gesetz definiert ist:

Für $\beta_A(\Gamma_1) = \Phi_1$, $\beta_A(\Gamma_2) = \Phi_2$ und $\beta_A(\Gamma_3) = \Phi_3$ gilt: $\Gamma_1[\Gamma_2(A,B),\Gamma_3(A,B)] \leftrightarrow \Phi_1[\Phi_2(x,y),\Phi_3(x,y)] = a_1$.

Dieser bedingungslogische Isomorphismus hat sicherlich entscheidend dazu beigetragen, dass der fundamentale Unterschied von Gedankengefügen als Prädikaten und Fregeverknüpfungen als Abbildungen im Rahmen der modernen Logik nie bedacht, wohl auch kaum zur Kenntnis genommen worden ist[44].

Aus jedem Fregegesetz lässt sich eine Φ_V-Substitution gewinnen und umgekehrt. Zwischen den Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen sowie zwischen den Gesetze des SFA von der Form $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1]$ und den Φ_V-Substitutionen gibt es jeweils hingegen nur eine einseitige Zuordnung gibt (einen bedingungslogischen Homomorphismus). Es gibt deshalb auch einen bedingungslogischen Homomorphismus zwischen der Gesetzen des SFG und den Φ_V-Substitutionen, oder zwischen den bedingungslogischen Gesetzen des SFA von der Form $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1]$ und den Fregegesetzen. Diese Zusammenhänge belegen, dass die Strukturunterschiede zwischen den logischen Totalformen und den Gedankengefügen bzw. der Fregeverknüpfungen viel erheblicher sind als die Strukturunterschiede zwischen den Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen. Von entscheidender Bedeutung ist, dass mit den Mitteln von SFG und SFA (Nachweis von Fregegesetzen und Φ_V-Substitutionen) die *logischen* Beziehungen, die im SFA oder SFG bestehen, nicht nachgewiesen werden können.

3.6.3. Die Nicht-Isomorphie zwischen logischen Gesetzen und den SFA/SFG-Gesetzen

Ich habe bislang nachgewiesen, dass eine bedingungslogische Isomorphie zwischen den Gesetzen des SFG und den Gesetzen des SFA besteht; zwischen den Gesetzen des SFG und den Fregegesetzen gibt es hingegen nur

Homomorphie, ebenso zwischen Gesetzen des SFA und den Φ_V-Substitutionen; zwischen den Fregegesetzen und den Φ_V-Substitutionen hingegen besteht wiederum bedingungslogische Isomorphie: aus jedem Fregegesetz kann unmittelbar eine Φ_V-Substitution und umgekehrt gewonnen werden. Jetzt müssen wir uns der entscheidenden Frage zuwenden: Welche strukturellen Entsprechungen bestehen zwischen den logischen Formen, die ich im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellt habe, und den Gedankengefügen/Fregeverknüpfungen? Im Rahmen der üblichen logischen Missdeutung von SFG und SFA wird – ohne jeden Beweis, ja ohne jedes Bewusstsein darüber, dass hier überhaupt Rechtfertigungsbedarf besteht – eine Isomorphiebeziehung (wenn nicht gar Identität) unterstellt.

Wir haben die eineindeutige Zuordnung β_B von Gedankengefügen und bedingungslogischen Totalformen definiert; würde diese eineindeutige Zuordnung mit einer *bedingungslogischen Isomorphie*, wie sie zwischen Gesetzen des SFG und des SFA von der Form $\Omega_3[\Phi_1(x,y) = a_1, \Phi_2(x,y) = a_1]$ besteht, einhergehen, ließe sich jedes logische Gesetz durch bloßes Vertauschung von Zeichen aus Fregegesetzen oder Φ_V-Substitutionen gewinnen, wie auch umgekehrt aus jedem logischen Gesetz ein entsprechendes Gesetz des SFG oder SFA; es müsste anerkannt werden, dass in **Frege**s System jedes beliebige logische Gesetz herleitbar ist. Unmittelbar würde aus dem Fregegesetz $(A\&B) \Rightarrow (A\Rightarrow B)$ nicht nur die Φ_V-Substitution $(x \mathbin{\underline{\&}} y = a_1) \mathrel{\underline{\Rrightarrow}} (x \mathrel{\underline{\Rrightarrow}} y = a_1)$, sondern auch das Gesetz des SFG $(A\&B) \rightarrow (A\Rightarrow B)$, ein Gesetz des SFA $(x \mathbin{\underline{\&}} y = a_1) \rightarrow (x \mathrel{\underline{\Rrightarrow}} y = a_1)$ *und* ein logisches Gesetz „$(p\wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$“[45] folgen. Der Ansatz **Frege**s wäre in der Tat genial gewesen, denn durch ein simples, mechanisches fregealgebraisches Rechnen, oder durch die nicht weniger simple Entscheidung von Fregegesetzen könnte jedes logische Gesetz gewonnen und entschieden werden. Gibt es also eine eineindeutige Entsprechung zwischen den Bedingungen dafür, dass ein Funktor Ω_1 zwei Ereignisklassen zukommt, und den Bedingungen, dass das entsprechende Gedankengefüge $\beta_B(\Omega_1) = \Gamma_1$ zwei Aussagen zukommt? Gibt es eine bijektive Abbildung der logischen Gesetze auf die Gesetze des SFG bzw. SFA? Dies ist nicht der Fall.

Bestünde diese Isomorphie, dann müsste sich daraus, dass die Bedingungen dafür, dass zwischen zwei Gedankengefügen eine bestimmte logische Relation, bzw. zwischen den Sachverhalten, dass zwei Fregeverknüpfungen ein Komplementärwertpaar auf a_1 abbilden, eben diese logische Relation besteht[46], ergeben, dass auch die Bedingungen dafür dass zwischen den β_C-entsprechenden logischen Formen ebenfalls diese logische Relation besteht. Wir müssen demnach die strukturellen Bedingungen dafür vergleichen, dass zwischen Gedankengefügen, Fregeverknüpfungen und logischen Formen eine logische Beziehung besteht.

Ein bedingungslogisches *Gesetz des SFG* macht darüber eine Aussage, ob es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass einem Aussagenpaar, dem ein Gedankengefüge Γ_1 zukommt, auch ein Gedankengefüge Γ_2 zukommt. Ein bedingungslogisches *Gesetz des SFA* macht darüber eine Aussage, ob es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass ein Wertepaar $(x,y) \in \mathcal{A}^2$, das von der Fregeverknüpfung Φ_1 auf a_1 abgebildet wird, auch von der Fregeverknüpfung Φ_2 auf a_1 abgebildet wird. Ein logisches Gesetz macht darüber eine Aussage, ob es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass einem Paar von (auf ein Ereignis-Bezugssystem bestimmter Art bezogenes) Sachverhalts-/Ereignisklassen, dem die Totalform Ω_1 zukommt, auch die Totalform Ω_2 zukommt. Wir haben zu prüfen, wie jeweils in SFG, SFA und SEL nachgewiesen wird, ob eine bestimmte bedingungslogische Beziehung vorliegt, wie also jeweils die Realmöglichkeit jedes der vier Vorkommenskombinationen überprüft wird.

Vorkommenskombination I:

Gedankengefüge: Unter welchen Bedingungen gilt $\Gamma_1(A,B) \frown \Gamma_2(A,B)$? Zwei Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 können einem Aussagenpaar (A,B) genau dann zugleich zukommen, wenn es ***zumindest ein*** Wahrheitswertprädikat gibt, das von beiden Gedankengefügen nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird; denn Γ_1 und Γ_2 kommen zwei Aussagen genau dann zu, wenn diese einem Wahrheitswertprädikat zugehören, das von beiden Gedankengefügen nicht ausgeschlossen wird.

Fregeverknüpfungen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Phi_1(x,y) = a_1 \frown \Phi_2(x,y) = a_1$? Zwei Fregeverknüpfungen Φ_1 und Φ_2 können ein Wertepaar (x,y) zugleich auf a_1 abbilden, wenn es ***zumindest ein*** Wertepaar (x,y) gibt, das von Φ_1 und von Φ_2 auf a_1 abgebildet wird.

Logische Totalrelationen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Omega_1(p,q) \frown \Omega_2(p,q)$? Zwei logische Totalrelationen Ω_1 und Ω_2 können einem Paar von Ereignisklassen (p,q) genau dann zugleich zukommen, wenn es ***keine einzige*** Vorkommenskombination von (p,q) gibt, der von Ω_1 und Ω_2 unterschiedlich bestimmt wird. Es ist demnach unmöglich, dass zwei verschiedene Totalformen einem Paar von Ereignisklassen zugleich zukommen.

Für Gedankengefüge und die Fregeverknüpfungen entsprechen sich diese Bedingungen: können zwei Gedankengefüge zugleich zwei Aussagen zukommen, genau dann ist es auch möglich, dass die beiden β_A-entsprechenden Fregeverknüpfungen die entsprechenden Wertepaare auf a_1 abbilden. Die Bedingung dafür, dass zwei Totalformen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen zukommen, sind davon verschieden; für zwei Gedankengefüge und zwei Fregeverknüpfungen genügt es, wenn es wenigstens ein Wahrheitswertprädikat bzw. ein Wertepaar gibt, das von beiden Gedankengefügen nicht ausdrücklich ausgeschlossen wird, bzw. das von beiden Fregeverknüpfungen auf a_1 abgebildet wird. Jedem Aussagenpaar kommen deshalb genau 8 verschiedene Gedankengefüge zugleich zu, und jedes β_A-entsprechende Wertepaar wird durch die acht β_A-entsprechenden Fregeverknüpfungen auf a_1 abgebildet. Jedem Paar von Sachverhalts-/Ereignisklassen kommt jedoch nur eine einzige Totalform zu, für alle (p,q) ist $\Omega_1(p,q) \frown \Omega_2(p,q)$ mit $\Omega_1 \neq \Omega_2$ unmöglich.

Vorkommenskombinationen II und III:

Gedankengefüge: Unter welchen Bedingungen gilt $\Gamma_1(A,B) \frown \neg\Gamma_2(A,B)$? Dass einem Aussagenpaar (A,B) wohl ein Gedankengefüge Γ_1, nicht aber ein Gedankengefüge Γ_2 zukommt, ist genau dann realmöglich, wenn es *zumindest ein* Wahrheitswertprädikat gibt, das von Γ_2, nicht aber von Γ_1, ausdrücklich ausgeschlossen wird.

Fregeverknüpfungen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Phi_1(x,y) = a_1 \frown \Phi_2(x,y) = a_2$? Es ist genau dann realmöglich, wenn es *zumindest ein* Wertepaar (x,y) gibt, das von der Fregeverknüpfung Φ_1, nicht aber von der Fregeverknüpfung Φ_2 auf a_1 abgebildet wird.

Logische Funktorrelationen: Unter welchen Bedingungen gilt $\Omega_1(p,q) \frown {\sim}\Omega_2(p,q)$? Dass zwei Ereignisklassen ein Funktor Ω_1, nicht aber ein Funktor Ω_2 zukommt, ist genau dann realmöglich, wenn es *zumindest eine Vorkommenskombination* gibt, der von Ω_1 anders bestimmt wird als von Ω_2.

Sind diese Bedingungen für zwei Gedankengefüge gegeben, dann immer auch für die β_A-entsprechenden Fregeverknüpfungen, und umgekehrt. Für die Totalformen liegen die Verhältnisse wieder anders, denn für jedes Paar von Ereignisklassen gilt, dass falls ihm eine bestimmte Totalform zukommt, ihm *jede* andere Totalform nicht zukommen kann; $\Omega_1(p,q) \frown {\sim}\Omega_2(p,q)$ ist für beliebige verschiedene Totalformen realmöglich. Kommt einem Paar von Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zu, dann ist dadurch noch nicht jedes andere Gedankengefüge ausgeschlossen; kommt hingegen den Sachverhalts-/Ereignisklassen p,q die Totalform $\mathbb{K}$ zu, dann kommt ihnen $\mathbb{C}$ unmöglich zu, kommt einem Aussagenpaar (A,B) $\mathbf{K}$ zu, dann ist $\mathbf{C}$ nicht ausgeschlossen, sondern kommt A und B notwendig zu.

Vorkommenskombination IV:

SFG: Unter welchen Bedingungen gilt $\neg\Gamma_1(A,B) \frown \neg\Gamma_2(A,B)$? Zwei Gedankengefüge Γ_1 und Γ_2 können zwei Aussagen genau dann nicht zukommen, wenn *zumindest ein* Wahrheitswertprädikat von beiden Gedankengefügen ausdrücklich ausgeschlossen wird.

SFA: Unter welchen Bedingungen gilt $\Phi_1(x,y) = a_2 \frown \Phi_2(x,y) = a_2$? $\Phi_1(x,y) = a_1 \frown \Phi_2(x,y) = a_2$ ist genau dann der Fall, wenn es *zumindest ein* Wertepaar (x,y) gibt, das sowohl von Φ_1 wie von Φ_1 auf a_2 abgebildet wird.

SEL: Unter welchen Bedingungen gilt ${\sim}\Omega_1(p,q) \frown {\sim}\Omega_2(p,q)$? Zwei Ereignisklassen kann genau dann weder die Totalform Ω_1 noch die Totalform Ω_2 zukommen, wenn es zumindest eine Totalform gibt, der eine Vorkommenskombination anders als Ω_1 und Ω_2 bestimmt (wenn es zumindest drei Totalformen gibt). Diese Bedingung ist wiederum von allen Paaren verschiedener Totalformen erfüllt. Zwischen zwei beliebigen Totalformen besteht so immer nur die Beziehung der Exklusion $\mathbb{D}$, während zwischen verschiedenen Paaren von Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen alle möglichen logischen Totalrelationen bestehen können.

Es gibt zwar eine Bijektion β_B aus der Menge der Gedankengefüge in die Menge der Totalformen, aber zwischen den sich β_B-entsprechenden Totalformen und Gedankengefügen bestehen jeweils unterschiedliche logische Beziehungen. Während zwischen Gedankengefügen alle möglichen logischen Beziehungen bestehen können[47], stehen alle möglichen Paare von logischen Totalformengleicher Stelligkeit in der Beziehung der Exklusion $\mathbb{D}$. Der Grund für diese Verschiedenheit liegt darin, dass die Bedingungen dafür, dass ein Funktor zwei Ereignisklassen zukommt, wesentlich komplexer sind als die Bedingungen dafür, dass zwei Aussagen ein Gedankengefüge zukommt, oder dafür, dass ein Wertepaar von einer Fregeverknüpfung auf a_1 abgebildet wird. Jedem Aussagenpaar (A,B) kommt aufgrund der Wahrheitswertdefinitheit genau eines und nur eines der Wahrheitswertprädikate zu; dass bekannt ist, welchem Wahrheitswertprädikat die Aussagen zugehören, genügt für die Entscheidung, ob den Aussagen eines der Gedankengefüge zukommt oder nicht. Kommt einem Aussagenpaar ein bestimmtes Wahrheitswertprädikat zu, dann kommt ihm jedes der 8 Gedankengefüge zu, die dieses Wahrheitswertprädikat nicht ausdrücklich ausschließen. Dabei enthalten die Gedankengefüge keinerlei Information über einen etwaigen logischen und gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den beiden Aussagen; die Wahrheit und Falschheit aller Aussagen, denen Gedankengefüge zukommen, ist logisch independent. In gleicher Weise liegt von jedem der Wertepaare aus $\mathcal{A}^2$ fest, ob es von einer bestimmten Fregeverknüpfung auf a_1 abgebildet wird oder nicht. Auch jedes der Wertepaare wird von genau 8 Fregeverknüpfungen auf a_1 abgebildet; keine dieser Abbildungen kennzeichnet den gesetzmäßigen Zusammenhang der Komplementärwerte a_1 und a_2.

Während es also genügt, von zwei Aussagen zu wissen, welches Wahrheitswertprädikat ihnen eindeutig aufgrund der Wahrheitswertdefinitheit zukommt, um entscheiden zu können, ob den Aussagen ein bestimmtes Gedankengefüge zukommt, und während es genügt, zu wissen, welches der vier Wertepaare vorliegt, um zu entscheiden, ob es von einer bestimmten Fregeverknüpfung auf a_1 abgebildet wird, steht für ein Paar von Ereignisklassen (p,q) noch nicht fest, ob eine bestimmte logische Totalform ihm zukommt oder nicht, wenn einer der vier Vorkommenskombinationen als realmöglich oder nicht-realmöglich erkannt ist. Um die logische Beziehung zwischen zwei Ereignisklassen zu kennen, müssen *alle* vier Vorkommenskombinationen bestimmt sein, denn der gesetzmäßige Zusammenhang relativer Modalisierung zweier Ereignisklassen ergibt sich erst aus der Gesamtheit der vier Vorkommenskombinationen. Anders als die vier Wahrheitswertprädikate, die disjunkt und von einander unabhängig sind, bilden die vier Vorkommenskombinationen einen untrennbaren Zusammenhang; die Vorkommenskombinationen (Vorkommens(wert)kombinationen) bestimmen nur alle zusammen das gesetzmäßige Verhältnis der Ereignisklassen.

Zwischen die Totalformen und den Gedankengefügen gibt es weder eine bedingungslogische Isomorphie wie sie zwischen den Gedankengefügen und den Fregeverknüpfungen noch eine bedingungslogische Homomorphie. Deshalb ergeben sich, wenn in Ausdrücken von Fregegesetzen die Zeichen der Gedankengefüge durch Zeichen von Funktoren, die Zeichen von Aussagen, durch Zeichen von Ereignisklassen ersetzt werden, nicht die Ausdrücke logischer Gesetze; während „$(A \& B) \rightarrow (A \Rightarrow B)$“ oder „$A \rightarrow (B \Rightarrow A)$“ gültige Gesetze des SFG und „$(A \& B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ oder „$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$“ gültige Fregegesetze bezeichnen, bezeichnen die Ausdrücke „$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$“ und „$p \rightarrow (q \rightarrow p)$“ keine gültigen logischen Gesetze. Umgekehrt bezeichnet der Ausdruck „$(p \wedge q) \uparrow (p \rightarrow q)$“ ein gültiges ereignislogisches Gesetz, während „$(A \& B) \Uparrow (A \Rightarrow B)$“ kein Fregegesetz darstellt. Schließlich gibt es Ausdrücke ereignislogischer Gesetze wie „$p \rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail \sim p$“, „$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$“, „$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow r]$“, aus welchen sich bei Ersetzung der Zeichen von beliebigen Ereignisklassen und Funktoren durch Zeichen für beliebige Aussagen und die entsprechenden Gedankengefüge Ausdrücke gültiger Fregegesetze ergeben, „$A \bowtie \sim A$“, „$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$“, „$[(A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$“.

Als Ergebnis muss festgehalten werden: weder das SFG noch das SFA (beide Systeme werden als „Aussagenlogik“ synkretistisch vermengt und missdeutet) befasst sich mit logischen Formen und Gesetzen. Weder die Gedankengefüge, noch die Fregeverknüpfungen stellen logischen Formen dar. Wenn **FREGE** sein System der Gedankengefüge jedoch zur so genannten *Prädikatenlogik* erweitert, gelingt es ihm mithilfe der Gedankengefüge eindeutig bestimmte logische Relationen darzustellen. Diese logischen Relationen, ihren Zusammenhang mit dem vollständigen System logischer Formen und dem SFG/SFA möchte ich im nächsten Kapitel näher untersuchen.

Anmerkungen zu Teil II, Kapitel 3

1 In die Leerstellen des Gedankengefügeausdrucks „Es ist falsch, das … wahr und … falsch ist", können nur Aussagen eingesetzt werden; dann erhalten wir eine Aussage über diese eingesetzten Aussagen. Gedankengefüge sind also Prädikate von Aussagen.

2 Die Gedankengefügeaussagen als Aussagen über die vorgegebenen Wahrheitswerte dieser Aussagen hängen von den Wahrheitswerten der prädizierten Aussagen in derselben Weise ab, wie beispielsweise ein Farburteil von der tatsächlichen Farbe des beurteilten Gegenstandes abhängt.

3 Ich gebrauche die Wörter „Abbildung" und „Funktion" synonym.

4 „$\{(m,n) \mid m \in M,\ n \in N\}$" ist zu lesen als: „die Menge aller diejenigen Paare (m, n), für die gilt, dass m Element aus der Menge M und n Element aus der Menge N ist".

5 Aus einer korrekten Darstellung einer Abbildung muss präzise und eindeutig Definitions-, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift hervorgehen. Die von **FREGE** als „üblich" bezeichnete Darstellung einer Abbildung wie „$2 \cdot x^3 + x$" ist unvollständig; vollständig lautet sie: „ Für alle x aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$: $x \Rightarrow f(x) = 2 \cdot x^3 + x$"; erst dieser Ausdruck gibt Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift, damit auch den Graph der Abbildung, in eindeutiger Weise an. Was **FREGE** als Darstellung solcher Abbildungen ausgibt, ist schon eine abkürzende Schreibweise, die sich nur jene erlauben sollten, die über die Struktur von Abbildungen Bescheid wissen.

6 Es „wird eine Funktion durch eine Zahl zu einer Zahl ergänzt." (WF 90 [665])

7 Der Ausdruck ‚$2^2 = 4$' bedeutet (benennt) nicht das Wahre, sondern er besagt, dass 2 zum Quadrat erhoben 4 ergibt, und diese Behauptung ist allerdings wahr; ein wahres Urteil *bedeutet* nicht das Wahre, sondern es ist wahr, d.h. er bedeutet (denotiert) einen Sachverhalt, der eine Tatsache ist, z.B. dass 2 im Quadrat 4 ergibt. Der Ausdruck ‚$2^2 = 4$' ist keineswegs synonym mit dem Ausdruck ‚wahr', wie **FREGE** unterstellt.

8 An folgender Stelle versteht **FREGE** unter „Wertverlauf" zweifellos den Graphen: „Ich gebrauche die Worte ‚die Funktion $\Phi(\xi)$ hat denselben Wertverlauf wie die Funktion $\Psi(\xi)$' allgemein als gleichbedeutend mit den Worten , die Funktionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Wert." (GGA I, 7) **FREGE** bezeichnet die durch die parabolische Kurve einer Funktion dargestellte Menge von Zahlenpaaren als „Wertverlauf" (also den Graphen) (vgl. FB 23 [8f]; GGA I, §5) Wenn **FREGE** dann meint, die Funktionen [f(x) =] x(x – 4) und [f(x) =] $x^2 - 4x$ hätten denselben „Wertverlauf" (FB 23 [9]), so kann er eigentlich auch nur die Graphen der beiden Funktionen meinen: diese sind in der Tat identisch; die Gleichheit der Wertemenge verbürgt ja noch nicht die Gleichheit der Graphen. An anderer Stelle bestreitet **FREGE** jedoch die Identität von „Wertverlauf" und Graph einer Funktion: „Wir können nicht allgemein die Worte ‚Die Funktion $\Phi(\xi)$ hat denselben Wertverlauf wie die Funktion $\Psi(\xi)$' als gleichbedeutend mit den Worten ‚die Funktionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Wert gebrauchen." (GGA II, 257)

Mit dieser Gleichheit von *Funktionen* verwechselt **FREGE** dann die Gleichheit von *Bestimmungsgleichungen* – und bestimmt dann im Widerspruch zur Gleichsetzung von Graph und Wertverlauf den Wertverlauf als Begriffsumfang (d.i. die Lösungsmenge der Bestimmungsgleichung). Die „Funktionen" – es handelt sich in Wirklichkeit um Bestimmungsgleichungen – $x^2 = 1$ und $(x+1)^2 = 2(x+1)$ hätten denselben Wertverlauf: „In der Logik nennt man dies Gleichheit des Umfang der Begriffe." (FB 28 [16]) „Der Umfang ist eben der Wertverlauf." (**FREGE** an **RUSSELL**, 3.8.1902, Briefe S. 73) Was immer man verwechseln kann, **FREGE** lässt die Chance nicht ungenutzt.

9 Vgl. **H. KASCHMIEDER**, Beurteilbarer Inhalt und Gedanke in der Philosophie Gottlob Freges, S. 65-68.

10 Das Fehlen einer klaren Bestimmung der Operation der Abbildung/Funktion bei **FREGE** versucht **F.V.KUTSCHERA** dadurch zu bemänteln, dass der Begriff der Abbildung/Funktion als „Grundbegriff" gar nicht definierbar sei (Gottlob Frege, Eine Einführung in sein Werk, S. 89); auch **FREGE** bedient sich ständig dieser Ausrede, um die Ungenauigkeit seiner grundlegenden Vorstellungen zu entschuldigen; er deklariert seine konfusen und widersprüchlichen Vorstellungen von „Funktion" und von „Wertverlauf" zu „undefinierbaren Grundbegriffen" und entzieht sie so jeder Kritik. „Durch eine Definition ist nicht anzugeben, was eine Funktion ist, weil es sich hier um etwas Einfaches und Unzerlegbares handelt… An die Stelle einer Definition muss eine Erläuterung treten, die freilich auf ein entgegenkommendes Verständnis rechnen muss." (LM 142; auch EMN 290; WF 89f [665]) Die Operation der Abbildung ist weder undefinierbar, noch „einfach" und „unzerlegbar"; die moderne Strukturalgebra hat den Begriff der Abbildung exakt definiert; das *genus proximum* ist dabei der im Rahmen der Mengentheorie definierte Begriff der Relation.

FREGEs Vorstellung von „Wertverlauf" ist mehrdeutig und widersprüchlich; anstatt sich um eine klare definitorische Abgrenzung zu bemühen, begnügt er sich mit der Festsetzung einer „Bezeichnungsweise für den Wertverlauf einer Funktion" (FB 24 [10]); die Manier, die *begriffliche* Klärung von Sachverhalten durch die Festsetzung von „exakten" Symbolen für unreflektierte, intuitive Vorstellungen von diesen Sachverhalten zu ersetzen, ist charakteristisch für die Bewegung der „modernen Logik".

11 „μ" bezeichnet eine beliebige monadische, „δ" eine beliebige dyadische Abbildung von Wahrheitswerten auf Wahrheitswerte.

12 Ein falscher Satz „darf …nicht mit behauptender Kraft ausgesprochen werden." (Vern, 59 [148])

13 **HARTFRIED KASCHMIEDER** kommt in seiner Untersuchung der fregeschen Urteilstheorie auf diesen Zusammenhang zu sprechen – freilich ohne dass er sich den Unterschied zwischen Gedankengefügen und Fregeverknüpfungen klar macht. Nachdem die „Junktoren" zunächst als Gedankengefüge bestimmt sind (Aussagen über die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen) meint er, die Beliebig-Element-Zeichen der Aussagen könnten durch Wahrheitswerte belegt werden. „Im junktorenlogischen Ausdruck können die Satzparameter, die Buchstaben, mit wahr oder falsch belegt werden. Für jede Belegung der Parameter wird der Ausdruck auf genau einen Wahrheitswert abgebildet. Die Notation von **FREGE** gestattet dies nicht. Junktorenlogisch falsche Aussagen sind für Frege unmögliche Aussagen." (Beurteilbarer Inhalt und Gedanke in der Philosophie Gottlob Freges, S. 12) Wenn alle möglichen Wahrheitswertkombinationen auf einen Wahrheitswert abgebildet werden, dann haben wir es mit Fregeverknüpfungen zu tun: wird eine solche Kombination durch eine Fregeverknüpfung auf den Wahrheitswert $\mathcal{F}$ abgebildet (z.B. $a_1 \underline{\Rrightarrow} a_2 = a_2$), dann stellt dies in der Tat eine korrekte Abbildung dar – während es falsch und unzulässig ist, von einer wahren Aussage A und einer falschen Aussage B zu behaupten $A \Rightarrow B$.

14 Die Klammern bezeichnen in der üblichen Weise die Reihenfolge der Verknüpfungen.

15 Diese fregealgebraischen Substitutionsgesetze sind von derselben Art wie etwa das Rechengesetz: für alle $a,b \in \mathbb{R}$: $(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)$; die *verschiedenen Verknüpfungen* führen für alle Zahlenpaare auf *dasselbe Ergebnis*.

16 In den komplexen Verknüpfungen sind immer mehr als eine Verknüpfung mit einander verbunden, und diese Verknüpfungen müssen in einer ganz bestimmten Reihenfolge vorgenommen werden; diese Reihenfolge wird durch die Klammern bezeichnet: die Hauptverknüpfung ist diejenige Verknüpfung, die am Schluss vorzunehmen ist.

17 Für $x = a_2$ ergibt der Teilausdruck „$x \underline{\Lleftarrow} y$" sowohl für $y = a_1$ wie für $y = a_2$ den Wert a_1; daher wird das Wertepaar (a_2, a_1) durch die Hauptverknüpfung $\underline{\Rrightarrow}$ gar nicht verknüpft.

18 Mit diesen Regeln zur Bezeichnung arithmetischer Verknüpfungen und Gesetze werden wir z.T. schon in der Grundschule vertraut gemacht. Es ist eine gekünstelte, gespreizte Übertreibung und eigentlich nicht nachvollziehbar, wenn in der „modernen Logik" das inhaltlich äußerst spezielle und beschränkte, simple Regelwerk zur Bezeichnung fregealgebraischer Verknüpfungen als eine den „natürlichen Sprachen" alternativ entgegengesetzte „künstliche Sprache" ausgegeben wird; die Zeichensysteme für bestimmte algebraische Verknüpfungen sind spezielle und begrenzte Bereicherungen der natürlichen Sprache (insbesondere auch der Schriftsprache), Erweiterungen, wie sie ständig mit jedem Erkenntnisfortschritt notwendig werden, und die nur im Rahmen einer (richtigen) Sprache festgelegt werden können; solche spezialisierten Zeichensysteme dürfen nie mit einer Sprache wie dem Englischen oder Deutschen auf eine Ebene gestellt werden – die Rede von Sprache verlöre jeden vernünftigen Sinn.

19 **HILBERT/ACKERMANN** sprechen von einer „Entbehrlichkeit von Grundverknüpfungen" (Grundzüge der theoretischen Logik, S.11); die Grundverknüpfungen sind keineswegs entbehrlich, würde auf die verschiedenen Fegeverknüpfungen selbst verzichtet, könnten die Kalküle gar nicht aufgebaut werden. Bestimmte Grundverknüpfungen werden nur durch andere komplexe Verknüpfungen vertreten.

20 Wie wenig auf die Bedeutung der Ausdrücke geachtet wird, und wie sehr die Logistiker auf die Ausdrucksebene zentriert sind, zeigt sich z.B. darin, dass ein Bezeichnungssystem, das die Reihenfolge der Fregeverknüpfungen nicht durch Klammern, sondern auf andere Weise ausdrückt, als „klammerfreie Symbolik" ausgegeben wird. „Im System von **ŁUKASIEWICZ** benötigt man keine Klammern." (**BOCHEŃSKI/MENNE**, Abriss der Logistik, S. 24) „Die Klammern sind überhaupt überflüssig, wenn wir die Funktoren {Fregeverknüpfungen} stets vor die Argumente setzen und nach den Funktoren ihre aufeinanderfolgenden Argumente schreiben." (**L.BORKOWSKI**, Logik, S. 44) Die Bezeichnung der Reihenfolge der Verknüpfungen ist nie überflüssig – von völlig untergeordneter Bedeutung ist, wie diese Reihenfolge dargestellt wird, durch Klammern oder wie bei **ŁUKASIEWICZ** durch die Reihenfolge der Verknüpfungsbezeichnungen, oder wie auch immer. Die beiden verschiedenen Fregeverknüpfungen $(x \underline{\Rrightarrow} y) \underline{\veebar} z$ und $x \underline{\Rrightarrow} (y \underline{\veebar} z)$ werden in der „klammerfreien polnischen Notation" durch die Ausdrücke „ACxyz" und „CxAyz" bezeichnet, d.h. auch in diesem Bezeichnungssystem wird die Reihenfolge der Verknüpfungen eindeutig ausgedrückt. Bezeichnungen können immer nur im Hinblick auf ihre Bezeichnungsfunktion und ihre Bedeutung beurteilt werden.

21 Gleiche Verknüpfungen haben trivialerweise dasselbe Ergebnis, z.B. $a+b = a+b$; $x \underline{\Rrightarrow} y = x \underline{\Rrightarrow} y$.

22 Linkstotalität ist die Eigenschaft einer Abbildung, jedem Element der Definitionsmenge ein Bild zuzuordnen; Rechtseindeutigkeit ist die Eigenschaft einer Abbildung, jedem Bild genau ein und nur ein Urbild zuzuordnen.

23 **HILBERT/ACKERMANN** meinen, man könne auf die fregealgebraische Verknüpfung $A \underline{\Rrightarrow} A$, die sowohl a_1 wie a_2 auf a_1 abbildet, den arithmetischen Begriff der *allgemeingültigen Gleichung* übertragen. „In den meisten Fällen wird eine Gleichung in der Mathematik als identische Gleichung aufgefasst, d.h. die angegebene Gleichung soll für alle eingesetzten Zahlen stimmen. Indem wir den Begriff der identischen Gleichung sinngemäß übertragen, kommen wir zum Begriff des ‚allgemeingültigen Ausdrucks'." (Grundzüge der theoretischen Logik, S. 9. „$A \underline{\Rrightarrow} A$" ist nicht Ausdruck einer Gleichung (es müsste dann heißen: „$A \underline{\Rrightarrow} A = a_1$" oder „$A \underline{\Rrightarrow} A = A \underline{\bigtriangledown} A$"), sondern der Ausdruck einer Verknüpfung; der Verknüpfungsausdruck kann sowenig allgemeingültig wie etwa der arithmetische Ausdruck „a : a" (im Gegensatz zum Ausdruck „a : a = 1").

24 „Ein Ausdruck soll nun allgemeingültig heißen, wenn jede daraus durch Einsetzung entstehende Aussagenverbindung richtig ist." (**HILBERT/ACKERMANN**, S.10)

25 Um auszudrücken, dass die Verknüpfung $x \underline{\Rightarrow} (x \underline{\veebar} y)$ jeden Wert aus $\mathcal{A}^2$ auf a_1 abbildet, schreibe ich auch „$x \underline{\Rightarrow} (x \underline{\veebar} y) = a_1$“.

26 Die Abtrennungsregel kann formuliert werden: für beliebige Fegeverknüpfungen Φ_1 und Φ_2 gilt: $[(\Phi_1 = a_1)$ & $(\Phi_1 \underline{\Rightarrow} \Phi_2 = a_1)] \rightarrow (\Phi_2 = a_1)$. Für sich betrachtet, ist es einerseits realmöglich, dass $[(\Phi_1 = a_1)$ & $(\Phi_1 \underline{\Rightarrow} \Phi_2 = a_1)]$ gilt, wie es auch realmöglich ist, dass $(\Phi_2 = a_1)$ gilt; es lässt sich zeigen, dass wenn das erstere der Fall ist, notwendig auch das zweite der Fall ist, ohne dass das Umgekehrte zutreffen würde; wir haben es so mit einer *speziellen* Implikation im Sinne der im ersten Teil dieser Arbeit dargestellten Bedingungslogik zu tun – weder mit einem Gedankengefüge noch gar mit einer Fregeverknüpfung. Diese implikative Regel kann mit dem „Alphabet“ der „Aussagenkalküle“ gar nicht dargestellt werden.

27 „Wir erkennen hier die Bedeutung, welche den identisch wahren Ausdrücken“ – das sind die Φ_V-Substitutionen – „für das Schließen im Bereich der Aussagenlogik zukommt; sie liefern uns die Schemata der Schlussfolgerungen; die Prinzipien des logischen Schließens werden durch sie in Formeln dargestellt.“ (**HILBERT**/**BERNAYS**: Die Grundlagen der Mathematik I, Berlin 1968, 2.Aufl., S. 61)

28 In der axiomatischen Darlegung der Arithmetik werden nie die Rechenregeln blind vorausgesetzt, sondern erst entwickelt und begründet (nicht etwa in einer „Meta-Arithmetik“). Ebenso werden in der axiomatischen Entfaltung der Geometrie aus den grundlegenden Beziehungen und Sachverhalten die geometrischen Gesetzmäßigkeiten erst entwickelt (nicht etwa in einer „Meta-Geometrie“).

29 Die „Begriffe Wahrheit und Falschheit ... beinhalten offenkundig eine Bezugnahme auf etwas außerhalb des formalen Kalküls.“ (**NAGEL**/**NEWMAN**, Der Gödelsche Beweis, S. 106) **HILBERT** und **BERNAYS** reden im Rahmen der „metalogischen“ Rechtfertigung des speziellen Gebrauchs, den ein „Aussagenkalkül“ von der Fegealgebra macht, nicht mehr irreführend von „wahr“ und „falsch“, sondern unter Verzicht auf jede irreführende „Interpretation“ einfach und neutral von zwei komplementären Werten α und β. „Dass die Werte der Wahrheitsfunktionen und ihrer Argumente gerade ‚wahr‘ und ‚falsch‘ sind, darauf kommt es hier nicht an, sondern vielmehr nur darauf, dass wir es mit gewissen zweiwertigen Funktionen zu tun haben, deren Argumente ebenfalls nur derselben zwei Werte – sie mögen α, β genannt werden – fähig sind.“ (**HILBERT**/**BERNAYS**: Die Grundlagen der Mathematik I, S. 71).

30 „Dass ein Ausdruck identisch wahr ist, besagt hiernach, dass er auf Grund der gegebenen Definitionen stets den Wert a liefert.“ (**HILBERT**/**BERNAYS**: Die Grundlagen der Mathematik I, S. 72) Auch **NAGEL**/**NEWMAN**, Der Gödelsche Beweis, S.107. Dieses Eingeständnis beseitigt freilich nicht den dem Begriff der Abbildung widersprechenden Widersinn, dass eine Abbildung nur dann „wahr“ sein soll, wenn sie einen ganz bestimmten Funktionswert hat, dass eine korrekte Abbildung jedoch „falsch“ sein soll, wenn sie einen anderen Funktionswert hat, obwohl diese Abbildungen den jeweiligen Zuordnungsvorschriften entsprechen. Es wäre derselbe Unsinn, wenn jemand behaupten würde, nur jene Summen $a + b$ seien „wahr“, deren Betrag eine Primzahl usw. ist.

31 **HILBERT**/**BERNAYS** erläutern die Fegeverknüpfung „$\underline{\Rightarrow}$“ (von ihnen durch das Zeichen $\rightarrow$ dargestellt) mit Hilfe des Gleichheitszeichens: „Wir können diese Definitionen auch in der Form von Gleichungen geben, nämlich die Definition von „$\underline{\Rightarrow}$“ durch die Gleichungen:

$\alpha \underline{\Rightarrow} \alpha = \alpha$
$\beta \underline{\Rightarrow} \beta = \alpha$
$\beta \underline{\Rightarrow} \alpha = \alpha$
$\alpha \underline{\Rightarrow} \beta = \beta$.“ (ebd. S. 71)

Davon, dass die korrekte Verknüpfung $\alpha \underline{\Rightarrow} \alpha = \alpha$ „wahr“ und die nicht weniger korrekte Verknüpfung $\alpha \underline{\Rightarrow} \beta = \beta$ „falsch“ sei, ist in dieser *jetzt* sachgemäßen Darlegung der Fegeverknüpfung Φ_C keine Rede mehr.

32 **HILBERT**/**ACKERMANNN** räumen ein, dass das Ableiten im Kalkül eigentlich überflüssig ist, wenn man entscheiden will, ob eine komplexe Fegeverknüpfung eine Φ_V-Substitution ist. Die „Axiomatik“ spiele bei der Gewinnung aller nur möglicher Φ_V-Substitutionen keine unverzichtbare Rolle, „da wir ihrer zur Lieferung von allgemeingültigen Ausdrücken nicht bedürfen, weil wir ja z.B. nach der Bewertungsmethode“ – d.h. durch einfaches Ausrechnen des Ergebnisses für alle nur möglichen Kombinationen von a_1 und a_2 unter Zugrundelegung der Verknüpfungstabellen – „von jedem Ausdruck feststellen können, ob er allgemeingültig ist oder nicht.“ (Grundzüge der theoretischen Logik, S.25) Das „axiomatische“ Herleiten von Φ_V-Substitutionen ist nicht nur überflüssig, sondern auch bedeutend umständlicher als das einfache Ausrechnen; es sei „die Herleitung eines bestimmten Ausdrucks, von dem wir etwa nach der Bewertungsmethode wissen, dass er allgemeingültig ist, oft schwierig und erst nach vielem Hin- und Herprobieren zu finden.“ (ebd; vgl. auch **NAGEL**/**NEWMAN**: Der Gödelsche Beweis, Wien/München 1964, S.198)

33 „Gewisse Zweige der mathematischen Logik {eignen sich} für die Analyse und Konstruktion elektrischer Schaltungen besonders gut.“ (**KLEINKNECHT**/**WÜST**, Lehrbuch der Aussagenlogik, Bd. 1, S. 135) – In der Schalalgebra, so **KONDAKOW**, würden „unter Benutzung von Methoden der Aussagenlogik … *kombinatorische Schaltungen* untersucht“ (Wörterbuch der Logik, S. 433) – „Die Schaltalgebra lässt sich als ‚operationale Variante‘ der Aussagenlogik bezeichnen.“ (**KLIEMANN**/**MÜLLER**, Logik und Mathematik für Sozialwissenschaftler I, S. 32)

34 Die Logistiker meinen, die Φ_V-Substitutionen seien logische Gesetze bzw. die Schemata des Schließens; würde die Bedeutung der Schaltalgebra für die Konstruktion von „Elektronengehirnen“ tatsächlich auf der Möglichkeit einer solchen logischen „Deutung“ des SFA und seiner Gesetze beruhen, dann müssten gerade die den Φ_V-Substitutionen (den „logischen Gesetze“) entsprechenden Schaltungen eine Schlüsselrolle spielen; es wären die Schaltungen, bei denen am Ausgang immer, was auch an den Eingängen ge-

schieht, Strom fließt: auf solche Schaltungen kann man natürlich ganz verzichten. Schon dies macht deutlich, dass die große Bedeutung der Schaltalgebra in der Informationstechnologie die logische Missdeutung des SFA nicht stützt.

35 „Junktoren“ sind „zusammengesetzte Aussagen, deren Wahrheitswert nur von den Wahrheitswerten der einfachen Aussagen, aus denen sie aufgebaut sind, abhängt und nicht von deren Inhalt.“ (**Kondakow**, S. 55 Vgl. **Wessel**, Logik, S. 89; **Salmon**, Logik, S. 73; **Menne**, Einführung in die Logik, S. 33)

36 Einführung in die Logik, S. 33

37 Eine unpassende Analogie stellt **G. Patzig** her: „Zunächst führen wir die Zeichen *p, q, r , s , t*… ein, die irgendwelche Aussagen vertreten sollen, also Sätze, die wahr oder falsch sein können. Aus diesen Elementen bilden wir nun (z.B. durch Verknüpfung zweier oder mehrerer von ihnen) neue Aussagen, die aus den Elementen ähnlich wie Moleküle aus Atomen zusammengesetzt sind.“ (Logik, in: Fischer-Lex Philosophie, S.150)

38 Einführung in die Logik, S. 33

39 Grundlagen der Mathematik I, S. 45

40 **P. Lorenzen**, Formale Logik, S. 45

41 Logik und Argumentation, S. 7

42 Logique et philosophie chez Frege, S. 114

43 Dass bei (x $\underline{\underline{\&}}$ y = a_1) → (x $\underline{\underline{\Rightarrow}}$ y = a_1) das Substitutionsgesetz [(x $\underline{\underline{\&}}$ y) $\underline{\underline{\Rightarrow}}$ (x $\underline{\underline{\Rightarrow}}$ y)] = a_1 gilt, entspricht der Abschwächung des Funktorgesetzes (A&B) → (A⇒B) zum Fregegesetz (A&B) ⇒ (A⇒B). Da (A&B) → (A⇒B) gilt, kann dem Paar von Gedankengefügen ((A&B),(A⇒B)) nie das Wahrheitswertprädikat WP_2 zukommen; dem Paar können so alle Gedankengefüge zugesprochen werden, die zumindest die restlichen Wahrheitswertprädikate nicht ausdrücklich ausschließen.

44 Ein anderer Grund mag darin bestehen, dass bisweilen die Isomorphie operativer Systeme (als bestimmte Art der Gleichheit verschiedener operativer Systeme) nicht von der Identität eines operativen Systems (der Sichselbstgleichheit eines operativen System und die Wohlunterschiedenheit des System von jedem (isomorphen oder nicht-isomorphen) unterschieden wird.

45 Ein solches „logisches Gesetz“ wird bei **Bocheński/Menne** (Grundriss der Logistik, S. 45) Gesetz der „implikativen Abschwächung der Konjunktion“ genannt. Während die Bedeutung des Fregegesetzes (A&B) ⇒ (A⇒B) klar und offensichtlich gültig ist (Es trifft nicht zu, dass von zwei Aussagen A und B einerseits beide wahr sind, und zugleich A wahr und B falsch ist), gilt dies für die Behauptung „(p∧q) → (p → q)“ – Wenn die beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q zusammen vorliegen müssen, dann impliziert p q“ sicherlich nicht. Dass das Gedankengefüge **C** eine (informationsverschleiernde) Abschwächung von **K** ist, liegt auf der Hand, die logische Beziehung der Implikation ist aber sicherlich keine „Abschwächung“ des „notwendigen Zusammen-Vorliegens“.

46 Zwischen diesen Gesetzen des SFG und SFA besteht, wie eben nachgewiesen, bedingungslogische Isomorphie.

47 Vgl. Endnote 20, S. 148

II, Kapitel 4: Die Prädikatenlogistik

4.1. Die Konzeption der Erweiterung einer elementaren „Aussagenlogik“ zur „Prädikatenlogik“. Freges Trennung von logischer Beziehung und Allgemeinheit

Ich habe bisher das System der fregeschen Gedankengefüge (SFG), seine Missdeutung als ein System logischer Formen und seine Verwechslung mit dem System binärer Fregeverknüpfungen (SFA) dargestellt. Der fregesche Logikentwurf umfasst jedoch nicht nur die Gedankengefüge (bzw. Fregeverknüpfungen), **FREGE** hat vielmehr das SFG zu einer so genannten *Prädikatenlogik* erweitert. Seiner Meinung nach erlaubt erst diese Erweiterung die Darlegung der logischen Zusammenhänge in all ihren Aspekten, ergänze sie doch die Gedankengefüge um den Aspekt der Allgemeinheit. Schon weil die Gedankengefüge sich auf die Wahrheitswerte *einzelner* Aussagen beziehen (abgesehen von der konstitutiven Zusammenhanglosigkeit dieser Aussagen), bringen die Gedankengefüge keine Gesetzeszusammenhänge zum Ausdruck. Die logischen Formen, wie ich sie im ersten Teil dieser Arbeit entwickelt habe, sind stets von vornherein auf allgemeine Relata bezogen, denn sie bestehen als Strukturen bedingungslogischer Gesetzeszusammenhänge zwischen Sachverhalts-/Ereignis*klassen*.

FREGE ist sich darüber klar, dass die Gedankengefüge keine Gesetze[1] darlegen, da ihnen der für Gesetze wesentliche Aspekt der Allgemeinheit abgeht; so schreibt er über das Gedankengefüge **C**: „Die von mir behandelten hypothetischen Gedankengefüge gehören nicht zu den Gesetzen, weil ihnen die Allgemeinheit fehlt, durch die sich die Gesetze von den Einzeltatsachen unterscheiden… In der Tat ist der Unterschied zwischen Gesetzen und Einzeltatsachen ein tief einschneidender.“ (LA 166) Über den „Bedingungsstrich“, das Zeichen „$\Rightarrow$“, heißt es: „Die ursächliche Verknüpfung, die in dem Worte ‚wenn‘ liegt, wird jedoch durch unsere Zeichen nicht ausgedrückt… Denn diese Verknüpfung ist etwas Allgemeines, dieses aber kommt hier noch nicht zum Ausdrucke.“ (BS 6)

FREGEs Logikentwurf basiert ganz wesentlich auf dieser *ursprünglichen Trennung von logischer Form und Allgemeinheit*; **FREGE** geht ohne nähere Begründung davon aus, dass die umgangssprachlichen Wenn-dann-Gesetzesaussagen komplexe Gebilde sind, in denen für das gewöhnliche Bewusstsein noch ungeschieden sei, was durch die Analyse des Logikers erst noch getrennt und für sich bestimmt werden müsse. Die Vorstellung, die Wenn-dann-Gesetzesaussagen seien in ihre „elementaren Bestandteile“ zu zerlegen, fußt auf **FREGE**s methodischer Einstellung des *logischen Atomismus;* er meint, bei der Untersuchung des Logischen stoße man, ähnlich wie bei einer chemischen Analyse, auf einfachste „Urbestandteile“, auf „Logischeinfaches“, das dann nicht mehr weiter zerlegt und auch nicht mehr definiert werden könne: „Das Logische, was wir erhalten, wird sich im allgemeinen als zusammengesetzt erweisen, wir müssen es zerlegen, denn hier wie überall gelangt man zur vollen Einsicht nur durch das Vordringen bis auf das Einfachste.“ (Log I, 6) **FREGE** meint, mit den (von ihm als logischen Formen missverstandenen) Gedankengefügen einerseits und der Allgemeinheit andererseits lägen solche einfachsten „Urbestandteile“ des Logischen vor; beides geschieden zu haben, rechnet er seinen Verdiensten zu (EL 75). „Bei mir ist die Bezeichnung der Allgemeinheit ganz unabhängig von der Form des hypothetischen Satzes und die Bedeutung des Bedingungsstriches wird ganz unabhängig von der Allgemeinheit erklärt, was auch methodisch das Richtige ist.“ (Def 165[2], 167; BP 229, 231)

FREGE zufolge waren die Vorbehalte gegen seinen eigenartigen Gebrauch des umgangssprachlichen „Wenn-dann“ verfrüht, da man schon vom Gedankengefüge **C** erwartet habe, was angeblich erst nach der später wieder vollzogenen Verbindung des Gefüges **C** mit der Allgemeinheit geleistet werden könne. „Die genauere Betrachtung der Allgemeinheit muss es erst annehmbar machen.“ (EL 77) Diese Wiederverbindung erlaube die vollständige Darlegung der logischen Folge-Beziehung (Implikation); aus „beiden zusammen muss sich dann von selbst ergeben, was eine Deduktion besagt.“ (BP 229) Über das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ heißt es: „Ein eigentliches hypothetisches Urteil entsteht … erst, wenn A und B einen gemeinsamen unbestimmten Bestandteil haben, durch den die Sache Allgemeinheit gewinnt.“ (BLF 59) **FREGE** glaubt, bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge ließen sich zwar nicht alleine mithilfe der Gedankengefüge, aber doch *nur* unter ihrer Zugrundelegung bestimmen und mitteilen. Von den Gedankengefügen *ausgehend* sei der „Übergang zu dem zu suchen, was in der Physik, in der Mathematik und in der Logik Gesetz genannt wird.“ (LA 166)

4.2. Freges Darlegung der Prädikation: Begriff und Gegenstand

4.2.1. Darlegung der Prädikation: Feststellung und Gesetz, Übergang zur logischen Verallgemeinerung.

In der „Prädikatenlogik“[3] tritt das Verhältnis von einzelnem Gegenstand und allgemeinem Begriff/Prädikat ins Zentrum der Betrachtung. Das Verhältnis von Begriff und Gegenstand ist das Grundverhältnis der Logik und muss in der theoretischen Logik in all seinen wesentlichen Aspekten entfaltet werden. Welcher Art die Dinge/Gegenstände sind, welche Eigenschaften, sie haben, welche Zustände sie durchlaufen, und was mit diesen prädikativen Bestimmungen notwendig, möglicherweise oder unmöglich verbunden ist, können wir nur im Lichte allgemeiner Begriffe erkennen. Um einen einzelnen Gegenstand $\mathfrak{a}$ einem bestimmten Begriff $\mathfrak{P}$ subsumieren zu können, um also die Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \equiv$ „Dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ kommt das Prädikat $\mathfrak{P}$ zu“ treffen zu können, müssen wir die allgemeinen Bedingungen für das Vorliegen der Sachverhalts-/Ereignis*klasse* $\mathfrak{P}$(x) kennen, d.h. die Bedingungen, die in allen Fällen gegeben sein müssen, wenn das Prädikat $\mathfrak{P}$ *irgendeinem* beliebigen Gegenstand x zukommt; ein solcher gesetzmäßiger Bedingungszusammenhang ist ein logisches Beziehungsgefüge, eine logische Form, die einen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{P}$(x) und anderen Sachverhalts-/Ereignisklassen $\mathfrak{Q}$(x), $\mathfrak{R}$(x), …, $\mathfrak{S}$(x) herstellt. Diesem Gesetz subsumieren wir den Gegenstand $\mathfrak{a}$ in seiner situativen Beschaffenheit und erschließen dadurch die Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$: es sind im gegebenen Fall für den Gegenstand $\mathfrak{a}$ die Bedingungen gegeben, die es gestatten zu urteilen, dass dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat $\mathfrak{P}$ zukommt. Das Verhältnis $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ als Verhältnis eines konkreten Begriff und eines konkreten Gegenstandes verweist unmittelbar auf die Sachverhalts-/Ereignis*klasse* $\mathfrak{P}$(x) und die bedingungslogischen Zusammenhänge, in denen diese Sachverhalts-/Ereignisklasse steht. Die einfache Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ resultiert aus einem Schluss, dessen Grundlage eine die Sachverhalts-/Ereignisklasse $\mathfrak{P}$(x) betreffende bedingungslogische Form darstellt.

Erst in der theoretischen Logik wird versucht, alle überhaupt möglichen Formen dieser Art als solche unabhängig von ihrem jeweiligen besonderen gegenständlichen Inhalt rein, abschließend und vollständig zu bestimmen; während das logisch unreflektierte Denken in der Umgangssprache Mittel zum Ausdruck konkreter Gegenstände, konkreter Prädikate sowie beliebiger Gegenstände besitzt, um konkrete Sachverhalts-/Ereignisklassen und konkrete bedingungslogische Gesetze ausdrücken zu können, wird es erst auf dem Niveau der logischen Analyse unumgänglich, Ausdrücke zur Bezeichnung beliebiger Prädikate zu prägen; es können dies die Buchstaben P, Q, R, … oder P_1, P_2, P_3, … sein. Denn erst auf dem Niveau der theoretischen Logik kann untersucht und explizit dargestellt werden, welchen Bedingungen *beliebige* Prädikatoren P(x) und Q(x) genügen müssen, damit zwischen ihnen etwa die Beziehung der Implikation besteht oder nicht besteht. Auch die Geltung der logischen Gesetze erstreckt sich auf beliebige Prädikate; z.B. wird von beliebigen Prädikaten P und Q mit ihren jeweils dazu gehörenden Bezugsbereichen ausgesagt, dass falls zwischen ihnen die Beziehung der Implikation besteht, es unmöglich ist, dass zwischen ihnen die Beziehung der Exklusion besteht – in unseren Zeichen: Für alle P, Q: $[P(x) \rightarrow Q(x)] \uparrow [P(x) \uparrow Q(x)]$. Es ist gerade dieser Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate, der den Übergang vom logisch unreflektierten Denken zur spezifisch logischen Verallgemeinerung markiert und ein Charakteristikum der theoretischen Logik darstellt. Daraus erhellt, dass die Begriffe als solche und ihr Zusammenhang, d.h. die Struktur der begrifflichen Denkens, den Gegenstand der Logik bildet.

4.2.2. Freges Operation des „Gedankenzerfällens“

Frege hat einerseits versucht, die logischen Formen als Gedankengefüge ganz unabhängig von Allgemeinem und der Betrachtung konkreter und beliebiger Prädikationen $\mathfrak{P}$(x) und P(x) zu bestimmen; andererseits meint er, Allgemeinheit ließe sich ohne jede Berücksichtigung logischer Relationen alleine aus der Prädikation $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ entwickeln. Erst *im Nachhinein* solle diese Allgemeinheit wieder mit den Gedankengefügen als den angeblichen logischen Formen verbunden werden. Dieses Programm verrät ein charakteristisches Unverständnis der grundlegenden und konstitutiven Sachverhalte der Logik: der Gegenstände, der Begriffe und ihrer Verhältnisse.

Die logischen Formen haben sich uns als Beziehungen zwischen Sachverhalts-/Ereignisklassen erwiesen; eine solche umfasst jeden beliebigen Fall, dass *irgendeinem* Gegenstand (oder einem n-Tupel von Gegenständen) aus dem universellen oder einem begrenzten Bereich ein Prädikat (beliebiger Stelligkeit) zukommt. Auch **Frege** nennt die „Unterscheidung von Einzelnem und Begriff“ (Briefe XXX/1, 118), die Subsumtion irgendeines Gegenstandes x unter einen

Begriff P – ausgedrückt durch „P(x)“ – die „logische Grundbeziehung“ (ASB 25). Wenn er sich hier auch wieder der grundlegenden Einsicht anschließt, die am Anfang von Philosophie und Logik gestanden hat, stellt dies doch einen tiefen argumentativen Bruch gegenüber seiner Theorie der Gedankengefüge und der korrespondierenden „Psychologie des Gedankenfassens“[4] dar.

In **Frege**s Theorie des Gedankenfassens werden fertige wahrheitswertdefinite Gedanken vorausgesetzt; es kommt nur darauf an, ob ein solcher Gedanke wahr oder falsch ist; jeder Unterschied der Form, jede Beziehungsstruktur der Gedanken wird ausdrücklich als „logisch irrelevant“ vernachlässigt; die Aspekte von Inhalt und Form werden global und ungeschieden als „begrifflicher Inhalt“ gefasst. Das Urteil wird als unzerlegbares „Logischeinfaches“ missverstanden; dass jedes Urteil eine ganz bestimmte logische Form besitzt[5], eine logische Zusammensetzung (Synthesis) darstellt, wird als für die Logik ohne Bedeutung abgetan, wenn nicht gar bestritten, weil die Form nicht schon den Wahrheitswert determiniere: Versuche man etwa das Urteil, das „seinem Wesen nach nicht definierbar“ sei, zu definieren, hänge „man sich leicht an Nebensachen und bringt die Untersuchung gleich anfangs auf ein falsches Gleis. Und so ist es wohl manchen ergangen, die erklären wollten, was das Urteil sei, indem sie auf die Zusammengesetztheit verfielen.“ (Vern 63 [150f]) Im Rahmen der „Prädikatenlogik“ rückt **Frege** von der falschen, SFG-bezogenen These der Unteilbarkeit, Unzerlegbarkeit und Beziehungslosigkeit der Aussagen/Urteile/Gedanken ab, und vertritt eine dazu in Widerspruch stehende Position: er erklärt die *Beziehung* von Gegenstand und Begriff, eine *logische Form* bestimmter Urteile also, zur „logischen Grundbeziehung“; das Urteil (zumindest das Feststellungsurteil) wird als Subsumtions*beziehung* von Gegenstand und Begriff gefasst.

Was teilt uns **Frege** über diese „logische Grundbeziehung“, über den spezifischen Unterschied von Gegenstand und Begriff und ihren Zusammenhang mit? Um in einem Satz eindeutig den Ausdruck eines Gegenstandes vom Ausdruck eines Begriffs/Prädikats unterscheiden zu können, schlägt **Frege** vor, von der einfachen Prädikation eines einstelligen Prädikats auszugehen, etwa vom Feststellungssatz „Hans ist ein Mensch“ – abgekürzt $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$. Durch eine spezielle auf den Ausdruck der Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ ausgeübte „Zerfällungsoperation“ erhalte man die „Gedankenteile“ Gegenstand $\mathfrak{a}$ und Begriff (Prädikat) $\mathfrak{P}(\,)$; die Bezeichnung des Gegenstandes, der Eigenname $\mathfrak{a}$ könne durch andere Eigennamen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, usw. ersetzt werden[6]; jeder Eigenname vervollständige den „unselbstständigen“ Prädikator $\mathfrak{P}(\,)$ zu einem entweder wahren oder falschen Satz – die leere Klammer „( )“ soll die „Unselbständigkeit“ und „Ergänzungsbedürftigkeit“ des Begriffs $\mathfrak{P}$ andeuten. Diese „Gedankenzerlegung“ führe zu einer strikten Zweiteilung des Gedankens: „Die Teile sind ungleichartig: der eine ungesättigt, der andere gesättigt (abgeschlossen). Man muss dabei solche Gedanken in Betracht ziehen, die von der hergebrachten Logik als *singuläre* Urteile bezeichnet werden. In einem solchen wird von einem Gegenstande etwas ausgesagt. Der Satz, der einen solchen Gedanken ausdrückt, besteht aus einem *Eigennamen* – und dieser entspricht dem *abgeschlossenen* Teile des Gedankens – und einem *prädikativen* Teile, der dem *ungesättigten* Teile des Gedankens entspricht.“ (EL 77; vgl. auch LPM 192). Prädikate seien „ungesättigt“, unselbständig, unabgeschlossen und unvollständig; sie bedürften, damit sich Abgeschlossenes ergebe, der Beziehung auf Gegenstände, die sich **Frege** als selbstständig, „gesättigt“ und abgeschlossen denkt. Dieser Unterschied hat **Frege** zufolge als „*absolut*“ zu gelten (BG 67 [193]); die Gegenstände stünden den Begriffen gegenüber und Gegenstand sei alles, was nicht Begriff sei (GGA I, 7; vgl. ASB 27; EL 87; GGA I, 7); jeder sprachliche Ausdruck bezeichne ein für allemal entweder einen Begriff oder einen Gegenstand[7]. **Frege** ignoriert die ursprüngliche, untrennbare Einheit von Begriff und Gegenstand, sofern er sie als „logischeinfache Urbausteine“ der Logik ausgibt (Briefe VII/2, 28; FB 30). Bei **Frege** wird aus der Verschiedenheit von Begriff und Gegenstand eine schroffe Entgegensetzung. Begriffe würden ausschließlich prädikativ gebraucht, während ein Eigenname unter keinen Umständen prädiziert werden könne. Eigennamen (bzw. Kennzeichnungen von einzelnen Gegenständen) und Begriffswörter hätten eine ganz unterschiedliche grammatische Verwendung: „Niemals kann ein Gegenstand von etwas ausgesagt werden.“ (Briefe XXVII/2, 28; auch BG 67 [193]; ASB 27f; GLG II, 270; BZ 99f; BG 72 [198])

Kann man **Frege**s Rückgriff auf die Metapher des „Ungesättigtseins“ bei der Charakterisierung der Begriffe zugute halten, dass er die Einsicht des **Aristoteles** erneuert, dass Begriffe nicht gegenüber den Gegenständen verselbständigt und zu irgendwelchen „ideellen“ Quasigegenständen gemacht werden dürfen? Begriffe haben ihr Bestehen nur als Bestimmungen von (unbestimmt vielen) Gegenständen; als die grundlegenden Elemente des Wissens verweisen sie auf die objektive Bestimmtheit von Gegenständen (auf die Bestimmtheit ihrer Art, ihrer bleibenden Eigenschaften und wechselnden Zustände) – einen von diesem Gegenstandsbezug verschiedenen Gehalt besitzen sie nicht. Die Begriffe könnten allerdings nur dann als unselbständig, ergänzungsbedürftig usw. erscheinen, wenn man sie wie **Frege** außerhalb dieser ihrer ursprünglichen Bezogenheit auf Gegenstände betrachten wollte. **Frege**s Rede vom „Ungesättigtsein“ setzt voraus, dass der Begriff getrennt von Gegenständen betrachtet wird, wenn er *als Begriff* charakterisiert wird; in seiner Beziehung zu Gegenständen kann ein Begriff nicht „ergänzungsbedürftig" erscheinen – ist er doch von vorneherein auf Gegenstände bezogen, muss nicht erst durch diese ergänzt werden; jedes Prädikat P ist immer schon *Prädikator* P(x), Bestimmung irgendwelcher Gegenstände x. **Frege**s Rede von der *Prädikativität* der Begriffe[8] bringt diese Tatsache viel klarer zum Ausdruck als die irreführende Ungesättigtheitsmetapher[9].

Während **Aristoteles** in seiner Logik und Ontologie von der *ursprünglichen* Einheit von Begriff und Gegenstand ausgeht, dissoziiert **Frege** Begriff und Gegenstand auf eine Weise, die ihr Verhältnis unbegreiflich macht. Er ordnet Gegenstände und Begriffe ganz verschiedenen Wirklichkeitsbereichen zu: „In der Außenwelt, der Gesamtheit des Räumlichen, gibt es keine Begriffe." (GLA 92 [99][10]) Wie kann es dann eine „Sättigungs"-Verbindung zwischen raumzeitlichen Gegenständen und außerweltlichen Begriffen geben, wie sollte ein realer Gegenstand einem „nicht-realen" Begriff subsumiert werden können[11]? Würden die Begriffe einen eigenen Wirklichkeitsbereich bilden, müssten sie im Widerspruch zu **Frege**s Darlegungen ja wohl selbständig wie die Gegenstände sein und sich selbst genügen.

In seiner *Theorie von Sinn und Bedeutung*$_F$ unterscheidet **Frege** *drei* Arten von Ausdrücken – Eigennamen, Begriffswörter und Sätze, und ordnet jedem dieser Ausdrücke einerseits einen Sinn, andererseits eine Bedeutung$_F$[12] zu; er ist dabei außerstande anzugeben, was einerseits Sinn, andererseits Bedeutung$_F$ der Begriffe ist. Es lässt sich jedoch auch für Begriffswörter der Unterschied von Sinn und Bedeutung$_F$ klar bestimmen. Begriffe gehören der Ebene unseres Wissens an und stellen unser allgemeines Wissen von den Artbestimmungen und von den allgemein bestimmten Eigenschaften und Zuständen von Dingen bestimmter Art und ihrem gesetzmäßigen Zusammenhang dar; dieses Wissen ist der *Sinn*, den wir mit Begriffswörtern verbinden. Über diesen begrifflich bestimmten Sinn beziehen wir uns auf die reale objektive Artbestimmtheit der Dinge und den allgemein-gesetzmäßigen Zusammenhang ihrer Eigenschaften und Zustände – dies ist die Bedeutung$_F$ der Begriffe, denn die Stufe der Bedeutungen$_F$ soll ja die Stufe „des Objektiven" sein (SB 49 [34]). Wie wir von realen Gegenständen wissen und uns mit und durch dieses unser Wissen auf die objektiv-realen, räumlich-zeitlichen Gegenstände beziehen, so wissen wir durch unsere Begriffe von ihrer objektiv-realen allgemeinen Bestimmtheit[13]; dieses begriffliche Wissen erschließt uns die realen Beschaffenheiten und Gesetzmäßigkeiten der Dinge /Gegenstände. Begriff und Gegenstand sind untrennbar, was ihren Sinnaspekt (den Wissensaspekt) und ihre Bedeutung$_F$ (den Wirklichkeitsbezug) betrifft; die *Ausdrücke beider* repräsentieren ein Wissen (ihr Sinn) und den referentiellen Bezug (die Bedeutung$_F$) dieses Wissens in der realen Wirklichkeit.

Die Tatsache, dass sich ein Feststellungsausdruck wie „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$" in eine andere wahrheitswertdefinite Feststellung transformieren lässt, wenn die Gegenstandsbezeichnung (Eigenname, Kennzeichnung) $\mathfrak{a}$ durch andere (geeignete) Gegenstandsbezeichnungen ersetzt werden, so dass wiederum eine wahrheitswertdefinite Feststellung entsteht, hat den Grund darin, dass jeder Begriff anzahlmäßig unbestimmt vielen Gegenständen zukommt. Aus der Möglichkeit dieser Ersetzungsoperation lässt sich weder, wie **Frege** annimmt, eine „Ungesättigtheit" der Begriffe herleiten, noch kann diese Ersetzungsoperation die Grundlage einer eindeutigen Abgrenzung von Begriffen und Gegenständen sein; es kommt nämlich nicht nur jeder Begriff vielen Gegenständen zu, sondern jedem einzelnen Gegenstand kommen auch viele Begriffe zu. Deshalb lässt sich in einem Ausdruck „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$" auch das Begriffswort „$\mathfrak{P}$" durch andere Begriffswörter ersetzen, wobei ebenfalls stets wahrheitswertdefinite Aussagen entstehen: $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{a})$, …Aus diesen Ersetzungsmöglichkeiten ließe sich ebenso und nicht mit weniger Recht die „Ungesättigtheit" der Gegenstände herleiten, wie umgekehrt **Frege** aus den Transformationen $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{c})$, die „Ungesättigtheit" der Begriffe schließt[14]: so wenig sinnvoll von einem Begriff geredet werden kann, der nicht Bestimmung vieler Gegenstände wäre, so wenig ist uns unabhängig von unserem begrifflichen Wissen irgendein Gegenstand gegeben[15]: einen Gegenstand können wir nur erkennen (und dann mit einem Eigennamen versehen), wenn wir ihn in umfassender Weise begrifflich bestimmen; wir müssen seine Identität über die Orts- und Zustandsveränderungen, über unterschiedliche Wahrnehmungsperspektiven hinweg erfassen, seine Artbestimmtheit und seine Besonderheiten, Eigentümlichkeiten und Zustände erkennen – und alle diese Bestimmungen können ausnahmslos nur auf der Basis allgemeiner Begriffe vorgenommen werden; erst diese Einsicht der attischen Philosophie hat eine theoretische Logik ermöglicht. Erst wenn ein Gegenstand zuvor umfassend begrifflich bestimmt ist, ist er in seiner Singularität im Nachhinein durch einen Eigennamen benennbar; **Frege** hingegen stellt die unvernünftige, unerfüllbare Forderung auf, ein Zeichen müsse „*unmittelbar* die Sache" bedeuten (WBB 95 [53]); nur vermittels unseres begrifflich strukturierten (niemals unmittelbaren) Wissens vom realen Gegenstand, kann eine Bezeichnung dieses Gegenstandes auf diesen verweisen. Losgelöst von seinen begrifflichen Bestimmungen ist jeder Gegenstand demnach nicht weniger „ungesättigt", „unselbstständig", „*ergänzungsbedürftig*" und „unabgeschlossen" als jeder Begriff, der gegenüber den Gegenständen, denen er zukommt, verselbständigt wird. Es ist also ganz sinnlos, Gegenstände und Begriffe aus ihrer untrennbaren Einheit zu lösen, wie dies **Frege** tut, indem er beide zu „logischeinfachen" Tatbeständen macht (FB 30, [17f]; Briefe 28; BG, 66f [193]; BZ 97f); wenn es in der Logik einen „Urbaustein" gibt, dann ist es die Einheit von Begriff und Gegenstand – und gerade diese Einheit ist in der Logik in all ihrer Komplexität zu entwickeln und darzulegen.

Für **Frege** sind die „abgeschlossenen" Gegenstände nicht ergänzungsbedürftig, sondern unabhängig von den Begriffen unmittelbar in ihrer „Selbstständigkeit" gegeben; er postuliert eine jeder begrifflichen Bestimmung vorausgehende unmittelbare rein sinnliche Erkenntnis der Gegenstände. „Man sieht ein Ding." (Ged 44 [69], Fn.5)[16] Der Eigenname ist ihm hinreichend für die sprachliche Bezugnahme auf einen Gegenstand – der Eigenname ist aber in Wirklichkeit die ganz begrifflose Bezeichnung: denn um einen Gegenstand eindeutig mit einem Eigennamen benennen zu können, muss dieser Gegenstand *zuvor* in umfassender Weise begrifflich bestimmt sein. **Frege** rechnet die Eigennamen den grundlegenden *logischen* Zeichen zu; in den Sätzen der Logik, die Gesetze des logischen Bestimmens *beliebiger* Gegenstände ausdrücken, kommen jedoch grundsätzlich keine Eigennamen (nicht einmal konkrete Begriffswörter), sondern nur Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände vor. Wenn, wie **Frege** behauptet, die Gegenstände selbständig, abgeschlossen und demnach unabhängig von jeder begrifflichen Bestimmung erkennbar wären, warum sollte ein solcher Gegenstand einen „ungesättigten" Begriff „sättigen" – wozu sollte es dann überhaupt Begriffe geben[17]?

Die dissoziative Entgegensetzung von Gegenstand und Begriff verleitet **Frege** dazu, schließlich *jeden* Sachverhalt, mit dem es die Logik zu tun hat, entweder den Gegenständen oder den Begriffen zuzurechnen: „Gegenstand ist alles, was nicht Funktion ist, dessen Ausdruck also keine leere Stelle mit sich führt." (FB 30 [19]) „Alles, was es gibt ist *Funktion* oder *Gegenstand*."[18]. Durch diesen falschen Dualismus gerät **Frege** in Verwirrung, wenn er das Problem des Begriffsumfanges und der logischen Klasse aufwirft, weil er fragt, ob die logische Klasse, d.h. der Umfang eines Begriffs den Gegenständen oder den Begriffen zuzurechnen sei. Er meint, er müsse Sachverhalte, die doch das *Verhältnis* von Begriff und Gegenstand oder Gegenstände in ihrem Verhältnis zu Begriffen betreffen, selbst disjunktiv entweder den Begriffen oder den Gegenständen zuordnen.

Jeder gehaltvolle Ousiabegriff ist ein umfassendes Vergleichs- und Bestimmungsschema, durch welches wir eine bestimmte Art von Gegenständen erkennen und von allen andersartigen Gegenständen unterscheiden können; deshalb gehört zu jedem Ousiabegriff eine wohlbestimmte Menge von Gegenständen, denen dieser Begriff zukommt, der *Umfang* oder die *Extension* des Begriffs. Der Umfang eines jeden Ousiabegriffs ist gegen die Umfänge aller anderer Ousiabegriffe eindeutig abgegrenzt, da im Begriff alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass er einem Gegenstand zukommt, zusammengefasst sind. Anzahlmäßig aber bleibt der Umfang eines jeden gehaltvollen Begriffs ganz unbestimmt. Jeder gehaltvolle Begriff ist wohl *umfangsdefinit* – d.h. von jedem beliebigen Gegenstand in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft muss entscheidbar sein, ob er der entsprechenden Klasse angehört oder nicht (ob ihm der Begriff zukommt oder nicht), er kann aber nicht *anzahldefinit* sein. Im Umfang eines Begriffes sind auch die Gegenstände der betreffenden Art miteinbegriffen, die erst in Zukunft existieren werden; schon deshalb ist es unmöglich, dass eine Klasse anzahlmäßig bestimmt ist. Diese prinzipielle Unbestimmtheit der Anzahl einer Klasse beweist, dass es eine rein extensionale Auffassung der logischen Klasse nicht geben kann: die Elemente einer Klasse lassen sich anders als die Elemente von aktuellen, an eine Raum-Zeit-Stelle gebundenen, endlichen Mengen nicht unabhängig von begrifflichen Bestimmungen aufzeigen[19]. Eine Klasse ist immer der *Umfang eines Begriffs*, so wie umgekehrt eine rein intensionale Auffassung nicht durchführbar ist, denn jeder gehaltvolle Begriff ist eine Bestimmung realer Dinge und ihrer Eigenschaften und Zustände; im Begriff der logischen Klasse sind Begriff und Gegenstand, Extension und Intension, notwendig und untrennbar verbunden.

Seiner dualistischen Ontologie folgend, der alles Seiende *entweder* Gegenstand *oder* Begriff ist, fragt **Frege**, ob ein Begriffsumfang den Gegenständen oder den Begriffen zuzurechnen sei; anstatt zu sehen, dass weder das eine noch das andere zutreffen kann, weil im Begriffsumfang ein zentrales Verhältnis von Gegenständen und Begriff verwirklicht ist, behauptet er bald das eine, bald das Gegenteil: „Begriffsumfänge sind Gegenstände und nicht Begriffe." (ASB 26) – „Ich glaube, dass für ‚Umfang des Begriffs' einfach ‚Begriff' gesagt werden könne." (GLA 76 [80]; auch NSchrWB II, S.111) – an anderer Stelle bezeichnet ihm der Ausdruck „Der Umfang des Begriffes a" einen „scheinbaren Gegenstand" (EMN 288). Entsprechend seiner ursprünglichen Dissoziation von Begriff und Gegenstand ist für **Frege** der Begriff das eine, der Umfang des Begriffs als die Klasse der Gegenstände, denen der Begriff zukommt, das andere. Hat man den Begriff, kann man sich in einem zweiten Schritt sich nach den Begriffsumfang umsehen (LPM 194; auch 197). **Frege** bestreitet, dass ein Begriff seinen Bestand an den Gegenständen hat, die unter ihn fallen (GGA I, 3). Er leugnet nicht nur, dass der Begriff untrennbar an die Klasse gebunden ist, sondern meint, dass die Klasse selber unabhängig von den Gegenständen sei, die die Glieder dieser Klasse sind. (GGA I, 2) Er dissoziiert nicht nur den Begriff von den Gegenständen, denen er zukommt, sondern auch die Klasse von den sie konstituierenden Gegenständen[20].

FREGEs dissoziativer Dualismus von Gegenstand und Begriff verhindert auch ein treffendes Verständnis der „Existenz“ und der „Es- gibt“ - Sätze. Er meint, zunächst sei zu prüfen, ob die „Es-gibt-Sätze“ von Begriffen oder Gegenständen handeln, und plädiert für Ersteres. In Wirklichkeit betreffen derartige Sätze den *Zusammenhang* von Begriffen und Gegenständen. „Existenz“ ist für **FREGE** „Eigenschaft eines Begriffs“ (GB 73 [199]) Als Existenzsätze bezeichnet er „Es- gibt“-Sätze der Ausdrucksform „Es gibt ein P“, wobei „P“ einen Begriff bezeichnen soll[21]. Nur Begriffswörter könnten in die Aussageform „Es gibt etwas, was … ist“ eingesetzt werden (GLG II, 271 [373]). „Wie der unbestimmte Artikel erkennen“ lasse, behalte der Begriff hier seine prädikative Funktion (BG 75 [200]) – die angebliche Unbestimmtheit des Artikels zeigt ihm die „Ungesättigtheit“ an. **FREGE** meint, der bestimmte Artikel stehe bei Bezeichnungen von Gegenständen, während die indefiniten Artikel („ein“, „irgendein“, „alle“, „einige“, „kein“ usw.) zum Begriffswort gehörten. „Sobald ein Wort mit dem unbestimmten Artikel oder im Plural gebraucht wird, ist es ein Begriffswort.“ (GLA 63f [64])[22] Auch hier unterstellt **FREGE**, ein Ausdruck bezeichne *entweder* einen Gegenstand *oder* einen Begriff; ein Ausdruck wie „ein Löwe“ bezeichnet jedoch *immer* „irgendeinen Gegenstand, dem der Begriff *Löwe* zukommt“; „alle oder einige P“ bedeutet „alle oder einige Gegenstände, denen der Begriff P zukommt“. Der Ausdruck „ein Löwe“ kann überhaupt keinen Begriff bezeichnen, denn der Satz „*Ein Löwe* ist ein Ousiabegriff“ ist sinnlos im Gegensatz zum Satz „Der Begriff *Löwe* ist ein Ousiabegriff“, den wiederum **FREGE** fälschlicherweise für widersprüchlich hält. „Es gibt mindestens *ein Nashorn*“ bedeutet nicht, dass es mindestens einen Begriff *Nashorn* gibt, sondern dass es mindestens einen Gegenstand gibt, dem der Begriff *Nashorn* zukommt. „Existenz“ im Sinne der „Es - gibt“ - Sätze wird immer von einem Gegenstand in Bezug auf einen Begriff ausgesagt – nie von einem Begriff alleine[23]. Deshalb sagt der Satz „Es gibt ein Nashorn“ (genauer: „Es gibt einen Gegenstand, dem der Begriff *Nashorn* zukommt“) dasselbe aus wie der Satz „Der Begriff *Nashorn* ist nicht leer“; für **FREGE** handelt der erste Satz von einem Begriff, der zweite Satz von einem Gegenstand. Es geht in diesen Existenzsätzen wie in der Beurteilung der Leerheit oder Nichtleerheit von Begriffen weder um einen Gegenstand allein, noch um einen Begriff allein, sondern um den Zusammenhang beider; einen solchen Zusammenhang aber leugnet **FREGE**.

4.2.3. Begriffe können Frege zufolge nicht selber zum Gegenstand einer begrifflichen Bestimmung werden

Eine weitere für die Logik abträgliche Folge der fregeschen Dissoziation von Gegenstand und Begriff besteht darin, dass **FREGE** sich nur dann für befugt hält, einen Begriff als Begriff anzusehen, wenn dieser Begriff unmittelbar einem Gegenstand prädiziert, dadurch „gesättigt“ und „zu einem abgeschlossenen Ganzen vervollständigt“ wird. Das alltäglich-gegenständliche Denken kennt gemäß seiner spezifischen Intentionalität im großen Ganzen nur diese direkte prädikative Verwendung von Begriffen, nicht aber die Betrachtung und Beurteilung der Begriffe *als Begriffe* selber. Erst in der theoretischen Logik wird versucht, die logische Struktur des gegenständlich-begrifflichen Denkens selbst kategorial-begrifflich zu bestimmen, und dabei entwickelt die Logik *Begriffe von Begriffen*. In der Logik steht nicht der prädikative Gebrauch von gegenständlichen Begriffen oder *Begriffen 1. Stufe*, wie **FREGE** sagt, an, sondern die Begriffe 1. Stufe werden selber zum *nichtdinglichen* Gegenstand einer Analyse, bei der es um die kategoriale Klassifikation der Begriffe, um die Untersuchung der allgemeinen Bedingungen des prädikativen Gebrauchs *beliebiger* Begriffe 1. Stufe geht und um die überhaupt möglichen logischen Beziehungen von Begriffen (die logischen Formen) geht. Die Logik macht so keinen *prädikativen*, sondern einen *thematischen Gebrauch* von den Begriffen 1. Stufe. **FREGE** unterscheidet zunächst klar zwischen den gegenstandsbezogenen *Begriffen 1. Stufe* und den *Begriffen 2. Stufe*, die nicht Gegenständen, sondern Begriffen 1. Stufe zukommen. Diese Unterscheidung ist für die Logik konstitutiv; zurecht schreibt **FREGE**, dass „eine tiefere Einsicht in die Mathematik und Logik ohne diese Unterscheidung nicht möglich“ ist (GLG II, 269 [371]; auch GGA I, XXIV).

FREGE verneint jedoch nachdrücklich die Möglichkeit und Notwendigkeit, in der Logik mit Begriffen 1. Stufe auf neue, nämlich thematische Weise umzugehen, wenn er behauptet, ein Begriff höre auf ein „ungesättigter“ Begriff zu sein, wenn er nicht unmittelbar prädiziert, sondern selbst zum Objekt der Bestimmung durch Begriffe 2. Stufe wird. Bei der Untersuchung und Thematisierung der Begriffe werde man wider Willen und „gegen die Natur der Sache“ gezwungen, die Begriffe wie Gegenstände zu betrachten und ihren „ungesättigt“-prädikativen Charakter zu verleugnen. Die Sprache erlaube es nicht, von einem „ungesättigten“ Begriff zu reden, „ohne das Ergänzungsbedürftige in etwas Abgeschlossenes zu verwandeln und eigentlich zu verfälschen.“ (Briefe XXXVI/7, 72; auch ASB 27; LPM 192; LM 147) Zu sagen, „der Begriff ‚Pferd‘ ist kein Begriff“, sei eine „unvermeidbare sprachliche Härte“ (BG 71 [196f]).

Freges Ansicht, ein Begriff höre, wenn er selber zum Thema der Untersuchung und Bestimmung wird, auf, ein Begriff, d.h. „ungesättigt" in dem Sinne zu sein, dass er eine Bestimmung ist, die vielen Gegenständen zukommt, ist nicht nachvollziehbar. Wenn gegenständlichen Begriffen in einer Aussage ein logischer Begriff 2. Stufe zugesprochen wird – etwa in den Sätzen „(Der Begriff) *Pferd* ist ein Ousiabegriff" und „*Fieberkrank* ist ein Zustandsbegriff", hören die Begriffe als Prädikanden dieser Feststellungen doch nicht auf, prädikativer Natur zu sein. Im Gegenteil, ein Begriff kann nur dann als Begriff verstanden und durch einen Begriff zweiter Stufe bestimmt werden, wenn er als ein allgemeines Prädikat aufgefasst wird, das *vielen* Gegenständen zukommen kann; es werden durch die logischen Begriffe 2. Stufe ja gerade die Art und Weise und die Gesetzmäßigkeit der Prädikativität dieser Begriffe bestimmt. Die Aussage „Der Begriff *Pferd* ist ein Ousia-Begriff" bedeutet, dass, wenn immer dieser Begriff 1. Stufe *Pferd* einem Gegenstand zugesprochen wird, dadurch die Art oder Washeit dieses Gegenstandes bestimmt ist. Diese Aussage über einen Begriff verhüllt nicht die Prädikativität des Begriffs, sondern setzt diese Prädikativität vielmehr stets voraus und bestimmt sie näher. Träfe es zu, dass Ausdrücke wie „der Begriff $\mathfrak{P}$" nicht auf Begriffe, sondern auf Gegenstände *als Nicht-Begriffe* verweisen, so könnte von Begriffen nicht als Begriffen geredet werden, und die Logik als Wissenschaft von den Formen des begrifflichen Denkens wäre gar nicht möglich. Die Sprache besitzt nicht die ihr von **Frege** angedichtete „verhängnisvolle Eigenschaft, … Eigennamen zu schaffen, denen kein Gegenstand entspricht", sondern die Sprache ermöglicht es, nicht nur dingliche Gegenstände begrifflich zu bestimmen, sondern diese begrifflichen Bestimmungen selber zum Thema der Untersuchung und Erörterung zu machen; nicht „die Sprache" macht Begriffe zu Gegenständen, sondern **Frege**s starres, unflexibles, sich in falschen Dissoziationen verhedderndes Denken.

Auch die logischen Formen sind Begriffe 2. Stufe. Zwischen den gegenständlichen Begriffen *Mensch* und *Lebewesen* besteht die Beziehung der logischen Unterordnung oder Subordination, wie **Frege** sagt – der Sachverhalt *Mensch*(x) impliziert den Sachverhalt *Lebewesen*(x); *Subordination* ist ein zweistelliger Begriff, der beliebigen Paaren von Begriffen erster Stufe zukommt, sofern diese bestimmte Bedingungen erfüllen[24]. Die Definition einer jeden logischen Relation zwischen Begriffen nimmt notwendig auf die Beziehungen der Begriffe 1. Stufe zu Gegenständen, also auf die Prädikativität („Ungesättigtheit") der Begriffe 1. Stufe Bezug; so ist die logische Beziehung der Unterordnung eines Begriffs P zu einem Begriff Q (Implikation) dadurch definiert, dass jedem Gegenstand, dem P zukommt, auch Q zukommt, aber nicht umgekehrt. Alle Bestimmungen der aristotelischen Logik, die logischen Formen selbst, die ontologisch/logischen Kategorien wie Ousia und Akzidens, sind Begriffe 2. Stufe.

Frege allerdings kann die wichtige, für die theoretische Logik konstitutive Unterscheidung von Begriffen 1. und 2. Stufe nicht fruchtbar machen, und als kritisches Instrument zur Prüfung der eigenen Entwürfe zu nutzen. Weder die fregeschen Gedankengefüge noch die Fregeverknüpfungen sind, im Gegensatz zu den echten logischen Formen, Begriffe 2. Stufe. Der Begriff der „Existenz" ist der einzige Begriff, den **Frege** explizit als einen Begriff 2. Stufe anführt – dieser aber ist kein Begriff zweiter Stufe, weil er nicht unmittelbar Begriffen 1. Stufe prädiziert wird[25], sondern das Verhältnis von Begriff und Gegenständen thematisiert. **Frege** umschreibt diesen Unterschied gegenständlicher und logischer Begriffe mit nichts sagenden räumlichen Metaphern: „Die Begriffe 2. Stufe, unter welche Begriffe fallen, sind wesentlich verschieden von den Begriffen 1. Stufe, unter welche Gegenstände fallen." (BG 75f [201]) Dem Unterschied werde man gerecht, wenn man sage, „ein Gegenstand falle *unter* einen Begriff 1. Stufe, und ein Begriff falle *in* einen Begriff 2. Stufe." (BG 76 [201]). An anderer Stelle spricht er von der *Subsumtion* eines Gegenstandes unter einen Begriff und der *Subordination* eines Begriffs unter einen anderen. Er kann nur verbal eine nicht näher bestimmte Verschiedenheit andeuten. „Begriffe können nicht in denselben Beziehungen stehen wie Gegenstände. Sie in diesen zu denken, wäre nicht falsch, sondern unmöglich." Auf keinen Fall dürfe man „die beiden grundverschiedenen Beziehungen des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff und [der] Unterordnung eines Begriffs unter einen Begriff … vermengen." (ASB 28) **Frege** belässt es bei dieser verbalen, nichtbegrifflichen Abgrenzung. Diese Unterschiede bleiben ganz intuitiv – Worte treten, wie so oft im Rahmen der von **Frege** begründeten Tradition, an die Stelle von begrifflichen Unterscheidungen.

Frege unterscheidet auch *Beziehungen 1. und 2. Stufe*. Es ist klar, dass Begriffen keine Relationen zugeschrieben werden können, die Gegenständen zukommen; die Logik muss aber untersuchen, wie die Beziehungen (die mehrstelligen Prädikate 1. Stufe), die zwischen Gegenständen bestehen, vermittelt sind durch die logischen Beziehungen zwischen diesen mehrstelligen Prädikaten 1. Stufe selbst. Die zwischen *Gegenständen* möglichen Beziehungen 1. Stufe sind nichts anderes als zwei- oder mehrstellige gegenständliche Prädikate 1. Stufe, etwa „Fritz *ist der Vater von* Paul". Die zwischen solchen Begriffen bestehenden Beziehungen, nennt **Frege** „Beziehungen 2. Stufe"; als eine solche Beziehung führt er nur die Unterordnung eines Begriffs unter einen anderen an; aber *alle logischen Relationen* sind solche Beziehungen. So besteht die logische Relation der Implikation $\mathbb{C}$ beispielsweise zwischen den beiden Relationen

1. Stufe „x ist Vater von y" und „x ist blutsverwandt mit y": „Wenn eine Person x Vater einer Person y ist, dann ist x mit y blutsverwandt". Diese logischen Beziehungen zwischen Begriffen (Beziehungen 2. Stufe) hängen untrennbar mit den Beziehungen der Begriffe 1. Stufe zu Gegenständen ab; sie sind dadurch determiniert, dass diese Begriff verschiedenen Gegenständen jeweils zusammen zukommen können oder nicht. So nimmt die Beziehung der logischen Unverträglichkeit 𝔻 zweier Begriffe notwendig auf die Beziehung der unverträglichen Begriffe zu *jeweils denselben* Gegenständen Bezug: ein Begriff P ist mit einem Begriff Q genau dann unverträglich, wenn jedem Gegenstand oder jedem n-Tupel von Gegenständen, dem der eine (ein- oder mehrstellige) Begriff zukommt, nicht der andere Begriff zukommt. Ein Begriff P steht genau dann einem anderen Begriff Q in der Beziehung des kontradiktorischen Gegensatzes (𝕁), wenn jedem Gegenstand, dem A zukommt B nicht zukommt, und jedem Gegenstand, dem A nicht zukommt, B zukommt. Dass **FREGE** diesen entscheidenden Zusammenhang nicht verstanden hat, geht insbesondere aus seiner Meinung hervor, leere und nichtleere Begriffe seien *logisch* gleichwertig, und welche logische Beziehung zwischen zwei Begriffen bestehe, sei davon unabhängig, ob diese Begriffe leer oder nichtleer sind.

Auch diese falsche Gleichstellung der gehaltvollen (nichtleeren) und der leeren Begriffe ist eine Konsequenz der frege-schen Dissoziation von Begriff und Gegenstand. Weil logische Beziehungen nur zwischen nichtleeren, gehaltvollen, d.h. wirklichkeitsbezogenen Begriffen bestehen können, ist die Scheidung der leeren und gehaltvollen Begriffe eine unabdingbare *Voraus*setzung für die Erkenntnis und Konstruktion logischer Formen. Nur wenn es Gegenstände gibt, denen bestimmte Begriffe zukommen, besteht zwischen diesen Begriffen eine logische Relation. Da eine solche Relation besagt, dass es notwendig, oder unmöglich oder möglich ist ($\mathcal{K}$), dass *irgendeinem* Gegenstand, dem bestimmte Begriffe zukommen, andere Begriffe zukommen, kann ein leerer Begriff nie Bestandteil eines logischen Zusammenhanges sein. Für beliebige leere Begriffe L und beliebige gehaltvolle Begriffe P gilt nur das Verhältnis L(x) ⌉ P(x), wobei die Pränonpendenz 𝔽 unbedingt ist und die Modalitätenmatrix ($\mathcal{OZUU}$) besitzt: L kommt jedem beliebigen Gegenstand nicht zu, ob diesem Gegenstand irgendein gehaltvoller Begriff P zukommt oder nicht. Ist ein Begriff hingegen Teil einer logischen Struktur, etwa der Ousiabegriff M in der Struktur des syllogistischen Modus *Barbara* [(Sx), (Mx), (Px) 𝕂ℂ], dann ist notwendig vorausgesetzt, dass dieser Begriff M kein leerer Begriff ist. Der Konstruktion der logischen Formen muss deshalb der Ausschluss aller leeren Begriffe vorausgehen.

Für **FREGE** hingegen ist die Unterscheidung der leeren und nichtleeren Begriffe logisch nebensächlich und der Bezug eines Begriffs auf Gegenstände tangiert nicht das Wesen des Begriffs. Es „kann ein Begriffswort logisch durchaus unanfechtbar sein, ohne dass es einen Gegenstand gibt, auf den es sich durch seinen Sinn und seine Bedeutung (den Begriff selbst) beziehe. Diese Beziehung auf einen Gegenstand ist … eine mehr vermittelte und unwesentliche, so dass es wenig passend scheint, die Begriffswörter danach einzuteilen, ob unter den entsprechenden Begriff kein, ein oder mehrere Gegenstände fallen." (ASB 34) Logisch untaugliche Begriffe seien „nicht etwa solche, die Widersprechendes vereinen – denn ein Begriff kann sehr wohl leer sein – sondern solche, bei denen die Umgrenzung verschwommen ist." (ASB 32) Auch widersprüchliche Begriffe seien wohlabgegrenzt, weil für jeden Gegenstand feststehe, dass ihm der widerspruchsvolle Begriff nicht zukommt (LPM 193f). Dies ist nicht richtig, denn widerspruchsvolle Begriffe sind nur eindeutig von allen gehaltvollen abgegrenzt; *logisch* fallen die leeren Begriffe zusammen und lassen sich nicht akkurat gegeneinander abgrenzen, eben weil sie widerspruchsvoll sind und es deshalb keinen Gegenstand gibt, dem sie zukommen können[26].

Die Vorstellungen **FREGE**s von der Identität der Gegenstände sind aufgrund seines ungenügenden Verständnisses des Verhältnisses von Begriff und Gegenstand sehr oberflächlich, teilweise sogar falsch. Eine Aussage wie „Dieser Tisch ist sich selbst gleich" sei „vollkommen selbstverständlich", in Identitätsurteilen würde von den Gegenständen „ein eigentlicher Inhalt … nicht … ausgesagt." (DPE 15) Dass uns zumindest die Identität der vielen Gegenstände unserer alltäglichen Lebenswelt völlig selbstverständlich und unproblematisch erscheint, muss jedoch nicht bedeuten, dass die Erkenntnis der Identität der Gegenstände logisch einfach ist, und unmittelbar, ohne Vermittlung umfassender logischer Synthesen erkannt werden kann. Tatsächlich ist die Identität der Gegenstände nicht trivial, nicht „leere" Beziehung eines Gegenstandes auf sich, sondern die grundlegendste und fundamentalste *Invariante*, auf die sich unser ganzes rationales Erkennen stützt. Diese Identität bedeutet, dass ein Gegenstand in all den verschiedenartigen Veränderungen, Entwicklungen, denen er unterworfen ist, und in allen verschiedenen Perspektiven, unter denen er uns erscheint, derselbe bleibt[27]. Von Identität und Erhaltung kann nur in Bezug auf Veränderung gesprochen werden. Die Identität der Gegenstände stellt zwar keine nähere Bestimmung eines Gegenstandes dar – sie ist aber Voraussetzung dafür, dass sich überhaupt etwas logisch bestimmen und erkennen lässt.

Die Identität von Gegenständen, das „völlige Zusammenfallen“ (ASB 28), die „völlige Übereinstimmung, Selbigkeit“, (BZ 95; GLA 73 [76]) ist nicht, wie **FREGE** behauptet, eine *zweistellige* Relation[28]. **FREGE** geht bei seiner Darlegung der Identität eines Gegenstandes von einem Ausdruck „a = b“ aus, und begreift dabei „a“ und „b“ als der Zeichengestalt (und eventuell zusätzlich dem Sinn) nach *verschiedene* Bezeichnungen ein und desselben Gegenstandes (SB 40f, 65). Aber *diese* zweistellige Relation, auf der die Substituierbarkeit von verschiedenen Zeichen beruht, drückt keine Identität von Gegenständen aus, sondern sie besagt, dass *zwei verschiedene* Ausdrücke insofern *gleich* (nicht etwa identisch!) sind, als sie dieselbe Bedeutung_F haben, d.h. denselben identischen Gegenstand in unterschiedlicher Weise bezeichnen. Es handelt sich hier nicht um Identität, sondern um die Beziehung der *Bedeutungsgleichheit* von zwei *verschiedenen* Zeichenkomplexen; diese Bedeutungsgleichheit definiert oder erläutert die Identität nicht, sondern setzt die Identität eines Gegenstandes schon voraus. Sich Identität als zweistellige Relation $\mathsf{R}(x, y)$ vorzustellen widerspricht sich, denn eine solche „Identität“ müsste zwischen *zwei*, also zwischen verschiedenen, nicht-identischen Gegenständen bestehen. Identität betrifft auch nicht verschiedene Aspekte oder Erscheinungsweisen ein und desselben Gegenstandes, denn diese Aspekte oder Erscheinungsweisen sind ja nicht-identisch[29].

An anderer Stelle beruft sich **FREGE** bei der Erläuterung der Identität von Gegenständen auf **LEIBNIZ**’ *principium identitatis indiscernibilium*: „Wir sagen, ein Gegenstand a sei gleich einem Gegenstand b (im Sinne des völligen Zusammenfallens), wenn a unter jeden Begriff fällt, unter den b fällt, und umgekehrt.“ (ASB 28) Das Identitätsprinzip ist indes auch hier nicht korrekt formuliert, weil von *zwei* Gegenständen a und b gesprochen wird, wo doch nur *ein* Gegenstand gemeint sein kann; richtig müsste es heißen: Wenn $F_1, F_2, \ldots, F_n$ die Gesamtheit der Begriffe ist, die einem Gegenstand a zukommt, dann fällt kein anderer Gegenstand b mit $a \neq b$ ebenfalls unter die Begriffe $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Die Identität als Beziehung eines Gegenstandes auf sich selbst (Sichselbstgleichheit in aller Veränderung) schließt die Beziehung der Wohlunterschiedenheit zu *all*en anderen Gegenständen ein[30]. Die *Gleichheit* von Gegenständen – verschiedene (nicht-identische) Gegenstände sind hinsichtlich einer begrifflichen Bestimmung gleich – ist etwas ganz anderes als die *Identität* von Gegenständen – ein Gegenstand ist nur sich selbst gleich und dadurch von *allen* anderen, auch den gleichartigen, verschieden. Die Erkenntnis von Identischem setzt aber Gleichheit voraus: das Wissen um die Einzigartigkeit und die unverwechselbare Identität eines Gegenstandes ergibt sich erst aus dem durchgehenden logischen Vergleich der Gegenstände, aufgrund der Kenntnis einer Vielzahl abgestufter Gleichheiten und Unterschiede zwischen den Gegenständen, wobei die Bestimmung einer Verschiedenheit immer eine bestimmte Gleichheit voraussetzt. Wäre alles zu allem und in allem ungleich, wäre eins so unbestimmt wie das andere und nichts könnte erkannt werden. Ohne Bezug auf begrifflich bestimmte Gleichheiten und Unterschiede gibt es kein Wissen von der Identität; umgekehrt kann ohne Identität der Gegenstände ihre Gleichheit nicht erkannt werden. Ein sachgerechtes Verständnis der Identität der Gegenstände gibt es nur auf der von **FREGE** außer Acht gelassenen logisch-ontologischen *Einheit* von Gegenstand und Begrifflichkeit.

Dass **FREGE** die Identität der Begriffe ausdrücklich bestreitet, ohne sich der absurden Konsequenzen bewusst zu sein, ist eine weitere Folge seiner mangelhaften Analyse des Verhältnisses von Begriffen und Gegenständen. Wenn wir sagen, dass ein Begriff vielen Gegenständen zukommt, ist vorausgesetzt, dass wir in allen diesen Fällen von *ein und demselben* Begriff sprechen – wäre es möglich, dass etwa der Begriff *Mensch*, den wir vielen Gegenständen zuschreiben, nicht identisch, nicht ein und derselbe ist, wäre das Prinzip des Nichtwiderspruchs außer Kraft gesetzt, da das PNW fordert, dass von jedem Begriff eindeutig für *jeden* Gegenstand feststehen muss, ob *dieser eine* Begriff dem Gegenstand zukommt oder nicht; es kann da nicht von mehreren Begriffen die Rede sein. Für **FREGE** ist Identität ausschließlich eine *Beziehung 1. Stufe*, die nur zwischen Gegenständen bestehen könne, während zwischen Begriffen nur *Beziehungen 2. Stufe* anzutreffen seien. Aufgrund der „Grundverschiedenheit“ der Begriffe 1. und 2. Stufe könne die Beziehung der Identität nicht auf Begriffe übertragen werden (LPM 198). „Von Identität kann man bei Begriffen eigentlich nicht reden.“ (Briefe XXVIII/2 115; auch Briefe XXVI/8, 73f; LPM 198; ASB 28; 31)

FREGE weigert sich insbesondere deshalb, die Identität der Begriffe zuzugeben, weil bei der Feststellung der Identität eines Begriffs dieser Begriff nicht direkt prädikativ verwendet, sondern selbst zum Prädikanden genommen wird: man rede schon nicht mehr von Begriffen, wenn man behaupte, dass der Begriff Φ und der Begriff Ξ derselbe sei; man habe es mit Gegenständen zu tun, „weil der bestimmte Artikel … auf einen Gegenstand hinweist und die prädikative Natur des Begriffs verleugnet.“ (ASB 31) Man habe daher, so **FREGE**, Begriffe erst in „Gegenstände“, nämlich ihre Begriffsumfänge, zu verwandeln, damit zwischen ihnen Identität bestehen könne (LPM 197f; ASB 30); so könne man – „ohne durch den uneigentlichen Gebrauch des Wortes ‚derselbe‘ zu Fehlern verleitet zu werden“ – behaupten, „was zwei Begriffswörter bedeuten, ist dann und nur dann dasselbe, wenn die dazugehörigen Begriffsumfänge zusammenfallen.“ (ASB 31) Wie bei den Gegenständen verwechselt **FREGE** auch bei Begriffen die Identität als Beziehung auf sich selbst, die zugleich die Abgrenzung gegen alle anderen Begriffe einschließt, mit der zweistelligen Relation der Bedeutungsgleichheit, die zwischen verschiedenen Begriffsbezeichnungen besteht; auch die Bedeutungsgleichheit von Begriffsbezeichnungen erklärt die Identität eines Begriffs nicht, sondern setzt sie voraus. Ebenfalls erklärt die Identität einer Klasse (des Begriffsumfanges) nicht die Identität des Begriffs, weil dieser ja als identischer schon bei der Bildung dieser Klasse vorausgesetzt werden muss; käme nicht allen Gegenständen einer Klasse genau ein und derselbe Begriff zu (und nicht etwa verschiedene Begriffe), wäre gar nicht entscheidbar, dass sie alle demselben Begriffsumfang zugehören. Gerade die durchgehende Abgegrenztheit der Begriffe, die **FREGE** wiederholt fordert (ASB 32; LPM 194), ist ohne die geleugnete Identität der Begriffe illusorisch.

Jeder Begriff ist identisch und damit von jedem anderen Begriff verschieden. Die der Identität korrespondierende durchgehende Wohlunterschiedenheit bedeutet keine Beziehungslosigkeit der Begriffe, sowenig wie die durchgehende Wohlunterschiedenheit und Einzigartigkeit der Gegenstände eine selbstgenügsame Isoliertheit der Gegenstände implizieren und ausschließen könnte, dass Gegenstände nur in einem umfassenden kausalen Zusammenhang mit anderen Gegenständen existieren können.

4.2.4. Freges Verwerfung der Subjekt-Prädikat-Struktur

FREGEs Unverständnis der Begriffe, der Gegenstände und ihrer Beziehung veranlasst ihn schließlich zur Verwerfung der Subjekt/Prädikand-Prädikat-Struktur, von der doch alle Logik ausgehen muss. „Wir werden die bei den Logikern beliebten Ausdrücke ‚Subjekt' und ‚Prädikat' ganz vermeiden…" (Nachgelassene Schriften I, Hamburg 1070, S.155) „Man sollte mit Subjekt und Prädikat in der Logik aufräumen." (Brief an **HUSSERL**, XIX/3, 42) Diese Verwerfung involviert eine Vernachlässigung der logischen Synthesis, an ihre Stelle rückt die falsche fregesche Konzeption der Funktion/Abbildung. Wenn wir **FREGE** fragen, welchen Zweck die Prädikation, die Bezugsetzung („Subsumtion") von Gegenstand und Begriff eigentlich erfüllt, erfahren wir, dass da ein „selbstständiger", „gesättigter" Gegenstand mit einem unselbstständigen, „ungesättigten" Begriff verbunden wird, dass dadurch die Gedankenteile aneinander haften, dass der Begriff dadurch „gesättigt" werde und aus dieser Verbindung wiederum ein selbstständiger „Gegenstand" resultiere, nämlich ein „Wahrheitswert"[31] – dies ist eine Mystifikation des logischen Bestimmens. In der falschen fregeschen Identifizierung von Funktion/Abbildung und Prädikation verschwindet der logische und epistemische Zweck und Sinn aller Prädikation: jede Prädikation, jedes Urteil bestimmt einen Gegenstand (das Subjekt oder den Prädikanden) näher, es bestimmt seine Artbestimmtheit, seine Eigenschaften, seine Zustände, seine Beziehungen zu anderen Gegenständen, die artbestimmte Gesetzmäßigkeit, der er untersteht; erst indem wir den einzelnen Gegenstand durch allgemeine Begriffe bestimmen, wird er erkannt und umfassend mit anderen Gegenständen verglichen; nur so erhält der Gegenstand für uns seine Selbstständigkeit und Abgeschlossenheit gegenüber anderen Gegenständen.

Die Argumente, die **FREGE**s Verwerfung der logisch fundamentalen Subjekt(Prädikand)-Prädikat-Beziehung stützen sollen, sind durchweg nicht stichhaltig. So behauptet er beispielsweise, es sei prinzipiell nicht eindeutig zu bestimmen, was in einem Urteil Subjekt und was Prädikat sei; als Beleg dient ihm das Verhältnis von Aktiv-Passiv-Sätzen; obwohl der „Inhalt" in beiden Sätzen derselbe sei, seien Subjekt und Prädikat vertauschbar. „Ein Gedanke mannigfach zerlegt werden kann und … dadurch bald dieses, bald jenes als Subjekt und als Prädikat erscheint. Durch den Gedanken selbst ist noch nicht bestimmt, was als Subjekt aufzufassen ist. Wenn man sagt: ‚das Subjekt dieses Urteils', so bezeichnet man nur dann etwas Bestimmtes, wenn man zugleich auf eine bestimmte Art der Zerlegung hinweist… Die Sprache hat Mittel, bald diesen, bald jenen Teil des Gedankens als Subjekt erscheinen zu lassen. Eins der bekanntesten ist die Unterscheidung der Formen des Aktivs und Passivs." (BG 73f, 199)

Nur Sätze mit transitiven Verben können in die Passivform überführt werden; logisch liegt dann eine zweistellige Relation vor, welche besagt, dass ein Gegenstand oder mehrere Gegenstände a in bestimmter Weise auf einen Gegenstand oder mehrere Gegenstände b einwirken: $\mathsf{R}(a,b)$. Der Passivsatz – b wird von a in bestimmter Weise behandelt – drückt die asymmetrische konverse Relation $\check{\mathsf{R}}(b,a)$ aus. In beiden Sätzen sind Subjekt (Prädikand) und Prädikat wohl unterschiedlich, aber entgegen **FREGE**s Auffassung jeweils eindeutig bestimmbar. Allerdings ist das Subjekt/der Prädikand ein Paar von Gegenständen; im Aktiv- und Passivsatz sind Subjekt/Prädikand und Prädikat jeweils verschieden: im Aktivsatz ist das Subjekt/der Prädikand das Paar (a,b), das Prädikat die zweistellige Relation R; im Passivsatz ist das Subjekt/der Prädikand das Paar (b,a), das Prädikat ist die Relation $\check{\mathsf{R}}$. Dass in beiden Sätzen sich Subjekt und Prädikat zwar unterschiedlich, aber jeweils eindeutig bestimmt sind, widerspricht nicht der Tatsache, dass die denselben Sachverhalt auf unterschiedliche Weise zum Ausdruck bringen – man darf allerdings nicht wie **FREGE** eine solche Bedeutungsgleichheit mit der Identität verwechseln.

„Eine Unterscheidung von Subjekt und Prädikat findet bei meiner Darstellung eines Urteils nicht statt. Um dies zu rechtfertigen, bemerke ich, dass die Inhalte von zwei Urteilen in doppelter Weise verschieden sein können: erstens so, dass die Folgerungen, die aus dem einen in Verbindung mit bestimmten andern gezogen werden können, immer auch aus dem zweiten in Verbindung mit denselben anderen Urteilen folgen; zweitens so, dass dies nicht der Fall ist. Die beiden Sätze: ‚bei Plateae siegten die Griechen über die Perser' und ‚bei Plateae wurden die Perser von den Griechen besiegt' unterscheiden sich in der ersten Weise. Wenn man nun auch eine geringe Verschiedenheit des Sinnes erkennen kann, so ist doch die Übereinstimmung überwiegend. Ich nenne nur denjenigen Teil des Inhaltes, der in beiden *derselbe* ist, den *begrifflichen Inhalt*. Da nur dieser für die Begriffsschrift von Bedeutung ist, so braucht sie keinen Unterschied zwischen Sätzen zu machen, die denselben begrifflichen Inhalt haben." (BS 2)[32] Da die Unterschiedlichkeit von Subjekt und Prädikat in beiden Sätzen die Übereinstimmung des Gehalts (und damit den Wahrheitswert) nicht tangiert, soll die Unterscheidung von Subjekt und Prädikat überhaupt logisch belanglos sein – **Frege** erklärt damit die grundlegende logische Form – P(a), einem Gegenstand a (Subjekt/Prädikand) kommt das Prädikat P zu – für logisch irrelevant. Auch die Sätze „Es gibt mindestens eine Quadratwurzel aus 4" und „Der Begriff *Quadratwurzel aus 4* ist nicht leer" seien trotz verschiedener Subjekte/Prädikanden inhaltsgleich: der erste Satz habe einen Gegenstand, der zweite einen Begriff zum Subjekt. Die Bedeutung von „Der Begriff X ist nicht leer" ist jedoch gerade durch die Aussage „Es gibt mindestens einen Gegenstand, dem X zukommt" bzw. „der Begriff X kommt mindestens einem Gegenstand zu" definiert; in beiden Fällen ist also der Begriff X der Prädikand: es wird gesagt, dass er nicht leer ist, oder – gleichbedeutend – dass er mindestens einem Gegenstand zukommt; der Begriff, der in einem solchen Satz selbst Prädikand wird, hört nicht auf, Begriff zu sein.

Frege möchte den Gebrauch der Wörter *Subjekt* und *Prädikat* allenfalls auf die Charakterisierung der „Beziehung des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff (Subsumtion) einschränken." (Brief an **Husserl**, XIX/3, 42) Er glaubt wohl, dass in einem Satze „Der Gegenstand $\mathfrak{a}$ ist dem Begriff $\mathfrak{P}$ subsumiert" eindeutig ein Gegenstand Subjekt des Satzes ist[33]. **Frege** fasst die Prädikation einer Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ als die Subsumtion, als das Fallen eines Gegenstandes unter einen Begriff. Wie aber verhält es sich bei Gesetzesaussagen? Wie beurteilt **Frege** hier das Verhältnis von Subjekt und Prädikat? Was wird in Gesetzesaussagen unter welche Begriffe subsumiert? Auch eine Gesetzesaussage besitzt nur dann einen klaren Sinn, wenn eindeutig bestimmt werden kann, was Prädikand und was Prädikat ist – denn es muss ja klar sein, was wovon ausgesagt wird.

Gesetzesaussagen, über deren Prädikationsstruktur sich **Frege** äußert, sind zunächst jene Formen, deren Zusammenhang schon **Aristoteles** in seiner assertorischen Syllogistik behandelt hat: das allgemeine (oder universelle) und das partikuläre bejahende oder verneinende Urteil: *Alle S/einige S sind P/sind nicht P*. **Frege** erkennt, „dass die Wörter ‚alle', ‚jeder', ‚kein', ‚einige' vor Begriffswörtern stehen. Wir sprechen in den allgemein und partikulär bejahenden und verneinenden Sätzen Beziehungen zwischen Begriffen aus und deuten die besondere Art dieser Beziehung durch jene Wörter an, die also logisch nicht enger mit dem darauf folgenden Begriffsworte zu verbinden, sondern auf den ganzen Satz zu beziehen sind. Man sieht das leicht bei der Verneinung. Wenn in dem Satze

‚alle Säugetiere sind Landbewohner'

die Wortverbindung ‚alle Säugetiere' das logische Subjekt zum Prädikate *sind Landbewohner* ausdrückte, so müsste man, um das Ganze zu verneinen, das Prädikat verneinen: „sind nicht Landbewohner". Statt dessen ist das ‚nicht' vor ‚alle' zu setzen, woraus folgt, dass ‚alle' logisch zum Prädikate gehört." (BG 72f [198]; auch ASB 28)[34] **Frege** erfasst an dieser Stelle, dass das universelle Urteil zwei Begriffe in ein bestimmtes Verhältnis setzt. Im Satz „›Alle Menschen sind sterblich‹ … sage {ich} weder etwas von diesem, noch von jenem; sondern ich ordne den Begriff Mensch dem Begriff des Sterblichen unter. In dem Satze ‚Cato ist sterblich' habe ich eine *Subsumtion*, in dem Satze ‚Alle Menschen sind sterblich' habe ich eine *Subordination*. Von einem Begriffe ist hier die Rede, nicht von einem Einzeldinge." (LM 108) **Frege** öffnet sich sogar der Einsicht, dass nicht nur Sätze wie „Alle S sind P" bzw. „Allen Gegenständen, denen S zukommt, kommt P zu" den Begriff S dem Begriff P unterordnen, sondern dass dies auch im Wenn$_1$-Satz „Wenn etwas S ist (wenn einem Gegenstand der Begriff S zukommt), dann ist es P (dann kommt diesem Gegenstand P zu)" geschieht. In „Über die Grundlagen der Geometrie" lesen wir, dass in einer Aussage wie „wenn eine Zahl a größer als 1, dann ist a größer als 0" „nicht eine Beziehung von Gedanken, sondern die Beziehung der Unterordnung des Begriffs *größer als 1* unter den Begriff *positive Zahl* vor" vorliegt (GLG III-V, 296 [378]; auch ebd. 315 [401]). **Frege** stellt so die Bedeutungsgleichheit der Sätze folgender Ausdrucksgestalt fest:

- „Alle S sind P" – „Allen Gegenständen, denen S zukommt, kommt P zu"
- **„Wenn etwas S ist, dann ist es P" – „Wenn irgendeinem Gegenstand x das Prädikat S zukommt, dann kommt ihm das Prädikat P zu"**

- „Der Begriff S ist dem Begriff P subordiniert“

Diese Einsichten hätten **FREGE** den Weg zu einer sachgerechten Analyse der logischen Formen eröffnen können. Er hätte sich fragen müssen, unter welchen Bedingungen ein Begriff einem anderen subordiniert ist, und unter welchen Bedingungen dies nicht der Fall ist, welche anderen Verhältnisse neben dieser Unterordnung sich bestimmen lassen. Die Tatsache jedoch, dass in diesen Sätzen nicht von Gegenständen, die Begriffen 1. Stufe subsumiert werden können, sondern selber von solchen Begriffen 1. Stufe die Rede ist, hat ihn tief verunsichert. Er hat zunächst schlicht bestritten, dass in diesen Gesetzesaussagen überhaupt sinnvoll Subjekt/Prädikand und Prädikat unterscheidbar sind. „Die Beziehung der Unterordnung eines Begriffes unter einen Begriff ist so verschieden von jener, dass es nicht erlaubt ist, auch hierbei von Subjekt und Prädikat zu reden.“ (Brief an **HUSSERL**, XIX/3, 42) „Begriffe können nicht in denselben Beziehungen stehen wie Gegenstände. Sie in diesen zu denken, wäre nicht falsch, sondern unmöglich. Daher bezeichnen die Wörter ‚Beziehung des Subjekts zum Prädikat‘ zwei ganz verschiedene Beziehungen, je nachdem das Subjekt ein Gegenstand oder selbst ein Begriff ist. Am besten wäre es daher, die Wörter ‚Subjekt‘ und ‚Prädikat‘ ganz aus der Logik zu verbannen, da sie immer wieder dazu verführen, die beiden grundverschiedenen Beziehungen des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff und [der] Unterordnung eines Begriffs unter einen Begriff zu vermengen.“ (ASB 28) Die „Grundverschiedenheit“ von gegenständlichen Begriffen 1. Stufe und logischen Begriffen 2. Stufe bedeutet auf keinen Fall, dass Gesetzesaussagen, wie **FREGE** behauptet, keine eindeutig bestimmbare Subjekt/Prädikand – Prädikat-Struktur haben; auch Gesetzesaussagen haben einen Sinn nur dann, wenn wir wissen, worüber (über welchen Prädikanden) genau was (was für ein Prädikat) behauptet wird.

Bei den Gesetzesaussagen verzichtet **FREGE** darauf, seine Zerfällungsoperation anzuwenden: aber auch hier kann der Satz in den Subjektausdruck und den Prädikatsausdruck zerlegt werden; im Satz

„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Mensch** zukommt, kommt der Begriff **sterblich** zu“

kann der Prädikand (das Subjekt), nämlich das Begriffspaar (**Mensch**, **sterblich**) durch jedes andere (kategorial geeignete) Begriffspaar ersetzt werden (die veränderten Teile des Ausdrucks sind im Folgenden fett gedruckt):

„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Grieche** zukommt, kommt der Begriff **Mensch** zu“
„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Säugetier** zukommt, kommt der Begriff **Wirbeltier** zu“
„Allen Gegenständen, denen der Begriff **Vogel** zukommt, kommt der Begriff **Lurch** zu“ usw.

Bei jeder Ersetzung resultiert eine wahre oder falsche Gesetzesaussage. Durch diese Ersetzungsoperation lässt sich dann die logische Relation (Struktur einer Gesetzesaussage)

„Allen Gegenständen, denen der Begriff **S** zukommt, kommt der Begriff **P** zu“

gewinnen. Es gibt auch hier die Möglichkeit das Prädikat durch andere geeignete *logische* Prädikate zu ersetzen, den Prädikanden aber unverändert beizubehalten; auch hier resultieren aus den Ersetzungen wiederum wahrheitswertdefinite Gesetzesaussagen:

„**Allen Gegenständen, denen der Begriff** Mensch **zukommt, kommt der Begriff** sterblich **nicht zu**“
„**Einigen Gegenständen, denen der Begriff** Mensch **zukommt, kommt der Begriff** sterblich **zu**“
„**Nicht allen Gegenständen, denen der Begriff** Mensch **zukommt, kommt der Begriff** sterblich **zu**“ usw.

Die logische Reflexion kann durchaus mit derartigen Ersetzungsoperationen beginnen; im weiteren wären dann die genaue Bedeutung dieser und der mit ihnen synonymen Ausdrücke logischer Formen zu bestimmen (diese entscheidende Frage nach den Bedeutungen kann durch die Durchführung der fregeschen Zerfällungsoperationen natürlich nicht beantwortet werden); schließlich müsste die Analyse der Bedeutungen der so aufgefundenen logischen Relationen auf die konstitutiven Strukturelemente der logischen Formen führen, auf deren Grundlage dann unabhängig von besonderen sprachlichen Ausdruck und den logischen Ausdrucksmöglichkeiten der besonderen Sprachen jede beliebige logische Form konstruiert werden kann. **FREGE** freilich ist diesen Weg nicht gegangen. Anstatt zu untersuchen, wie denn genau sich die Subsumtionsbeziehung von Gegenstand und Begriff von den logischen Beziehungen zwischen Begriffen selbst unterscheiden, hat es **FREGE** bei der nicht näher ausgeführten Versicherung einer fundamentalen Verschiedenheit belassen. „Die Begriffe zweiter Stufe, unter welche Begriffe fallen, sind wesentlich verschieden von den Begriffen erster Stufe, unter welche Gegenstände fallen.“ (BG 75f [201]). Eine nähere Bestimmung dieser und anderer Begriffsverhältnisse kann **FREGE** nicht geben.

4.2.5. Übergang zu Freges Verständnis der Quantifikation — die Konzeption der „Aussageformen“

Frege hat nicht nur seine Erkenntnis, dass Gesetzesaussagen Beziehungen zwischen Begriffen betreffen, nicht fruchtbar gemacht, er hat diese Einsichten schließlich wieder fallen lassen, und sogar eine Konzeption der Gesetzesaussagen entworfen, die dieser Einsicht widerspricht. Es ist ihm entgangen, dass seine Bestimmung der Wenn$_1$-Gesetzesaussage als Beziehung von Begriffen nicht zusammenpasst mit seinem willkürlichen SFG-Postulat, wonach die Wenn-Beziehungen und alle anderen logischen Verhältnisse zwischen wahrheitswertdefiniten Aussagen bestehen sollen. Versucht **Frege** nämlich die logischen Verhältnisse durch seine Gedankengefüge darzustellen, vergisst er, dass er eine Aussage wie „Wenn etwas Mensch ist, ist es sterblich“ als (Gesetzes-)Aussage über das Verhältnis von zwei *Begriffen*, denen jeweils kein Wahrheitswert zugesprochen werden kann, nicht aber als Relation wahrheitswertdefiniter *Aussagen* bestimmt hat. Im Irrglauben, die Wenn-Gesetzesbeziehung lasse sich durch das Gedankengefüge $\mathfrak{C}$ ausdrücken, stellt er sogar in Frage, dass Gesetzesaussagen wie „Wenn eine Zahl a größer als 1, dann ist a größer als 0“ überhaupt schon sinnvolle Ausdrücke sind; sind doch die Relata „etwas ist ein Mensch“ und „es ist sterblich“ keine wahrheitswertdefiniten Aussagen, wie für $\mathfrak{C}$-Aussagen zu fordern ist. **Frege** lässt sich dabei auch durch die Tatsache irre machen, dass die Begriffsbezeichnungen „etwas ist P“ – abgekürzt „P(x)“ – mit Hilfe von Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände den Begriff auf irgendwelche beliebigen Gegenstände beziehen (die Bezeichnung eines Begriffs oder Prädikats P, die diesen Bezug auf beliebige Gegenstände x betont, also „P(x)“ ist unter Hervorhebung des intensionalen Aspektes ein *Prädikator*, unter Betonung des extensionalen Aspektes die Bezeichnung einer *Sachverhalts-/Ereignisklasse*). Hierbei ignoriert **Frege** aufgrund seiner Dissoziation von Begriff und Gegenstand, dass Begriffe nicht gegenüber den Gegenständen verselbstständigt werden dürfen, sondern immer auf die Gegenstände, denen sie jeweils zukommen, bezogen sind – dieser untrennbare Bezug eines Prädikats P auf Gegenstände wird im Ausdruck „P(x)“ mit Hilfe des Beliebig-Element-Zeichens x für Individuen dargestellt[35].

Beliebig-Element-Zeichen sind für **Frege** jedoch gar keine echten Zeichen, sondern „leere Eigennamen“, recht besehen sinn- und bedeutungslos. Ein Beliebig-Element-Zeichen „‚*a*‘ deutet einen Gegenstand an, hat keine Bedeutung, bezeichnet oder bedeutet nichts.“ (EL 82f; auch Briefe IX/4, 104; GLG I, 263 [320], Fn.2; GLG I-III; 283 [295]; GLG III-V, 302 [385], Fn.3) „Buchstaben, die einem Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen sollen, … sollen nichts bezeichnen, sondern nur andeuten…“ (GLG I-III, 302) Wegen der angeblichen Bedeutungslosigkeit der Beliebig-Element-Zeichen x, y, z,… für Gegenstände, besitzen für **Frege** dann auch die konkreten Prädikatoren $\mathfrak{P}$(x), die Bezeichnungen für Sachverhalts-/Ereignisklassen (d.h. **Sachverhaltsausdrücke**) keinen rechten Sinn; sie sind ihm „uneigentliche Sätze“, „Schemata von Aussagen“ oder „mögliche Aussagen“. „Wenn ein leerer Eigenname in einem Satze vorkommt, dessen übrige Teile bekannt sind, so dass der Satz einen Sinn bekommt, wenn jenem Eigennamen ein Sinn gegeben wird, so haben wir in diesem Satze, solange der Eigenname noch leer ist, eine mögliche Aussage, aber keinen Gegenstand, von dem etwas ausgesagt wird. So haben wir in dem Satze ‚*x* ist eine Primzahl‘ zwar eine mögliche Aussage; solange aber dem Buchstaben ‚*x*‘ keine Bedeutung gegeben ist, fehlt uns der Gegenstand, von dem etwas ausgesagt wird. Wir können dafür sagen: wir haben einen Begriff, aber noch keinen Gegenstand, der unter ihn subsumiert wird.“ (LM 109f; auch GLG III-V, 297 [379]) „Die einzelnen uneigentlichen Sätze, aus denen das Satzgefüge besteht, sind, aus dem Zusammenhang des Ganzen herausgerissen, unbrauchbar und haben keinen Sinn, wiewohl sie Teile haben mögen, die sinnvoll sind.“ (Briefe IX/4, 105) Der „uneigentliche Bedingungssatz“ „a > 2“ habe „vereinzelt noch gar keinen Sinn…, vielmehr ergäbe er „erst zusammen mit dem eigentlichen Folgesatze ‚so ist a + 1 > 2‘ ein sinnvolles Ganzes.“ (Briefe IX/4, 106) Begriffsbezeichnungen entbehren für **Frege** schließlich gänzlich jedes Sinnes. „Solange die unbestimmt andeutenden Buchstaben nicht durch Eigennamen ersetzt sind, hat die linke Seite“ – in einem Gesetz wie: *Wenn a und b ganze Zahlen sind und (a - b) ein Vielfaches von 7 ist, dann ist a kongruent b beim Modul 7* – „allein keinen Sinn und ebenso wenig die rechte Seite.“ (LM 135)

Freges Behauptung, Sachverhaltsausdrücke besäßen weder einen klaren Sinn, noch eine eindeutige Bedeutung, ist falsch, denn wir verbinden mit einem Ausdruck wie „a > 1“ durchaus einen klaren und eindeutigen Sinn, wir können den Sinn des Ausdrucks „eine (natürliche) Zahl ist größer als 1“ klar vom Sinn anderer Sachverhaltsausdrücke wie „eine natürliche Zahl ist kleiner als 1“, „das Quadrat einer natürlichen Zahl a ist größer als 1“ usw. unterscheiden. Wir können nicht nur davon reden, dass diese bestimmte Blume rot, dieses bestimmte Kind Scharlach hat, usw., sondern auch davon, dass eine beliebige Blume rot, ein beliebiges Kind Scharlach hat; die präzise gegenseitige Abgrenzung solcher Sachverhalts-/Ereignisklassen, die Kenntnis der Bedingungen dafür, dass irgendein derartiger Fall vorliegt, ist eine notwendige Voraussetzung, um im Einzelfall eine entsprechende Feststellung treffen zu können. Wir können über diese

Sachverhalts-/Ereignisklassen Aussagen treffen (z.B. „es ist realmöglich, dass eine ganze Zahl a größer als 1 ist", „es ist nichtrealmöglich, dass die Quadrierung einer ganzen Zahl a auf eine negative Zahl –b führt", „wenn eine natürliche Zahl a größer als 1 ist, genau dann 1 kleiner als a" usw.). Diese Urteile über Sachverhalts-/Ereignisklassen wären unmöglich, hätten die Sachverhaltsausdrücke nicht auch für sich, außerhalb des jeweiligen Zusammenhangs bestimmter Sätze einen klar definierten und eindeutigen Sinn. Würden Prädikatoren/Sachverhaltsausdrücke für sich alleine nichts bezeichnen, müsste das auch im Zusammenhang eines Satzes gelten. **FREGE** gesteht hier nur den behauptenden, nicht aber den einen Begriff/eine Sachverhalts-/Ereignisklasse benennenden Ausdrücken Sinn zu[36].

Weil nun Gesetzesaussagen *immer* solche allgemeinen Sachverhaltsausdrücke enthalten, gerät **FREGE** in Zweifel, ob er ihnen überhaupt einen Sinn zubilligen darf. Bald bejaht, bald verneint er es. An einigen Stellen bewertet **FREGE** Gesetzesaussagen im Gegensatz zu den angeblich sinnlosen Sachverhaltsausdrücken, die Teile dieser Aussagen sind, als sinnvoll: Ein Satz wie „wenn $a > 1$, dann $a > 0$)" sei eine sinnvolle arithmetische Aussage (GLG III-V, 315 [400])[37]. An anderen Stellen, insbesondere wenn er unzulässigerweise eine implikative Gesetzesbeziehung mit Hilfe des Gedankengefüges **C** darstellt, behauptet **FREGE**, die Gesetzesaussage habe noch keinen Sinn; erst wenn der Ausdruck „Wenn etwas Mensch ist, ist es sterblich" durch Ersetzung der Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände durch die Bezeichnung konkreter Gegenstände etwa zu „Wenn Cato ein Mensch ist, ist er sterblich" verändert werde, ergebe sich eine wahrheitswertdefinite Aussage (LM 109). Der Satz „Wenn a ein Mensch ist, dann ist a sterblich" sei nicht mit behauptender Kraft verbunden (LA 170). **FREGE**s Auffassung wird so in sich widersprüchlich – einerseits erkennt er, dass Gesetzesaussagen Allgemeines betreffen, andererseits spricht er den Gesetzesaussagen, weil diese Allgemeinheit mit Hilfe von angeblich bedeutungslosen Beliebig-Element-Zeichen für Individuen (bei logischen Gesetzen kommen Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate hinzu) den Aussagecharakter ab[38].

Die irrige Auffassung, Gesetzesaussagen seien noch keine richtigen wahrheitswertdefiniten Aussagen, erscheint vom Standpunkt **FREGE**s vollends zwingend, wenn bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge unzulässigerweise mit Hilfe von Gedankengefügen darstellt werden; ein Ausdruck wie **Mensch**(x) ⇒ **Sterblich**(x) hat in der Tat noch keine definierte Bedeutung (denn die empirisch-konkreten Sachverhalts-/Ereignisklassen (oder Prädikatoren) **Mensch**(x) und **Sterblich**(x) sind ja keine wahrheitswertdefiniten Aussagen – der Ausdruck ist gar nicht definiert, weil als Relata des Gedankengefüges keine wahrheitswertdefiniten Aussagen auftreten.

In der „modernen Logik" nennt man Ausdrücke wie „**Mensch**(x) ⇒ **Sterblich**(x)" „***Aussagefunktionen***" oder „***Aussageformen***": diese uneigentlichen, „provisorischen", „nur möglichen" Aussagen würden erst dann zu sinnvollen, behauptenden und wahrheitswertdefiniten Aussagen, wenn die Beliebig-Element-Zeichen für Gegenstände („Individuenvariablen") durch die Bezeichnungen von Gegenständen (Eigennamen und Kennzeichnungen, so genannte Individuenkonstanten), ersetzt werden; aufgrund dieses angeblichen Angelegtseins der Beliebig-Element-Zeichen („Variablen") auf die Ersetzung durch „Konstanten" werden die Beliebig-Element-Zeichen meistens als „Platzhalter", oder „Stellvertreterzeichen" bezeichnet[39]. Neben solchen Ersetzungen besteht eine zweite Möglichkeit, Aussageformen in wahrheitswertdefinite Aussagen zu überführen, darin, über eine solche Aussageform eine Aussage zu treffen, ob sie bei einigen (zumindest einer), bei allen oder bei keinen *Variablenersetzungen* (Ersetzungen der „Variablen" durch geeignete „Konstanten") zu einer wahren oder falschen Aussage wird. Solche *Erfüllbarkeitsaussagen* über Aussageformen werden mit Hilfe der so genannten *Quantoren* gebildet.

Indem den Zeichen des SFG Bezeichnungen für konkrete und beliebige Prädikate, Bezeichnungen konkreter und beliebiger Individuen, sowie Bezeichnungen von Quantoren hinzugefügt werden, wird das SFG (die „Aussagenlogik") zur sog. „Prädikatenlogik" erweitert. Im Folgenden werde ich darlegen, welche unterschiedlichen Arten von „prädikatenlogischen" Ausdrücken sich im Zuge dieser Erweiterung bilden lassen und was ihre Bedeutung entsprechend den getroffenen Festsetzungen ist; ich werde, ihre Wahrheitsbedingungen erläutern, falls es sich um behauptende Ausdrücke handelt. Wir werden uns mit den oft schwerwiegenden logischen Missdeutungen befassen müssen, denen diese prädikatenlogistischen Ausdrücke, wie schon die Ausdrücke des SFG, unterzogen werden; es ist zu prüfen, ob und in welchem Umfang durch diese Erweiterung Gesichtskreis und Grenzen des SFG, insbesondere die Prinzipien der Zusammenhanglosigkeit und der „Wahrheitsfunktionalität", überschritten werden, ob und in welchem Ausmaß **FREGE** wenigstens im Rahmen des „Prädikatenlogik" logische Formen und Gesetze darstellen kann, und welche Möglichkeiten im Rahmen seines System bestehen, „prädikatenlogische" Gesetze zu rechtfertigen. Eine zentrale Frage wird sein, wie sich **FREGE**s Dissoziation von logischer Beziehung und Allgemeinheit auf seine Bestimmung logischer Gesetzeszusammenhänge auswirkt. Der für die „moderne Logik" charakteristische Synkretismus von logischer Form und logischem Gesetz wird uns beschäftigen. Es ergibt sich, dass die Annahme, man müsse die logischen Relationen zuerst von der Allgemeinheit ablösen, wenn man ihren Gehalt rein und unverfälscht bestimmen will, die fragwürdigste und folgenschwerste der Voraussetzung ist, von denen sich **FREGE** bei seinem Versuch einer Neugestaltung der Logik hat leiten lassen; sie hat ihm die Einsicht in die Struktur der logischen Formen verbaut und die theoretische Logik für viele Jahrzehnte in eine trostlose Sackgasse geführt.

4.3. Ausdrücke des SFG

Zu den begriffsschriftlichen Darstellungsmitteln des SFG gehören Bezeichnungen für Aussagen, Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen („Aussagevariablen“) und Bezeichnungen für Gedankengefüge. Wird zwei wahrheitswertdefiniten Aussagen ein Gedankengefüge prädiziert – etwa in den Sätzen „Von den Sätzen ‚$2+2=5$‘ und ‚$2\cdot 2=4$‘ sind jedenfalls nicht beide falsch“ $\equiv$ „$(2+2=5)\ \overline{\vee}\ (2\cdot 2=4)$“ – so ist dies eine wahre (wie im Beispiel) oder falsche ***Gedankengefügeaussage***. Mit Hilfe der Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen lassen sich die Gedankengefüge als spezielle allgemeine Prädikate darstellen; „$A \Rightarrow B$“ und „$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$“ benennen solche prädizierbaren *Gedankengefüge* (ich sage auch ***Gedankengefügeschemata***). Aus den besprochenen Gründen werden diese Ausdrücke von den Logistikern nicht als eindeutig bestimmte Prädikatoren aufgefasst, sondern als Aussageformen mit unbestimmt-provisorischer Bedeutung, die angeblich erst dann eine fest umrissenen Bedeutung erhalten, wenn sie durch Variablenersetzung oder durch ihre Charakterisierung als allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar zu Aussagen werden. Gedankengefügeschemata werden so auf zweierlei Art verwendet – es lässt sich die *prädikative* von der *thematischen Verwendung* unterscheiden.

Zum einen werden die Gedankengefüge-Schemata irgendwelchen vorgegebenen Aussagen zugesprochen; für die Logistiker stellt sich das als „Variablenbeseitigung“ oder „Variablenersetzung “ dar: die Gedankengefüge-Aussage „$(3\cdot 2 = 5) \Rightarrow (4^2 = 16)$” geht durch Variablenersetzung aus dem Gedankengefüge-Schema „$A \Rightarrow B$“ hervor; es resultieren wahrheitswertdefinite tautologische (nicht-informative) oder informationsvermindernde Aussagen; das Gedankengefügeschema ist ein *Prädikat*, das konkreten wahrheitswertdefiniten Aussagen zugesprochen wird. Andererseits können *über* Gedankengefügeschemata Erfüllbarkeitsaussagen getroffen werden, etwa in der Behauptung „Das Gedankengefüge-Schema ›$A \Rightarrow B. \Rightarrow .A\ \overline{\vee}\ B$‹ wird für manche Variablenersetzungen wahr“ (es wird die „**Erfüllbarkeit**“ des Schemas behauptet); oder es wird gesagt, dass ein Schema, z.B. „$(A\&B)\ \&\ ({\sim}A\&{\sim}B)$“ für jede Einsetzung falsch wird (es wird die „**Nichterfüllbarkeit**“ des Schemas behauptet); es kann schließlich geurteilt werden, dass ein Schema, etwa „$(A\&B) \Rightarrow (A\Rightarrow B)$“, für jede Einsetzung wahr wird (es wird die „**Allgemeingültigkeit**“ des Schemas behauptet). Die Beurteilung von Gedankengefügeschemata als erfüllbar, nicht erfüllbar oder allgemeingültig, ist eine thematische Verwendung der Prädikator-Schemata, denn das Gedankengefüge-Schema wird *Thema* einer Aussage; solche Erfüllbarkeitsaussagen sind, wie erwähnt, bereits spezielle Quantifikationen in der Menge der Aussagen. Ob ein solches Gedankengefüge-Schema allgemeingültig, erfüllbar ist oder nicht, besagt überhaupt nichts über den Zusammenhang der in dieses Schema eingesetzten Aussagen: das *Prinzip der Zusammenhanglosigkeit* gilt unbeschränkt, d.h. in den Ausdrücken des SFG bleibt jeder logische und andere Zusammenhang unberücksichtigt.

Die Gedankengefüge sind strikt von den zwischen ihnen bestehenden logischen Gesetzesbeziehungen zu unterscheiden; wie zwischen allen anderen wohlbestimmten Prädikaten bestehen zwischen den Gedankengefügen, die selber keine logische Formen sind, eindeutig bestimmbare logische Beziehungen; so sind die beiden Gedankengefüge $(A \& B)$ und $(A \Rightarrow B)$ durch die logische Beziehung der Implikation verbunden. Diese logischen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen habe ich *Gesetze des SFG* genannt; sie können mit den Ausdrucksmitteln der Begriffsschrift nur unvollständig dargestellt werden. Auf Grund seiner Missdeutung des Gedankengefüges $\mathbf{C}$ als logische Implikation $\mathbb{C}$ verwechselt **FREGE** die *Gesetze des SFG* mit den *Fregegesetzen*, etwa das Gesetz des SFG $(A \& B) \rightarrow (A \Rightarrow B)$ mit dem Fregegesetz $(A \& B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, welches besagt, dass keinem Aussagenpaar (A, B) das Gedankengefüge $\mathbf{K}$ zukommt, das Gedankengefüge $\mathbf{C}$ aber nicht zukommt; ersetzen wir die sekundären Bezeichnung $A \Rightarrow B$ durch die primäre Bezeichnung $\neg(A \& \neg B)$, reduziert sich diese Bedeutung auf die Aussage, dass eine Aussage B nicht zugleich wahr und falsch sein kann – in dieser partiellen Darlegung des PNW besteht der armselige Gehalt *aller* Fregegesetze; dieses dürftige „Resultat“ des SFG ist zugleich die einzige *logische* Voraussetzung der „Aussagenlogik“. Die Logistik kennt verschiedene Verfahren – zum Beispiel das mechanisch-gedankenlose fregealgebraische Ausrechnen –, um die Gültigkeit der unbegrenzt vielen, völlig nichts sagenden Fregegesetze nachzuweisen; diese Tatsache wird vorgestellt als „Lösung des Entscheidungsproblems“ für den „klassischen zweiwertigen Aussagenkalkül“[40].

Die fehlende Unterscheidung der Gesetze des SFG und der Fregegesetze führt zusammen mit der Meinung, die „Aussagevariablen“ enthaltenden Ausdrücke der Gedankengefüge besäßen, weil sie keine Aussagen sind, noch keinen rechten

Sinn, zu einer weiteren Verunklarung: die Ausdrücke der Gedankengefüge – etwa „$A \Rightarrow B$“ – und die (begriffsschriftlich zu Fregegesetzen abgeschwächten) Ausdrücke der logischen Beziehungen zwischen Gedankengefügen – etwa „$(A \& B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ – firmieren unterschiedslos als „Aussageformen“, wobei die Gedankengefügeausdrücke erfüllbar (und nicht allgemeingültig), die Fregegesetzausdrücke allgemeingültig sind; nur letztere sollen, weil „aus rein logischen Gründen wahr“ für die Logik von Interesse sein, nicht jedoch die nur erfüllbaren Gedankengefüge[41]. Die Konzeption der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit mystifiziert somit bereits auf dem Felde der „Aussagenlogik“ die Zusammenhänge, da im Konzept der „Aussageformen“ der wesentliche Unterschied zwischen den Gedankengefügen und den logischen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen verwischt wird. Der Konfusion von Gedankengefüge und Gesetz des SFG werden in der Prädikatenlogistik als Verwechslung bzw. Nichtunterscheidung von logischer Form und logischem Gesetz (logische Beziehungen zwischen logischen Formen) wieder begegnen.

Die Erfüllbarkeitsaussagen über SFG-„Aussageformen“ stellen bereits Quantifikationen in genau dem Sinne dar, wie die Quantifikation im Rahmen der Prädikatenlogistik bestimmt wird: Eine *SFG-Aussageform* ist *allgemeingültig*, wenn *jede* Ersetzung aller „Aussagevariablen“ der „Aussageform“ durch Bezeichnungen konkreter wahrheitswertdefiniter Aussagen aus der „Aussageform“ eine wahre Gedankengefügeaussage macht. *Erfüllbar* ist eine SFG-Aussageform, wenn *zumindest eine* derartige Ersetzung auf eine wahre Gedankengefügeaussage führt. Dass die Quantifikation der SFG-Aussageformen allerdings anders als später in der Prädikatenlogistik benannt und bezeichnet wird, nicht mit den Quantoren $\forall$ und $\exists$, sondern etwa durch den Behauptungsstrich $\vdash$, der vor eine solche „Aussageform“ gesetzt wird, oder überhaupt nicht explizit dargestellt wird (wenn von jeder angeführten „Aussageform“ die Allgemeingültigkeit behauptet wird), ändert nichts an der Gleichheit in der Sache[42]. Bei der Erweiterung des SFG zur Prädikatenlogistik ist demnach nicht die Quantifikation tatsächlich neu[43], sondern allein der Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Individuen und von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate.

4.3.1. Prädikatoren — Gedankengefügeprädikate — Quantoren

1. Die Erweiterung des Systems der fregeschen Gedankengefüge zur Prädikatenlogistik weist drei zusammenhängende und sich gegenseitig verstärkende Mängel auf, die zu Missdeutungen der prädikatenlogistischen Ausdrücke führen. Ich werde diese Unzulänglichkeiten bereits jetzt kurz umreißen und sie, falls nötig, später ausführlicher behandeln. Die Probleme, die daraus resultieren, dass die Relata der Gedankengefüge gemäß **FREGE**s Postulat der Aussagenbezogenheit Aussagen sind, in der Prädikatenlogistik jedoch Begriffe (Prädikatoren, Sachverhalts-/Ereignisklassen) durch Gedankengefüge verbunden werden, werden entweder gar nicht zur Kenntnis genommen oder nur oberflächlich abgehandelt. Die Versuche, die Gedankengefüge mit Begriffen (Prädikatoren) kompatibel zu machen, führt zur **Konzeption der Aussageformen**; diese Konzeption verhindert jedoch die klare Unterscheidung der logischen Formen und logischen Gesetze, wodurch es zu einer erheblichen Verzerrung des Gegenstandes der theoretischen Logik kommt.

2. Oft wird versucht, die simplen Entscheidungsprozeduren des SFG – insbesondere die „Methode der Wahrheitstafeln“ – zum Muster auch der Entscheidung der Gültigkeit prädikatenlogistischer Ausdrücke zu machen und auch diese Ausdrücke als „Wahrheitsfunktionen“ aufzufassen und zu entscheiden; dies führt zu einer Entstellung des so genannten *Entscheidungsproblems.* Der Übergang vom SFG (der „Aussagenlogik“) zur Prädikatenlogistik ist schon alleine deshalb mit tiefen Missverständnissen befrachtet, weil ja bereits das SFG mit unsachgemäßen logischen Deutungen bedacht wird. Aus der Tatsache, dass die Wahrheit von Gedankengefügeaussagen nur vom vorgegebenen Wahrheitswert der prädizierten Aussagen abhängt (damit nur indirekt von der Bedeutung dieser Aussagen[44]), wird der falsche Schluss gezogen, bei der Entscheidung der Wahrheit von SFG-Formeln könne man die Bedeutungen dieser vorgegebenen Aussagen unbeachtet lassen. Es wird dann nach einem automatisiert-gedankenlosen Verfahren gesucht, das wie die „aussagenlogischen“ Entscheidungsverfahren die Mühe erspart, systematisch auf die Bedeutung der zu rechtfertigenden Ausdrücke einzugehen[45]. Bei der Bewertung und Rechtfertigung der Wahrheit einer jeden Behauptung kommt es jedoch zunächst ausschließlich auf die Bedeutung an – man muss zuerst einmal wissen, was überhaupt behauptet wird[46]. Aufgrund dieser falschen Dissoziation von Bedeutung und Wahrheitsbedingung logischer (oder angeblich logischer) Ausdrücke glaubt man auf eine sorgfältige Analyse und systematische Typisierung der Bedeutung der prädikatenlogistischen Ausdrücke verzichten zu können, als ob für die Logik die Bedeutung vernachlässigbar sei, wenn man nur den Wahrheitswert einer Formel kenne. Die erste Bedingung für den Aufbau eines Entscheidungsverfahrens für prädikatenlogistische Ausdrücke ist jedoch die genaue Bestimmung der Bedeutung jeder

einzelnen prädikatenlogistischen Formel. Ich versuche im Folgenden, die Bedeutungen prädikatenlogistischer Ausdrücke herauszuarbeiten und nach Typen zu klassifizieren.

3. In der Prädikatenlogistik ist schließlich niemals von diesem oder jenem konkreten Prädikat die Rede, sondern nur von beliebigen Prädikaten – in prädikatenlogistischen Ausdrücken kommen generell nur Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate („Prädikatvariablen") vor, nicht etwa Bezeichnungen konkreter Prädikate. Die Einführung von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate ist das Charakteristikum der theoretischen Logik – sie markiert den Beginn der *theoretischen* Logik als der Wissenschaft von den logischen Zusammenhängen der Begriffe; es geht dabei nicht um diesen oder jenen Begriff, sondern um jeden beliebigen Begriff, d.h. um die Normen und Gesetzmäßigkeiten, denen jeder beliebige Begriff (sei es generell oder unter bestimmten Bedingungen) unterliegt. Dieser oder jener konkrete Begriff ist nur involviert, sofern er Begriff ist. Die Begriffe der theoretischen Logik sind daher samt und sonders Begriffe von Begriffen („Begriffe zweiter Stufe" wie **FREGE** sagt); die logischen Formen sind spezielle Beziehungen zwischen Begriffen, und die Darlegung logischer Gesetzmäßigkeit involviert daher von Anfang an eine Quantifikation im Bereich der Begriffe, d.h. Aussagen über das, was für alle Begriffe generell oder unter bestimmten Bedingungen gilt.

Dieser die Logik auszeichnende Schritt von der begrifflichen Erkenntnis der gegenständlichen Wirklichkeit, die nur konkrete Prädikate kennt, zur begrifflichen Erkenntnis dieses Erkennens, die sich insbesondere in der Bezugnahme auf beliebige Begriffe, daher im Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Begriffe/Prädikate offenbart, wird in seiner methodischen Bedeutung und in seinen Konsequenzen in der Prädikatenlogistik generell verkannt. Dass es in der Prädikatenlogistik von vornherein alleine um beliebige Prädikate und ihre Gesetzmäßigkeit geht, dass demnach von vornherein in der Menge der Prädikate quantifiziert wird, wird sogar ausdrücklich geleugnet; es wird die Konzeption einer „Stufigkeit" der Prädikatenlogistik entworfen und unterstellt, die Prädikatenlogistik sei zuerst als „Prädikatenlogistik erster Stufe" zu entwickeln, in der nur Quantifikationen über Individuenvariablen, nicht aber über Prädikate zulässig sei. Wäre dies richtig, dürften in den Formeln der Prädikatenlogistik keine „Prädikatvariablen" auftreten, da eine Quantifikation über Individuen nur bezüglich empirisch-konkreter Prädikate möglich ist; das Verallgemeinerungsniveau der theoretischen Logik könnte in einer solchen „Prädikatenlogistik erster Stufe" erst gar nicht erreicht werden.

Diese kurz umrissenen Unzulänglichkeiten – die Konzeption der Aussageformen, die fehlende oder unzureichende Einsicht in den *nicht*-„wahrheitsfunktionalen" Charakter vieler prädikatenlogistischen Behauptungen und die Leugnung der Tatsache, dass in der Prädikatenlogistik von vornherein und ausschließlich im Bereich der Prädikate quantifiziert wird – müssen bei der Beurteilung der Erweiterung der „Aussagenlogik" zur „Prädikatenlogik" immer in Rechnung gestellt werden.

Zu den Zeichen des SFG treten in der Prädikatenlogistik als Bezeichnungen für beliebige Individuen (Gegenstände) die Buchstaben $x, y, z, \ldots$, als Bezeichnungen beliebiger Prädikate die Buchstaben F, G, …P, Q, …, P_1, P_2, …), sowie als Bezeichnungen für den All- und Existenzquantor die Zeichen $\forall$ und $\exists$. Welche Bedeutungen Ausdrücke, die diese neuen Zeichen enthalten, annehmen, wird dabei von den vorausgesetzten Konzepten des SFG, insbesondere von den Gedankengefügen, mitgeprägt. Hält man sich strikt und ausschließlich an die Bedeutungen, die **FREGE** für alle diese Zeichen eindeutig und unmissverständlich festgelegt hat, lässt sich von *jeder* beliebigen Kombination dieser Zeichen eindeutig entscheiden, ob sie einen sinnvollen Ausdruck darstellt, was jeder sinnvolle Ausdruck bedeutet, ob die sinnvollen Ausdrücke benennend oder behauptend sind, und ob schließlich die behauptenden Ausdrücke wahr oder falsch sind. Ich gehe im Folgenden v.a. den Fragen nach, welche der prädikatenlogistischen Ausdrücke den Gesichtskreis des SFG überschreiten, ob mit den erweiterten Darstellungsmitteln logische Formen oder logische Gesetze, wenn ja, welche, bezeichnet werden können, und ob diese *logischen* Sachverhalte im Rahmen der „modernen Logik" sachgemäß, d.h. entsprechend den eigenen Festsetzungen aufgefasst werden.

4.3.2. Feststellungen: einem n-Tupel von Gegenständen wird ein n-stelliges Prädikat zugeordnet

In den Formeln der Prädikatenlogistik erscheinen weder Bezeichnungen empirisch-konkreter Prädikate und konkreter Prädikatoren auf wie „*Mensch*" – „*Mensch*(x)", „*größer oder gleich*" – „$n \geq m$" oder „*Vater*" – „*x* ist Vater von *y*", usw., noch Bezeichnungen konkreter Individuen oder Gegenstände (Eigenname und Kennzeichnungen) wie *Hans*, *der*

Vater von Johannes Sebastian Bach usw.; als abkürzende Bezeichnungen *konkreter* Prädikate/Prädikatoren verwende ich Frakturbuchstaben wie $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ usw., als abkürzende Bezeichnungen konkreter Individuen die Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, usw. Es kommen einzig Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate („Prädikatvariablen“) und Beliebig-Element-Zeichen für Individuen („Individuenvariablen“) vor. Da im Anschluss an FREGE Beliebig-Element-Zeichen keine oder zumindest keine rechte Bedeutung haben sollen, sie vielmehr für „nur andeutend“ und „mehrdeutig“ gelten und Beliebig-Element-Zeichen enthaltenden Ausdrücken eine präzise Bedeutung erst dann zugebilligt wird, wenn die Beliebig-Element-Zeichen durch entsprechende Bezeichnungen konkreter Prädikate und Individuen *ersetzt* werden, müssen wir zunächst prüfen, welche Arten prädikatenlogistischer Ausdrücke sich für diese konkreten Bezeichnungen in Kombination mit Bezeichnungen für Gedankengefüge und Quantoren bilden lassen.

Mit Hilfe der Ausdrücke „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$“, „$\mathfrak{Q}(\mathfrak{b})$“, usw. schreiben wir konkreten Gegenständen $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ bestimmte begriffliche Prädikate zu: „Mensch (Sokrates)“ in der Bedeutung „Sokrates ist ein Mensch“ oder „Dem Gegenstand/Individuum Sokrates kommt das Prädikat Mensch zu“ usw.; das Prädikat kann eine beliebige Stelligkeit aufweisen; der Ausdruck „$\leq(4,6)$“ hat die Bedeutung „4 ist entweder kleiner oder gleich 6“, der Ausdruck „liegt auf dem Zahlenstrahl zwischen (7, 3, 11)“ hat die Bedeutung „7 liegt auf dem Zahlenstrahl zwischen 3 und 11“, usw. Diese Ausdrücke sind wahrheitswertdefinite Feststellungen und können, wie alle Aussagen, durch Gedankengefüge gekennzeichnet werden, sofern ihre jeweiligen Wahrheitswerte schon bekannt sind. So ist die tautologisch vorgegebenen Wahrheitswerte ausdrückende Gedankengefügeaussage „Mensch (Sokrates) & $\leq(4,6)$“ wahr, die informationsverschleiernde Gedankengefügeaussage „Mensch (Sokrates) $\Rightarrow \leq (4,6)$“ ist wahr, die ebenfalls informationsverschleiernde Gedankengefügeaussage „Mensch(Sokrates) $\bowtie \leq (4,6)$“ ist hingegen falsch. Wir verbleiben noch völlig im Gesichtskreis des SFG mit seinen Prinzipien der Beziehungslosigkeit, der „Wahrheitsfunktionalität“ und Gehaltlosigkeit – jeder logische Zusammenhang bleibt noch außer Betracht.

4.3.3. Konkrete Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren als Aussageformen

Wird die Bezeichnung eines konkreten Prädikat $\mathfrak{P}$ mit Beliebig-Element-Zeichen für Individuen verbunden, erhalten wir Sachverhaltsausdrücke (Bezeichnungen von Sachverhalts-/Ereignisklassen) „$\mathfrak{P}(x)$“, „$\mathfrak{Q}(y)$“ – irgendeinem Gegenstand (des zu $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ gehörenden Bezugsbereichs) kommt $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ zu; die Ausdrücke „$\mathfrak{P}(x)$“ und „$\mathfrak{Q}(y)$“*benennen* Sachverhalte bestimmter Art (Sachverhalts-/Ereignisklassen); man nennt einen solchen Ausdruck $\mathfrak{P}(x)$ auch *Prädikator*: das konkrete Prädikat $\mathfrak{P}$ in der Zuordnung zu einem *beliebigen* Gegenstand des dazugehörenden Bereichs[47]. Alle derartigen benennenden Ausdrücke haben eine eindeutige Bedeutung und bezeichnen *realmögliche* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „Mensch (x)“ – z.B. „etwas ist ein Mensch“ – oder *nichtrealmögliche* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „Hobbit (x)“ – z.B. „etwas ist ein Hobbit“.

Aufgrund der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge bestimmen die Logistiker solche Ausdrücke für *konkrete* Sachverhalts-/Ereignisklassen wie „Mensch(x) $\Rightarrow$ Lebewesen(x)“ als *Aussageformen*, d.h. als uneigentliche, provisorische, „unbestimmte“ Scheinaussagen, die erst zu wahrheitswertdefiniten und bestimmten Aussagen werden, wenn in den Ausdrücken die Beliebig-Element-Zeichen für Individuen durch Bezeichnungen bestimmter Individuen (Eigennamen oder Kennzeichnungen für Gegenstände) ersetzt werden. Erst nach einer solchen Ersetzung werden durch das Gedankengefüge $\mathfrak{C}$ wahrheitswertdefinite Aussagen verbunden, wie es die Definition der Gedankengefüge erfordert. Aus jeder derartigen „Variablenersetzung“ resultiert eine wahrheitswertdefinite Aussage. „Aussageformen“ wie „$\mathfrak{P}(x)$“ und „$\mathfrak{Q}(y)$“ können so selber als eine Art von „Aussagevariablen“ betrachtet werden. Verbinden wir solche Ausdrücke durch Bezeichnungen von Gedankengefügen, erhalten wir Gedankengefügeschemata, wie „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)$“, „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow (\mathfrak{Q}(y) \Rightarrow \mathfrak{P}(x))$“. Für jedes Gedankengefüge-Schema – beispielsweise $A \Rightarrow B$ – erhalten wir beliebig viele solcher Ausdrücke mit konkreten Prädikatoren an Stelle der „Aussagevariablen“ – etwa „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)$“, „$\mathfrak{R}(x) \Rightarrow \mathfrak{S}(y)$“, usw. „$\mathfrak{P}(x) \vDash \mathfrak{Q}(x)$“ wird wahr für alle Gegenständen, denen $\mathfrak{P}$ ohne $\mathfrak{Q}$ zukommt; „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$“ wird wahr für alle Gegenstände, denen entweder $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ ohne $\mathfrak{P}$, oder weder $\mathfrak{P}$ noch $\mathfrak{Q}$ zukommen, „$\mathfrak{P}(x) \bowtie \mathfrak{Q}(x)$“ wird wahr für alle Gegenstände, denen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ genau und nur eines zukommt, usw. Solche durch Gedankengefüge verbundenen Prädikatoren nenne ich *Gedankengefügeprädikatoren* – es sind spezielle „Aussageformen“[48].

In diesen Ausdrücken erfahren die für das SFG geltenden Prinzipien der Zusammenhanglosigkeit und der „Wahrheitsfunktionalität“ eine bestimmte Einschränkung. Die Zusammenhanglosigkeit wird eingeschränkt, weil verschiedene Prädikatoren, denen ein Gedankengefüge zugesprochen wird, auf dieselbe Individuenvariable bezogen sind; im Ausdruck

„$\mathfrak{P}(x) \oplus \mathfrak{Q}(x)$“ werden beide Prädikatoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ *jeweils* demselben Ereignis-Bezugssystem zugesprochen: zwischen den aus Variablenersetzungen resultierenden Relata der Gedankengefüge-Aussagen „$\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$“, „$\mathfrak{P}(\mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{Q}(\mathfrak{b})$“, „$\mathfrak{P}(\mathfrak{c}) \oplus \mathfrak{Q}(\mathfrak{c})$“, usw. besteht *jeweils* insofern ein Zusammenhang, als der Gedankengefügeprädikator (bei jeder Variablenersetzung) jeweils ein und demselben Gegenstand zugesprochen wird. Bei solchen *konkreten* Gedankengefügeprädikatoren macht sich deshalb *indirekt* die jeweilige logische Beziehung, die zwischen den betreffenden Prädikatoren besteht, geltend (Einschränkung der „Wahrheitsfunktionalität“). Während sich zwei „Aussagevariablen“ A und B immer durch konkrete Aussagenpaare für alle überhaupt möglichen Wahrheitswertkombinationen ersetzen lassen, ist dies bei konkreten Prädikatoren, zwischen denen eine logische Dependenzbeziehung besteht, nicht der Fall. Für das Prädikatorenpaar (Fisch(x), Vogel(x)) gibt es im universellen Bereich aufgrund der logischen Unverträglichkeit der beiden Begriffe keine Ersetzung der „Individuenvariable“ x, aus der zwei wahre Aussagen resultieren; es ist daher unmöglich, dass man aus dem Gedankengefügeprädikator „Fisch(x) $\Uparrow$ Vogel(x)“ durch Variablenersetzung eine falsche Aussage erhält. In gleicher Weise gibt es wegen der Implikationsbeziehung zwischen den Begriffen *Mörder* und *Verbrecher* für den Gedankengefügeprädikator „Mörder(x) $\Rightarrow$ Verbrecher(x)“ keine Variablenersetzung, die eine falsche Gedankengefügeaussage zum Resultat hat, usw.

Dennoch sind solche Prädikatorengedankengefüge nicht zur Darstellung logischer Zusammenhänge geeignet, denn ein ◗-Gedankengefügeprädikator drückt nicht generell die logische Unverträglichkeit, ein ◖–Gedankengefügeprädikator drückt nicht generell die logische Implikation aus; es lassen sich ja beliebig viele Paare konkreter Prädikatoren finden, für die diese Gedankengefügeprädikatoren bei manchen Ersetzungen der Individuenvariablen wahr werden, ohne dass zwischen den Prädikatoren der betreffende logische Zusammenhang besteht. Die logische Beziehung der Unverträglichkeit lässt sich so wenig wie irgendeine andere logische Beziehung durch einen einfachen Gedankengefügeprädikator ausdrücken; denn wenn beispielsweise die ◗-Gedankengefüge-Aussage „katholisch(Frege) $\Uparrow$ Mecklenburger(Frege)“ wahr ist, so steht damit noch lange nicht fest, dass die Prädikate *katholisch* und *Mecklenburger* logisch unverträglich sind; diese Aussage über Frege stellt eine „Wahrheitsfunktion“ dar – ich muss, bevor ich die Gedankengefügeaussage treffe, schon wissen, dass zumindest eine der prädizierten Aussagen „katholisch(Frege)“ und „Mecklenburger(Frege)“ falsch ist. Dass der Gedankengefügeprädikator „Fisch($\mathfrak{a}$) $\Uparrow$ Vogel($\mathfrak{a}$)“ wahr ist, kann ich hingegen aus nicht-„wahrheitsfunktionalen“ Gründen wissen; ohne schon zu wissen, welche der beiden Feststellungen „Fisch($\mathfrak{a}$)“ und „Vogel($\mathfrak{a}$)“ falsch ist, weiß ich aufgrund der logischen Beziehung der beiden Prädikatoren, dass jedenfalls nicht beide wahr sein können; die Behauptung „Fisch($\mathfrak{a}$) $\Uparrow$ Vogel($\mathfrak{a}$)“ $\equiv$ „$\neg$(Fisch($\mathfrak{a}$) & Vogel($\mathfrak{a}$))“ ist damit, weil ihre Wahrheit nicht von der Wahrheit der verbundenen Feststellungen „Fisch($\mathfrak{a}$)“ und „Vogel($\mathfrak{a}$)“ abhängt, keine „Wahrheitsfunktion“ im Sinne des SFG.

Alle Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren können in „allgemeingültige“ SFG-Ausdrücke eingesetzt werden, d.h. sie können in einem Fregegesetz an die Stelle einer Aussagenbezeichnung oder an die Stelle einer „Aussagevariable“ treten, wobei die „Allgemeingültigkeit“ erhalten bleibt. Im Ausdruck des Fregegesetzes $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ lassen sich die „Aussagevariablen“ durch die Bezeichnungen konkreter Prädikatoren ersetzten; es resultieren dann beispielsweise Ausdrücken wie „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow (\mathfrak{Q}(y) \Rightarrow \mathfrak{P}(x))$“ oder „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow (\mathfrak{Q}(x) \Rightarrow \mathfrak{P}(x))$“. Im Ausdruck „$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$“ können die „Aussagevariablen“ auch durch Gedankengefügeprädikatoren beliebiger Komplexität ersetzt werden; wird A durch „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)$“ bzw. „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$“ und B durch „$\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(y)$“ bzw. „$\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x)$“ ersetzt, resultiert der allgemeingültige prädikatenlogistische Ausdruck

„$(\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)) \Rightarrow [(\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(y)) \Rightarrow (\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y))]$“ bzw. der Ausdruck

„$(\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)) \Rightarrow [(\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x)) \Rightarrow (\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x))]$“.

Ausgehend von den unbegrenzt vielen Fregegesetzen lassen sich auf diese Weise beliebig viele solcher *SFG-analogen*, gleichermaßen gehaltlosen wie überflüssigen prädikatenlogistischen Ausdrücke konstruieren; sie alle besagen, dass, welche zulässige Ersetzung für die Beliebig-Element-Zeichen für Individuen auch immer gewählt wird, die resultierende Aussage wahr wird, wobei die Behauptung der „Allgemeingültigkeit“ wie im SFG nicht gesondert herausgestellt wird, jedoch stets implizit gemeint ist. Die stets gleich lautende banale Wahrheit dieser Ausdrücke – keinem Gegenstand kann ein (Gedankengefüge-)Prädikator zugleich zukommen und nicht zukommen – kann mit den Mitteln des SFG (überflüssigerweise) bewiesen werden; die Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren sind einfach wie „Aussagevariablen“ zu behandeln[49]. Allerdings gelten alle diese aus Fregegesetzen gewonnen prädikatenlogistischen Ausdrücke wie schon die Fregegesetze selber als bloße Aussageformen, die implizit stets als „allgemeingültig“ aufgefasst und behauptet werden, und in dieser Weise wahre Aussagen über die Aussageformen sind: sie besagen, dass jede Substitution der „Aussage-“ oder „Individuenvariablen“ in der Aussageform auf eine wahre Aussage führt. Die Quantoren müssen, weil die „moderne Logik“ auf dem Konzept der Gedankengefüge errichtet ist, als solche Aussagen über die möglichen Substitutionen von Beliebig-Element-Zeichen in Aussageformen definiert werden.

4.3.4. Quantifikation als Aussage über die Erfüllbarkeit einer „Aussageform“ – gegenstandsbezogene und substitutionelle Konzeption der Quantifikation

Die Formeln des SFG enthalten keine Bezeichnungen einzelner wahrheitswertdefiniter Aussagen, sondern nur Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen („Aussagevariablen“); sie sind durchweg „Aussageformen“ und stellen Gesetzesaussagen nur insoweit dar, als implizit ihre Allgemeingültigkeit behauptet wird. So ist die SFG-Formel „$\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B]$“ immer als eine Erfüllbarkeitsaussage im Sinne einer Allquantifikation im Bereich der Aussagen gemeint und müsste korrekt und vollständig geschrieben werden: „$\forall A,B\ \{\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B]\}$“ mit der Bedeutung „Alle Aussagen, die durch Ersetzung der ‚Aussagevariablen‘ A und B in der Aussageform ‚$\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B]$‘ entstehen, sind wahr“. Es gibt also bereits im Rahmen des SFG (der „Aussagenlogik“) Quantifikationen.

Auch der aus dieser allgemeingültigen SFG-Formel „$\neg A \Rightarrow [(A \triangledown B) \Rightarrow B$“ gewonnene prädikatenlogistische Ausdruck „$\neg \mathfrak{P}x \Rightarrow [(\mathfrak{P}x \triangledown \mathfrak{Q}x) \Rightarrow \mathfrak{Q}x]$“ ist eine allgemeingültige Erfüllbarkeitsaussage (eine Allquantifikation der Gegenstände des zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gehörenden Bezugsbereichs) und wäre vollständig und korrekt darzustellen durch den Ausdruck „$\forall x\ \{\neg \mathfrak{P}x \Rightarrow [(\mathfrak{P}x \triangledown \mathfrak{Q}x) \Rightarrow \mathfrak{Q}x]\}$“, für den nur die substitutionelle Auffassung der Quantifikation (s.u.) zulässig ist: gemäß den Konzeptionen der „modernen Logik“ liegt keine Aussage über alle Gegenstände des zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gehörenden Bezugsbereichs vor, sondern eine Aussage über alle Aussagen, die durch Ersetzung der Individuenvariablen aus der Aussageform entstehen. *Die Quantifikation geschieht dabei stets im Bereich derjenigen „Variablen“, durch deren Beseitigung (Ersetzung durch entsprechende Konstanten) aus der Aussageform eine wahrheitswertdefinite Aussage gewonnen werden kann*.

Quantifikationen in der Prädikatenlogistik sind nichts anderes als solche Erfüllbarkeitsaussagen über „Aussageformen“, die Quantoren demnach Erfüllbarkeitsprädikate[50] Der „Allquantor“ (oder „Generalisator“, „Universalquantor“) $\forall$ und der „Existenzquantor“ (auch „Partikularisator“, „Einsquantor“) $\exists$ bringen im Rahmen der „modernen Logik“ zum Ausdruck, dass alle Aussagen bzw. zumindest eine der Aussagen, die sich aus der dem Quantorausdruck folgenden Aussageform gewinnen lassen, wenn die unmittelbar hinter dem Quantorzeichen stehenden Beliebig-Element-Zeichen in der Aussageform durch entsprechende „Konstanten“ ersetzt werden, wahr sind bzw. wahr ist. So setzt **Frege** als Bedeutung des Ausdrucks „$\forall x\, \Phi(x)$“ fest, „dass jene Funktion {die ‚Aussagefunktion‘ $\Phi(x)$} eine Tatsache {wahr} sei, was man auch als ihr Argument ansehen möge“, und „dass $\Phi(x)$ gelte, was man auch an die Stelle von x setzen möge.“ (BS 19)

Mit Hilfe der Quantoren werden also nicht, wie es dem außerlogistischen Verständnis und Gebrauch der All- und Existenzsätze entspricht und oft auch für die Prädikatenlogistik unterstellt wird, Gesetzesaussagen über *alle* oder über *einige* (im Sinne von *mindestens eines*, d.h. entweder *einige oder alle* oder *einige aber nicht alle*) Individuen/Gegenstände/Sachverhalte jenes Bereichs getroffen, dem die hinter dem jeweiligen Quantor stehenden Beliebig-Element-Zeichen zuzuordnen sind. In einem All- oder Existenzsatz möchten wir normalerweise etwas über die in Rede stehenden Gegenstände/Sachverhalte sagen, nicht aber über die sprachlichen Ausdrücke. Die Formen der Ereignislogik/Bedingungslogik kennen nur den direkten Objektbezug; der Ausdruck einer Implikation „$Px \rightarrow Qx$“ bringt stets zum Ausdruck, dass wenn immer irgendeinem *Gegenstand* x das Prädikat P zukommt, ihm notwendig auch das Prädikat Q zukommt, aber nicht umgekehrt; es geht dabei um den Zusammenhang von Gegenständen und prädikativer Bestimmtheit, nicht um Variablenersetzungen in einer Aussageform. Im Rahmen der Prädikatenlogistik stellen Quantifikationen hingegen Aussagen über die Wahrheit aller oder einiger Aussagen dar, die aus den überhaupt möglichen Variablenersetzungen in einer „Aussageform“ resultieren. „Die Quantifikatoren sind Funktoren, die aus einer Aussageform eine Aussage machen.“[51] „$\forall x\ \Phi x$“ bzw. „$\exists x\ \Phi x$“ ist jetzt nicht zu lesen als „Allen *Gegenständen* bzw. zumindest einem der *Gegenstände* des zugrunde gelegten Bereichs kommt das Prädikat Φ zu“, sondern als „Alle, bzw. einige der Aussagen, die durch die Ersetzung der ‚Variable‘ x in der Aussageform Φx entstehen, sind wahr“, wenn „Φx“ eine beliebige prädikatenlogistische Aussageform bezeichnet. Dieser Unterschied von *gegenstandsbezogener* und *substitutionenbezogener* Redeweise wird oft gar nicht zu Kenntnis genommen, oder beide Auffassungen werden einfach neben- und miteinander vertreten[52].

S. Haack spricht in diesem Zusammenhang von einem „objectional“ und „substitutional approach“: „In fact two styles of interpretation have been offered for the quantifiers. The *objectional interpretation* appeals to the *values* of the variables, the objects over which the variables range:

‚$\forall$x Fx‘ is interpreted as ‘For all objects x, in the domain, D, Fx‘ …

The *substitutional approach* appeals, not to the values, but to the *substituends* for the variables, the expressions, that is, that can be substituted for the variables:

‚$\forall$x Fx‘ is interpreted as ‚all substitution instances of ‚F …‘ are true‘. …

I think, that the objectional interpretation is generally thought of as standard, the substitutional as a challenger whose credentials stand in need of scrutiny. There are two views about the status of the two styles of interpretation: that they are rivals, only one of which can be ‚right‘; or that they may both have their uses.” … The choice may have important philosophical consequences.”[53] Die Vorentschiedenheit für die substitutionelle Konzeption der Quantifikation hat in der Tat „bedeutende philosophische Konsequenzen”; sie beeinträchtigt nachhaltig das Verständnis des Logischen.

Weil in den prädikatenlogistischen Ausdrücken fregesche Gedankengefüge vorkommen und logische Formen grundsätzlich nur mit Hilfe von Gedankengefügen, die als Relata nur wahrheitswertdefinite Aussagen aufweisen können, dargelegt und dargestellt werden, ist eine gegenstandsbezogene „Interpretation“ der prädikatenlogistischen Quantifikation gar nicht möglich. Nach der gegenstandsbezogenen Auffassung müsste der Ausdruck „$(\forall x)\,\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x$“ besagen, dass für alle *Gegenstände* x des Bezugsbereichs gilt, dass es unmöglich ist, dass $\mathfrak{F}$ einem Gegenstand x zukommt und diesem Gegenstand x $\mathfrak{G}$ nicht zukommt; es würde dabei um den logischen Zusammenhang zwischen den Sachverhaltsklassen *einem Gegenstand x kommt das Prädikat* $\mathfrak{F}$ *zu* und *diesem Gegenstand x kommt das Prädikat* $\mathfrak{G}$ *zu* gehen. Da das Zeichen „$\Rightarrow$“ jedoch nicht auf das Zukommen von Prädikaten, sondern nur auf die vorgegebene Wahrheit von Aussagen anwendbar ist, ist ein Ausdruck wie „$\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x$“ gar nicht definiert, da „$\mathfrak{F}x$“ und „$\mathfrak{G}x$“ keine Aussagen bezeichnen; erst wenn die „Individuenvariable“ x durch einen Eigennamen $\mathfrak{a}$ ersetzt wird, erhalten wir eine korrekte Gedankengefügeaussage – „$\mathfrak{F}\mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a}$“. Mit der Definition der Gedankengefüge verträglich ist nur die substitutionelle Leseart „Alle Aussagen, die sich aus einer der möglichen zulässigen Substitutionen von x in der ‚Aussageform‘ ‚$\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x$‘ ergeben, sind wahr“ zulässig.

Als Zeichen für einen beliebigen Quantor verwende ich im Folgenden die Zeichen „$\mathfrak{Q}$“, „$\mathfrak{Q}_1$“, „$\mathfrak{Q}_{.2}$“, usw.

4.3.5. Die Prädikatenlogistik und der Gebrauch von „Prädikatvariablen“

In den Formeln der Prädikatenlogistik kommen nur „Prädikatvariable“ vor, also Ausdrücke wie „Px“, „$Px \Rightarrow Qx$“ und „$\neg Px \Rightarrow [(Px \triangledown Qx) \Rightarrow Qx]$“. Entgegen der logistischen Ansicht einer angeblichen Mehrdeutigkeit und Unbestimmtheit der Beliebig-Element-Zeichen bezeichnet der Ausdruck „Px“ den wohlbestimmten allgemeinen *logischen Sachverhalt* (Sachverhaltsklasse), dass irgendein einstelliges Prädikat P irgendeinem Gegenstand des entsprechenden Bezugsbereichs zukommt; diese begrifflich bestimmte Sachverhaltsklasse Px ist wohlabgegrenzt gegenüber anderen logischen Sachverhalten bestimmter Art (etwa vom Sachverhalt, dass einem Gegenstand irgendein Prädikat nicht zukommt, oder dass zwei Gegenständen ein zweistelliges Prädikat zukommt) und der Sachverhalt kann wohlbestimmter Prädikand eines Urteils sein (etwa des Urteils, dass entweder Px oder $\sim$Px zutreffen muss). Die Erkenntnis und Darstellung logischer Formen und Gesetze ist ohne Gebrauch solcher Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate unmöglich. Wegen der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge kann der Ausdruck „$Px \Rightarrow Qx$“ jedoch nicht einfach als *benennende* Bezeichnung des Sachverhalts, dass irgendein Prädikat P einem Gegenstand des betreffenden Bezugsbereichs zukommt, ohne dass ihm ein anderes Prädikat Q zukommt, angesehen werden, denn nicht Sachverhaltsklassen, sondern nur behauptende Aussagen kommen als Relata des Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ in Betracht; in der „modernen Logik“ spielt aus diesem Grunde der für die Logik konstitutive Begriff der Sachverhalts-/Ereignisklasse keine Rolle.

Ausdrücke mit empirisch-konkreten Prädikatoren und Gedankengefügen wie „Mensch(x) $\Rightarrow$ Lebewesen(x)“ werden in der Logistik als Aussageformen betrachtet; nach der Konzeption der Aussageformen können jedoch Ausdrücke, die beliebige Prädikatoren Px, Qx,… durch Gedankengefüge verbinden wie „$Px \Rightarrow Qx$“ oder „$Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“, nicht schon als Aussageformen betrachtet werden. Es müssen über Aussageformen Erfüllbarkeitsaussagen getroffen werden können, d.h. Quantifikationen, die sich auf Beliebig-Element-Zeichen beziehen, die in der Aussageform vorkommen. Aber weder hinsichtlich der „Individuenvariablen“ x noch der „Prädikatvariablen“ P und Q ergeben sich für Ausdrücke wie „$Px \Rightarrow Qx$“ und „$Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ Erfüllbarkeits*aussagen*. Aus den Ausdrücken entsteht vielmehr erst eine **Erfüllbarkeits*aussageform***, wenn den Ausdrücken ein Quantor $\mathfrak{Q}$x vorangestellt wird: die Aussageform „$\forall x\ (Px \Rightarrow Qx)$ wird für *einige* Ersetzungen der „Prädikatvariablen“ P und Q durch Bezeichnungen empirisch-konkreter Prädikate wahr: diese Erfüllbarkeitsaussage ist eine Existenzquantifikation im Bereich der Prädikate: $\exists P,Q\ [\forall x\ (Px \Rightarrow Qx)]$; die Erfüllbarkeitsaussageform „$\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]$“ $\equiv$ „$\forall x \sim[Px\ \&\ {\sim}Px\ \&\ {\sim}Qx)]$“ wird dagegen für *jede* derartige Ersetzung der „Prädikatvariablen“ eine wahre Erfüllbarkeitsaussage: $\forall P,Q\ \{\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]\}$.

Ausdrücke wie „$Px \Rightarrow Qx$“ oder „$Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ werden also überhaupt erst dann zu sinnvollen Aussage*formen*, wenn sie – zumindest implizit – als im Bereich der Individuen x quantifiziert aufgefasst werden. Alle Ausdrücke der Prädikatenlogistik, zusammengesetzt aus „Prädikatvariablen“, „Individuenvariablen“, Gedankengefügebezeichnungen sind als solche Erfüllbarkeitsaussageformen gemeint. Wird von Erfüllbarkeits*aussageformen* die Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit oder Nichterfüllbarkeit ausgesagt, so ist dies eine Erfüllbarkeits*aussage* über Erfüllbarkeitsaussage*formen* – wir haben eine *zweistufige* Quantifikation: zunächst wird eine Erfüllbarkeitsaussage (Quantifikation) über Formeln wie „$\forall x\, Px$“ getroffen: diese prädikatenlogistische Aussageform wird für jede oder für zumindest eine oder für keine Ersetzung der Prädikatvariable(n) durch empirisch-konkrete Prädikate zu einer wahren Erfüllbarkeitsaussage. Für die Formel „$\forall x\, Px$“ ergibt sich die Erfüllbarkeitsaussage „$\exists P\ (\forall x\, Px)$“ in der Bedeutung „es gibt zumindest ein empirisch-konkretes Prädikat $\mathfrak{F}$, für welches die Aussageform $\forall x\ \mathfrak{F}x$ bei *jeder* Ersetzung der Individuenvariable x zu einer wahren Feststellung wird“ (1. Quantifikation im Bereich der Prädikate)[54]. Jede dieser aus einer Prädikatvariablenersetzung resultierende Erfüllbarkeitsaussage ist ihrerseits eine Erfüllbarkeitsaussage – jetzt aber im Bereich der Individuen/Gegenstände, die zum jeweiligen empirisch-konkreten Prädikat $\mathfrak{F}$ gehören (2. Quantifikation im Bezugsbereich der zum jeweils gewählten empirisch-konkreten Prädikat gehörenden Individuen). Diese zweistufige Quantifikation (Erfüllbarkeitsaussage) zeichnet alle prädikatenlogistischen Formeln aus.

Die Erfüllbarkeitsaussage „$\forall P, Q\ \{\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]\}$“ behauptet die Allgemeingültigkeit der Erfüllbarkeitsaussageform „$\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]$“; alle Formeln der Prädikatenlogistik werden implizit als solcherart allgemeingültig qualifiziert. Dies bedeutet, dass diese Formeln, denen zumindest implizit immer ein die „Prädikatvariablen“ betreffender Quantor voranzustellen ist, ihren Sinn verlieren würden, wenn die Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate durch Bezeichnungen empirisch-konkreter Prädikate ersetzt würden, da die „Prädikatvariablen“ durch den Quantor „gebunden“ sind[55]. Die im Rahmen der „modernen Logik“ vorherrschende Meinung, die Formeln der Prädikatenlogistik erhielten erst dann eine Bedeutung, wenn die „Prädikatvariablen“ nachträglich durch empirisch-konkrete Prädikate ersetzt und dadurch einer „Belegung“ und „Interpretation“ unterzogen würden[56] ist falsch, denn eine solche „Belegung“ und „Interpretation“ würde den Formeln jeden Sinn nehmen – da zu diesem Sinn immer schon die Quantifikation im Bereich der Prädikate gehört.

Korrekt gebildete prädikatenlogistische Formeln, die nur Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate beliebiger Stelligkeit, Beliebig-Element-Zeichen für entsprechende Individuen und Bezeichnungen von Gedankengefügen enthalten sollen durch den Ausdruck $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$ bezeichnet werden. Eine solche Form haben etwa die Ausdrücke $Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$, $[{\sim}F(x) \Downarrow (G(x) \Leftarrow H(x)] \triangledown H(x)$ und $R_1(x,y) \Rightarrow R_2(x,y)$. Solche Ausdrücke sind – anders als „Gedankengefügeprädikatoren“ wie $[\text{Mensch}(x) \Rightarrow (\text{Vogel}(x) \triangledown \text{Mensch}(x)]$ – noch keine Aussageformen; man könnte von *Gedankengefügeprädikator-Schemata* reden. Die Ausdrücke werden zum einen erst dann zu Aussageformen, wenn die „Prädikatvariablen“ durch Bezeichnungen konkreter Prädikate ersetzt werden; da in den prädikatenlogistischen Formeln keine derartigen Prädikate vorkommen, fällt diese Möglichkeit weg. Aus den Gedankengefügeprädikator-Schemata können so nur dadurch Aussageformen, nämlich Erfüllbarkeitsaussageformen, entstehen, wenn dem Ausdruck ein Quantor vorangestellt wird, der die Individuenvariablen „bindet“. Da von den Formeln Allgemeingültigkeit gefordert wird, kommt dafür nur der Allquantor in Frage[57]. Die „Behauptung“ einer derartigen Formel besagt dann, dass diese Erfüllbarkeitsaussageform für jede Ersetzung der Prädikatvariablen zu einer wahren Allgemeingültigkeitaussage wird. Prädikatenlogistische Gedankengefügeprädikator-Schemata sind also in doppelter Weise elliptisch: ein Ausdruck $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$ meint die Erfüllbarkeitsaussageform $\forall(x_1, \ldots, x_n)\ [\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)]$, deren Allgemeingültigkeit behauptet wird: $\forall(P_1,\ldots,P_n)\ \{\forall(x_1, \ldots, x_n)\ [\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)]\}$. Die Formel $Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$ ist zu vervollständigen zu: $\forall(P,Q)\ \{\forall x\ [Px \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]\}$, der Ausdruck $[{\sim}F(x) \Downarrow (G(x) \Leftarrow H(x)] \triangledown H(x)$ ist zu vervollständigen zu: $\forall(F,G,H)\ \{\forall x\ [({\sim}F(x) \Downarrow (G(x) \Leftarrow H(x)) \triangledown H(x)]\}$.

Was die Negation einer prädikatenlogistischen Formel bewirkt, kann nur erkannt werden, wenn der (einfach oder zweifach elliptische Charakter dieser Formeln beachtet wird[58]. Für eine Formel der vollständigen Ausdrucksgestalt $\forall(P_1,\ldots,P_n)\ \{\forall(x_1, \ldots, x_n)\ [\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)]\}$ – abgekürzt dargestellt: $\forall P \ldots \forall x \ldots \mathcal{F}$ – gibt es 3 elementare Negationen und vier Kombinationen dieser elementaren Negationen:

(1) $\sim\forall P \ldots \forall x \ldots \mathcal{F}$
(2) $\forall P \ldots \sim\forall x \ldots \mathcal{F}$
(3) $\forall P \ldots \forall x \ldots \sim \mathcal{F}$
(4) $\sim\forall P \ldots \sim\forall x \ldots \mathcal{F}$
(5) $\sim\forall P \ldots \forall x \ldots \sim \mathcal{F}$
(6) $\forall P \ldots \sim\forall x \ldots \sim \mathcal{F}$
(7) $\sim\forall P \ldots \sim\forall x \ldots \sim \mathcal{F}$

4.3.6. Die Leugnung der Quantifikation im Bereich der Prädikate und die Vorstellung von „Prädikatenlogiken" unterschiedlicher Stufen

Das übliche Verständnis der Prädikatenlogistik zeigt eine merkwürdige und schwerwiegende Inkonsequenz: es kommen in den Formeln der Prädikatenlogistik nur „Prädikatvariablen" und grundsätzlich keine Bezeichnungen konkreter Prädikate vor; diese Ausdrücke benennen oder beurteilen demnach beliebige Prädikate und ihrem logischen Zusammenhang, was notwendigerweise auch eine Quantifikation im Bereich der Prädikate involviert. Erst in der Untersuchung von Bestimmungen und Gesetzen, die jedes *beliebige* Prädikat betreffen, konstituiert sich die theoretische Logik. Dass in der Prädikatenlogistik notwendigerweise Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate vorkommen und deshalb auch Quantifikationen im Bereich der Prädikate vorgenommen werden, wird von den Vertretern der „modernen Logik" jedoch durchweg ignoriert, oft sogar ausdrücklich geleugnet; dies verunmöglicht jedes sachgerechte Verständnis der Bedeutungen der prädikatenlogistischen Formeln. Insbesondere vertreten die Logistiker die Meinung, in der „elementaren" Prädikatenlogistik (der so genannten *Prädikatenlogik erster Stufe*) käme eine Quantifikation über Prädikate noch gar nicht vor.

Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate – in der Regel die Buchstaben P, Q, R, … oder F, G, H, … – werden oft wie empirisch-konkrete Prädikate (oder Abkürzungen solcher Prädikate) gefasst. Bereits bei **Frege** ist unklar, ob der Buchstabe Φ (abkürzend) ein empirisch-konkretes Prädikat oder ein beliebiges Prädikat bezeichnet: Zuerst ist „Φ(A)" für ihn der Ausdruck einer „unbestimmten Funktion des Argumentes A" (BS 18) – als „unbestimmte Funktionen" kennzeichnet er ja unsachgerecht beliebige Prädikationen. Dann aber soll der Ausdruck „$\forall x\,\Phi x$" das *Urteil* ausdrücken, „dass jene Funktion {Prädikation} eine Tatsache {wahr} sei, was man auch als ihr Argument ansehen möge" (BS 19); der Ausdruck „Φ(A)" soll also besagen, dass bei jeder Ersetzung der „Individuenvariable" x durch einen geeigneten Eigennamen soll aus der Aussageform Φx eine wahrheitswertdefinite Aussage wird. Das aber ist nur der Fall, wenn „Φ" (abkürzend) ein konkretes, ganz bestimmtes Prädikat bezeichnet; ist „Φ" aber eine „unbestimmte Funktion", dann ist $\Phi\mathfrak{a}$ (für den Eigenname $\mathfrak{a}$) keine wahrheitswertdefinite Aussage. Nicht aus dem Ausdruck „Φx" ergibt sich durch Ersetzung der „Individuenvariable" eine wahrheitswertdefinite Aussage, sondern erst aus dem *ganzen* Ausdruck „$\forall x\,\Phi x$" und zwar durch Ersetzung der „Prädikatvariablen" Φ durch ein empirisch-konkretes Prädikat; es ergibt sich dann aber keine wahrheitswertdefinite Feststellung wie $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$, sondern eine wahrheitswertdefinite *Erfüllbarkeitsaussagen* wie „∃x [Sterblich(x)]"; in diesem Aussagenausdruck darf die „Individuenvariable" x gar nicht beseitigt werden. Auch **A. Menne** behandelt „Prädikatvariablen" wie „Prädikatkonstanten", wenn er den Ausdruck „$f(x)$" eine *Aussageform* nennt, aus der man „durch Einsetzung von Konstanten für die Variable {x} … wieder wahre oder falsche Aussagen" erhalte[59]. Tatsächlich aber ist der Ausdruck „$f(x)$" noch keine Aussageform, eine solche erhalten wir aus dem Ausdruck erst, wenn wir die „Prädikatvariable" durch ein konkretes Prädikat ersetzen oder dem Ausdruck einen x-Quantor voranstellen.

Diese Unklarheit über den eigenen Gebrauch „Prädikatvariablen" kennzeichnet die „moderne Logik" bis heute; sie äußert sich etwa in der Ansicht, es sei der Gebrauch von „Individuenvariablen", der die „Prädikatenlogik" charakterisiere. **Hilbert** und **Bernays** schreiben: „Wir gelangen … durch die Einführung der Individuenvariablen von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik."[60] In Wirklichkeit ist es allein der Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate, der die (Prädikaten-)Logik auszeichnet. Der Gebrauch von „Prädikatvariablen" im Rahmen der „elementaren" Prädikatenlogistik wird jedoch oft ausdrücklich bestritten. „Die scharfe Abgrenzung der *elementaren Logik* (oder Logik erster Stufe) von der darüber hinausgehenden Logik höherer Stufe ergibt sich dadurch, dass wir *nur* Individuenvariablen zulassen und keine generellen Variablen für Klassen, für Relationen oder für Funktionen (wenn auch natürlich in unserem System viele spezielle Klassen, Relationen und Funktionen Individuen sein können)."[61] Die Leugnung des doch offenkundigen eigenen Gebrauchs von „Prädikatvariablen" zeigt sich vor allem in der Überzeugung, in der Prädikatenlogistik bezögen sich die Quantoren ausschließlich auf Individuenvariablen. „In der klassischen Quantorentheorie beziehen sich die Quantoren ∀ und ∃ nur auf Individuenvariablen."[62] Auch **QUINE** leugnet Gebrauch von und Quantifikation über Prädikatvariablen; er rechnet die Bezeichnungen beliebiger Aussagen oder Prädikate (P, Q…F, G…), wie sie in allen prädikatenlogistischen Ausdrücken vorkommen, nicht zu den echten „Variablen", sondern bezeichnet sie nur als „Schemabuchstaben", sie seien „bloß Platzhalter für Sätze und Termini, die in Schemata benutzt werden, die ihrer äußeren Form nach Sätzen gleichen."; im Gegensatz zu den Individuenvariablen x, y, z,… von denen sich diese „Schemabuchstaben" „in ihrer Funktion wesentlich" unterschieden, könnten diese Schemabuchstaben nicht mit Hilfe von Quantoren in abgeschlossenen Sätzen vorkommen[63] – eine Quantifikation im Bereich der Prädikate wird also ausdrücklich bestritten. Eine solche Quantifikation komme erst in „Prädikatenlogiken höherer Stufe" vor. „In der Prädikatenlogik {erster Stufe} können nur die Individuensymbole unmittelbar hinter einem Quantor erscheinen. Nur diese Symbole dürfen also *quantifiziert* werden. Man kann die Sprache erweitern dadurch, dass man im einfachsten Falle auch die Quantifizierung der Prädikatensymbole zulässt. Damit kommt man zu Sprachen der Prädikatenlogik der zweiten Stufe."[64]

Die Unterscheidung von *Prädikatenlogiken unterschiedlicher und beliebig hoher Stufigkeit* hat keinerlei sachliche Berechtigung. Die Postulierung einer nach oben unbegrenzten Reihe von „Prädikatenlogiken" zunehmender Stufigkeit ist der Versuch, den Fortgang von Begriffen erster zu solchen zweiter Stufe endlos fortzusetzen. Die Vorstellung, ein solcher Fortgang sei nicht nur möglich, sondern sogar notwendig, stützt sich weniger auf die tatsächliche Bildung von Begriffen einer höheren Stufigkeit als 2 und der Darlegung ihres kognitiven Gehalts und Nutzens, als auf die „mechanisch"-gedankenlose, rein verbale Bildung der (fiktiven) Reihe:

„Prädikatenlogik erster Stufe"	Individuen werden Prädikate erster Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Individuen/Gegenstände, die den jeweiligen Bezugsbereichen der Prädikate erster Stufe angehören
„Prädikatenlogik zweiter Stufe"	Prädikaten erster Stufe werden Prädikate zweiter Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Prädikate erster Stufe
„Prädikatenlogik dritter Stufe"	Prädikaten zweiter Stufe werden Prädikate dritter Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Prädikate zweiter Stufe
…	…	…
„Prädikatenlogik (n+1)-ter Stufe"	Prädikaten n-ter Stufe werden Prädikate (n+1)-ter Stufe zugesprochen	Quantifikation im Bereich der Prädikate n-ter Stufe
	usw.	

Die Rede von Prädikaten dritter, siebzehnter oder siebentausendster Stufe wäre nur dann sinnvoll, wenn derartige Begriffe auch definiert und in ihrem jeweiligen spezifischen Gehalt erläutert und dargelegt werden könnten. Wenn wir in den Schriften von Logistikern nach Begriffen zweiter, dritter, vierter, fünfter, n-ter Stufe suchen, werden wir allerdings enttäuscht. Wohl werden einige Begriffe zweiter Stufe angeführt – die aber oft gar keine Begriffe zweiter Stufe sind[65]. Die Stichhaltigkeit der Vorstellung einer solchen unbegrenzten Reihe können wir nur bewerten, wenn wir eingehend die jeweilige Eigenart der Begriffe erster und zweiter Stufe, ihr Verhältnis und insbesondere die Bedingungen des Übergangs von den ersten zur den zweiten untersuchen. Nur dann kann entschieden werden, ob ein weiterer Fortgang möglich ist.

4.3.6.1. Das vortheoretische gegenständliche Wissen

Eine „Prädikaten*logik* erster Stufe" kann nicht durch den Gebrauch von *Prädikaten erster Stufe* und durch die *Quantifikation über die Individuen* der zu diesen Begriffen gehörenden Bereiche, charakterisiert werden: diese Kriterien kennzeichnen einzig das jeder theoretischen Logik vorhergehende, gegenstandsbezogene alltägliche, praktisch-rationale Erkennen. Die theoretische Logik, der ja diese „Prädikatenlogik erster Stufe" zugerechnet werden müsste, schließt den Gebrauch von Prädikaten erster Stufe und die Quantifikation über Gegenstände, d.h. die Aufstellung konkreter, empirischer Gesetze, sogar ausdrücklich aus, denn die theoretische Logik unterscheidet sich hinsichtlich ihrer Intentionalität und Fragestellung grundlegend vom praktisch-gegenständlichen Denken.

Das gegenständlich-praktische Wissen befasst sich mit den einzelnen Gegenständen der Lebenswelt, mit ihrer jeweiligen konkreten begrifflichen Bestimmung, mit ihren bedingungslogischen Gesetzmäßigkeiten und ihrer kausalen Wechselwirkung; nur dadurch ermöglicht es die praktischen, lebenserhaltenden Zielen dienende Handhabung und effektive Veränderung dieser Gegenstände. Inhalt dieses Erkennens sind immer die *einzelnen* Gegenstände, mit ihren Eigenschaften, verschiedenen möglichen Zuständen. Nur diesen *je besonderen* Inhalten gilt Interesse und Aufmerksamkeit der Erkenntnistätigkeit, nicht etwa dem allgemeinen Charakter und den Gesetzmäßigkeiten der Erkenntnistätigkeit selbst; solche erkenntnisbezogenen Fragestellungen werden durch die praktischen Aufgaben ausgeschlossen, denen dieses praktische Erkennen dient.

Die Erkenntnis dieser Gegenstände wird durch ihren systematischen, umfassenden logisch-vergleichenden Bezug ermöglicht, durch den die Gleichheiten und Unterschiede der Gegenstände bestimmbar werden; die einzelnen Gegenstände werden in ein Netz differenzierter begrifflicher Bestimmungen eingeordnet. Die gegenständlichen Begriffe erster Stufe bestimmen auf diese Weise die Gesetzmäßigkeiten, denen die einzelnen Dinge unterworfen sind: es muss begründet erkannt sein, von welcher Art ein Ding ist (Gesetze sind in ihrer Geltung ja immer auf Dinge bestimmter Art begrenzt); welche bleibenden Eigenschaften und wechselnden Zustände ihm – als Gegenstand betreffender Art – bezüglich der gegebenen Umstände notwendig, möglicherweise ($\mathcal{M}$) oder zufällig zukommen; diese Bestimmungen der Art, der Eigenschaften, Relationen und Zustände sind immer allgemein-begrifflich. Bei jeder Einzelnes betreffenden Feststellung und Vorhersage kommen Begriffe erster Stufe ins Spiel.

Diese Begriffe erster Stufe stehen in umfassenden bedingungslogischen Gesetzesbeziehungen. In jeder Feststellung werden solche bedingungslogischen Gesetze schließend auf den einzelnen Gegenstand angewandt. Diese konkrete bedingungslogische Gesetzeserkenntnis involviert *Quantifikation in Individuenbereichen*: „Allen/einigen Individuen aus dem Bezugsbereich **B** kommt das Prädikat $\mathfrak{P}$ (nicht) zu“; „Wenn irgendein Individuum aus **B** den Zustand $\mathfrak{Z}$ aufweist, weist es den Zustand $\mathfrak{Y}$ auf“. „In allen (nicht in allen/in einigen) Fällen, in denen einem Individuum aus **B** eine bestimmten Eigenschaft $\mathfrak{P}$ zukommt, kommt ihm die Eigenschaft $\mathfrak{Q}$ nicht zu“ usw.

Diese „Quantifikation über Individuen“ ist die Weise, wie gegenständlich-empirisches Gesetzeswissen ausgedrückt wird: solche Quantifikationen werden umgangssprachlich nicht nur durch solche Wörter wie ‚alle‘, ‚kein‘, ‚jeder‘, ‚manche‘ usw., sondern auch durch logische Conjunktionen ausgedrückt: Wenn $\mathfrak{p}$, dann $\mathfrak{q}$ bedeutet: *jeder* Sachverhalt/*jedes* Ereignis von der Art $\mathfrak{p}$ ist mit einem Sachverhalt/Ereignis von der Art $\mathfrak{q}$ verbunden (tritt mit ihm auf, usw.). Quantifikation über „Individuenvariablen“ setzt keineswegs die symbolischen Darstellungsmittel der Logik voraus; die logischen Darstellungsmittel der Umgangssprachen (Determinatoren, Konjunktionen, Adverbialausdrücke, Indefinitpronomina usw.) sind hinreichend präzise und differenziert.

Die Quantifikation über Gegenstände drückt eine logische Beziehung zwischen Begriffen erster Stufe aus: Wenn allen Dingen, denen ein konkreter Begriff $\mathfrak{P}$ zukommt, nie ein konkreter Begriff $\mathfrak{Q}$ zukommt, dann sind diese beiden Begriffe $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ unverträglich – es wird also zwei Begriffen erster Stufe eine Relation zugeschrieben; wenn allen Dingen, denen ein Begriff $\mathfrak{P}$ zukommt, stets auch ein Begriff $\mathfrak{Q}$ zukommt, aber nicht umgekehrt, dann stehen die beiden Begriffe in der Beziehung der Implikation. Schon vor jeder logischen Reflexion werden Begriffen erster Stufe selbst schon Bestimmungen (bestimmte logische Verhältnisse) zugeschrieben[66].

Das vortheoretische Verständnis der logischen Relationen ist durch ein nur implizites, ganz unreflektiertes, konkretistisches Verständnis der logischen Formen, die ja Formen der relativen Modalisation sind, charakterisiert: es muss so sein – es kann so sein – es kann nicht so sein. Die logischen Zusammenhänge werden in folgender Weise aufgefasst: irgendeinem Gegenstand kommt der Begriff $\mathfrak{P}$ zu; ist es dann notwendig, möglich, zufällig oder unmöglich, dass ihn eine andere bestimmt begriffliche Bestimmung zukommt?[67] Die vielfältigen bedingungslogischen Zusammenhänge, die das gegenständlich-praktische Denken kennt, sind dabei nicht explizit als solche in ihrer Allgemeinheit bewusst, die Kenntnis dieser Formen ist noch untrennbar an den jeweiligen besonderen gegenständlichen Inhalt gebunden; die logische Stimmigkeit fällt völlig zusammen mit der jeweiligen besonderen sachlichen Richtigkeit, mit der widerspruchsfreien Koordination der Beobachtungen und der besonderen empirischen Gesetze. Es werden nur besondere gegenständliche Inhalte modalisierend in Beziehung gesetzt; es werden noch nicht alle jene Begriffe erster Stufe, die in einer ganz bestimmten logischen Beziehung stehen, gegen alle jene Begriffe erster Stufe abgegrenzt, zwischen denen andere logische Beziehungen bestehen. Auf der Ebene der praktisch-gegenständlichen Erkenntnis können zwar die verschiedensten implikativen Zusammenhänge entdeckt und verstanden werden, es ist aber nicht möglich – eben aufgrund der Zentrierung auf die gegenständlichen Inhalte –, etwa die durch einen Wenn- oder Allsatz ausgedrückte Beziehung der Implikation als solche, unabhängig vom besonderen gegenständlich-sachlichen Gehalt in ihrer allgemeinen Struktur und im Unterschied zu allen andersartigen logischen Verhältnissen bewusst zu machen. Sowenig das alltägliche praktisch-gegenständliche Denken die Prädikate erster Stufe als solche klassifiziert und begrifflich bestimmt, sowenig verfügt es über einen ausgearbeiteten klaren Begriff der einzelnen bedingungslogischen Beziehungen als solcher. Wäre es anders, wären die Versuche der theoretischen Logik überflüssig. Die Bewusstwerdung des Logischen setzt eine Umkehr der Intentionalität voraus: das erkennende Bewusstsein muss sich von den besonderen gegenständlichen Inhalten weg hin zu allgemeinen Bedingungen der Erkenntnis beliebiger Inhalte selbst wenden. Die Logik beginnt mit dem reflexiven Rückbezug auf das eigene Wissen in seinem ganzen Umfang (die so genannte *intentio obliqua*).

4.3.6.2. Die Intentionalität der theoretischen Logik

Ihren Fragestellungen gemäß bemüht sich die theoretische Logik nicht um die Erkenntnis der einzelnen Gegenstände in ihrer jeweils besonderen Gesetzmäßigkeit, sondern sie zielt auf die Art der logischen Bestimmungen, wie sie in allen diesen besonderen Bereichen in gleicher Weise vorgenommen werden; die Frage ist nicht mehr, welcher Zusammenhang zwischen diesen oder jenen konkreten Sachverhalten bestimmter Art besteht, sondern unter welchen Bedingungen einem Paar *beliebiger* Begriffe erster Stufe diese oder jene logische Beziehung (Implikation, Exklusion, Independenz usw.) zukommt. Welche verschiedenen *Arten* von Begriffen erster Stufe gibt es, welche Art von Zusammenhang drücken sie jeweils aus? Welche unterschiedlichen *Arten* logischer Zusammenhänge gibt es, was ist der Unterschied, was ihre allgemeine Struktur, welche Beziehung bestehen selber zwischen diesen Formen? Lässt sich jede beliebige logische Relation konstruieren?

Es sind drei zusammengehörende Charakterzüge der theoretischen Logik, die die Untersuchung dieser neuartigen Fragestellungen ermöglicht: der Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate, die Bildung von Begriffen zweiter Stufe, und die Quantifikation über Prädikate.

1. Aufgrund ihrer spezifischen Problemstellungen erstrebt die theoretische Logik eine *neue Art der Verallgemeinerung*. Auf der Ebene des gegenständlich-praktischen Denkens besteht die Verallgemeinerung darin, dass neue Gegenstände in bestehende begriffliche Konzepte erster Stufe eingeordnet werden, wobei diese Ausweitung der Begriffe immer mit ihrer Differenzierung verbunden ist; die Intentionalität des Erkennens bleibt auf die gegenständliche Wirklichkeit gerichtet (*intentio recta*), die Verallgemeinerungen haben eine *linearen* Charakter. Die theoretische Logik gewinnt ihre Einsichten durch eine verallgemeinernde *Reflexion* gegenständlichen Wissens, das Erkennen beginnt, sich auf sich selbst zu richten (*intentio obliqua*). Die Logik muss die begrifflichen Prädikate selber auf den Begriff bringen, sie muss die Normen erforschen, denen jedes beliebige Prädikat unterliegt, sie muss erkunden, welche unterschiedliche Arten von Begriffen es gibt, sie muss die logischen Verhältnisse (Formen), die zwischen beliebigen Prädikate unter bestimmten Bedingungen bestehen, als solche, in ihrer vollen Allgemeinheit und Reinheit bestimmen und in ihrer Gesamtheit konstruieren, sie muss die gesetzmäßigen Beziehungen, die zwischen diesen Formen selbst bestehen (d.h. die logischen Gesetze), darlegen. Die Logik macht keine Aussagen über diese oder jene besonderen Bereiche der Wirklichkeit, daher handeln ihre Aussagen nicht mehr von diesen oder jenen besonderen gegenständlichen Begriffen. Wenn sie die Normen bestimmt, denen jedes beliebige Prädikat unterliegt, bestimmt, „abstrahiert" sie jedoch nicht vom je besonderen Gehalt (Inhalt) dieser Prädikate, sondern zeigt im Gegenteil auf, wie diese mannigfach verschiedenen Inhalte ihre jeweilige Bestimmtheit erst durch ihre logische Struktur erhalten – wobei sie diese Struktur *als solche* kenntlich macht und bestimmt, auf den Begriff bringt; die Logik „abstrahiert" nicht, sie verallgemeinert – was etwas ganz anderes ist[68]. Wenn die Logik von beliebigen Prädikaten, ihren Formen und Gesetzen spricht, dann setzt sie notwendigerweise voraus, dass jedes derartige Prädikat seinen je eigenen spezifischen „Inhalt" besitzt – sonst wären die Prädikate, von denen die Logik spricht, ja überhaupt keine Prädikate.

   Der Verallgemeinerungsschritt, der zur theoretischen Logik führt, kann als **Form-Inhalt-Übersteigung** betrachtet werden; das erkennende Denken vollzieht eine *Form-Inhalt-Übersteigung*, wenn es die Formen, in und durch die es seine bisherigen Inhalte bestimmend aufeinander bezogen hat, selber zum Gegenstand, zum Inhalt seines Erkennens macht. Eine Form-Inhalt-Übersteigung ist eine nicht-lineare Verallgemeinerung. Die *linearen Verallgemeinerungen* bleiben auf der Ebene der jeweiligen Inhalte: sie beziehen mehr Inhalte in ihre logischen Bezugsetzungen ein, erfassen dadurch diese Inhalte bestimmter – einerseits umfassender, andererseits differenzierter (jede erfolgreiche lineare Verallgemeinerung ist zugleich verallgemeinernd und differenzierend). Die linearen Verallgemeinerungen des gegenständlich-praktischen Erkennens bleiben auf die gegenständlichen Inhalte in ihrer jeweiligen besonderen Bestimmtheit zentriert – sie verbleiben auf der Ebene der *intentio recta*; die logischen Bezugsetzungen dieser Inhalte (d.h. die logischen Formen), auf deren Grundlage diese Inhalte für die Erkennenden ihre Bestimmtheit erlangen, sind noch nicht selber Thema der Erkenntnistätigkeit. Bei der nicht-linearen, *reflexiven Verallgemeinerung* hingegen werden die Bezugsetzungen dieser Inhalte, d.h. die möglichen Inhalte in ihrer Gesamtheit Gegenstand der Untersuchung: das begriffliche Wissen als solches wird Thema, die intentio recta wird durch die intentio obliqua abgelöst. Dadurch werden insbesondere die (Bezugsetzungs-)Formen des gegenständlichen Denkens zum Untersuchungsgegenstand, die Formen werden erkannt, die vorher nur implizit in der jeweiligen konkreten Bestimmtheit der Inhalte mitbewusst waren. Dieser Übergang zum Erkennen von Erkenntnisformen setzt zugleich eine Verallgemeinerung bezüglich der Inhalte voraus: die gegenständlichen Begriffe selber werden verallgemeinernd untersucht: welche Art von Begriffen, welche Beziehungen gibt es zwischen Begriffen: es wird notwendigerweise geredet über *alle* Begriffe, die bestimmten Bedingungen genügen: der Übergang zur theoretischen Logik setzt also den Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Begriffe/Prädikate voraus; ohne Gebrauch solcher Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate können logische Formen gar nicht konzipiert und dargestellt werden. Insbesondere ist es der Begriff der Sachverhalts-/Ereignisklasse – bezeichne durch p, q, r,… bzw. Px, Qx, Rx,… usw. – der aus der Verallgemeinerung der Inhalte des gegenständlichen Denkens resultiert, sind doch Sachverhalts-/Ereignisklassen die spezifischen Relata der logischen Formen.

2. Wenn der Logiker/Philosoph/Erkenntnistheoretiker die gegenständlichen Begriffe ihrer kategorialen Dimension nach vergleicht, unterscheidet und bestimmt, bildet er **Begriffe zweiter Stufe**; diese bestimmen, welche Art von Bestimmungen die gegenständlichen Begriffe vornehmen (Kategorien[69]) oder welche Art von Relationen werden zwischen den gegenständlichen Begriffe angenommen (logische Relationen). Die neuartigen Inhalte dieser Untersuchungen sind die gegenständlichen Begriffe erster Stufe selber, die systematisch hinsichtlich ihrer Unterschiede und Gleichheiten verglichen werden müssen. Begriffe zweiter Stufe werden Begriffen erster Stufe zugesprochen.

3. Die Aussagen der theoretischen Logik sind bedingte oder unbedingte Allaussagen im Bereich der Prädikate; ohne **Quantifikation im Bereich dieser Prädikate** ist die theoretische Logik nicht möglich.

   - Das PNW ist beispielsweise eine unbedingte Allaussage im Bereich der Prädikate: für jedes beliebige Prädikat P gilt, dass es einem Gegenstand nicht zugleich zukommen und nicht zukommen kann.
   - Die Bestimmungen logischer Formen sind bedingte Allaussagen im Bereich der Prädikate; so lautet z.B. die Bestimmung der Implikation: *für alle Prädikate P und Q gilt*, dass P das Q genau dann impliziert, wenn es erstens Gegenstände gibt, denen beide Prädikate zukommen, wenn es zweitens Gegenstände gibt, denen beide Prädikate nicht zukommen, wenn es drittens Gegenstände gibt, denen wohl das zweite Prädikat Q, nicht aber P zukommt, und falls es schließlich drittens keine Gegenstände gibt, denen das erste Prädikat P ohne das Prädikat Q zukommt.
   - Auch die logischen Gesetze sind Allaussagen im Bereich der Prädikate, z.B. ist das Kontrapositionsgesetz eine bedingte Aussage über alle Prädikate: für beliebige (für alle) Prädikate P und Q gilt, dass, falls der Sachverhalt, dass P einem Gegenstand zukommt, impliziert, dass diesem Gegenstand auch der zweite zukommt, dann der Sachverhalt, dass einem Gegenstand Q nicht zukommt, impliziert, dass dem Gegenstand P nicht zukommt.

Die Vorstellung einer unbegrenzten Reihe von „Prädikatenlogiken“ verschiedener Stufigkeit postuliert die Unvermeidbarkeit einer endlosen Reihe von Form-Inhalt-Übersteigungen: es wird unterstellt, für das Verständnis von Eigenart und Gehalt der Begriffe zweiter Stufe und die Erkenntnis der logischen Beziehungen/Formen, die speziell zwischen den Begriffen zweiter Stufe bestehen und ihnen ihre spezifische Bestimmtheit geben, sei es unumgänglich, die Begriffe zweiter Stufe in ihrer Gesamtheit zum Inhalt zu nehmen und durch Begriffe dritter Stufe zu bestimmen, was Quantifikation im Bereich der Begriffe zweiter Stufe voraussetzen würde; nur so könne der Logiker auch Aufschluss über seine eigene Erkenntnistätigkeit und die Art der logischen Begriffsbildung gewinnen. Das Verständnis der Begriffe dritter Stufe setze wiederum Begriffe vierter Stufe und Quantifikation im Bereich der Begriffe dritter Stufe voraus, und dies ohne Ende. Diese Reihe stellt sich als infiniter Regress dar, der nie an sein Ziel – das Verständnis der Begriffe erster Stufe – gelangen könnte. Die Unvermeidbarkeit dieses Regresses würde alle Versuche, ein begründetes Verständnis des eigenen Erkennens, der eigenen logischen Formen, zu gewinnen, zur Vergeblichkeit verurteilen; das endlose Fortschreiten von einer „Prädikatenlogik“ bestimmter Stufe zur „Prädikatenlogik“ der nächsthöheren Stufe wäre ein schlagender

Beweis für die Unmöglichkeit einer theoretischen Logik überhaupt: die Formen unseres Erkennens erwiesen sich als unerkennbar. Das Erkennen des gegenständlichen Erkennens würde das Erkennen des Erkennens des gegenständlichen Erkennens voraussetzen, dieses wiederum das Erkennen des Erkennens des Erkennens des gegenständlichen Erkennens, und so fort. Jede dieser postulierten Stufen besäße ihre eigene „Logik“ – die jedoch paradoxerweise unerkennbar wäre; die Konzeption der Prädikatenlogiken unbegrenzt fortschreitender Stufigkeit führt sich so selbst ad absurdum.

Es sind überhaupt nur zwei Form-Inhalt-Übersteigungen möglich. Die *erste* vollzieht sich beim Übergang von der sensomotorischen Verhaltensorganisation zur für die Menschen charakteristischen begrifflichen Intelligenz; dabei werden die sensomotorischen Objektschemata (die Kenntnis der Objekte der Lebenswelt, wie sie aus der durch direkte Dingwahrnehmungen gelenkten praktisch-effektiven handlungsmäßigen Interaktion bestimmter Art mit diesen Objekten resultiert) des Verhaltens (funktionale Äquivalente der Begriffe) auf der Basis der Symbol- oder Repräsentationsfunktion ganz neu organisiert und selber als Einheiten von Form und Inhalt aufeinander bezogen werden. Das sensomotorisch-vorbegriffliche Erkennen ist auf die einzelnen Gegenstände des Verhaltens zentriert, die jeweils in sensorisch-kontingenter Gegenwart gegeben sein müssen. Die vergleichende Bezugsetzung dieser durch sensomotorisch-praktische Handhabung erkannten Gegenstände führt zur begrifflichen Erkenntnis; Voraussetzung ist, dass die sensomotorische Kontingenz überschritten wird (dies ermöglicht die Repräsentationsfunktion, insbesondere die Sprache): das vorher an den unmittelbaren sensorisch-motorischen Vollzug gegenständlicher Handlungen gebundene Wissen von Gegenständen kann nun immer systematischer und unabhängig von der sensorischen Gegenwart der Dinge untereinander verglichen werden, die realen Gegenstände erhalten eine rein mentale Repräsentanz und können logischen Vergleichen unterzogen werden; das Wissen erhält mehr und mehr begriffliche Prägnanz. Die Bezugsetzung der Gegenstände ist dann an die Quantifikation im Bereich der zu den Begriffen gehörenden Gegenstände gebunden. Die *zweite* Form-Inhalt-Übersteigung beginnt mit der erkenntnistheoretisch-logischen Reflexion des gegenständlichen Wissens in seinem ganzen Umfang.

Sachlich begründet werden könnte die Konzeption der Reihe aneinander anknüpfender „Prädikatenlogiken“ zunehmender Stufigkeit nur dann, wenn sich die Notwendigkeit ständiger, aufeinander aufbauender Form-Inhalt-Übersteigungen rechtfertigen ließe; dies wäre nur dann der Fall, wenn die Erkenntnis der Formen, die den logischen Untersuchungen zugrunde liegt, wiederum wie der Übergang vom gegenständlich-praktischen zum logisch-erkenntnistheoretischen Erkennen eine völlige Umkehr der Intentionalität erfordern würde, d.h. wenn der Logiker sich ebenfalls seiner eigenen Erkenntnistätigkeit und seiner logischen Bezugsetzungen (Formen) so wenig und nur implizit bewusst wäre, wie dies für die Subjekte auf der Ebene des gegenständlich-praktischen Denkens charakteristisch ist, so dass eine verallgemeinernde Reflexion der speziellen Formen der theoretischen Logik durchgeführt werden müsste, wobei die Begriffe zweiter Stufe und ihr Zusammenhang (die Erkenntnisformen des Logikers) zum expliziten, eigenständigen Thema einer Untersuchung würden.

Die Tatsache, dass der Erfolg logischer Untersuchungen voraussetzt, dass sich der Logiker bei der Untersuchung der logischen Formen und Gesetze auch der eigenen Erkenntnistätigkeit und der eigenen logischen Bezugsetzungen bewusst wird, erfordert keine erneute Umkehrung der Intentionalität. Erfolgreiche logische Analysen setzen von vornherein eine vergleichsweise ausgeprägte methodische Bewusstheit voraus; der Logiker muss sich über seine Ziele, seine Erkenntnismöglichkeiten und die Grenzen seiner Mittel im Klaren sein. Dem vortheoretischen gegenstandsbezogenen Erkennen wird das eigene Erkennen nicht zum Thema; da die Untersuchungen des Logikers jedoch den Formen des Erkennens selbst gelten, wird dem Logiker notwendigerweise auch das eigene Erkennen und seine Formen zum Thema: die Erkenntnisse der theoretischen Logik sind *selbstbezüglich*, die normativen Gesetzmäßigkeiten, denen das vom Logiker untersuchte gegenständliche Wissen und Erkennen unterliegt, gelten auch für die Begriffsbildungen des Logikers. Mit der Form-Inhalt-Übersteigung der logischen Untersuchung setzt die systematische Bewusstwerdung des begrifflichen Erkennens *im Ganzen*, einschließlich des Erkennens der theoretischen Logik ein. Die Untersuchung der logischen Struktur der menschlichen Erkenntnistätigkeit gibt auch Aufschluss über das Erkennen des Logikers. Der Logiker ermittelt Normen, denen auch sein eigenes Schließen und Urteilen unterstellt ist. *Es gibt für die Logik selber keine eigene, besondere Logik*, die in einem eigenständigen Untersuchungsprozess erkannt werden müsste. Die Formen, die den Inhalten der theoretischen Logik ihre Bestimmtheit verleihen (dies sind insbesondere die logischen Beziehungen zwischen den logischen Formen selbst), sind nicht wiederum Formen und Begriffe etwa dritter Stufe, sondern es sind dieselben Formen, die die theoretische Logik selber untersucht. Dies geht schon aus der Struktur der elementaren logischen Gesetze hervor: diese Gesetze bestimmen die logischen Formen, die zwischen den logischen Formen selbst bestehen. Zwischen diesen logisch-theoretischen Inhalten bestehen genau dieselben Relationen, wie sie von der theoretischen Logik als zwischen gegenständlichen Begriffen bestehend entdeckt werden. Die Inhalte sind wohl verschieden von denen der gegenständlichen Begriffe, die Formen sind dieselben: es ist also keine dritte Form-Inhalt-Übersteigung notwendig, um die Beziehungen, die zwischen den begrifflichen Bestimmungen der Logik zu entdecken; sie ist nicht nur nicht notwendig, sie wäre gar nicht durchführbar.

Wenn der Logiker über beliebige Begriffe erster Stufe spricht (dies erfordert den Gebrauch von Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate), so ist dies nicht mehr im Rahmen der linearen Verallgemeinerungen des gegenständlichen Erkennens möglich, sondern erfordert die reflexive Verallgemeinerung. Wenn hingegen der Logiker etwa von beliebigen Begriffen zweiter Stufe spricht, wird die Inhaltsebene der theoretischen Logik nicht verlassen: es können etwa Aussagen getroffen werden über beliebige logische Relationen, die ja spezielle Begriffe zweiter Stufe sind; auch hier ist die Festsetzung von Beliebig-Element-Zeichen für beliebige logische Relationen (z.B. Θ_1, Θ_2, Θ_3, …) erforderlich. Auf beliebige logische Relationen muss Bezug genommen werden, wenn beispielsweise die allgemeinen Bedingungen für die eindeutige Verkettung zweistelliger logischer Relationen wie folgt definiert werden. Zwei logische Relationen Θ_1 und Θ_2 – Begriffe zweiter Stufe – sind unter genau folgender Bedingung eindeutig verkettbar: besteht zwischen 2 Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q eine logische Relation Θ_1, und zwischen der Sachverhalts-/Ereignisklasse q und einer dritten r die Beziehung Θ_2, dann gibt es genau eine logische Relation Θ_3, die zwischen der ersten und dritten Ereignisklassen p und r besteht. Der Begriff der logischen Relation hat dabei den Status eines übergeordneten Gattungsbegriffs, man verbleibt innerhalb des spezifischen Verallgemeinerungsniveaus der Logik (jetzt liegt wieder, auf dem neuen Verallgemeinerungsniveau der theoretischen Logik, eine lineare, nicht-reflexive Verallgemeinerung vor)[70]. Die Inhalte, die von der theoretischen Logik behandelt werden, werden in sich weiter bestimmt; so lassen sich die logischen Formen in verschiedenster Weise klassifizieren und/oder zerlegen: nach der Stelligkeit, nach der Offenheit, der Geschlossenheit, Selbstständigkeit, als Formen der Kommunität, der scheinbaren Dependenz, der Konstituenz usw. Man verbleibt dabei auf dem spezifischen Verallgemeinerungsniveau der Logik, „übersteigt“ dieses Niveau nicht. Für logische Begriffe (Begriffe 2.Stufe) gibt es nur noch die Möglichkeit einer linearen Verallgemeinerung: es sind nur noch Verfeinerungen, differenzierende Ausweitungen der logischen Begriffe möglich, die in diesem linearen Verallgemeinerungsprozess Begriffe zweiter Stufe bleiben – und nicht etwa Begriffe „ dritter Stufe“ sind. Bemerkenswert ist, dass im Rahmen der „modernen Logik“ zwar arglos von Begriffen dritter und höherer Stufe geredet wird, doch *kein einziger* derartiger Begriff angeführt, bestimmt und erläutert werden kann!

Solange nicht erkannt ist, dass Quantifikation über Individuen (reale Gegenstände) nicht Kennzeichen der theoretischen Logik (in Gestalt einer so genannten „Prädikatenlogik erster Stufe“) ist, sondern das vortheoretische Gesetzeswissen charakterisiert, und dass Gebrauch von Begriffen zweiter Stufe und die Quantifikation im Bereich der Prädikate eine Voraussetzung und Charakteristikum *aller* theoretischen Logik ist, bleibt jeder Versuch, eine theoretische Logik zu entwerfen, aussichtslos. Wenn man die geläufige Bestimmung des „engeren Prädikatenkalküls“ zu Grunde legt, wird Prädikatenlogik ein völlig verworrenes, unklares und widersprüchliches Gebilde. Es passt in keiner Weise zusammen, dass einerseits nur von Individuen/Gegenständen bestimmter Bezugsbereiche Aussagen gemacht werden sollen (dies ergibt sich aus der Behauptung, nur Individuenvariablen würden durch Quantoren gebunden), andererseits aber in den Ausdrücken nur „Prädikatvariablen“ vorkommen: wenn nur „Individuenvariablen“ gebunden würden, dann könnten nur Bezeichnungen von konkreten Prädikaten in den Ausdrücken dieser so genannten „Prädikatenlogik erster Stufe“ auftreten: man kann ja nicht allen oder einigen Individuen des Bezugsbereichs irgendein beliebiges Prädikat zu- oder absprechen.

4.3.7. Die elementaren Quantoren und ihre logischen Beziehungen (Quantorenquadrat)

Allsätze der Form $(\forall x)$ P(x) bringen **Frege** zufolge die Allgemeinheit zum Ausdruck, wie sie Gesetzen eignet; diese Allgemeinheit glaubte er unabhängig von jeder logischen Form bestimmen und aus dem Zusammenhang mit den logischen Formen lösen zu müssen. Tatsächlich belegt die Betrachtung der Bedeutung des Ausdrucks „$\forall x$ P(x)“ jedoch, dass der Allsatz „$\forall x$ Px“ bereits eine logische Beziehung zwischen einem Prädikator Px und jenem Prädikator, der die Extension des zur Quantifikation gehörenden Bezugsbereichs **B** festlegt, bezeichnet. Dieser Bezugsbereich kann im Falle von Allsätzen der Ausdrucksgestalt $\forall x$ Px nie der universelle Bereich sein, da sonst das jeweilige Prädikat P *jedem* beliebigen Gegenstand zukommen müsste – P fiele mit der Bestimmung des Gegenstandseins selber zusammen (P wäre ein Begriff erster Stufe, nicht aber eine Bezeichnung beliebiger Begriffe) und jeder Allsatz der Form $\forall x$ Px liefe auf die nutzlose Tautologie „Jeder Gegenstand ist ein Gegenstand“ hinaus. Jedes echte, gehaltvolle Prädikat bestimmt Gegenstände *näher*, es muss also die Gegenstände ihrer spezifischen Bestimmtheit nach voneinander *unterscheiden* – Bestimmen ist stets Unterscheiden. Der Begriff des Gegenstandes, der als *einzige* Bestimmung *allen* Gegenständen zukommt, ist kein Begriff, der mit anderen Begriffen in einem logischen Zusammenhang stehen könnte; er ist vielmehr die *Voraussetzung* für die Bestimmung aller begrifflichen Zusammenhänge: die Beziehungen der Begriffe hängen ja von der Weise ab, wie die Begriffe zusammen Gegenstände zukommen und nicht zukommen. „$\forall x\, Px$“ bedeutet, dass jedem Gegenstand x aus dem nicht-universellen Bezugsbereich **B** das Prädikat P zukommt. Bleibt dabei ungewiss, ob jeder Gegenstand, dem P zukommt, auch **B** angehört, haben wir die zweistellige logische Relation $(10\bullet1)(x\in\mathbf{B}, Px)$; gehört nicht jeder Gegenstand, dem P zukommt, zu **B**, gilt die Implikationsbeziehung $(x\in\mathbf{B}) \rightarrow (Px)$, gehört schließlich auch jeder Gegenstand, dem P zukommt, zu **B**, gilt die Äquivalenzbeziehung $(x\in\mathbf{B}) \leftrightarrow (Px)$. Der Ausdruck „$\exists x\, Px$“ besagt, dass zumindest einem Gegenstand des Bereichs **B** das Prädikat P zukommt; er bezeichnet so die logische Relation $(1\bullet\bullet1)(x\in\mathbf{B}, Px)$ – wobei vorausgesetzt wird, dass weder **B** noch $\{x \mid Px\}$ der universelle Bereich sind (deshalb ist die Vorkommenskombination IV realmöglich). Es ist somit unabweislich, dass der Ausdruck der Allgemeinheit „$\forall x\, Px$“ bereits eine logische Relation bezeichnet und **FREGE**s Dissoziation von Allgemeinheit und logischer Relation falsch ist.

In einem Ausdruck der Form $(\mathbb{Q}x)\ Px$, der eine bestimmte logische Beziehung zwischen dem Prädikator Px und dem Begriff, der den Bezugsbereich **B** festlegt und benennt, lässt sich der Quantor, das Zukommen des Prädikats P[71] oder beides negieren. Durch diese Negationen lassen sich, ausgehend von $(\mathbb{Q}x)\ Px$, die vier verschiedenen Formen elementarer Quantifikation – $(\mathbb{Q}x)\ Px$, $\sim(\mathbb{Q}x)\ Px$, $(\mathbb{Q}x) \sim Px$ und $\sim(\mathbb{Q}x) \sim Px$ – konstruieren und begriffsschriftlich darstellen. Da jeder der vier derart möglichen $\exists$-Ausdrücke – auf der Grundlage der Äquivalenzen: $(\forall x)\ Px \equiv\ \sim(\exists x) \sim Px$ und $(\exists x)\ Px \equiv\ \sim(\forall x) \sim Px$ – mit genau einem der vier möglichen $\forall$-Ausdrücke bedeutungsgleich ist, gibt es unter Zugrundelegung von $\forall$ und $\exists$ genau vier verschiedene Quantoren; für die Darstellung dieser vier Formen kann daher auf einen der beiden Quantoren verzichtet werden[72]. Wir erhalten jeweils vier verschiedene elementare $\forall$- und $\exists$-Quantifikationen mit jeweils einem Bedeutungsäquivalent:

(1)	$\forall x\, Px$	$\equiv$	$\sim\exists x \sim Px$	Alle x sind P	$\equiv$	Nicht ein x ist nicht P
(2)	$\sim\forall x\, Px$	$\equiv$	$\exists x \sim Px$	Nicht alle x sind P	$\equiv$	Zumindest ein x ist nicht P
(3)	$\forall x \sim Px$	$\equiv$	$\sim\exists x\, Px$	Alle x sind nicht P	$\equiv$	Nicht ein x ist P
(4)	$\sim\forall x \sim Px$	$\equiv$	$\exists x\, Px$	Nicht alle x sind nicht P	$\equiv$	Zumindest ein x ist P

Im Rahmen der logistischen Konzeption der Aussageformen ist jeder Ausdruck $\mathbb{Q}x\, Px$ als eine Erfüllbarkeitsaussageform aufzufassen, die bei jeder Ersetzung der „Prädikatvariablen“ in eine wahrheitswertdefinite Erfüllbarkeitsaussage übergeht; diese Ausdrücke können demnach in Fregegesetzen an die Stelle der Aussagevariablen gesetzt werden, und es resultiert ein SFG-analoges Gesetz der Prädikatenlogistik; jedes derartige Gesetz besagt, dass für jedes Prädikat P die Aussage $\mathbb{Q}x\, Px$ nicht zugleich wahr und falsch sein kann. Auch auf diese Weise lässt sich eine unbegrenzte Menge allgemeingültiger prädikatenlogistischer SFG-analoger Formeln konstruieren, die allerdings keinerlei logische Relevanz besitzen. Beispielsweise entsteht aus dem Fregegesetz $A \Rightarrow (A \triangledown B) \equiv \neg(A \cdot \neg A \cdot \neg B)$ durch die Ersetzung von A durch $\exists x\, Fx$ und von B durch $\forall x\, Gx$ die „allgemeingültige“ prädikatenlogistische Formel $\exists x\, Fx \Rightarrow (\exists x\, Fx \triangledown \forall x\, Gx)$. Die Formel „$\exists x\, Fx \Rightarrow (\exists x\, Fx \triangledown \forall x\, Gx)$“ involviert eine Quantifikation über den Bereich der Prädikate und müsste vervollständigt werden zu „$\forall F,G\ [\exists x\, Fx \Rightarrow (\exists x\, Fx \triangledown \forall x\, Gx)]$“ $\equiv$ „Für beliebige Prädikate F und G gilt: es ist falsch, dass einem Gegenstand x das Prädikat G nicht zukommt, und das Prädikat F sowohl zukommt wie nicht zukommt“.

Es gibt freilich Gesetzesbeziehungen der Form $(\mathbb{Q}_1 x\, Px \oplus \mathbb{Q}_2 x\, Px)$, die nicht auf Fregegesetze reduziert werden können. Dazu gehören die bereits vorgestellten Äquivalenzen (Bedeutungsgleichheiten). Der Ausdruck „Alle x sind P“ hat dieselbe Bedeutung wie der Ausdruck „Es gibt kein x, das nicht P ist“. Diese Äquivalenz wird in der Prädikatenlogistik stets *intuitiv* als gültig vorausgesetzt; ihre Gültigkeit ergibt sich ohne Weiteres aus der Explikation der umgangssprachlich festgelegten Bedeutungen der Ausdrücke „$\forall x\, Px$“ und „$\exists x\, Px$“[73]. Wenn mit den Bezeichnungen „$(\forall x)$“ und „$(\exists x)$“ ein Sinn verbunden wird, dann nur auf der Grundlage dieser umgangssprachlichen Bedeutungsgleichheiten. Es wird z.B. vorausgesetzt, dass „nicht alle“ bedeutet „zumindest eines nicht“ und dass „nicht eines“ bedeutet „alle nicht“ oder „keines“. Da jeder Ausdruck $\mathbb{Q}x\, Px$ eine zweistellige logische Relation zwischen dem Sachverhalt $x\in\mathbf{B}$ und dem Sachverhalt Px bezeichnet, ist eine zweifache Negation möglich: negiert werden kann 1. der sich auf die Gegenstände des Bezugsbereichs beziehende Quantor 2. das Zukommen des Prädikats P[74].

Die vier elementaren Quantoren sind nicht wie die Gedankengefüge „wahrheitsfunktional“. Oft wird versucht, den Formen $\forall x\,Px$ und $\exists x\,Px$ den Anschein von „Wahrheitsfunktionen“ zu geben, indem $\forall x\,Px$ als **K**-Aussage „$Pa_1 \,\&\, Pa_2 \,\&\ldots\&\, Pa_n$“ und $\exists x\,Px$ als **A**-Aussage „$Pa_1 \triangledown Pa_2 \triangledown \ldots \triangledown Pa_n$“ dargestellt wird, wobei die Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ der Bezugsbereich der Gegenstände sein soll, über welchen quantifiziert wird[75]. Die Ausdrücke „$Pa_1 \,\&\, Pa_2 \,\&\ldots\&\, Pa_n$“ und „$Pa_1 \triangledown Pa_2 \triangledown \ldots \triangledown Pa_n$“ sind jedoch *keine* Wahrheitsfunktionen, denn die Formen $\mathbb{Q}x\,Px$ berücksichtigen nicht nur die Wahrheitswerte der durch & und $\triangledown$ verbundenen Aussagen und geben sie kund, sondern darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass in den verbundenen Aussagen von *allen Gegenständen eines bestimmten Bezugsbereichs* jedem oder zumindest einem Gegenstand *ein und dasselbe Prädikat* zugesprochen wird; hier ist also nicht nur der Wahrheitswert relevant. Die Quantoren sind prädikatenlogistische Ausdrücke, die sich nicht auf SFG-Sachverhalte reduzieren lassen; die gesetzmäßigen Beziehungen der Quantoren lassen sich deshalb auch nicht mit Mitteln des SFG, und auch nicht ausgehend von Fregegesetzen rechtfertigen. Die in obiger Tabelle angeführten Äquivalenzen lassen sich aus der Bedeutungsgleichheit „$(\forall x)\ Px$“ $\equiv$ „$\sim(\exists x) \sim Px$“ mit Hilfe des Gesetzes der doppelten Negation herleiten; aus dieser Bedeutungsgleichheit folgen andere Bedeutungsgleichheiten: aus $(\forall x) \sim Px$“ folgt aufgrund des Gesetzes $[(\forall x)\ Px \leftrightarrow \sim(\exists x) \sim Px]$ die Beziehung $\sim(\exists x) \sim\sim Px$, aus dieser nach dem Gesetz der doppelten Negation die Beziehung $\sim(\exists x)\ Px$, usw.

Der Versuch, diese Äquivalenzen mithilfe von Gedankengefügen darzustellen, erfordert es, die Ausdrücke $\mathbb{Q}x\,Px$, die doch wohlbestimmte logische Formen bezeichnen, als Aussageformen aufzufassen. Der das Gesetz $(\forall x)\ Px \leftrightarrow \sim(\exists x) \sim Px]$ begriffsschriftlich abschwächende Ausdruck „$(\forall x\,Px) \Leftrightarrow (\sim\exists x \sim Px)$“ ist eine unvollständig dargestellte Erfüllbarkeitsaussage, die zu „$\forall P\ [(\forall x\,Px) \Leftrightarrow (\sim\exists x \sim Px)]$“ vervollständigt gedacht werden muss.

Die Beziehungen der Quantoren stellen, anders als die SFG-analogen Gesetze, einen echten prädikatenlogistischen Gesetzestyp dar. Diese im Rahmen der Prädikatenlogistik nur intuitiv als gültig zu erweisenden Gesetzesbeziehungen spielen bei allen prädikatenlogistischen Ableitungen die zentrale Rolle. Zwischen den vier elementaren Quantoren

$(\forall x)\ Px$	$\{\equiv \sim(\exists x) \sim Px\}$	identisch mit der logischen Form $(10{\bullet}1)[(x\in\mathbf{B}), (Px)]$
$(\forall x) \sim Px$	$\{\equiv \sim(\exists x)\ Px\}$	identisch mit der logischen Form $(0111)[(x\in\mathbf{B}), (Px)]$
$(\exists x)\ Px$	$\{\equiv \sim(\forall x) \sim Px\}$	identisch mit der logischen Form $(1{\bullet}{\bullet}1)[(x\in\mathbf{B}), (Px)]$
$(\exists x) \sim Px$	$\{\equiv \sim(\forall x)\ Px\}$	identisch mit der logischen Form $({\bullet}1{\bullet}1)[(x\in\mathbf{B}), (Px)]$

bestehen bestimmte logische Beziehungen; sie sind im so genannten Quantorenquadrat aufgeführt; es ergeben sich 16 verschiedene Gesetze des Quantorenquadrats, dargestellt in folgender Relationenmatrix[76].

	$(\forall x)\ Px$	$(\forall x) \sim Px$	$(\exists x)\ Px$	$(\exists x) \sim Px$
$(\forall x)\ Px$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{J}$
$(\forall x) \sim Px$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{C}$
$(\exists x)\ Px$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{A}$
$(\exists x) \sim Px$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{E}$

Der Beweis dieser *Gesetze des Quantorenquadrats* kann sich nur auf die jeweilige Bedeutung der Quantoren und auf den Begriff der zweistelligen logischen Relation stützen; es muss systematisch geprüft werden, ob beide Formen zusammen gelten, ob eine ohne die andere gelten kann und ob schließlich keine der beiden Formen gelten kann: Beispielsweise können die beiden Formen $(\forall x)\ Px$ und $(\exists x)\ Px$ zusammen gelten, denn das „zumindest ein x ist P“ schließt die Möglichkeit ein, dass „allen x P zukommt“; hingegen können $(\forall x)\ Px$ und $(\exists\exists x)\ Px$ nicht zusammen gelten, denn das „zumindest eines, aber nicht jedes x ist P“ schließt ausdrücklich aus, dass alle x P sind. Gilt $(\forall x)\ Px$, dann ist es nicht möglich, dass $(\exists x)\ Px$ nicht gilt: wenn alle x P sind, dann ist zumindest ein x P. Bei $(\forall x)\ Px$ kann aber sehr wohl

$(\exists\exists x)$ nicht gelten. Bei $\sim(\forall x)$ Px kann $\exists x$ Px gelten, denn es ist ja möglich, dass eines aber nicht alle x P sind; bei $\sim(\forall x)$ Px kann auch $\exists\exists x$ Px gelten, denn $\exists\exists x$ Px beinhaltet ja, dass nicht alle x P sind. Es ist möglich, dass weder $(\forall x)$ Px noch $(\exists x)$Px gilt, und auch $(\forall x)$ Px und $(\exists\exists x)$Px können beide nicht gelten; dies trifft in beiden Fällen zu, wenn $\forall x \sim$Px gilt. Damit ist ermittelt, welche Vorkommenskombinationen der logischen Totalrelation von $(\forall x)$ Px] und $[(\exists x)$ Px bzw. von $(\forall x)$ Px] und $[(\exists\exists x)$ Px realmöglich sind; es ergeben sich die logischen Gesetze

$[(\forall x)\ Px] \rightarrow [(\exists x)\ Px]$ und
$[(\forall x)\ Px] \uparrow [(\exists\exists x)\ Px]$.

Die Gültigkeit der restlichen logischen Gesetze des Quantorenquadrats wird auf entsprechende Weise nachgewiesen.

Begriffsschriftlich lässt sich das Gesetz $[(\forall x)\ Px] \rightarrow [(\exists x)\ Px]$ nur unvollständig mit Hilfe des Gedankengefüges $\mathfrak{C}$ ausdrücken – $\forall P\ \{[(\forall x)\ Px] \Rightarrow [(\exists x)\ Px]\}$: für keine Ersetzung von P ergibt sich aus $(\forall x)$ Px eine wahre und aus $(\exists x)$ Px eine falsche Aussage[77]. Dieses begriffsschriftlich abgeschwächte Gesetz des Quantorenquadrats ist keine „Wahrheitsfunktion" im Sinne der Gedankengefüge, denn wenn ich für ein empirisch-konkretes Prädikat $\mathfrak{P}$ etwa $(\forall x)\ \mathfrak{P}x$ und $(\exists x)\ \mathfrak{P}x$ beide für wahr oder beide für falsch, oder $(\forall x)\ \mathfrak{P}x$ für falsch und $(\exists x)\ \mathfrak{P}x$ für wahr halte, kann ich zwar für den jeweiligen *Einzelfall* die richtige Gedankengefügeaussage „$(\forall x)\ \mathfrak{P}x \Rightarrow (\exists x)\ \mathfrak{P}x$" treffen, aber aus dem Bezug auf vorgegebene Wahrheitswerte von All- und Existenzsätzen wie $(\forall x)\ \mathfrak{P}x$ und $(\exists x)\ \mathfrak{P}x$ kann nie erschlossen werden, dass es für *jede* Wahl eines empirisch-konkreten Prädikats unmöglich ist, dass $(\forall x)$ Px zu einer wahren und $(\exists x)$ Px zu einer falschen Aussage wird. Dies ist nur durch den Rekurs auf die Bedeutungen der Ausdrücke „$(\forall x)\ \mathfrak{P}x$" und „$(\exists x)\ \mathfrak{P}x$" möglich: die Bedingungen für die Geltung von ‚alle x sind P' können nicht gegeben sein, ohne dass auch die Bedingungen für die Geltung von ‚zumindest ein x ist P' vorliegen.

Alle Fregegesetze sind ein unvollständiger Ausdruck des PNW und besagen im Grunde nur „$\forall A\ [\neg(A \mathbin{\&} \neg A)]$"; aus den Ausdrücken der Fregegesetze resultieren, wenn die „Aussagevariablen" durch die Ausdrücke von Quantifikationen $\mathfrak{Q}x$ Px ersetzt werden, SFG-analoge prädikatenlogistische Gesetze der Ausdrucksform $\forall P \sim[\mathfrak{Q}x\ Px \mathbin{\&} \sim\mathfrak{Q}x\ Px]$. Die $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetze des Quantorenquadrats in begriffsschriftlich abschwächender Darstellung lassen sich auf einen solchen Ausdruck bringen. Das Gesetz des Quantorenquadrats $[(\forall x)\ Px] \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail [(\exists x) \sim Px]$ lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung „$\forall P\ [(\forall x)\ Px] \bowtie [(\exists x) \sim Px]$"; unter Nutzung von Gesetzen des SFG und des Quantorenquadrats lässt sich aus diesem Ausdruck „$\forall P\ \{\sim[(\exists x) \sim Px \mathbin{\&} \sim(\exists x) \sim Px]\}$" herleiten:

(1)	$\forall P\ \{[(\forall x)\ Px] \bowtie [(\exists x) \sim Px]\}$	aufgrund der Bedeutungsgleichheit $(A \bowtie B) \equiv \neg(A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B]$ äquivalent mit (2)
(2)	$\forall P\ \{\sim[(\forall x)\ Px \mathbin{\&} (\exists x) \sim Px] \mathbin{\&} \sim[\sim(\forall x)\ Px \mathbin{\&} \sim(\exists x) \sim Px]\}$	aufgrund des Gesetzes des Quantorenquadrats $(\forall x)\ Px \leftrightarrow \sim(\exists x) \sim Px]$ äquivalent mit (3)
(3)	$\forall P\ \{\sim[\sim(\exists x) \sim Px \mathbin{\&} (\exists x) \sim Px] \mathbin{\&} \sim[\sim\sim(\exists x) \sim Px \mathbin{\&} \sim(\exists x) \sim Px]\}$	aufgrund des Gesetzes der doppelten Negation und des SFG-Gesetzes $(A \mathbin{\&} A) \leftrightarrow A$ äquivalent mit (4)
(4)	$\forall P\ \{\sim[(\exists x) \sim Px\ \mathbin{\&} \sim(\exists x) \sim Px)]\}$	

Die Gültigkeit der Aussage (4) hätte sich auch ergeben, wenn im Ausdruck des Fregegesetzes $\neg(A \mathbin{\&} \neg A]$ die „Aussagevariable" „A" durch den Erfüllbarkeitsaussageform „$(\exists x) \sim Px$" ersetzt worden wäre. Dies heißt jedoch nicht, diese Gesetze des Quantorenquadrats ließen sich durch derartige Ersetzungen der „Aussagevariablen" in Fregegesetzen herleiten. Wenn sich auch aus allen $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetzen des Quantorenquadrats Gesetze des Typs $\forall P \sim[\mathfrak{Q}x\ Px \mathbin{\&} \sim\mathfrak{Q}x\ Px]$ herleiten lassen, die sich aus dem Fregegesetz $\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$ durch Vertauschung von „A" und „$\mathfrak{Q}x$ Px" gewinnen lassen, und wenn auch umgekehrt von $\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$ der Ausdruck $\forall P \sim[\mathfrak{Q}x\ Px \mathbin{\&} \sim\mathfrak{Q}x\ Px]$ und *davon* ausgehend jedes $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetz des Quantorenquadrats hergeleitet werden kann, so müssen sich alle diese Herleitungen doch bereits auch auf die grundlegenden Bedeutungsgleichheiten und auf Gesetze des Quantorenquadrats stützen.

Dass die $\mathbb{E}$- und $\mathbb{J}$-Gesetze des Quantorenquadrats auf den SFG-Ausdruck $\neg(A \& \neg A)$ reduzierbar sind, liegt daran, dass die begriffsschriftliche Abschwächung der Quantorenquadrat-Gesetze ausschließt, dass zwei äquivalente Quantoren nicht zugleich gelten[78] oder dass zwei kontradiktorische Quantoren zugleich gelten[79]; es werden wie bei $\neg(A \& \neg A)$ kontradiktorische Widersprüche ausgeschlossen. Die restlichen Gesetze des Quantorenquadrats lassen sich nicht auf einen Ausdruck $\forall P \sim[\mathfrak{Q}x\, Px \;\&\; \sim\mathfrak{Q}x\, Px]$ und $\neg(A \& \neg A)$ bringen, sondern auf $\forall P \sim [\forall x\, Px \;\&\; \forall x \sim Px]$ und $\forall P \sim[\sim\exists x\, Px \;\&\; \sim\exists x \sim Px]$:

Das Gesetz $\mathbf{(\forall x)\ Px \rightarrow (\exists x)}$ Px lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung: $\forall P\ [(\forall x)\ Px \Rightarrow (\exists x)\ Px]$; aus diesem Gesetz lässt sich wohl $\forall P \sim[(\forall x)\ Px \;\&\; (\forall x) \sim Px]$ und $\forall P[(\exists x)\ Px \triangledown (\exists x) \sim Px] \equiv \forall P \sim[\sim(\exists x)\ Px \;\&\; \sim(\exists x) \sim Px]$ herleiten, nicht aber ein aus einem Fregegesetz herleitbarer Ausdruck der Form $\sim(\mathfrak{Q}x\, Px \;\&\; \sim\mathfrak{Q}x\, Px)$. Das **Gesetz** $\mathbf{[(\forall x)\ Px] \uparrow [(\forall x) \sim Px]}$ wird begriffsschriftlich durch den den Aussagegehalt abschwächenden Ausdruck $[(\forall x)\ Px] \Uparrow [(\forall x) \sim Px] \equiv \forall P \sim[(\forall x)\ Px \;\&\; (\forall x) \sim Px] \equiv \forall P \sim[(\sim(\exists x) \sim Px) \;\&\; \sim(\exists x)\ Px)] \equiv \forall P\ (\exists x)\ Px \;\triangledown\; (\exists x) \sim Px$ bezeichnet. Das **Gesetz** $\mathbf{(\exists x)\ Px \;\vee\; (\exists x) \sim Px}$ wird begriffsschriftlich dargestellt als „$\forall P\ [(\exists x)\ Px \;\triangledown\; (\exists x) \sim Px]$“, was bedeutet $\forall P\ \{\sim[\sim(\exists x)\ Px) \;\&\; \sim(\exists x) \sim Px]\} \equiv \forall P \sim[(\forall x)\ Px \;\&\; (\forall x) \sim Px]$. Es geht in diesen Gesetze nicht um einen kontradiktorischen ($\mathbb{J}$), sondern um einen konträren ($\mathbb{D}$) und subalternen ($\mathbb{A}$) Gegensatz zwischen Quantoren[80]; schon aufgrund der Tatsache, dass Fregegesetze nur den kontradiktorischen Gegensatz ($\mathbb{J}$) $\neg(A \& \neg A)$ ausdrücken, ist es unmöglich, diese Gesetze des Quantorenquadrats ausgehend von einem Fregegesetz herzuleiten.

Weder sind also die Quantoren $\mathfrak{Q}x\, Px$, noch sind die logischen Beziehungen zwischen diesen Quantoren (die Gesetze des Quantorenquadrats) „Wahrheitsfunktionen“, sondern ganz bestimmte zweistellige logische Formen. Die „Aussagenlogik“ (das SFG) ist für Verständnis und Beweis dieser Formen und Gesetze irrelevant, um die Wahrheit dieser Gesetze zu rechtfertigen, muss auf den genauen Begriff dieser Formen (d.h. auf die Kenntnis aller notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Geltung) Bezug genommen werden; die logische Beziehung zwischen diesen Bedingungen muss vollständig und systematisch ermittelt werden, was wiederum eine genaue Kenntnis der Struktur logischer Relationen voraussetzt. Die logische Form, auf die der Ausdruck „$\forall x\, Px$“ verweist, ist die logische Relation $(10\bullet1)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ – einem Gegenstand des Bezugsbereich **B** kommt notwendig ($\mathcal{N}$) ein Prädikat P zu (ob auch umgekehrt, bleibt offen); der Ausdruck „$\forall x \sim Px$“ verweist auf die logische Relation $(0111)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ – einem Gegenstand des Bezugsbereichs **B** kommt ein Prädikat P unmöglich ($\mathcal{U}$) zu; der Ausdruck „$\exists x\, Px$“ verweist auf die logische Form $(1\bullet\bullet1)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ – es ist nicht unmöglich ($\sim\mathcal{U} = \mathcal{P}$), dass einem Gegenstand des Bezugsbereichs **B** ein Prädikat P zukommt[81]. Um nun etwa die Beziehung zwischen $(10\bullet1)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ und $(0111)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ zu bestimmen, ist nachzuweisen, dass (1) beide Relationen nicht zusammen gelten können (denn sie bestimmen die beiden ersten Vorkommenskombinationen unterschiedlich), dass jede Relation ohne die andere, und dass beide Relationen nicht gelten können (wenn z.B. die Relation $(1111)[(x \in \mathbf{B}), (Px)]$ gilt; nur auf diese Weise können die Gesetze des Quantorenquadrats begründet werden.

Im Rahmen der Prädikatenlogistik lassen sich diese Gesetze weder vollständig darstellen und noch beweisen; sie werden meist in ihrer begriffsschriftlich abgeschwächten Form als für die logische Intuition evident gültig vorausgesetzt oder in Form von nicht näher begründeten „Axiomen“ oder „Ableitungsregeln“ eingeführt[82]. Jedenfalls ist es unmöglich, diese nicht auf ein kontradiktorisches Verhältnis verweisenden Gesetze des Quantorenquadrats aus einem SFG-analogen prädikatenlogistischen Ausdruck abzuleiten[83]. Diese als evident vorausgesetzten, nicht ausdrücklich bewiesenen, und mit den Mitteln der Logistik auch nicht beweisbaren Gesetze sind die wichtigsten Gesetze, die zur Umformung und Herleitung anderer prädikatenlogistischer Gesetze benutzt werden.

Wird eine Bedeutungsgleichheit wie $\forall x\, Px \equiv \sim\exists x \sim Px$ und zumindest ein konträres oder subalternes Quantorenquadrat-Gesetz ohne Beweis (als „Axiom“) vorausgesetzt, lassen sich alle begriffsschriftlich abgeschwächten Gesetze des Quantorenquadrats herleiten: so lässt sich aus dem Gesetz $\forall x\, Px \Rightarrow \exists x\, Px$ durch Anwendung des Gesetzes $\exists x\, Px \Leftrightarrow \sim\forall x \sim Px$ und der Gesetze des SFG $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$, $(A \Uparrow B) \Leftrightarrow \neg(A \& B)$ und $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ das Gesetz $\forall x\, Px \Uparrow \forall x \sim Px$ herleiten, aus diesem durch Anwendung von $\forall x\, Px \Leftrightarrow \sim\exists x \sim Px$, $(A \Uparrow B) \Leftrightarrow (\neg A \triangledown \neg B)$ das Gesetz $\exists x\, Px \triangledown \exists x \sim Px$, usw.

Auf die begriffsschriftlich abgeschwächten Gesetze des Quantorenquadrats lassen sich Gesetze des SFG anwenden; wenn das SFG-Gesetz $(A \triangledown B) \leftrightarrow (\neg A \Uparrow \neg B)$ auf das Gesetz $[(\exists x) \sim Px] \triangledown [(\exists x)\ Px]$ angewendet wird, ergibt sich: $[\sim(\exists x) \sim Px] \Uparrow [\sim(\exists x)\ Px]$, usw. Mit Hilfe der Expansionsregeln für Gedankengefüge und anderer Gesetze des SFG lassen sich die begriffsschriftlich abgeschwächten Gesetze des Quantorenquadrats beliebig verkomplizieren (wenn dies auch keinerlei theoretischen oder praktischen Nutzen hat): durch Anwendung der Äquivalenz $(A \triangledown B) \leftrightarrow (A \Leftarrow B) \Rightarrow (A \triangledown B)$ kann der Ausdruck $\exists x\, Px \triangledown \exists x \sim Px$ verändert werden zu $(\exists x\, Px \Leftarrow \exists x \sim Px) \Rightarrow (\exists x\, Px \triangledown \exists x \sim Px)$. Umgekehrt kann von jedem komplexen prädikatenlogistischen Ausdruck entschieden werden, ob er durch die nämlichen Gesetze auf einen einfach begriffsschriftlich abgeschwächten Ausdruck eines Gesetzes des Quantorenquadrats reduziert werden kann.

4.3.8. Fregerelationen

Im Rahmen der „modernen Logik“ werden Ausdrücke der Gestalt „$\mathfrak{Q}$x(Px ⊕ Qx)“ als Darstellungen logischer Relationen aufgefasst; der Ausdruck „(∀x)(Px ⇒ Qx)“ etwa soll die („formale“) Implikation bezeichnen. Diese Darstellung logischer Relationen muss jedoch aufgrund der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge indirekt bleiben: „(∀x)(Px ⇒ Qx)“ drückt nicht direkt eine Allaussage über alle *Gegenstände* x eines bestimmten Bereichs aus, sondern ist eine Erfüllbarkeitsaussageform, die bei jeder Ersetzung der Beliebig-Element-Zeichen P und Q zu einer wahren oder falschen Gesetzesaussage wird. Zweifellos soll der Ausdruck jedoch im Sinne der „objektionalen Interpretation“ der Quantoren jenes logische Verhältnis zwischen zwei Prädikaten P und Q benennen, das darin besteht, dass allen Gegenstände des dazugehörenden Bereichs nicht zugleich das Prädikat P zukommt und das Prädikat Q nicht zukommt, es ist also – im Sinne der „objektionalen Interpretation“ der Quantoren[84] – ein Allsatz bestimmter Art. Wenn ich im Folgenden die prädikatenlogistischen Ausdrücke $\mathfrak{Q}$x(Px ⊕ Qx) öfters der Einfachheit halber unmittelbar als Bezeichnungen logischer Relationen behandle und etwa von der Fregerelation (∀x)(Px ⇒ Qx) spreche, muss immer im Auge behalten werden, dass die prädikatenlogistischen Ausdrücke, die bedingungslogischen Formen, auf die sie eineindeutig verweisen, gar nicht direkt bezeichnen können; der Ausdruck „(∀x)(Px ⇒ Qx)“ bezeichnet also genau genommen keine Fregerelation, sondern eine Aussageform, die der betreffenden Fregerelation eineindeutig entspricht. Es besteht folgender Zusammenhang: genau diejenigen konkreten Prädikate, die, eingesetzt in eine Erfüllbarkeitsaussageform $\mathfrak{Q}$x(Px ⊕ Qx), auf eine wahre Erfüllbarkeitsaussage führen, stehen in der logischen Relation, die der betreffenden Erfüllbarkeitsaussageform $\mathfrak{Q}$x(Px ⊕ Qx) eineindeutig entsprechen. Die *logischen Relation*, die auf der Basis der Gedankengefüge *begriffsschriftlich* – nur indirekt! – dargestellt werden können, nenne ich **Fregerelationen**; die Fregerelationen, auf welche prädikatenlogistische Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}$x(Px ⊕ Qx) verweisen, nenne ich (zweistellige) **elementare Fregerelationen**. Beliebige Fregerelationen bezeichne ich durch „Λ_1“, „Λ_2“, „Λ_3“, … Bevor ich darlege, welche logischen Relationen (Fregerelationen) allen möglichen Ausdrücken der Gestalt $\mathfrak{Q}$x(Px ⊕ Qx) entsprechen, möchte ich auf **FREGE**s Erörterung dieser Ausdrücke eingehen.

Den Ausdruck „∀x (Fx ⇒ Gx)“ erläutert **FREGE** folgendermaßen: „‚Was man auch an die Stelle von x setzen möge, *der Fall*, dass Gx verneint und Fx bejaht werden müsste, *kommt nicht vor*‘. Da ist es also *möglich*, dass bei *einigen* Bedeutungen, die man dem x geben kann,

> G(x) zu bejahen und F(x) zu bejahen, bei anderen
> G(x) zu bejahen und F(x) zu verneinen, *bei noch anderen*
> G(x) zu verneinen und F(x) zu verneinen wäre.“[85]

Was das Wort „*möglich*“ in diesem Zusammenhang bedeutet, ist durch **FREGE**s Definition von „⇒“ vorgegeben. Das Gedankengefüge A ⇒ B ist einem Paar wertdefiniter Aussagen (A, B) genau dann zuzusprechen ist, wenn jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist; es bleiben für $\mathbf{C}$ drei sich gegenseitig ausschließende Möglichkeiten: beide Aussagen sind *entweder* beide wahr, *oder* beide falsch, *oder* A ist falsch und B wahr. *Jede* dieser drei disjunkten Möglichkeiten stellt bereits für sich eine *hinreichende* Bedingung dar, damit $\mathbf{C}$ irgendwelchen Aussagen A und B zugesprochen werden kann. Genau diese Struktur disjunkter hinreichender Bedingungen überträgt sich auf den Ausdruck „∀x (Fx ⇒ Gx)“: *hinreichende* Bedingung dafür, dass zwischen zwei Prädikatoren Fx und Gx die durch diesen Ausdruck bezeichnete logische Relation besteht, ist einzig, dass die Vorkommenskombination Fx⌢~Gx jedenfalls nicht realmöglich ist. Das Gedankengefüge A ⇒ B besagt, dass jedenfalls die Wahrheitswertkombination *A wahr und B falsch* ausgeschlossen ist, und entsprechend besagt die logische Relation, auf die der Ausdruck (∀x)(Fx ⇒ Gx) verweist, dass von den vier Vorkommenskombinationen die Vorkommenskombination II jedenfalls nichtrealmöglich ist. Für die restlichen drei Vorkommenskombinationen bleibt es unbestimmt, ob sie realmöglich sind oder nicht; falls die leere Relation ausgeschlossen ist – dies soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden –, muss allerdings zumindest einer dieser Vorkommenskombinationen realmöglich sein. Die *Möglichkeit*, von der **FREGE** in seiner Erläuterung spricht, ist diese Unbestimmtheit, diese Nichtfestgelegtheit der restlichen Vorkommenskombinationen.

Die Struktur der Gedankengefüge $A \oplus B$ überträgt sich auf die logischen Relationen der Form $\forall x\ (Fx \oplus Gx)$. Jedem Aussagenpaar (A,B) kommt genau eines und nur eines der vier Wahrheitswertprädikate zu. Die vier Stellen einer Matrix wie (jnnn) soll den vier Wahrheitswertkombinationen, die es für jedes Par wahrheitswertdefiniter Aussagen gibt, entsprechen; der Buchstabe „j“ bezeichne die *definitive* Bejahung und der Buchstabe „n“ die *definitive* Verneinung des entsprechenden Wahrheitswertprädikats. Das Gedankengefüge A&B lässt sich dann durch den Ausdruck „(jnnn)(A,B)“ darstellen; er drückt die tatsächliche Bedeutung des Gedankengefüges unmittelbar und direkt aus: die Wahrheitswertkombination $\mathcal{W} \frown \mathcal{W}$ wird definitiv bejaht, die anderen Wahrheitswertkombinationen werden verneint. Für die Belegung der Stellen der Matrix gilt, dass wegen der Disjunktivität der Wahrheitswertkombinationen *nur einmal* „j“ vorkommen kann; steht an einer Stell „j“, steht an den restlichen drei Stellen notwendig „n“. Gedankengefüge können nur eine der vier Wahrheitswertkombinationen definitiv bejahen, aber vier Wahrheitswertkombinationen verneinen (dann liegt das leere Gedankengefüge ◖◗ vor), drei verneinen (dann ist die restliche Wahrheitswertkombination notwendig bejaht), oder zwei oder eine Wahrheitswertkombination ausdrücklich verneinen; für die zwei bzw. drei restlichen Wahrheitswertkombinationen bleibt dann die Bejahung offen, was durch „•“, bzw. „∘“ bezeichnet werden kann; wird keine Wahrheitswertkombination ausdrücklich verneint, liegt das Gedankengefüge ▼ vor. Diese Bezeichnung der Gedankengefüge macht unmittelbar deutlich, wie sich die Eigenart der Gedankengefüge auf die auf ihrer Grundlage konstruierbaren Fregerelationen überträgt. Zwischen den Gedankengefügen $A \oplus B$, den Aussageformen $\forall x(Fx \oplus Gx)$ und den entsprechenden Fregerelationen bestehen die folgenden eineindeutigen Entsprechungen:

$$(\mathrm{jnnn})(A,B) \equiv A \,\&\, B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \,\&\, Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (1000)(p,q) \equiv p \wedge q$$

$$(\mathrm{njnn})(A,B) \equiv A \vDash B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \vDash Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (0100)(p,q) \equiv p \succcurlyeq q$$

$$(\mathrm{n}\circ\circ\circ)(A,B) \equiv A \Uparrow B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \Uparrow Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (0\circ\circ\circ)(p,q),$$

$$(\circ\mathrm{n}\circ\circ)(A,B) \equiv A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (\circ 0\circ\circ)(p,q),$$

$$(\mathrm{n}\circ\circ\mathrm{n})(A,B) \equiv A \bowtie B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \bowtie Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (0\circ\circ 0)(p,q),$$

$$(\circ\circ\circ\circ)(A,B) \equiv A \bigtriangledown B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(Fx \bigtriangledown Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (\circ\circ\circ\circ)(p,q), \text{ usw.}$$

Es gelten die Entsprechungen: genau jene Prädikate F und G, die, wenn sie beispielsweise in die Aussageform $(\forall x)(Fx \bowtie Gx)$ eingesetzt werden, auf eine wahre Erfüllbarkeitsaussage führen, stehen in der Fregerelation $(0\circ\circ 0)(p,q)$.

Die auf der Basis von Gedankengefügen darstellbaren *elementaren* logischen Fregerelationen können nie mehr als eine Vorkommenskombination *definitiv* als realmöglich bestimmen; dann aber liegt, weil die restlichen Vorkommenskombinationen notwendig nichtrealmöglich sind, eine unselbständige logische Relation vor, die nicht für sich alleine, sondern erst in umfassenderen logischen Zusammenhängen verständlich wird. Bei den anderen Fregerelationen der Ausdrucksgestalt $\forall x(Fx \oplus Gx)$ sind nur nicht-realmögliche Vorkommenskombinationen definitiv bestimmt. Alle diese Fregerelationen können deshalb noch gar keinen vollständigen Zusammenhang relativer Modalisierung ausdrücken; mithilfe von Fregerelationen der Ausdrucksgestalt $\forall x(Fx \oplus Gx)$ ist kein notwendiger, kein unmöglicher, kein möglicher ($\mathcal{K}$) Zusammenhang definitiv bestimmbar, noch kann ein solcher Zusammenhang eindeutig ausgeschlossen werden. Als elementare Fregerelation ist so kein einziger Gesetzeszusammenhang vollständig, gehaltvoll und eindeutig zu bestimmen.

Auf der Basis der Gedankengefüge können 15 logischen Relationen der Form $\forall x(Fx \oplus Gx)$ bestimmt werden. Zunächst gibt es die Gedankengefüge **K**, **L**, **M** und **X**, die eine der vier Wahrheitswertkombinationen definitiv bejahen. Ihre Struktur, durch die Bejahung eines Wahrheitswertprädikats genau drei Wahrheitswertprädikate auszuschließen, überträgt sich auf die mit ihrer Hilfe konstruierbaren logischen Relationen. Es werden alle Vorkommenskombinationen definitiv bestimmt, drei davon als nichtrealmöglich. Für beliebige Prädikate F und G verweist deshalb der Ausdruck „(∀x) (Fx & Gx)“ auf die logische Totalform $\mathbb{K}$ – (1000)(Fx, Gx),

> der Ausdruck „(∀x) (Fx ⊨ Gx)“ verweist auf die logische Totalform $\mathbb{L}$ – (0100) (Fx, Gx)
> der Ausdruck „(∀x) (Fx ⫤ Gx)“ verweist auf die logische Totalform $\mathbb{M}$ – (0010) (Fx, Gx), und
> der Ausdruck „(∀x) (Fx ⇓ Gx)“ verweist auf die logische Totalform $\mathbb{X}$ – (0001) (Fx, Gx).

Die restlichen elf nichtleeren Gedankengefüge schließen höchstens zwei Wahrheitswertkombinationen aus; auf ihrer Grundlage können logische Relationen konstruiert werden, die jeweils einen oder zwei Vorkommenskombinationen als nichtrealmöglich bestimmen, während die restlichen Vorkommenskombinationen unbestimmt bleiben; weil die leere logische Relation $\mathbb{O}$ ausgeschlossen wird, muss jedoch zumindest einer der nicht ausdrücklich ausgeschlossenen Vorkommenskombinationen realmöglich sein.

$(\forall x)\,(Fx \bigtriangledown G)x \triangleq (\circ\circ\circ\circ)(Fx, Gx)$	$(\forall x)\,(Fx \bar{\triangledown} Gx) \triangleq (\circ\circ\circ 0)(Fx, Gx)$
$(\forall x)\,(Fx \Leftarrow Gx) \triangleq (\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx)$	$(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx) \triangleq (\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$
$(\forall x)\,(Fx \upuparrows Gx) \triangleq (0\circ\circ\circ)(Fx, Gx)$	$(\forall x)\,(Fx \Leftrightarrow Gx) \triangleq (\circ 00\circ)(Fx, Gx)$
$(\forall x)\,(Fx \nwarrow Gx) \triangleq (00\circ\circ)(Fx, Gx)$	$(\forall x)\,(Fx \nearrow Gx) \triangleq (0\circ 0)(Fx, Gx)$
$(\forall x)\,(Fx \searrow Gx) \triangleq (\circ 0\circ 0)(Fx, Gx)$	$(\forall x)\,(Fx \swarrow Gx) \triangleq (\circ\circ 00)(Fx, Gx)$
$(\forall x)\,(Fx \bowtie Gx) \triangleq (0\circ\circ 0)(Fx, Gx)$	

Diese Fregerelationen sind durchweg sehr grobe logische Relationen; besteht zwischen zwei Ereignisklassen eine solche grobe Relation, so können diese beiden Ereignisklassen in mehreren verschiedenen Totalrelationen stehen. Wird nur eine Vorkommenskombination als Nullfall bestimmt, so sind 7 nichtleere Totalformen möglich, es gilt etwa: Für beliebige Ereignisklassen p und q: $(\circ\circ\circ 0)(p, q) \leftrightarrow \mathbb{J}\,[(p \vee q), (p >\!\!< q), (p \llcorner q), (p \lrcorner q), (p \wedge q), (p \succcurlyeq q), (p \preccurlyeq q)]$. Besteht zwischen zwei Ereignissen eine logische Relation, die zwei nichtrealmögliche Vorkommenskombinationen aufweist, während die restlichen Vorkommenskombinationen unbestimmt bleiben, kommen genau drei nichtleere logische Relationen in Betracht, z.B. gilt: Für alle p und q: $(0\circ\circ 0)\,(p, q) \leftrightarrow \mathbb{J}\,[(p >\!\!< q), (p \succcurlyeq q), (p \preccurlyeq q)]$. In der Ausdrucksgestalt $(\forall x)\,(Fx \oplus Gx)$ lassen sich also 15 zweistellige logische Relationen begriffsschriftlich darstellen.

Ausgehend von den drei Möglichkeiten, einen Quantor $(\forall x)Px$ oder $(\exists x)Px$ zu negieren, gibt es in der Menge der elementaren Fregerelationen vier Abbildungen, die jeweils eine elementare Fregerelation $\mathfrak{Q}x\,(Fx \oplus Gx)$ auf genau eine (andere) Fregerelation abbilden; eine solche Abbildung ist entweder identisch (Neg0; eine elementare Fregerelation wird aus sich selbst abgebildet), oder sie besteht in der Negation des Quantors „($\mathfrak{Q}x$)“ (Neg1)[86], oder in der Negation des Gedankengefügeprädikators „($Fx \oplus Gx$)“ (Neg2)[87] oder in beiden Negationen zusammen (Neg3). Mithilfe dieser Abbildungen lassen sich zu den genannten 15 elementaren Fregerelationen eine Anzahl weiterer Fregerelationen begriffsschriftlich darstellen:

1) Wir haben zunächst die identische Abbildung Neg0:
   die Fregerelation $(\forall x)(Fx \oplus Gx)$ wird abgebildet auf: $(\forall x)(Fx \oplus Gx) \equiv \sim(\exists x)\sim(Fx \oplus Gx)$[88].
2) Es gibt die Abbildung Neg1:
   die Fregerelation $(\forall x)(Fx \oplus Gx)$ wird abgebildet auf: $\sim(\forall x)(Fx \oplus G\,x) \equiv (\exists x)\sim(Fx \oplus Gx)$
3) Es gibt die Abbildung Neg2:
   die Fregerelation $(\forall x)(Fx \oplus Gx)$ wird abgebildet auf: $(\forall x)\sim(Fx \oplus Gx) \equiv \sim(\exists x)(Fx \oplus Gx)$
4) Wir haben schließlich die Abbildung Neg3:
   die Fregerelation $(\forall x)(Fx \oplus Gx)$ wird abgebildet auf: $\sim(\forall x)\sim(Fx \oplus Gx) \equiv (\exists x)(Fx \oplus Gx)$.

Mithilfe dieser Abbildungen[89] lassen sich ausgehend von den 15 nichtleeren zweistelligen Gedankengefügen genau 30 nichtleere zweistellige logische Relationen konstruieren und darstellen. Alle diese elementaren Fregerelationen sind wohldefiniert und stehen in einem exakt bestimmbaren logischen Zusammenhang.

Die Fregerelationen und ihre Bedeutung sind in nachstehender Tabelle aufgeführt. „$\mathfrak{F}\backslash\mathbb{J}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$“ bezeichnet diejenige logische Relation, die zwischen zwei Ereignisklassen genau dann besteht, wenn zwischen ihnen weder $\mathbb{J}$, noch $\mathbb{L}$, noch $\mathbb{M}$ besteht; mit „$\mathfrak{F}$“ bezeichne ich die Menge der zweistelligen Totalformen. Der Ausdruck „$\sim\mathbb{K}(p, q)$“ bezeichnet diejenige logische Relation, die zwischen allen Paaren von Ereignisklassen besteht, zwischen denen nicht die Totalform $\mathbb{K}$ besteht. Die Ausdrücke „$(\exists x)\ Fx \triangle Gx$“ und „$(\forall x)\ Fx \triangle Gx$“ sind sinnlos, denn weder für alle, noch für ein x kann gelten, dass ihnen/ihm F wie G jeweils weder zukommen noch nicht zukommen (es ist die leere zweistellige Fregerelation).

Tabelle 11: Die elementaren Fregerelationen

Fregerelation Neg0	*Fregerelation Neg1*	*Fregerelation Neg2*	*Fregerelation Neg3*
∀x (Fx ⇒ Gx) = ∼∃x (Fx ⊧ Gx) = (∘0∘∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt F zu und G nicht zu.	∼∀x (Fx ⇒ Gx) = ∃x (Fx ⊧ Gx) = (•1••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt F zu und G nicht zu.	∀x ∼(Fx ⇒ Gx) = ∀x (Fx ⊧ Gx) = (0100)(Fx, Gx) Allen x kommt F zu und G nicht zu.	∼∀x ∼(Fx ⇒ Gx) = ∃x (Fx ⇒ Gx) = ∼𝕃(Fx, Gx) = (∘•∘∘)(Fx, Gx) Für mindestens ein x trifft es nicht zu, dass ihm F ohne G zukommt
∀x (Fx ⇐ Gx) = ∼∃x (Fx ⫤ Gx) = (∘∘0∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt F nicht zu und G zu.	∼∀x (Fx ⇐ Gx) = ∃x(Fx ⫤ Gx) = (••1•)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt F nicht zu und G zu.	∀x ∼(Fx ⇐ Gx) = ∀x (Fx ⫤ Gx) = (0010)(Fx, Gx) Allen x kommt F zu und G nicht zu.	∼∀x ∼(Fx ⇐ Gx) = ∃x (Fx ⇐ Gx) = ∼𝕄(Fx, Gx) = (∘∘•∘)(Fx, Gx) Für zumindest ein x trifft es nicht zu, dass ihm G ohne F zukommt.
∀x (Fx ⊽ Gx) = ∼∃x (Fx ⇓ Gx) = (∘∘∘0)(Fx, Gx) Keinem x kommt von F und G keines zu.	∼∀x (Fx ⊽ Gx) = ∃x (Fx ⇓ Gx) = (•••1)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt weder F noch G zu.	∀x ∼(Fx ⊽ Gx) = ∀x (Fx ⇓ Gx) = (0001)(Fx, Gx) Allen x kommt weder F noch G zu.	∼∀x ∼(Fx ⊽ Gx) = ∃x (Fx ⊽ Gx) = ∼𝕏(Fx, Gx) = (∘∘∘•)(Fx, Gx) Für zumindest ein x trifft es nicht zu, dass ihm weder F noch G zukommt.
∀x (Fx ⇑ Gx) = ∼∃x (Fx & Gx) (0∘∘∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt F und G zugleich zu.	∼∀x (Fx ⇑ Gx) = ∃x (Fx & Gx) = (1•••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt F und G zugleich zu.	∀x ∼(Fx ⇑ Gx) = ∀x (Fx & Gx) = (1000)(Fx, Gx) Allen x kommt F und G zu.	∼∀x ∼(Fx ⇑ Gx) = ∃x (Fx ⇑ Gx) = ∼𝕂(Fx, Gx) = (•∘∘∘)(Fx, Gx) Für zumindest ein x trifft es nicht zu, dass ihm F und G zukommt.
∀x (Fx ⇔ Gx) = ∼∃x (Fx ⇔ Gx) = (∘00∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt von F und G nur eines zu.	∼∀x (Fx ⇔ Gx) = ∃x (Fx ⋈ Gx) = 𝔣\𝕂𝔼𝕏(Fx, Gx) = (•∘∘•)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt von F und G nur eines zu.	∀x ∼(Fx ⇔ Gx) = ∀x(Fx ⋈ Gx) = (0∘∘0)(Fx, Gx) Allen x kommt von F und G genau eines zu.	∼∀x ∼(Fx ⇔ Gx) = ∃x (Fx ⇔ Gx) = 𝔣\𝕁𝕃𝕄(Fx, Gx) = (∘••∘)(Fx, Gx) Zumindest für ein x trifft es nicht zu, dass ihm von F und G genau eines zukommt.
∀x(Fx ⋈ Gx) = ∼∃x (Fx ⇔ Gx) = (0••0)(Fx, Gx) Allen x kommt von F und G genau eines zu.	∼∀x(Fx ⋈ Gx) = (∃x) (Fx ⇔ Gx) = 𝔣\𝕁𝕃𝕄(Fx, Gx) = (∘••∘)(Fx, Gx) Zumindest für ein x trifft es nicht zu, dass ihm von F und G genau eines zukommt.	∀x∼(Fx ⋈ Gx) = ∀x (Fx ⇔ Gx) = (∘00∘)(Fx, Gx) Keinem x kommt von F und G nur eines zu.	∼∀x∼(Fx ⋈ Gx) = ∃x (Fx ⋈ Gx) = 𝔣\𝕂𝔼𝕏(Fx, Gx) = (•∘∘•)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt von F und G nur eines zu.
∀x (Fx ⬉ Gx) = ∼∃x (Fx ⬊ Gx) = (00∘∘)(Fx, Gx) Allen x kommt jedenfalls nicht F zu.	∼∀x (F ⬉ Gx) = ∃x (Fx ⬋ Gx) = 𝔣\𝔽𝕄𝕏(Fx, Gx) = (∘∘••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt jedenfalls F zu.	∀x ∼(F ⬉ Gx) = ∀x (F ⬋ Gx) = (∘∘00)(Fx, Gx) Allen x kommt jedenfalls F zu.	∼∀x ∼(F ⬉ Gx) = ∃x (Fx ⬉ Gx) = 𝔣\𝕀𝕂𝕃 = (••∘∘)(Fx, Gx) Einem x kommt F nicht zu
(∀x)(Fx ⬋ Gx) = ∼∃x (Fx ⬉ Gx) = (∘∘00)(Fx, Gx) Allen x kommt jedenfalls F zu	∼(∀x)(Fx ⬋ Gx) = ∃x (Fx ⬉ Gx) = 𝔣\𝕀𝕂𝕃 = (••∘∘)(Fx, Gx) Einem x kommt F nicht zu	(∀x)∼(Fx ⬋ Gx) = ∀x (Fx ⬉ Gx) = (00∘∘)(Fx, Gx) = Allen x kommt jedenfalls nicht F zu	∼(∀x)∼(Fx ⬋ Gx) = ∃x (Fx ⬋ Gx) = 𝔣\𝔽𝕄𝕏(Fx, Gx) = (∘∘••)(Fx, Gx) Zumindest einem x kommt jedenfalls F zu.
∀x (Fx ▽ Gx) = ∼∃x (Fx △ Gx) = (∘∘∘∘)(Fx, Gx) Allen x kommt F und. G jeweils entweder zu oder nicht zu (trifft für alle zweistelligen logischen Relationen zu).	∼∀x (Fx ▽ Gx) = ∃x (Fx △ Gx) Zumindest einem x kommt F und G jeweils weder zu noch nicht zu (unmögliches Ereignis)	∀x ∼(Fx ▽ Gx) = ∀x (Fx △ Gx) Allen x kommt F und G jeweils weder zu noch nicht zu (unmögliches Ereignis).	∼∀x ∼(Fx ▽ Gx) = ∃x (Fx △ Gx) Zumindest einem x kommt F und G jeweils entweder zu oder nicht zu (trifft für alle zweistelligen logischen Relationen zu).

FREGEs Versuch, die logischen Beziehungen von der Allgemeinheit zu dissoziieren, ermöglicht – entgegen seinen Erwartungen – nicht eine besonders präzise Bestimmung dieser logischen Beziehungen, sondern bewirkt nur, dass in seinem System in der Form $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$ nur einige wenige, in ihrer Isoliertheit unbedeutende und nichtssagende logische Relationen berücksichtigt werden, von welchen überdies mehrere regelmäßig falsch und in Widerspruch zu den eigenen Definitionen der Gedankengefüge und Quantoren, aufgefasst werden.

Die Struktur der Gedankengefüge unterscheidet sich grundlegend von der Struktur logischer Relationen, damit auch von der Struktur der Fregerelationen. Die Fregerelationen sind keine „Wahrheitsfunktionen“; ich kann die Wahrheit einer Beziehung der Art $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ nicht mehr durch den Hinweis auf die Wahrheit vorgegebener Aussagen entscheiden, sondern die Wahrheitsbedingung dieser Form besteht darin, dass es unmöglich ist, dass $Fx \frown {\sim}Gx$ vorliegt; dass diese Bedingung erfüllt ist, muss ich nachweisen, wenn ich in einem konkreten Fall diese Gesetzesbeziehung behaupte. Im Gegensatz zum Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ ist die Fregerelation $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ eine echte Relation. Die Bedingungen für die Geltung der Fregerelationen sind wie generell bei logischen Relationen normativer Natur: Eine solche Form „existiert“ nicht dann, wenn zumindest zwei konkrete Prädikatoren Fx und Gx nachgewiesen werden können, die in dieser Beziehung stehen[90], sondern umgekehrt – zwei beliebigen Prädikatoren kann diese logische Relation nur dann zugeschrieben werden, wenn sie den normative Bedingungen genügen; dass es eine bestimmte logische Form „gibt“ setzt alleine ihre widerspruchsfreie Konstruierbarkeit voraus; dann ist sie bestimmt und gehört dem System aller logischen Formen an, und die logischen Beziehungen zu beliebigen anderen logischen Formen liegen eindeutig fest.

Im Rahmen des SFG kann ich zwei Aussagen $\mathfrak{Fa}$ und $\mathfrak{Ga}$ Gedankengefüge nur dann zuschreiben, wenn ich die Wahrheitswerte der Aussagen bereits kenne; mit Hilfe der Gedankengefüge kann ich die vorausgesetzten Wahrheitswerte bestenfalls tautologisch wiederholen. Wenn ich zwei Aussagen $\mathfrak{Fa}$ und $\mathfrak{Ga}$ einer logischen Relationen $(\mathfrak{F}x \boxplus \mathfrak{G}x)$ subsumiere, muss ich die Wahrheitsbedingungen für diese Subsumtion kennen – diese stellen die Bedeutung der logischen Relation dar. Aufgrund dieser Subsumtion weiß ich dann nicht bloß, dass $\mathfrak{Fa}$ und $\mathfrak{Ga}$ etwa beides wahre Feststellungsaussagen sind, sondern ob dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ die beiden Prädikate zufällig zukommen, oder ob das eine Prädikat im Hinblick auf das andere notwendig ist, usw.

Einem Gedankengefügeschema wie $A \Rightarrow B$ werden Aussagen subsumiert; dies ist möglich, wenn A und B wahr sind oder A falsch ist; dabei gehört jedes subsumierte Aussagenpaar genau einer der Wahrheitswertkombinationen an. Dieser Disjunktivität der Wahrheitswertkombinationen entspricht keine Disjunktivität der Realmöglichkeit der Vorkommenskombinationen bei Fregerelationen. Wenn eine Fregerelation eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich bestimmt – etwa die Fregerelation $(\exists x)(Fx \& Gx) \equiv (1\bullet\bullet\bullet)(Fx, Gx)$ –, so bedeutet dies nicht, dass die anderen Vorkommenskombinationen nichtrealmöglich sind. Die Realmöglichkeit der Vorkommenskombinationen ($Fx \frown Gx$; $Fx \frown {\sim}Gx$; ${\sim}Fx \frown Gx$ und ${\sim}Fx \frown {\sim}Gx$) ist nicht disjunkt wie die Wahrheit der Wahrheitswertkombinationen; sie können alle realmöglich sein. Der Fregerelation $(\exists x)(Fx \& Gx)$ entspricht somit kein Gedankengefüge.

Es ist ein grundsätzlicher und schwerwiegender Fehler, wenn versucht wird, logische Relationen nach Maßgabe oder nach dem Vorbild der „wahrheitsfunktionalen“ Gedankengefüge zu bilden; die Konstruktion der logischen Formen stellt eine völlig andere Art von Operation dar. Bei der Konstruktion logischer Relationen wird untersucht, was überhaupt im Hinblick auf den Zusammenhang von Prädikatoren/Sachverhalts-/Ereignisklassen möglich ist: man konstruiert alle möglichen logischen Zusammenhänge, indem man prüft, welche Vorkommenskombinationen möglich sind, wie viel verschiedene Weisen es gibt, diese als realmöglich bzw. nichtrealmöglich zu bestimmen. Daraus ergeben sich alle nur möglichen bedingungslogischen Zusammenhänge – und die faktischen Gesetzeszusammenhänge werden dann in solche bedingungslogischen Zusammenhänge eingeordnet, bzw. faktische bedingungslogische Gesetze können erst durch ihre Position in einem solchen Zusammenhang erkannt und identifiziert werden. Die Logik stellt im Zuge ihrer Konstruktion der logischen Formen die Wahrheitsbedingungen aller nur möglichen bedingungslogischen Gesetzeszusammenhänge dar. Die Konstruktion der Gedankengefüge führt hingegen nur zu den Wahrheitsbedingungen für die tautologische oder informationsverschleiernde Wiedergabe bereits vorausgesetzter Fakten.

4.3.8.1. Die Missdeutung der Fregerelationen.

Wie sich die Ausdrücke „$A \Rightarrow B$“ und „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$“ oder „$(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$“, generell Gedankengefüge „$A \oplus B$“ und die prädikatenlogistischen Formen $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$ unterscheiden, wie letztere von den Gedankengefügen abhängen und wie sie sich zu den verschiedenen Bedeutungen des umgangssprachlichen „Wenn“ und anderer logischer Partikeln verhalten, ist von den Vertretern der „modernen Logik“ nie systematisch untersucht, geschweige denn auch nur annähernd geklärt worden. Ihre logische Missdeutung der Gedankengefüge überträgt sich zwangsläufig auf die Beurteilung der auf ihrer Grundlage konstruierten logischen Formen (der elementaren Fregerelationen).

Die Fregerelation (∀x) (Fx ⇒ Gx), „formale Implikation“ genannt, schließt einzig den Fall aus, dass einem Gegenstand x zugleich F zukommt und G nicht zukommt: (◦0◦◦)(Fx, Gx); da wir die leere Relation (0000)(Fx, Gx) prinzipiell ausschließen, muss zumindest einer der nicht definitiv ausgeschlossenen Vorkommenskombinationen realmöglich sein. Jede andere „Deutung“ dieser Fregerelation widerspricht FREGEs Definition des Zeichens „⇒“. Es können bei (∀x)(Fx ⇒ Gx) sieben verschiedene logische Totalformen vorliegen: es kann entweder gelten, dass F jedenfalls allen x nicht zukommt [*Pränonpendenz* (0**0**11)(Fx, Gx)], oder dass G jedenfalls allen x zukommt [*Postpendenz* (1**0**10)(Fx, Gx)], oder dass allen x sowohl F wie G zukommt [*Konjunktion* (1**0**00)(Fx, Gx)], oder dass allen x G, aber nicht F zukommt [*Präsektion* (0**0**10)(Fx, Gx)], oder dass allen x weder F noch G zukommt [*Rejektion* (0**0**01)(Fx, Gx)], schließlich dass, wenn einem x F zukommt, ihm auch G zukommt (*Implikation* [1**0**11)(Fx, Gx)] oder dass genau dann, wenn einem x F zukommt, ihm auch G zukommt (*Äquivalenz* [1**0**01)(Fx, Gx)].

FREGE identifiziert diese Fregerelation mit einer der sieben bei ihrer Geltung möglichen Totalrelationen, nämlich mit der Beziehung ℂ, wenn er schreibt, man könne „(∀x)(Fx ⇒ Gx)“ „übersetzen: ‚wenn etwas die Eigenschaft F hat, so hat es auch die Eigenschaft G‘, oder ‚jedes F ist ein G‘, oder ‚alle F’s sind G’s‘.“ (BS 23)[91] Er meint die Fregerelation (◦0◦◦) (Fx, Gx) sei mit dem a-Urteil der traditionellen Logik identisch; dies gilt jedoch nur für die Implikation (1011)(Fx, Gx) – „allen Gegenständen, denen F zukommt, kommt G zu, aber nicht umgekehrt“ ≡ „Alle Gegenstände, denen F zukommt, kommt G zu“ –, eine logische Form, die begriffsschriftlich gar nicht in der Form **Q**x (Fx, Gx) darstellbar ist, und von (◦0◦◦) (Fx, Gx) verschieden ist. Auch die drei anderen „Urteilsformen“ der traditionellen Logik werden mit elementaren Fregerelationen verwechselt (BS 23f; auch BRL 15f, 22): die Fregerelation ∀x(Fx ⇒ ~Gx) ≡ ∀x(Fx ⇑ Gx) könne in das e-Urteil „Was die Eigenschaft F hat, hat nicht die Eigenschaft G“ ≡ „Kein F ist G“ „übersetzt“ werden; in Wirklichkeit ist nicht die Fregerelation (0◦◦◦)(Fx, Gx), sondern die Relation (0111)(Fx, Gx) die e-Relation „Keinem Gegenstand, dem F zukommt, kommt G zu“. Eben so wenig verweist der Ausdruck „~(∀x)(Fx ⇒ Gx)“ auf das traditionelle o-Urteil (•1•1)(Fx, Gx) ≡ Nicht alle F sind G ≡ Zumindest ein F ist nicht G, sondern auf die Fregerelation (•1••)(Fx, Gx). Endlich ist ~(∀x)(Fx ⇒ ~Gx), gleichbedeutend mit ~(∀x)(Fx ⇑ Gx) ≡ Nicht alle F sind nicht G ≡ Zumindest ein F ist G, nicht, wie FREGE behauptet, die i-Syllogismusrelation (1••1)(Fx, Gx), sondern die Fregerelation (1•••)(Fx, Gx). Keine der vier traditionellen „Urteilsformen“ (Syllogismusrelationen) kann eindeutig als elementare Fregerelation dargestellt werden.

Die vier Fregerelationen (0◦◦◦), (◦0◦◦◦), (1•••) und (•1••) sind wohlbestimmt und ihr gegenseitiges logisches Verhältnis sowie ihre Verkettbarkeit lässt sich leicht feststellen. Die vier Fregerelationen stehen paarweise im Verhältnis der Independenz 𝕍, mit Ausnahme der Paare [(0◦◦◦), (1•••)] und [(◦0◦◦), (•1••)], die jeweils im Verhältnis der Kontradiktion 𝕁 stehen. Das hindert FREGE freilich nicht zu behaupten, zwischen diesen vier Fregerelationen bestünden dieselben Beziehungen der Kontrarietät (𝔻), der Subalternation (ℂ) und der Subkontrarietät (𝔸) wie zwischen bestimmten Paaren von Syllogismusrelationen (BS 24)[92], und diese Beziehungen ließen sich begriffsschriftlich darstellen; dies ist falsch – auf der Basis der Gedankengefüge **V**, **J**, **A**, **C** und **D** lassen sich weder die tatsächlichen, noch die angeblichen Beziehungen zwischen den Fregerelationen vollständig darstellen.

Natürlich kann man auch für diese vier Fregerelationen (◦0◦◦)(Fx, Gx), (0◦◦◦)(Fx, Gx), (•1••)(Fx, Gx) und (1•••)(Fx, Gx) ein der traditionellen Syllogistik analoges System der eindeutigen Verkettungen erstellen; das ist mit vielen der astronomisch vielen Quadrupel in der Menge der 2^{16} zweistelligen logischen Relationen möglich. Ein schlechter Witz aber ist es, wenn das System der eindeutigen Verkettungen dieser vier Fregerelationen als eine zulässige „Deutung“ oder gar als eine Verbesserung und notwendige Korrektur des traditionellen Systems ausgegeben wird; es geht nicht an, einen traditionellen syllogistischen Modus deshalb für inkorrekt oder „trugschlüssig“ zu erklären, weil er nach der unbedachten und unzulässigen Ersetzung der Syllogismusrelationen durch diese vier Fregerelationen nicht mehr gültig ist[93].

Auch die Verkettung von Fregerelationen lässt sich auf der Basis des Gedankengefüges **C** nicht vollständig und eindeutig darstellen. Das Verkettungsgesetz

$$[(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)\,\&\,(\forall x)(Gx \Rightarrow Hx)] \rightarrow [(\forall x)(Fx \Rightarrow Hx)]$$

wird nicht durch den begriffsschriftlichen abschwächenden Ausdruck

„$[(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)\,\&\,(\forall x)(Gx \Rightarrow Hx)] \Rightarrow [(\forall x)(Fx \Rightarrow Hx)]$“[94]

bezeichnet; der begriffsschriftliche Ausdruck besagt nicht, dass aus [(∀x)(Fx⇒Gx) & (∀x)(Gx⇒Hx)] *notwendig* (∀x)(Fx⇒Hx) folgt, sondern nur, dass es unmöglich ist, dass die Fregerelationen (∀x)(Fx⇒Gx) und (∀x)(Gx⇒Hx) gelten, ohne dass auch (∀x)(Fx⇒Hx) gilt. Wäre die Fregerelation (∘0∘∘) die Folgerelation, wie **FREGE** und seine Anhänger meinen, müsste, weil z.B. auch gilt [(∀x)(Fx⇒Gx) & ~(∀x)(Fx⇒Gx)] ⇒ [(∀x)(Fx⇒Gx)], aus Unmöglichem wie [(∀x)(Fx⇒Gx) & ~(∀x)(Fx⇒Gx)] Beliebiges „folgen“. Die mit der Implikation verwechselte Relation (∘0∘∘) verbindet nicht immer und eindeutig eine hinreichende Bedingung mit ihrer notwendigen Folge und kann deshalb nicht die Folgebeziehung sein. **FREGE** kann in seinem System nicht den Unterschied zwischen einem Implikationsgesetz und dem Pränonpendenzgesetz [(∀x)(Fx ⇒ Gx) & ~(∀x)(Fx ⇒ Gx)] ⌉ [(∀x)(Fx ⇒ Gx)][95] bestimmen. Im Rahmen der *Begriffsschrift* lassen sich wohl einige wenige logische Relationen in der Ausdrucksgestalt Ⓠx(Fx ⊕ Gx) darstellen, die Beziehungen dieser Fregerelationen, etwa ihre eindeutige Verkettung, können jedoch nicht präzise und vollständig bestimmt und dargestellt werden, weil die Implikation ℂ nicht zu den Fregerelationen gehört. Wegen der Verwechslung der Syllogismusrelationen mit von ihnen tiefgreifend verschiedenen Fregerelationen haben **FREGE** und seine Anhänger auf dem Gebiet der traditionellen Syllogistik nicht Klarheit, sondern nur Verwirrung gestiftet.

FREGE glaubt, mit dem Zeichen „⇒“ arithmetische Implikationsgesetze darstellen zu können, etwa das Gesetz *Wenn eine reelle Zahl größer als 2 ist, dann ist ihr Quadrat größer als 2*; zwar ist das Gesetz (∀x ∈ ℝ) [(x > 2) ⇒ (x^2 > 2)] gültig, die Darstellung auf der Basis von **ℂ** schwächt den spezifischen Gehalt der Implikationsaussage jedoch ab und nimmt dem Gesetz in dieser Abschwächung jede Notwendigkeit; denn die folgenden, ganz unterschiedlichen, teilweise keinen notwendigen Zusammenhang bildenden arithmetischen Verhältnisse werden in **FREGE**s System *alle* durch die Form (∀x)(Fx ⇒ Gx) ausgedrückt (m bezeichne eine beliebige natürliche Zahl).

1) ℂ-Gesetz: (1**0**11) [(m > 2),(m^2 > 2)]
2) 𝔼-Gesetz: (1**0**01) [(m^2 = 4),(m^4 = 16)]
3) 𝕏-Gesetz: (0**0**01) [(m+1 < m), (m+1 = m)
4) 𝔽-Gesetz: (0**0**11) [(m+1 = m), (m > 10)]
5) ℍ-Gesetz: (1**0**10) [(m^2 > 100), (m+1 > m)
6) 𝕂-Gesetz: (1**0**00) [(m^2 ⩾ m), (m+1 > m)
7) 𝕄-Gesetz: (0**0**10) [(m+1 < m),(m+1 > m)

Das System der elementaren Fregerelationen ist so unvollständig, dass in seinem Rahmen nicht einmal elementarste arithmetische Gesetze eindeutig formuliert werden können, etwa das Gesetz: *Wenn eine Zahl n Nachfolger einer Zahl m ist, dann ist n größer als m*. Von einer logischen Theorie ist Vollständigkeit in dem Sinne zu fordern, dass jede beliebige logische Relation, von welcher Komplexität auch immer, konstruiert und eindeutig in ihrer spezifischen Bedeutung gefasst werden kann. Das Erreichen einer solchen Vollständigkeit hat sich **FREGE** durch sein Vorgehen verbaut. Die elementaren Fregerelationen sind sehr grob; keine Notwendigkeit – kein einzige notwendiger Zusammenhang, kein einziges gehaltvolles mathematisches oder anderes Gesetz lässt sich darstellen.

4.3.8.2. Eine „logische Aufgabe“

Dass **FREGE**s grobe und unselbständige elementare Fregerelationen mit ganz anderen logischen Relationen verwechselt (dass er also auch auf dem Felde der Prädikatenlogistik etwas anderes meint als er sagt, und etwas anderes sagt, als er meint), geht auch aus einer Stelle hervor, in der er zu demonstrieren versucht, dass bestimmte logische Aufgaben erst im Rahmen seines Verständnisses der logischen Relationen leicht und übersichtlich gelöst werden können: zwischen einigen Sachverhalts-/Ereignisklassen werden bestimmte logische Verhältnisse angenommen, und dann wird geprüft, welche anderen Verhältnisse diese vorgegebenen Beziehungen involvieren und sich rein logisch erschließen lassen. Es ist eine Aufgabenstellung, wie sie uns schon bei der Bestimmung der Verkettbarkeit zweistelliger logischer Relationen begegnet ist; aus dem vorgegebenen Verhältnis zwischen einer ersten und zweiten, und dieser zweiten und einer dritten Ereignisklasse muss das Verhältnis zwischen allen drei Ereignisklassen, aus diesem wiederum das Verhältnis zwischen der ersten und der dritten Ereignisklasse erschlossen werden.

In BRL S.45f liefert **FREGE** die angebliche Lösung einer Aufgabe, mit der sich vor ihm schon **BOOLE**, **SCHRÖDER** und **WUNDT** befasst hatten. Er geht von der Voraussetzung aus, dass zwischen begrifflichen Bestimmungen („Merkmalen“) von Gegenständen bestimmter Art gewisse gesetzmäßige Beziehungen bestehen. Hier, wo sich **FREGE** mit logischen Zusammenhängen, und nicht mehr mit logisch irrelevanten Gedankengefügen befasst, befleißigt er sich notwendigerweise der Sprache der Ereignis-/Bedingungslogik. Nicht mehr von der Wahrheit oder Falschheit zusammenhangsloser Aussagen ist die Rede, sondern von Sachverhalts-/Ereignisklassen, d.h. von jedem beliebigen „Umstand", dass „das Merkmal A sich an dem betrachteten Gegenstande" (dem Ereignis-Bezugssystem) findet; er nimmt zu Kenntnis, dass die Prädikate („Merkmale"), deren gesetzmäßige Beziehung um die es in logischen Beziehungen geht, demselben Ereignis-Bezugssystem zukommen: es gehe um eine „Beobachtung einer Klasse von Erscheinungen (Natur- oder Kunsterzeugnisse, z.B. Substanzen)", ob diesen Merkmale zukommen oder nicht. Ich beschränke mich im Folgenden auf zwei der fünf vorgegebenen Beziehungen zwischen den Ereignisklassen Ax, Bx, Cx, Dx und Ex, die in der fregeschen Aufgabenstellung vorkommen; statt „Ax", „Bx", usw. schreibe ich im Folgenden „A", „B", usw.[96]

Verhältnis 1 (V1): „Dass, wo immer die Merkmale A und D in Abwesenheit von E gleichzeitig auftreten, die Merkmale B und C entweder beide sich vorfinden oder beide fehlen." (BRL 45) Im Rahmen der im ersten Teil dieser Arbeit entwickelten Theorie logischer Formen, können wir diese logische Relation präzise bestimmen: bei $A\frown D\frown{\sim}E$ gilt entweder $B\frown C$ oder ${\sim}B\frown{\sim}C$, also $\mathbf{A\frown D\frown{\sim}E: (B\leftrightarrow C)}$. Durch dies vorgegebene Verhältnis V1 sind schon vier der 32 Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (A, B, C, D, E) eindeutig bestimmt:

V1.1: rm ist $A\frown D\frown{\sim}E\frown B\frown C$; **rm(II)**
V1.2: rm ist $A\frown D\frown{\sim}E\frown{\sim}B\frown{\sim}C$; rm(XIV)
V1.3: nrm ist $A\frown D\frown{\sim}E\frown B\frown{\sim}C$; **nrm(VI)**
V1.4: nrm ist $A\frown D\frown{\sim}E\frown{\sim}B\frown C$; nrm(X)

Verhältnis 2 (V2): „Dass überall, wo das Merkmal A mit dem B oder E [oder] mit beiden zusammen besteht, auch entweder das Merkmal C vorkommt oder das D, aber nicht beide. Und umgekehrt, überall, wo von den Merkmalen C und D das eine ohne das andere wahrgenommen wird, da soll auch das Merkmal A in Verbindung mit B oder E oder mit beiden zugleich auftreten." Dies bedeutet, dass bei A mit zumindest einem von B und E, von C und D genau eines vorliegt; $\mathbf{A\&(B\vee E): C >\!\!< D}$. Durch dieses vorgegebene Verhältnis V2 sind zwölf Vorkommenskombinationen der Totalform von (A, B, C, D, E) eindeutig bestimmt:

Bei $A\frown B\frown E$: $C >\!\!< D$ gilt:

V2.1.: nrm ist $A\frown B\frown E\frown C\frown D$; nrm(I)
V2.2.: rm ist $A\frown B\frown E\frown C\frown{\sim}D$; rm(III)
V2.3.: rm ist $A\frown B\frown E\frown{\sim}C\frown D$; rm(V)
V2.4.: nrm ist $A\frown B\frown E\frown{\sim}C\frown{\sim}D$; nrm(VII)

Bei $A\frown B\frown{\sim}E$: $C >\!\!< D$ gilt:

V2.5.: nrm ist $A\frown B\frown{\sim}E\frown C\frown D$; **nrm(II)**
V2.6.: rm ist $A\frown B\frown{\sim}E\frown C\frown{\sim}D$; rm(IV)
V2.7.: rm ist $A\frown B\frown{\sim}E\frown{\sim}C\frown D$; **rm(VI)**
V2.8.: nrm ist $A\frown B\frown{\sim}E\frown{\sim}C\frown{\sim}D$; nrm(VIII)

Bei $A\frown{\sim}B\frown E$: $C >\!\!< D$ gilt:

V2.9.: nrm ist $A\frown{\sim}B\frown E\frown C\frown D$; nrm(IX)
V2.10.: rm ist $A\frown{\sim}B\frown E\frown C\frown{\sim}D$; rm(XI)
V2.11.: rm ist $A\frown{\sim}B\frown E\frown{\sim}C\frown D$; rm(XIII)
V2.12.: nrm ist $A\frown{\sim}B\frown E\frown{\sim}C\frown{\sim}D$; nrm(XV)

Es ist zu prüfen, ob und wieweit durch V1 und V2 das logische Verhältnis der fünf Ereignisklassen A, B, C, D, und E bestimmt ist; da V1 und V2 das Vorliegen von A voraussetzen und deshalb nur die ersten 16 Vorkommenskombinationen der Totalform von (A,B,C,D,E) betreffen, habe ich die restlichen Vorkommenskombinationen weggelassen. Zunächst ergibt sich, dass diese Bedingungen V1 und V2 sich widersprechen und deshalb zusammen gar kein logisches Verhältnis festlegen können.

Vorkommens-kombination	Ax	Bx	Cx	Dx	Ex	V1	V2	fünfstellige Relation
I	1	1	1	1	1		0	0
II	1	1	1	1	0	**1**	**0**	Widerspruch
III	1	1	1	0	1		1	1
IV	1	1	1	0	0		1	1
V	1	1	0	1	1		1	1
VI	1	1	0	1	0	**0**	**1**	Widerspruch
VII	1	1	0	0	1		0	0
VIII	1	1	0	0	0		0	0
IX	1	0	1	1	1		0	0
X	1	0	1	1	0	0		0
XI	1	0	1	0	1		1	1
XII	1	0	1	0	0			
XIII	1	0	0	1	1		1	1
XIV	1	0	0	1	0	1		
XV	1	0	0	0	1		0	0
XVI	1	0	0	0	0			
....								

Mit seinen begriffsschriftlichen Ausdrucksmitteln kann **FREGE** diesen fünfstelligen logischen Zusammenhang nur unvollständig darstellen. Das erste vorgegebene Verhältnis V1 – „Bei der Bejahung von A und D und der Verneinung von E, sollen B und C entweder beide bejaht oder beide verneint werden" (BRL 46) – ist nach **FREGE**s Verständnis bereits durch die folgenden zwei Ausdrücke vollständig dargestellt: einmal durch „~E⇒(D⇒(A⇒(B⇒C)))", was bedeutet ~(~E & D & A & B & ~C), also nrm(VI), und zum zweiten durch „~E⇒(D⇒(A⇒(~B⇒~C)))", was bedeutet ~(~E & D & A & ~B & C), also nrm(X); **FREGE** kann nur den nichtrealmöglichen Vorkommenskombinationen VI und X einen begriffsschriftlichen Ausdruck geben; außerdem muss er jede der darstellbaren nichtrealmöglichen Vorkommenskombinationen durch eine eigene Formel darstellen.

Auch **FREGE**s Behandlung des zweiten vorgegebenen Verhältnisses ist unvollständig; das Verhältnis, dass, wenn A und B bejaht sind, auch C oder D bejaht sein sollen, aber nicht beide, stellt er durch die zwei Formeln „B⇒(A⇒(~D⇒C))", was bedeutet: ~(B & A & ~D & ~C), also nrm(VII,VIII), und „B⇒(A⇒(D⇒~C))", was bedeutet: ~(B & A & D & C), also nrm(I,II), dar. Dass auch bei A und E genau eines von C und D bejaht sein soll, stellt **FREGE** durch den Ausdruck „E⇒(A⇒(~D⇒C))", was ~(E & A & ~D & ~C), also nrm(VII,XV), bedeutet, und durch den Ausdruck „E⇒(A⇒(D⇒~C))", was ~(E & A & D & C), also nrm(I,IX), bedeutet (BRL 46).

FREGE berücksichtigt nur nichtrealmögliche Vorkommenskombinationen. Würde er in seinem System, in dem die logischen Relationen auf der Grundlage von Gedankengefügen konstruiert werden müssen, eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich kennzeichnen, wären alle anderen Vorkommenskombinationen definitiv als nichtrealmöglich zu bestimmen; denn wenn ein Gedankengefüge ein bestimmtes Wahrheitswertprädikat ausdrücklich bejaht, wenn etwa irgendwelche Aussagen A, B, C ausdrücklich als wahr und die Aussagen D und E als ausdrücklich als falsch bewertet werden, wird jede andere Kombination der Wahrheitswerte der drei Aussagen wegen der Disjunktivität der Wahrheitswertprädikate definitiv ausgeschlossen; elementare Fregerelationen können höchstens eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich bestimmen, wenn sie darüber hinaus alle restlichen Vorkommenskombinationen als nichtrealmöglich bestimmen[97]. Ohne dass die verschiedenen Vorkommenskombinationen, die durch die vorgegebenen Verhältnisse V1 und V2 in **FREGE**s Aufgabe als realmöglich bestimmt sind, berücksichtigt werden, lässt sich der spezifische Gesetzeszusammenhang zwischen den Ereignisklassen A,B,C,D und E nicht erkennen und darlegen. Nur wenn Vorkommenskombinationen zugleich teils als realmöglich, teils als nichtrealmöglich bestimmt sind, ergeben sich gesetzmäßigen Beziehungen relativer Modalisierung zwischen verschiedenen Ereignisklassen. Keine einzige zwei- oder höherstellige Fregerelation bestimmt in eindeutiger Weise das Verhältnis einer der elementaren relativen Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{K}$, da hierbei zumindest zwei Vorkommenskombinationen definitiv als realmöglich bestimmt sein müssten[98].

Die logischen Formen als Strukturen gesetzmäßiger Zusammenhänge sind ihrem Gehalt nach solche relativen Modalisierungen.

FREGE meint, schon durch die Nicht-Realmöglichkeit einer einzigen Vorkommenskombination sei ein aussagekräftiger, gehaltvoller logischer Zusammenhang wie etwa das „Verhältnis von Grund und Folge“ gegeben; so sei im Ausdruck „$\sim C \Rightarrow (\sim A \Rightarrow E)$“ $\equiv$ „$\sim(\sim C \,\&\, \sim A \,\&\, \sim E)$“ – was $nrm(\sim A \frown \sim C \frown \sim E)$ bedeutet – das Ereignis E als „notwendige Folge“ der anderen Ereignisse $\sim A$ und $\sim C$ bestimmt, und im Ausdruck „$E \Rightarrow (A \Rightarrow (\sim D \Rightarrow C))$“ $\equiv$ „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$“ – also $\mathrm{nrm}(E \frown A \frown \sim D \frown \sim C)$ – trete E dagegen als eine „Bedingung“ der anderen Ereignisse auf (vgl. BRL 46-48). **FREGE** meint also, wenn es unmöglich ist, dass die Ereignisse $\sim C$ und $\sim A$ zusammen mit dem Ereignis $\sim E$ eintritt, seien $\sim C$ und $\sim A$ der „Grund“ zur „Folge“ E. Ein Urteil wie „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$“ – also: $\mathrm{nrm}(E \frown A \frown \sim D \frown \sim C)$ – bestimmt jedoch noch überhaupt kein logisches *Verhältnis*, weil sich ein logisches Verhältnis als ein Zusammenhang relativer Modalisierung immer erst aus der unterschiedlichen Bestimmtheit *mehrerer* Vorkommenskombinationen zusammensetzt[99]. In einem Ausdruck wie „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$“ ist das zu verneinende letzte Glied – im vorliegenden Beispiel C – nie die „notwendige Folge“ der vorhergehenden Glieder, denn in der Darstellung einer Vorkommenskombination können die Glieder, z.B. E, A, $\sim D$ und $\sim C$ beliebig permutiert werden, ohne dass sich die logische Sachlage – z.B. $\mathrm{nrm}(E \frown A \frown \sim D \frown \sim C)$ – ändert: „$\sim(E \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C)$“ $\equiv$ „$\sim(A \,\&\, \sim D \,\&\, \sim C \,\&\, E)$“ $\equiv$ „$\sim(\sim C \,\&\, A \,\&\, \sim D \,\&\, E)$“. usw.; „Grund“ und „Folge“ wären, nähme man **FREGE** beim Wort, beliebig vertauschbar.

In **FREGE**s Behandlung der vorliegenden Aufgabe werden die verschiedenen Formeln, die jeweils die Nicht-Realmöglichkeit eines oder mehrerer Vorkommenskombinationen der logischen Totalform von (A,B,C,D,E) aussagen, nicht zu einer integralen, übersichtlich dargestellten logischen Beziehung aller fünf Ereignisklassen zusammengefasst. Diese integrale Gesamtheit verschiedener Vorkommenskombinationen, aus der jede logische Relation besteht, kann knapp, übersichtlich und vollständig durch die Normalmatrizen von logischen Total- und Partialformen dargelegt werden. Die *begriffsschriftliche* fregesche Darstellung umfassender logischer Verhältnisse bleibt hingegen prinzipiell bruchstückhaft; diese Darstellung wird außerdem, legt man wie **FREGE** nicht das umgangssprachliche „und“, sondern den „Bedingungsstrich“ zugrunde, indirekt, unübersichtlich und unannehmbar umständlich[100].

Ein besonders schwerwiegender Mangel von **FREGE**s lückenhafter Darstellung logischer Zusammenhänge ist, dass im Rahmen seines System Widersprüche bei der Beschreibungen eines logischen Zusammenhanges, die darin bestehen, dass verschiedene Festlegungen dieselbe Vorkommenskombination einmal als realmöglich und dann als nichtrealmöglich bestimmen, unerkennbar bleiben müssen, da **FREGE** von umfassenden logischen Beziehungen nur die nichtrealmöglichen Vorkommenskombinationen berücksichtigen kann. Dass mehrere der in **FREGE**s logischer Aufgabe vorgegebenen Beziehungen logisch gar nicht verträglich sind – V1 etwa setzt die Realmöglichkeit, V2 die Nicht-Realmöglichkeit der Vorkommenskombination $A \frown B \frown C \frown D \frown \sim E$ voraus –, vermag **FREGE** gar nicht zur Kenntnis nehmen; sein System kann wegen der Beschränkung auf Fregerelationen eine der wichtigsten Aufgaben der Logik, eine Bewertung der inneren Stimmigkeit und Widerspruchslosigkeit theoretischer Aussagesysteme, nicht einmal im Ansatz leisten.

Aufgrund dieser prinzipiellen Mangelhaftigkeit seiner Konstruktion logischer Relationen kann **FREGE**, ohne es selber zu merken, keine einzige der gestellten Aufgaben lösen, in denen auf der Basis der vorgegebenen Verhältnisse bestimmt werden muss, welche zwei- drei- und vierstelligen Beziehungen zwischen den involvierten Ereignisklassen gelten[101]. Um beispielsweise zu erkennen, was die vorgegebenen Verhältnisse V1 und V2 über die Beziehung aussagen, welche unabhängig vom Vorliegen von E beim Vorliegen von A zwischen B, C, und D bestehen, muss ich zunächst prüfen, wie durch diese Verhältnisse V1 und V2 die Vorkommenskombinationen der logischen Form von (A,B,C,D,E) bestimmt sind, und danach ist zu untersuchen, ob beim Vorliegen von A die Vorkommenskombinationen der logischen Beziehung von (B,C,D) realmöglich oder nichtrealmöglich sind, falls E vorliegt und falls E nicht vorliegt; eine Vorkommenskombination der Beziehung von (A,B,C,D) ist dann unabhängig von E realmöglich, wenn sie bei E und $\sim E$ zumindest einmal realmöglich ist, eine Vorkommenskombination ist nichtrealmöglich, wenn sie weder bei E noch bei $\sim E$ realmöglich ist. Die Lösung solcher Aufgaben erfordert immer den Bezug auf *alle* Vorkommenskombinationen; weil **FREGE** aber eine logische Beziehung nicht als die Gesamtheit aller Vorkommenskombinationen fasst, schlägt er einen ganz falschen Lösungsweg vor.

Die unzulängliche Art, in der **FREGE** diese Art von Aufgaben – es geht um die Lösung des Problems, welche Beziehung, falls die logische Relation von n Ereignissen vorgegeben ist, zwischen (n-1) dieser Ereignisse unabhängig vom n-ten Ereignis vorliegt – angeht, will ich am einfacheren Beispiel einer dreistelligen logischen Relation darlegen. Ist $[A, B, C\ \mathbb{K}\mathbb{C}]$ vorgegeben – B ist notwendige Folge von A, und C ist notwendige Folge von B –, dann ist Vorkommenskombination II, $A \frown B \frown \sim C$ nichtrealmöglich, es gilt also $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Das Verhältnis [A, B, C $\mathbb{K}\mathbb{C}$] ist äquivalent mit [C, A, B $\mathbb{C}\mathbb{X}$]; es gilt also nrm($C \frown A \frown \sim B$), begriffsschriftlich „$C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“. **FREGE** meint nun, die Nichtrealmöglichkeit einer *einzigen* Vorkommenskombination wie $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv \sim(A \,\&\, B \,\&\, \sim C)$ reiche bereits aus, um die Geltung des logischen Verhältnisses zwischen hinreichender Bedingung und notwendiger Folge behaupten zu können; er glaubt, im Ausdruck „$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$“ ≡ „$\sim(A \,\&\, B \,\&\, \sim C)$ sei C „Folge“ der beiden anderen Ereignisse, im Ausdruck „$C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ ≡ „$\sim(C \,\&\, A \,\&\, \sim B)$ sei C jedoch die „hinreichende Bedingung“ der beiden anderen Ereignisse. Wenn nun die beiden Formeln $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ und $C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ vorgegeben seien, lasse sich, so **FREGE**, aus beiden eine dritte Formel gewinnen, in denen das „C“ „weggeschafft“ sei – diese dritte Formel bestimme demzufolge das Verhältnis von A und B; im Ausdruck „$C \Rightarrow (A \Rightarrow B)$“ könne das „C“ durch das, wofür es angeblich „hinreichende Bedingung“ sei, also durch „A&B“ ersetzt werden und es ergäbe sich dann $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow B))$, d.h. $\sim(A \cdot B \cdot A \cdot \sim B)$, d.h. das Fregegesetz, das ausschließt, dass B und $\sim B$ zugleich gelten. Dieses Fregegesetz sagt jedoch überhaupt nichts über das Verhältnis von A und B unabhängig von C aus[102]. Welche Beziehung bei [A, B, C $\mathbb{K}\mathbb{C}$] unabhängig von C zwischen A und B besteht, ergibt sich nicht aus einem derartigen „Wegschaffen von C“, sondern nur aus der Nachprüfung, ob die Vorkommenskombinationen von (A,B) bei C und $\sim C$ jeweils realmöglich sind oder nicht; bei [A, B, C $\mathbb{K}\mathbb{C}$] gilt $A \rightarrow B$ unabhängig von C. Wegen seiner Unkenntnis der Struktur logischer Relationen ist **FREGE** außer Stande, solche Probleme zu bearbeiten – er kann derartige Aufgaben nicht einmal richtig verstehen; das von ihm vorgeschlagene Verfahren des „Wegschaffens“ eines Ereignisses hat mit der Aufgabe gar nichts zu tun. Es fehlt **FREGE** jede Einsicht in die Struktur logischer Formen, und diese Einsicht hat er sich dadurch verbaut, dass er logische Relationen mit Hilfe der Gedankengefüge darlegen wollte.

4.3.8.3. Fregerelationsgesetze und komplexe Fregerelationen

Zwischen zwei beliebigen logischen Relationen (Total- oder Partialformen) besteht wiederum eine eindeutig bestimmbare logische Totalform, aus der hervorgeht, dass bei Geltung und Nichtgeltung einer der beiden logischen Relationen es notwendig, möglich ($\mathcal{K}$) oder unmöglich ist, dass die andere Relation gilt[103]. Auch die zwischen beliebigen elementaren Fregerelationen bestehenden logischen Totalformen lassen sich mit dem im ersten Teil dargelegten Verfahren leicht und eindeutig ermitteln. So gelten etwa folgende elementaren logischen Gesetze:

(1) $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$
(2) $\forall x\,(Fx \,\overline{\triangledown}\, Gx) \top \forall x\,(Fx \bowtie Gx)$
(3) $\forall x\,(Fx \Uparrow Gx) \leftarrow \forall x\,(Fx \Downarrow Gx)$
(4) $(\exists x)(Fx \bowtie Gx) \vee (\forall x)(Fx \Leftarrow Gx)$
(5) $(\exists x)(Fx \Leftrightarrow Gx) \uparrow (\forall x)(Fx \vDash Gx)$[104]

Von allen Ausdrücken in der von mir im ersten Teil festgelegten Notation ist eindeutig entscheidbar, ob sie eine *logische Form* oder ein *logisches Gesetz* bezeichnen[105]. Die Ausdrücke logischer Formen *benennen* eine bestimmte zwischen irgendwelchen n Sachverhalts-/Ereignisklassen $p_1, \ldots, p_n$ bestehende n-stellige logische Relation; die Ausdrücke logischer Gesetze *behaupten*, dass zwischen solchen logischen Relationen eine bestimmte logische Relation besteht. So sind die Ausdrücke „[p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{V}$]“ und „$p \rightarrow r$“ und „$(10\circ\circ)(p, q)$ eindeutig als benennende Bezeichnungen bestimmter logischer Relationen, die Ausdrücke „$(p \rightarrow q) \uparrow (p \leftarrow q)$“, „[p, q, r $\mathbb{K}\mathbb{C}$] $\rightarrow (p \rightarrow r)$“, „$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$“ und „[$(p \rightarrow q)$, $(q \rightarrow r)$, $(p \rightarrow r)$ $\mathbb{C}\mathbb{V}$]“ eindeutig als behauptende Bezeichnungen logischer Gesetze identifizierbar.

Im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs wird der für die Logik konstitutive Unterschied von logischer Form und logischem Gesetz verwischt, wenn nicht gar ganz vernachlässigt. Jeder korrekt gebildete prädikatenlogistische Ausdruck wird gleicherweise als eine „Aussageform“ aufgefasst, die entweder erfüllbar oder allgemeingültig oder nicht-erfüllbar oder nicht-allgemeingültig ist. Ein Ausdruck der Gestalt „$(\mathfrak{Q}x)\ (Px \oplus Qx)$“ bezeichnet (indirekt) eine beliebige elementare Fregerelation; für den Logistiker sind alle derartigen Ausdrücke logischer Formen *nur* erfüllbare Aussageformen und deshalb gerade nicht der eigentliche Untersuchungsgegenstand der Logik. Dieser wird vielmehr die Aufgabe zugewiesen, die „allgemeingültigen Aussageformen“ zu konstruieren. Es kommt so zum paradoxen Umstand, dass einerseits etwa die Implikation – die allerdings mit der Fregerelation $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ verwechselt wird – die wichtigste Gesetzesstruktur in den Wissenschaften sein soll[106], sie auf der anderen Seite aber als nicht allgemeingültige Aussageform für die Logik kein Interesse besitzt. Diese allgemeingültigen Aussageformen entsprechen dabei, wie wir sehen werden, allesamt der Allrelation und verweisen damit im Gegensatz zu den „nur“ erfüllbaren Aussageformen, die den Fregerelationen entsprechen, auf keinen informativen und gehaltvollen logischen Zusammenhang. Der Unterschied von logischen

Formen und logischen Gesetzen erscheint in **FREGE**s Logikentwurf so nur verhüllt und indirekt als Unterschied der erfüllbaren und allgemeingültigen prädikatenlogistischen Aussageformen.

Da die meisten logischen Totalformen nicht mittelbar mit Hilfe der Gedankengefüge dargestellt werden können, lassen sich die logischen Beziehungen zwischen zwei Fregerelationen $\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx)$ und $\mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$ nicht durch einen Ausdruck der Gestalt „$\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$" ausdrücken. Wenn, wie üblich, die Implikation irreführend durch das Gedankengefüge-Zeichen „$\Rightarrow$" bezeichnet wird, wird der Ausdruck des Fregerelationsgesetzes (1) abgeschwächt zum Ausdruck

(1*) $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \Rightarrow (\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$.

Die Bedeutung des Ausdrucks (1*) lässt sich eindeutig aus den festgesetzten Bedeutung der Quantoren, Prädikatoren und der jeweils enthaltenden Gedankengefüge rekonstruieren. Ausdruck (1*) ist eine *spezielle* Aussageform: für jede Ersetzung der „Prädikatvariablen" F und G durch Bezeichnungen konkreter Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ ergibt sich eine wahrheitswertdefinite (wahre oder falsche) $\mathfrak{C}$-Aussage, die besagt, dass es falsch ist, dass die Erfüllbarkeitsaussage $(\forall x)(\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x)$ wahr und zugleich die Erfüllbarkeitsaussage $(\exists x)(\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x)$ falsch ist. Aus den Bedeutungen der Erfüllbarkeitsaussageformen $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ und $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ geht die Allgemeingültigkeit der Aussageform (1*) hervor: jede Ersetzung der „Prädikatvariablen" F und G in Ausdruck (1*) führt auf eine wahre $\mathfrak{C}$-Aussage. Der Grund ist: wenn die Fregerelation $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \equiv (\circ 0 \circ \circ)(Fx, Gx)$ gilt, gilt notwendigerweise auch die Fregerelation $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx) \equiv (\circ \bullet \circ \circ)(Fx, Gx)$. Der Ausdruck (1*) ist die begriffsschriftliche Abschwächung des logischen Gesetzes: $(\circ 0 \circ \circ)(Fx, Gx) \rightarrow (\circ \bullet \circ \circ)(Fx, Gx)$, dessen Gültigkeit unmittelbar aus den Normalmatrizen ersichtlich ist: wenn die Bedingungen für die Geltung von $(\circ 0 \circ \circ)(Fx, Gx)$ gegeben sind, dann notwendig auch die Bedingungen von $(\circ \bullet \circ \circ)(Fx, Gx)$, aber nicht umgekehrt. Gesetze, die wie die Ausdrücke (1) und (1*) die zwischen Fregerelationen bestehenden logischen Beziehungen darlegen, nenne ich im Folgenden **Fregerelationsgesetze**[107]; Ausdruck (1*) bringt das implikative Fregerelationsgesetz (1) allerdings nicht nur in seinem Gehalt abgeschwächt, sondern auch nur indirekt zum Ausdruck[108]. So wenig wie die Fregerelationen sind die begriffsschriftlichen Abschwächungen der Fregerelationsgesetze „Wahrheitsfunktionen". Die Richtigkeit der Behauptung (1*) ergibt sich nicht aus irgendwelchen vorgegebenen Wahrheitswerten, sondern verweist auf einen bestimmten Zusammenhang der allgemeinen Geltungsbedingungen logischer Relationen, die auf dasselbe Ereignis-Bezugssystem bezogen sind, und deshalb einen Zusammenhang von vornherein voraussetzen und nicht ausschließen wir die „wahrheitsfunktionalen" Gedankengefüge.

Das Fregerelationsgesetz „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) \Rightarrow (\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$" behauptet, dass allen Paaren von Erfüllbarkeits*aussagen*, die aus den Ersetzungen der „Prädikatvariablen" in den *zwei* Erfüllbarkeits*aussageformen* $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ und $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ entstehen, das Gedankengefügeprädikat $\mathfrak{C}$ zukommt. Generell gilt, dass sich für jede Aussageform der Gestalt $\Lambda_1(Fx, Gx) \oplus \Lambda_2(Fx, Gx)$ bei jeder Ersetzung der „Prädikatvariablen" eine wahrheitswertdefinite Aussage ergibt: den beiden Erfüllbarkeitsaussagen $\Lambda_1(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ und $\Lambda_2(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ wird das durch $\oplus$ bezeichnete Gedankengefüge prädiziert. Alle Paare konkreter Prädikate, für die sich, eingesetzt in die Aussageform $\Lambda_1(Fx, Gx) \oplus \Lambda_2(Fx, Gx)$, eine wahre Aussage ergibt, stehen in einer ganz bestimmten logischen Beziehung und alle Ausdrücke der Form $\Lambda_1(Fx, Gx) \oplus \Lambda_2(Fx, Gx)$ bezeichnen so indirekt eine Fregerelation; ich spreche in diesen Fälle nicht von elementaren, sondern von **komplexen Fregerelationen**. Die Fregerelation, die vom Ausdruck (1*) bezeichnet wird, ist die **Allrelation**, die in diesem Falle bestimmt ist als jene logische Form, die zwischen zwei beliebigen Prädikaten F und G genau dann besteht, wenn jedenfalls nicht $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ ohne $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt; d.h. genau in den folgenden drei Fällen:

1. wenn sowohl $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ als auch $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gelten: dies ist genau dann der Fall, wenn $(\circ 0 \circ \circ \circ)(Fx, Gx)$, gilt, also: $\mathbb{C} \Cup \mathbb{H} \Cup \mathbb{E} \Cup \mathbb{K} \Cup \mathbb{F} \Cup \mathbb{M} \Cup \mathbb{X}(Fx, Gx)$
2. oder wenn $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt, nicht jedoch $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$; dies ist genau dann der Fall, wenn $(\circ 1 \circ \circ)(Fx, Gx)$ gilt, also $\mathbb{V} \Cup \mathbb{A} \Cup \mathbb{B} \Cup \mathbb{I} \Cup \mathbb{D} \Cup \mathbb{J} \Cup \equiv (Fx, Gx)$
3. oder wenn weder $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ noch $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt; dies ist genau dann der Fall, wenn $(0100)(Fx, Gx) \equiv \mathbb{L}(Fx, Gx)$ gilt.

Die logische Relation, die zwischen zwei Prädikaten F und G besteht, wenn jedenfalls nicht $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ ohne $(\exists x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt, ist demnach die Allrelation – eine der 15 überhaupt möglichen nichtleeren zweistelligen Totalrelationen[109]; irgendeine Information über das spezifische logische Verhältnis zweier Prädikate wird durch diese logische Relation nicht repräsentiert, denn jedes beliebige Paar von Prädikaten steht in dieser Relation. Jeder Ausdruck der Gestalt $\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$, der die Allrelation bezeichnet, ist die begriffsschriftliche Abschwächung eines

Fregerelationsgesetzes; ansonsten bezeichnet der Ausdruck eine von der Allrelation verschiedene zweistellige logische Relation.

Betrachten wir die Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}_1 x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2 x(Fx \otimes Gx)$ näher. Bei der Bestimmung aller n-stelligen logischen Relationen, die sich ausgehend von der Gesamtmenge aller n-stelligen Totalformen konstruieren lassen, sind wir auf den Begriff der **Prädikatverknüpfung** gestoßen. Aus den Prädikatoren Px und Qx lässt sich mittels der „Prädikatenaddition" der Prädikator $Px \Cup Qx$ bilden, der besagt, dass einem Gegenstand x von den Prädikaten P und Q zumindest eines zukommt; der aus der „Prädikatenmultiplikation" resultierende Prädikator $Px \Cap Qx$ besagt, dass einem Gegenstand x sowohl das Prädikat P wie das Prädikat Q zukommt; der der „Prädikatenkomplementbildung" entspringende Prädikator $\complement Px$ kommt allen Gegenständen x zu, denen P nicht zukommt.

Beliebige Paare von logischen Relationen können durch binäre Prädikatenverknüpfungen zu einer dritten logischen Relation verknüpft werden; so führt die Verknüpfung $(p \rightarrow q) \Cup (p \leftrightarrow q)$ auf jene logische Form, die besagt, dass eine Sachverhalts-/Ereignisklasse P eine andere Sachverhalts-/Ereignisklasse q entweder impliziert oder mit ihr äquivalent ist, eine logische Form die ich durch die bedeutungsgleichen Ausdrücke „$(p \leftrightarrows q)$", „$(10\bullet1)(p,q)$" und „$\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}(p,q)$" darstelle. Die aus der Prädikatenaddition $(1\bullet\bullet1)(p,q) \Cap (\bullet1\bullet1)(p,q)$ ist die logische Form $(11\bullet1)(p,q) \equiv \mathbb{V} \Cup \mathbb{B}(p,q)$. Die Bezeichnungen der Prädikatverknüpfungen können nicht durch Bezeichnungen logischer Relationen ersetzt werden: der Ausdruck „$(p \rightarrow q) \Cup (p \leftrightarrow q)$" *benennt* diejenige logische Form, die aus der Prädikatenaddition von $(p \rightarrow q)$ und $(p \leftrightarrow q)$ resultiert, während der Ausdruck „$(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$" *behauptet*, dass die logischen Formen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ in der logischen Totalrelation $\mathbb{A}$ stehen (die Behauptung ist falsch). Die Prädikatverknüpfungen $\Cup$ und $\Cap$ dürfen den logischen Relationen $\vee$ und $\wedge$ nicht gleichgestellt werden.

Auch Gedankengefüge sind als Prädikate von wahrheitswertdefiniten Aussagen keine Verknüpfungen; die Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}_1 x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2 x(Fx \otimes Gx)$ bezeichnen keine Verknüpfung von Fregerelationen, sondern stellen eine spezielle Aussageform dar. Zwischen den Gedankengefügen und bestimmten Prädikatverknüpfungen besteht allerdings die folgende *bedingungslogische Isomorphie*. Jedem Gedankengefüge $A \oplus B$ kann eineindeutig eine ganz bestimmte Verknüpfung von Prädikaten F und G zugeordnet werden; ich bezeichne diese dem Gedankengefüge $A \oplus B$ entsprechende Verknüpfung durch den Ausdruck „$Fx\ \mathbf{v}^{\oplus}Gx$". Den vier möglichen Wahrheitswertkombinationen werden die vier möglichen Vorkommenskombinationen von Fx und Gx in folgender Weise bijektiv zugeordnet:

A wahr und B wahr	$\Leftrightarrow$	Fx und Gx
A wahr und B falsch	$\Leftrightarrow$	Fx und $\sim$Gx
A falsch und B wahr	$\Leftrightarrow$	$\sim$Fx und Gx
A falsch und B falsch	$\Leftrightarrow$	$\sim$Fx und $\sim$Gx

Bestimmt ein Gedankengefüge eine Wahrheitswertkombination definitiv als wahr, so bestimmt die entsprechende Prädikatverknüpfung, dass einem Gegenstand die der Wahrheitswertkombination entsprechende Prädikatkombination definitiv zukommt. Besagt z.B. die Prädikatverknüpfung $Fx\ \mathbf{v}^{\oplus}Gx$, dass einem Gegenstand die Prädikatkombination $\sim$Fx und Gx zukommt, dann kommt das Prädikat $Fx\ \mathbf{v}^{\oplus}Gx$ nur solchen Gegenständen zu, denen F nicht zukommt und G zukommt.

Bestimmt ein Gedankengefüge eine Wahrheitswertkombination definitiv als falsch, so bestimmt die entsprechende Prädikatverknüpfung, dass einem Gegenstand die der Wahrheitswertkombination entsprechende Prädikatkombination definitiv nicht zukommt. Schließt also die Prädikatverknüpfung $Fx\ \mathbf{v}^{\oplus}Gx$ definitiv aus, dass einem Gegenstand die Prädikatkombination $\sim$Fx und Gx nicht zukommt, dann kommt das Prädikat $Fx\ \mathbf{v}^{\oplus}Gx$ nur solchen Gegenständen zu, denen jedenfalls nicht F nicht zukommt und G zukommt.

Bestimmt ein Gedankengefüge eine Wahrheitswertkombination nicht definitiv als falsch (lässt es die Wahrheit der Wahrheitswertkombination offen), so besagt die entsprechende Prädikatverknüpfung, dass es nicht ausgeschlossen ist, dass einem Gegenstand die entsprechende Prädikatkombination zukommt. Schließt also die Prädikatverknüpfung $Fx\ \mathbf{v}^{\oplus}Gx$ nicht definitiv aus, dass einem Gegenstand die Prädikatkombination $\sim$Fx und Gx zukommt, dann kommt das Prädikat $Fx\ \mathbf{v}^{\oplus}Gx$ nur solchen Gegenständen zu, für die es nicht ausgeschlossen ist, dass ihnen F nicht zukommt und G zukommt.

Damit ergibt sich zwischen den 16 zweistelligen Gedankengefügen und den 16 möglichen binären Prädikatverknüpfungen folgende Bijektion:

Gedankengefüge A⊕B	⬄	**Prädikatverknüpfung Fx** $\mathbf{v}^{\oplus}$ Gx
A▽B = A⊽¬A⊽B⊽¬B von zwei Aussagen A und B ist jede jeweils entweder wahr oder falsch	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\triangledown}$ Gx = Fx⋓~Fx⋓Gx⋓~Gx: einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\triangledown}$ Gx genau dann zu, wenn ihm F und G jeweils entweder zukommen oder nicht zukommen
A⊽B von zwei Aussagen A und B ist zumindest eine wahr	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\triangledown}$ Gx = Fx⋓Gx: einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\triangledown}$ Gx genau dann zu, wenn ihm von den Prädikaten F und G zumindest eines zukommt.
A ⇒ B = ¬A⊽B Es ist jedenfalls nicht A wahr und B falsch	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\Rightarrow}$ Gx = ~Fx⋓Gx: Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Rightarrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm jedenfalls nicht F zukommt und G nicht zukommt
A ⇐ B = A⊽¬B Es ist jedenfalls nicht A falsch und B wahr	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\Leftarrow}$ Fx⋓~Gx: Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Rightarrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm jedenfalls nicht F nicht zukommt und G zukommt
A ⇑B Von A und B sind jedenfalls nicht beide wahr	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\Uparrow}$ Gx = ~Fx⋓~Gx: Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Uparrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm jedenfalls nicht beide Prädikate F und G zukommen.
A ⇔ B = (A&B) ⊽ (¬A&¬B) A und B sind beide wahr oder beide falsch	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\Leftrightarrow}$ Gx = (Fx⋒Gx)⋓(~Fx⋒~Gx): Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\Leftrightarrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm die Prädikate F und G beide zukommen oder beide nicht zukommen.
A↗B = (A&¬B)⋓(¬A&¬B) Von den Aussagen A und B ist jedenfalls B falsch.	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\nearrow}$ Gx = (Fx⋒~Gx)⋓(~Fx⋒~Gx) Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\nearrow}$ Gx genau dann zu, wenn ihm von den Prädikaten F und G jedenfalls G nicht zukommt.
A⊧B = A⋒¬B A ist wahr und B ist falsch.	⬄	Fx $\mathbf{v}^{\models}$ Gx = (Fx⋒~Gx) Einem Gegenstand kommt das Prädikat Fx $\mathbf{v}^{\models}$ Gx genau dann zu, wenn ihm F zukommt und G nicht zukommt.

Jedem der 15 nichtleeren Gedankengefüge kann so eine der 15 überhaupt möglichen binären Prädikatverknüpfungen eineindeutig zugeordnet werden.

Zwischen den Gedankengefügen und den Prädikatverknüpfungen besteht eine *bedingungslogische Isomorphie*: d.h. zwischen den Prädikatverknüpfungen bestehen genau dieselben logischen Beziehungen wie zwischen den ihnen entsprechenden Gedankengefügen; es gibt es zu jedem Gesetz des SFG genau eine entsprechende bedingungslogische Gesetzesbeziehung zwischen den aus den entsprechenden Prädikatverknüpfungen hervorgehenden Prädikaten.

$(A\&B) \rightarrow (A\Rightarrow B)$ Wenn die Aussagen A und B wahr sind, dann ist jedenfalls nicht A wahr und B falsch	⇔	$(Fx\ \mathbf{v}^{\&}\ Gx) \rightarrow (Fx\ \mathbf{v}^{\Rightarrow}\ Gx)$ Wenn einem Gegenstand F und G zukommt, dann trifft es jedenfalls nicht zu, dass ihm F zukommt und G nicht zukommt.
$(A\Leftarrow B) \vee (A\bowtie B)$ Entweder ist nicht A falsch und B wahr und von A und B genau eines wahr, oder es ist nicht A falsch und B wahr und von A und B nicht genau eines wahr, oder es ist A falsch und B wahr und von A und B genau eines wahr. usw.	⇔	$(Fx\ \mathbf{v}^{\Leftarrow}\ Gx) \vee (Fx\ \mathbf{v}^{\bowtie}\ Gx)$ Entweder kommt einem Gegenstand jedenfalls nicht F nicht zu und G zu und von F und G nur eines, oder einem Gegenstand kommt F nicht zu und G zu und von F und G genau eines, oder einem Gegenstand kommt jedenfalls nicht F nicht zu und G zu und von F und G beide oder keins.

Auf der Grundlage der bijektiven Zuordnung von Gedankengefügen und Prädikatverknüpfungen sowie der eineindeutigen Entsprechung der prädikatenlogistischen Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$ und der Fregerelationen, wie sie in obiger Tabelle angeführt ist (S.230), können wir jetzt für jeden prädikatenlogistischen Ausdruck der Gestalt $\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$ die eineindeutig korrespondierende komplexe Fregerelation bestimmen. Wenn wir den prädikatenlogistischen Ausdruck, der auf eine Fregerelation Λ_i verweist, durch „$\mathbf{A}^{\Lambda i}$" bezeichnen, dann verweist der Ausdruck „$\mathbf{A}^{\Lambda 1}\oplus\mathbf{A}^{\Lambda 2}$" eineindeutig auf die komplexe Fregerelation $(\Lambda_1\ \mathbf{v}^{\oplus}\ \Lambda_2)$. Es gilt: jene konkreten Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, für welche die Aussageform „$\mathbf{A}^{\Lambda 1}\oplus\mathbf{A}^{\Lambda 2}$" wahr wird, stehen in der logischen Beziehung $(\Lambda_1\ \mathbf{v}^{\oplus}\ \Lambda_2)$. Der Zusammenhang sei an folgenden Beispielen erläutert.

Erstes Beispiel: Der Ausdruck

(1) $\forall x(Fx \Rightarrow Gx)\ \triangledown\ \forall x(Fx \Leftarrow Gx)$

ist eine Aussageform, die für eine Variablenersetzung $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ ≎ F,G zu der wahrheitswertdefiniten $\mathbf{A}$-Aussage

(1') $\forall x\ (\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x)\ \triangledown\ \forall x\ (\mathfrak{F}x \Leftarrow \mathfrak{G}x)$

wird; weder (1) noch (1') sind Ausdrücke von Verknüpfungen logischer Relationen; auch bezeichnen die Teilausdrücke „$(\forall x)\ (Fx\Rightarrow Gx)$", „$(\forall x)\ (Fx \Leftarrow Gx)$" und „$(\forall x)\ (\mathfrak{F}x\Rightarrow\mathfrak{G}x)$", „$(\forall x)\ (\mathfrak{F}x \Leftarrow \mathfrak{G}x)$" keine logischen Relationen (sondern spezielle prädikatenlogistische Aussageformen: allerdings können die Ausdrücke „$(\forall x)\ (Fx \Rightarrow Gx)$" und „$(\forall x)\ (Fx \Leftarrow Gx)$" eineindeutig den Fregerelationen $(\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$ und $(\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx)$ zugeordnet werden; die Erfüllbarkeitsaussagen „$(\forall x)\ (\mathfrak{F}x \Rightarrow \mathfrak{G}x)$" und „$(\forall x)\ (\mathfrak{F}x \Leftarrow \mathfrak{G}x)$" entsprechen eineindeutig den konkreten Gesetzesaussagen $(\circ 0\circ\circ)(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$ und $(\circ\circ 0\circ)(\mathfrak{F}x, \mathfrak{G}x)$. Der Ausdruck (1) seinerseits entspricht eineindeutig der logischen Relation

(1'') $(\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)\ \mathbf{v}^{\triangledown}\ (\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx) = (\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx) \Cup (\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx)$

Diese komplexe Fregerelation resultiert aus der Prädikatenaddition der Fregerelationen $(\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$ und $(\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx)$. Es ist jene logische Relation, die zwischen allen Prädikatoren Fx und Gx besteht, die in zumindest einer der beiden Fregerelationen $(\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$ und $(\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx)$ stehen. Dies trifft in den folgenden drei Fällen zu:

(a) Es ist bei Geltung der Fregerelation $(\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)\ \mathbf{v}^{\triangledown}\ (\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx$ möglich, dass beide Relationen gelten: es gilt dann die logische Partialform $(\circ 00\circ)(Fx, Gx) \equiv \mathbb{E}\Cup\mathbb{K}\Cup\mathbb{X}\ (Fx, Gx)$

(b) Gilt $(\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$ ohne $(\circ\circ 0\circ)(Fx, Gx)$ gilt die logische Relation $(\bullet 01\bullet)(Fx, Gx) \equiv \mathbb{C}\Cup\mathbb{H}\Cup\mathbb{F}\Cup\mathbb{M}(Fx, Gx)$

(c) Gilt (∘∘0∘)(Fx, Gx) ohne (∘0∘∘)(Fx, Gx), haben wir die logische Relation (•10•)(Fx, Gx) ≣ (ℂ⋓𝕀⋓≣⋓𝕃)(Fx, Gx).

Die logische Relation (∘0∘∘)(Fx, Gx) ⋓ (∘∘0∘)(Fx, Gx) ist die logische Relation 𝔼⋓𝕂⋓𝕏⋓ℂ⋓ℍ⋓𝔽⋓𝕄⋓ℂ⋓𝕀⋓≣⋓𝕃)(Fx, Gx) ≣ 𝕱\𝕍𝔸𝔻𝕁(Fx, Gx)[110].

Zweites Beispiel: Der Ausdruck

(2) „(∀x) (Fx ⊽ Gx) ⊽ (∃x) (Fx ⋝ Gx)“

verweist auf die komplexe Fregerelation (∘∘∘0)(Fx, Gx) **v**^⊽ (∘•∘•)(Fx, Gx); diese besagt, dass von den elementaren Fregerelationen (∘∘∘0)(Fx, Gx) und (∘•∘•)(Fx, Gx) zumindest eine gilt; gelten beide, haben wir die logische Relation (∘•∘0)(Fx, Gx) ≣ 𝔸⋓𝕀⋓𝕁⋓ℍ⋓𝕂⋓𝕄(Fx, Gx): gilt (∘∘∘0)(Fx, Gx) ohne (∘•∘•)(Fx, Gx), so haben wir die Relation (0100)(Fx, Gx); gilt schließlich (∘•∘•)(Fx, Gx) ohne (∘∘∘0)(Fx, Gx), gilt (∘•∘1)(Fx, Gx) ≣ 𝕍⋓𝔹⋓𝔻⋓ℂ⋓𝔼⋓𝔽(Fx, Gx). Ausgeschlossen ist, dass beide Fregerelationen nicht gelten, ausgeschlossen ist demnach die Relation (1•10)(Fx, Gx) ≣ 𝕏⋓≣(Fx, Gx). Es gilt also (∘∘∘0)(Fx, Gx) **v**^⊽ (∘•∘•)(Fx, Gx) = 𝕱\𝕏≣(Fx, Gx).

Eine prädikatenlogistische Aussageform, die der logischen Allrelation entspricht, ist allgemeingültig; entspricht eine Aussageform einer nichtleeren logischen Relation, ist sie erfüllbar, entspricht eine Aussageform der leeren Relation, ist sie unerfüllbar. Ich werde beispielhaft für die beiden Fregerelationen **(∃x) (Fx ⊽ Gx)** und **(∃x) (Fx ⥣ Gx)** prüfen, welche der möglichen Aussageformen ∃x (Fx ⊽ Gx) ⊕ ∃x (Fx ⥣ Gx) (1) allgemeingültig, (2) unerfüllbar und (3) erfüllbar sind. Zuerst soll untersucht werden, in welchem logischen Verhältnis die diesen Aussageformen entsprechenden Fregerelationen (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) stehen; hierbei ist zu prüfen, ob die beiden Fregerelationen zusammen, jeweils alleine oder beide nicht gelten können.

(1) Allgemeingültige Aussageformen ∃x (Fx ⊽ Gx) ⊕ ∃x (Fx ⥣ Gx)

(i) ∃x (Fx ⊽ Gx) ⊽ ∃x (Fx ⥣ Gx ist *allgemeingültig*:

a) Beide Fregerelationen können zusammen gelten, z.B. wenn (1011)(Fx, Gx) gilt (genau dann, wenn eine Totalform außer 𝕂 und 𝕏 gilt)
b) (∘∘∘•)(Fx, Gx) gilt genau dann ohne (•∘∘∘)(Fx, Gx), wenn (1000)(Fx, Gx) gilt.
c) (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt genau dann ohne (∘∘∘•)(Fx, Gx), wenn (0001)(Fx, Gx) gilt.
d) Dass weder (∘∘∘•)(Fx, Gx) noch (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt ist unmöglich, denn bei ~(∘∘∘•)(Fx, Gx) ≣ (0001)(Fx, Gx) gilt notwendig (•∘∘∘)(Fx, Gx), und bei ~(•∘∘∘)(Fx, Gx) ≣ (1000)(Fx, Gx) gilt notwendig (∘∘∘•)(Fx, Gx).

Es gilt demnach das Fregerelationsgesetz:

∃x (Fx ⊽ Gx) ∨ ∃x (Fx ⥣ Gx);

die begriffsschriftlich abschwächende Darstellung ist:

∀F,G [∃x (Fx ⊽ Gx) ⊽ ∃x (Fx ⥣ Gx)][111];

die Aussageform ist *allgemeingültig* und verweist auf die logische Allrelation.

(ii) Die Fregerelation ∃**x (Fx ⊽ Gx) ▽ ∃x (Fx ⥣ Gx)** ist die Allrelation, denn sie gilt, ob (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) jeweils gelten oder nicht.

(2) *Unerfüllbar* ist die Aussageform ∃x (Fx ⊽ Gx) ⥥ ∃x (Fx ⥣ Gx); es gilt: ∀F,G ~[∃x (Fx ⊽ Gx) ⥥ ∃x (Fx ⥣ Gx)]; weil von den Relationen (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) zumindest eine gelten muss, resultiert aus der Verknüpfung (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**^⥥ (•∘∘∘)(Fx, Gx) die leere logische Relation.

(3) *Erfüllbar* sind die Aussageformen

(i) Der Aussageform ∃**x (Fx ⊽ Gx) ⇐ ∃x (Fx ⥣ Gx)** ist die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**^⇐ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≣ 𝕱\𝕏(Fx, Gx) zugeordnet; die Fregerelation liegt nur dann *nicht* vor, wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) und ~(∘∘∘•)(Fx, Gx) ≣ (001)(Fx, Gx) gelten, wenn also (0001)(Fx, Gx) gilt.

(ii) $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⇒ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** verweist auf die logische Relation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{\Rightarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ 𝔉\𝕂(Fx, Gx); sie liegt nur dann *nicht* vor, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) und ~(•∘∘∘)(Fx, Gx) gelten, wenn also (1000)(Fx, Gx) gilt.

(iii) $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⥣ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** verweist auf die logische Relation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⥣}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ 𝕂⋓𝕏**(Fx, Gx);** sie liegt nur vor, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) und ~(•∘∘∘)(Fx, Gx) – also (1000)(Fx, Gx) oder wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) und ~(∘∘∘•)(Fx, Gx), also (0001)(Fx, Gx) gelten. Dass beide nicht gelten, ist durch das Fregerelationsgesetz $\exists$x (Fx ⊽ Gx) ∨ $\exists$x (Fx ⥣ Gx) ausgeschlossen.

(iv) Die der Aussageform $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⇔ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** entsprechende Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{\Leftrightarrow}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt genau dann, wenn entweder (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) beide vorliegen oder beide nicht vorliegen; im ersten Fall sind nur die Totalformen 𝕂 und 𝕏 ausgeschlossen, der zweite Fall ist unmöglich; wir haben also die logische Relation **𝔉\𝕂𝕏 (Fx, Gx).**

(v) Bei der $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⇖ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** entsprechenden Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⇖}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt keinesfalls (∘∘∘•)(Fx, Gx), es gilt also (0001)(Fx, Gx), damit auch (•∘∘∘)(Fx, Gx); wir haben die logische Relation 𝕏 **(Fx, Gx)**

(vi) Bei der $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⇗ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** entsprechenden Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⇗}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt keinesfalls (•∘∘∘•)(Fx, Gx), es gilt also (1000)(Fx, Gx), damit auch (∘∘∘•)(Fx, Gx); wir haben die logische Relation 𝕂 **(Fx, Gx)**

(vii) Die Aussageform $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⇘ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** entspricht der Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⇗}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ 𝔉\𝕂(Fx, Gx); es gilt jedenfalls (•∘∘∘)(Fx, Gx), also ~𝕂(Fx, Gx).

(viii) Die der Aussageform $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⇙ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** entsprechende Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⇙}$ (•∘∘∘)(Fx, Gx) ≡ 𝔉\𝕏(Fx, Gx) besagt, es gilt jedenfalls (∘∘∘•)(Fx, Gx), also 𝔉\𝕏.

(ix) $\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⋈ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)** verweist auf die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⋈}$(•∘∘∘)(Fx, Gx); sie gilt genau dann, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) ohne (•∘∘∘)(Fx, Gx), also 𝕂(Fx, Gx) gilt, und wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) ohne (∘∘∘•)(Fx, Gx), wenn also (x) gilt; wir haben die logische Relation 𝕂⋓𝕏(Fx, Gx).

(x) Dem Ausdruck „$\exists$**x (Fx ⊽ Gx) &** $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)**" entspricht die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{\&}$(•∘∘∘)(Fx, Gx); sie gilt genau dann, wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) und (∘∘∘•)(Fx, Gx) beide gelten; wir haben die Fregerelation **𝔉\𝕂𝕏 (Fx, Gx)**.

(xi) Die der Formel „$\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⊧ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)**" entsprechende Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⊧}$(•∘∘∘)(Fx, Gx) gilt genau dann, wenn (•∘∘∘)(Fx, Gx) ohne (∘∘∘•)(Fx, Gx), wenn also 𝕏 **(Fx, Gx)** gilt.

(xii) Der Ausdruck „$\exists$**x (Fx ⊽ Gx)** ⫤ $\exists$**x (Fx ⥣ Gx)**" verweist auf die Fregerelation (∘∘∘•)(Fx, Gx) **v**$^{⫤}$(•∘∘∘)(Fx, Gx), welche genau dann gilt, wenn (∘∘∘•)(Fx, Gx) ohne (•∘∘∘)(Fx, Gx), d.h. 𝕂 **(Fx, Gx)** gilt.

Weil von den beiden Fregerelationen (∘∘∘•)(Fx, Gx) und (•∘∘∘)(Fx, Gx) zumindest eine gelten muss, verweisen alle unterschiedlichen Ausdrücke der Gestalt „$\exists$x (Fx ⊽ Gx) ⊕ $\exists$x (Fx ⥣ Gx)" auf dieselbe logische Relation, bei denen das Gedankengefüge ⊕ nur die Wahrheitswertkombination $\mathcal{F} \frown \mathcal{F}$ unterschiedlich bestimmt, also (i) und (viii) – **B** und **I**, (ii) und (vii) – **C** und **H**, (iii) und (ix) – **D** und **J**, (iv) und (x) – **E** und **K**, (v) und (xi) – **G** und **M**, (vi) und (xii) – **G** und **L**; die Ausdrücke „$\exists$x (Fx ⊽ Gx) ▽ $\exists$x (Fx ⥣ Gx)" und „$\exists$x (Fx ⊽ Gx) ⊽ $\exists$x (Fx ⥣ Gx)" verweisen beide auf die All-relation.

Es können so eine Vielzahl logischer Relationen dargestellt werden: alle möglichen Verknüpfungen elementarer Fregerelationen können durch die Ausdrücke der Gestalt $\mathfrak{Q}_1$x (Fx ⊕ Gx) ⊖ $\mathfrak{Q}_2$x (Fx ⊗ Gx) dargestellt werden, und jeder derartige Ausdruck verweist seinerseits auf eine komplexe Fregerelation. Auch die Verknüpfungen komplexer Fregerelationen sind wiederum komplexe Fregerelationen und lassen sich *indirekt* begriffsschriftlich darstellen; auch die Verknüpfungen von Verknüpfungen von elementaren Fregerelationen sind logische Relationen, aus denen sich durch Prädikatenverknüpfungen andere logische Relationen ergeben, usw. Es stellt sich die Frage, ob sich auf diese Weise *alle* logischen Relationen indirekt mit den Mitteln der *Begriffsschrift* darstellen lassen. Diese Frage können wir nur aufwerfen und beantworten, weil wir das im ersten Teil dieser Arbeit dargelegte Verfahren zur Konstruktion *aller* zweistelligen logischen Relationen kennen.

Der Ausdruck „$\exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$“ entspricht der Fregerelation $(1\bullet\bullet\bullet)(Fx, Gx)$, der Ausdruck $\sim\exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$ entspricht der Fregerelation $(0\circ\circ\circ)(Fx, Gx)$. Werden zwei konkrete Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ in die vier Aussageformen $\exists x\,(Fx \,\&\, Gx)$, $\sim\exists x\,(Fx \,\&\, \sim Gx) \equiv (\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$, $\exists x\,(\sim Fx \,\&\, Gx)$ und $\exists x\,(\sim Fx \,\&\, \sim Gx)$ eingesetzt und ergeben sich *jeweils* wahre Erfüllbarkeitsaussagen, so stehen die Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ in der Implikationsbeziehung: $(\mathfrak{F}x \rightarrow \mathfrak{G}x)$; der Ausdruck „$\exists x\,(Fx \,\&\, Gx) \,\&\, \sim\exists x\,(Fx \,\&\, \sim Gx) \,\&\, \exists x\,(\sim Fx \,\&\, Gx) \,\&\, \exists x\,(\sim Fx \,\&\, \sim Gx)$“ verweist auf die logische Totalform

$$
\begin{aligned}
&(1\bullet\bullet\bullet)(Fx, Gx) \Cap (\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx) \Cap (\bullet\bullet 1\bullet)(Fx, Gx) \Cap (\bullet\bullet\bullet 1)(Fx, G) \equiv \\
&(1011)(Fx, Gx) \equiv \\
&(Fx \rightarrow Gx).
\end{aligned}
$$

Von jeder der vier Vorkommenskombinationen $\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x$, $\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x$, $\sim\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x$ und $\sim\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x$ kann *jeweils* entweder die Erfüllbarkeit oder Nicht-Erfüllbarkeit behauptet werden; es darf nur dieselbe Kombination nicht zugleich als erfüllbar und nicht-erfüllbar behauptet werden. Es kann zugleich behauptet werden etwa „$(\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x)$“ und „$(\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x)$“, obwohl natürlich keinem einzigen einzelnen Gegenstand $\mathfrak{a}$ zugleich $\mathfrak{P}x \Cap \mathfrak{Q}x$ und $\mathfrak{P}x \Cap \sim\mathfrak{Q}x$ zugesprochen werden kann; der Ausdruck „$(\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x) \,\&\, (\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x)$“ besagt einfach, dass sowohl „$\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x$“ wie „$\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x$“ erfüllbar ist – natürlich immer von jeweils verschiedenen Individuen. Im Ausdruck „$(\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x) \,\&\, (\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x)$“ kann ja x nicht durch die Bezeichnung eines Individuums ersetzt werden, denn diese zwei durch „&“ verbundenen Erfüllbarkeitsbehauptungen sind jeweils von einander unabhängig, *der Geltungsbereich des Quantors (*$\exists x$*) erstreckt sich immer nur auf den unmittelbar folgenden Klammerausdruck*. Da jede Vorkommenskombination von 2 oder mehr Prädikatoren für sich als erfüllbar, bzw. unerfüllbar behauptet werden kann, kann jede beliebige logische Relation begriffsschriftlich dargestellt werden; die Implikation „$(\mathfrak{P}x \rightarrow \mathfrak{Q}x)$“ etwa durch den Ausdruck „$(\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x) \,\&\, \sim(\exists x)\ (\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x) \,\&\, (\exists x)\ (\sim\mathfrak{P}x \frown \mathfrak{Q}x) \,\&\,$ „$(\exists x)\ (\sim\mathfrak{P}x \frown \sim\mathfrak{Q}x)$“; es gibt allerdings kein Gedankengefüge „$\oplus$“, das die Implikation durch einen Ausdruck der Gestalt „$(\mathfrak{Q}x)\,(Fx \oplus Gx)$“ darstellen könnte. Auf die dreistellige Totalrelation $[Px, Qx, Rx\ \mathbb{C}\mathbb{D}]$ verweist die Aussageform

$$
\exists x\,(Px \,\&\, Qx \,\&\, Rx) \,\&\, \sim\exists x\,(Px \,\&\, Qx \,\&\, \sim Rx) \,\&\, \exists x\,(Px \,\&\, \sim Qx \,\&\, Rx) \,\&\, \exists x\,(Px \,\&\, \sim Qx \,\&\, \sim Rx) \,\&\, \sim\exists x\,(\sim Px \,\&\, Qx \,\&\, Rx) \,\&\, \exists x\,(\sim Px \,\&\, Qx \,\&\, \sim Rx) \,\&\, \exists x\,(\sim Px \,\&\, \sim Qx \,\&\, Rx) \,\&\, \exists x\,(\sim Px \,\&\, \sim Qx \,\&\, \sim Rx).
$$

Jene Prädikate $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, für die alle diese durch & verbundenen Erfüllbarkeitsaussageformen wahr werden, stehen in der logischen Totalrelation $[p, q, r\ \mathbb{C}\mathbb{D}]$. Auf sehr umständliche, indirekte und unübersichtliche Weise können die Normalmatrizen aller logischen Relationen begriffsschriftlich dargestellt werden. Da jede der durch „&“ verbundenen Erfüllbarkeitsaussageformen selbstständig ist – der Bindungsbereich der Quantoren umfasst nur den Klammerausdruck, der den Quantoren unmittelbar folgt –, können die Quantoren zur Herstellung einer so genannten „pränexen Normalform“[112] nur dann vor den ganzen Ausdruck gezogen werden, wenn jede der Erfüllbarkeitsaussageformen ein unterschiedliches Beliebig-Element-Zeichen für Individuen erhält, und es muss ausdrücklich festgehalten werden, dass sich diese unterschiedlichen Beliebig-Element-Zeichen für Individuen immer auf verschiedene Individuen beziehen. Der Ausdruck „$\exists x\ (Fx \,\&\, Gx) \,\&\, \exists x\ (Fx \,\&\, \sim Gx)$“ kann also nicht durch den Ausdruck „$\exists x\ [(Fx \,\&\, Gx) \,\&\, (Fx \,\&\, \sim Gx)]$“, sondern nur durch den Ausdruck „$\exists x \exists y\ [(Fx \,\&\, Gx) \,\&\, (Fy \,\&\, \sim Gy)]$, mit $x \neq y$“ ersetzt werden.

Jede logische Relation stellt einen Gesetzeszusammenhang bestimmter Art dar; dabei unterscheiden sich logische Relationen, die mehr als eine Vorkommenskombination als realmöglich bestimmen – der entsprechende prädikatenlogistische Ausdruck behauptet dann die Erfüllbarkeit von mindestens zwei Vorkommenskombinationen –, in bemerkenswerter Weise von solchen logischen Relationen, bei denen dies nicht der Fall ist. Im zweiten Falle sagt das Gesetz von zumindest einem oder von allen Gegenständen des Bezugsbereichs aus, was sinnvollerweise von jedem einzelnen dieser Gegenstände gesagt werden kann. Besteht zwischen zwei Prädikaten F und G die Fregerelation $(\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$, lässt sich dies als ein Allsatz formulieren: jedem einzelnen Gegenstand des Bezugsbereichs kommt jedenfalls nicht F ohne G zu; der prädikatenlogistische Ausdruck „$(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$“ drückt diesen Allsatz indirekt aus. Auch die Fregerelation $(\circ 00\circ)(Fx, Gx)$, auf die die Aussageform „$(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx) \,\&\, (\forall x)\,(Fx \Leftarrow Gx)$“ verweist, sagt von allen Gegenständen des Bezugsbereich aus, was von jedem einzelnen dieser Gegenstände gesagt werden kann: dass ihm jedenfalls weder F ohne G, noch G ohne F zukommt.

Dies trifft für die komplexe Fregerelation $\exists x\,(Fx \,\&\, Gx) \,\&\, \exists x\,(Fx \,\&\, \sim Gx)\ [\hat{=}\ (11\bullet\bullet)\ (Fx, Gx)]$ schon nicht mehr zu: hier wird nicht von zumindest einem oder allen Gegenständen des Bezugsbereichs gesagt, was sich von jedem einzelnen dieser Gegenstände behaupten ließe. Von keinem einzelnen Gegenstand lässt sich behaupten, dass ihm zugleich F und G, und darüber hinaus auch F ohne G zukommt. Die Implikation $(1011)(\mathrm{Fx},\mathrm{Gx}) \equiv (\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx})$ kann nicht in dem Sinne als Allsatz formuliert werden, dass von einem *einzelnen* Gegenstand $\mathfrak{a}$ des Bezugsbereichs behauptet würde: „wenn_1 $\mathfrak{a}$ F ist, ist $\mathfrak{a}$ B", denn dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ kommt genau eine und nur eine der vier möglichen Prädikatorkombinationen $\mathrm{Fx}\frown\mathrm{Gx}$, $\mathrm{Fx}\frown\sim\mathrm{Gx}$, $\sim\mathrm{Fx}\frown\mathrm{Gx}$ und $\sim\mathrm{Fx}\frown\sim\mathrm{Gx}$ zu. Deshalb sind Ausdrücke wie „$(\forall \mathrm{x})(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx})$" und „$(\exists \mathrm{x})(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx})$" widersprüchlich; der Ausdruck „$\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}$" bezeichnet, anders als der Ausdruck „$\mathrm{Fx} \Rightarrow \mathrm{Gx}$" keine Bestimmung, die einzelnen Gegenständen zugeschrieben werden könnte. Für kein einziges Paar konkreter Prädikate ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$) ist „$(\mathfrak{F}\mathrm{x} \rightarrow \mathfrak{G}\mathrm{x})$" eine Aussageform, die für einen Gegenstand $\mathfrak{a}$ zu einer wahrheitswertdefiniten Aussage „$(\mathfrak{F}\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a})$" werden könnte. Nur in einem (enthymematischen) Schluss können die einzelnen Gegenstände mit einem Implikationsgesetz verbunden werden; von einem einzelnen Gegenstand $\mathfrak{a}$ lässt sich nur behaupten: *weil* dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat F zukommt, kommt ihm das Prädikat G zu; oder: $\textit{wenn}_2$ dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat F zukommen sollte, kommt ihm das Prädikat G zu; oder: *wenn* dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ das Prädikat F zukäme, käme ihm das Prädikat G zu. Der implikative Gesetzeszusammenhang kann so nur *bedingterweise* auf die einzelnen Gegenstände bezogen werden; das Gesetz kann nicht, wie bei den Allsätzen *kategorisch* mit den einzelnen Gegenständen verbunden werden, indem von allen Gegenständen des Bezugsbereichs dasselbe ausgesagt wird, wie etwa bei $\forall \mathrm{x}\,\mathrm{Px}$, oder $(\forall \mathrm{x})(\mathrm{Fx} \Rightarrow \mathrm{Gx})$, oder $\exists \mathrm{x}(\mathrm{Fx} \Uparrow \mathrm{Gx})$, usw. Alle elementaren Fregerelationen sind kategorische Gesetzesverhältnisse, und deshalb sind die entsprechenden prädikatenlogistischen Erfüllbarkeits*aussageformen* im Bereich der Prädikate – etwa $(\forall \mathrm{x})(\mathrm{Fx} \Leftarrow \mathrm{Gx})$ – für alle Paare konkreter Prädikate Erfüllbarkeits*aussagen* wie $(\forall \mathrm{x})(\mathfrak{F}\mathrm{x} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathrm{x})$: bei jeder Einsetzung von „Individuenkonstanten" $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, … in die Aussageform $(\mathfrak{F}\mathrm{x} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathrm{x})$ ergibt sich eine wahre Aussage: $(\mathfrak{F}\mathfrak{a} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{b} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{b})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{c} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{c})$, usw.

Im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs werden alle Gesetze nach dem Vorbild kategorischer Gesetze wie $(\forall \mathrm{x})(\mathfrak{F}\mathrm{x} \Rightarrow \mathfrak{G}\mathrm{x})$ aufgefasst. Das Schließen, d.h. die Subsumtion von Gegenständen unter Gesetze, wird dabei seit **FREGE** als ein Übergang von allgemeingültigen Aussageformen wie $(\mathfrak{F}\mathrm{x} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathrm{x})$ zu Aussagen wie $(\mathfrak{F}\mathfrak{a} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{b} \Leftarrow \mathfrak{G}\mathfrak{b})$, usw., als die Ersetzung von „Individuenvariablen" durch „Individuenkonstanten" angesehen (**FREGE**, Briefe [IX/4] 104ff; LA 168f; GLG I-III, 298f; LM 109). Der fundamentale Unterschied zwischen kategorischen und bedingten Gesetzesbeziehungen wird dabei völlig übersehen; übersehen wird, dass viele schließende Subsumtionen keiner derartigen Variablenersetzung entsprechen können. Der entscheidende Grund liegt in der Konzeption der Aussageformen, für welche Ausdrücke mit Beliebig-Element-Zeichen erst dann eigentlichen Sinn und Wahrheitswertdefinitheit erhalten, wenn die Beliebig-Element-Zeichen durch entsprechende „Konstanten" ersetzt sind. Ein anderer Grund für das Ignorieren nicht-kategorischer Gesetze liegt darin, dass die Gesetzesgleichungen in der Mathematik, die als Vorbild der logistischen allgemeingültigen Ausdrücke gelten[113], kategorische Gesetze sind[114].

Für alle prädikatenlogistischen Aussageformen, die auf komplexe Fregerelationen verweisen, die mehr als eine Vorkommenskombination definitiv als realmöglich bestimmen, ergeben sich für jede Wahl konkreter Prädikate keine Aussageformen, die bei Einsetzung einer „Individuenkonstante" zu einer Aussage über das betreffende Individuum würden. Auf die komplexe Fregerelation $(10\bullet1)(\mathrm{Fx},\mathrm{Gx})$ verweist die prädikatenlogistische Aussageform $\exists \mathrm{x}(\mathrm{Fx} \,\&\, \mathrm{Gx})$ & $\sim\exists \mathrm{x}(\mathrm{Fx} \,\&\, \sim\mathrm{Gx})$ & $\exists \mathrm{x}(\sim\mathrm{Fx} \,\&\, \sim\mathrm{Gx})$. Werden in diese Aussageform zwei konkrete Prädikate $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, die in der Beziehung $(10\bullet1)(\mathfrak{F}\mathrm{x},\mathfrak{G}\mathrm{x})$ stehen eingesetzt, so resultiert der Ausdruck „$\exists \mathrm{x}(\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \mathfrak{G}\mathrm{x})$ & $\sim\exists \mathrm{x}(\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \sim\mathfrak{G}\mathrm{x})$ & $\exists \mathrm{x}(\sim\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \sim\mathfrak{G}\mathrm{x})$" – es handelt sich um drei konjugierte (d.h. durch „und" (&) verbundene) Erfüllbarkeitsaussagen; diese verweisen zusammen auf den bedingungslogischen Gesetzeszusammenhang $(10\bullet1)(\mathfrak{F}\mathrm{x},\mathfrak{G}\mathrm{x})$. In den drei Aussageformen $(\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \mathfrak{G}\mathrm{x})$, $(\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \sim\mathfrak{G}\mathrm{x})$ und $(\sim\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \sim\mathfrak{G}\mathrm{x})$, auf die sich die Erfüllbarkeitsaussagen beziehen, kann die „Individuenvariable" x nicht durch dieselbe „Individuenkonstante" $\mathfrak{a}$ ersetzt werden, d.h. die schließende Subsumtion des Individuums $\mathfrak{a}$ unter das Gesetz $(10\bullet1)(\mathfrak{F}\mathrm{x},\mathfrak{G}\mathrm{x})$ – **FREGE** spricht von einem „Schluss vom Allgemeinen zum Besonderen" – kann in allen *diesen* Fällen[115] nicht mit **FREGE** als „Vorgang" betrachtet werden, bei welchem „der nur andeutende Buchstabe" x durch ein „bedeutungsvolles Zeichen" $\mathfrak{a}$ „ersetzt wird" (GLG I-III, 298f). Das Gesetz $(10\bullet1)(\mathfrak{F}\mathrm{x},\mathfrak{G}\mathrm{x})$ sagt nicht über alle Gegenstände des Bezugsbereichs etwas aus, was über jeden einzelnen dieser Gegenstände auch gesagt werden könnte, es ist keine kategorische, sondern eine bedingte Gesetzesaussage.

Wird ein einzelner Gegenstand $\mathfrak{a}$ schließend unter ein bedingtes (nicht-kategorisches) Gesetz wie „$\exists \mathrm{x}(\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \mathfrak{G}\mathrm{x})$ & $\sim\exists \mathrm{x}(\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \sim\mathfrak{G}\mathrm{x})$ & $\exists \mathrm{x}(\sim\mathfrak{F}\mathrm{x} \,\&\, \sim\mathfrak{G}\mathrm{x})$" $\triangleq (10\bullet1)(\mathfrak{F}\mathrm{x},\mathfrak{G}\mathrm{x})$ subsumiert[116], ergibt sich daraus nicht wie bei der Subsumtion unter ein kategorisches Gesetz, dass diesem Gegenstand eine bestimmte prädikative Bestimmung zukommt: er ergibt sich vielmehr, dass dem Gegenstand, *falls* ihm das Prädikat $\mathfrak{F}$ zukommt, ihm notwendig ($\mathcal{N}$) auch das Prädikat $\mathfrak{G}$ zukommt; dass dem Gegenstand, falls ihm $\mathfrak{F}$ nicht zukommt, $\mathfrak{G}$ jedenfalls nicht notwendig ($\sim\mathcal{N} = \mathcal{C}$) zukommt; dass dem Gegenstand $\mathfrak{a}$, falls ihm $\mathfrak{G}$ zukommt, $\mathfrak{F}$ jedenfalls nicht unmöglich ($\sim \mathcal{U} = \mathcal{P}$): schließlich, dass dem $\mathfrak{a}$, falls ihm $\mathfrak{G}$ nicht zukommt, $\mathfrak{F}$ unmöglich ($\mathcal{U}$) zukommt.

Es können also alle logischen Formen begriffsschriftlich dargestellt werden, wenn auch nur indirekt und inakzeptabel umständlich. Wie steht es um die *begriffsschriftliche Darstellung der logischen Gesetze*? Der prädikatenlogistische Aussageform $(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ \sim(\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)$ verweist auf die Implikation $(Fx \rightarrow Gx)$; die Aussageform $\sim(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)$ verweist auf die Exklusion $(Fx \uparrow Gx)$. Nun lässt sich von zwei derartigen Aussageformen behaupten, dass sie für zumindest ein (oder für jedes) Prädikatenpaar beide wahr, bzw. falsch, oder dass eine der Aussageformen wahr, die andere falsch wird. Eine solche Erfüllbarkeits*aussage* entspricht einem logischen Gesetz. Der Ausdruck

> „$\mathbf{(\exists FG)}$ $\{[(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ \sim(\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)]\ \&\ \sim[\sim(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\}$"

entspricht der Aussage, dass es realmöglich ist, dass $(Fx \rightarrow Gx)$ gilt, nicht jedoch $(Fx \uparrow Gx)$, d.h. dem logischen Gesetz $(\bullet 1 \bullet\bullet)\ [(F \rightarrow Gx), (Fx \uparrow Gx)]$. Genau dann, wenn *alle* vier folgenden Erfüllbarkeitsaussagen

1. $\mathbf{(\sim\exists FG)}$ $\{[(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ \sim(\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\ \&\ [\sim(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\}$
2. $\mathbf{(\exists FG)}$ $\{[(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ \sim(\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\ \&\ \sim[\sim(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\}$
3. $\mathbf{(\exists FG)}$ $\{\sim[(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ \sim(\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\ \&\ [\sim(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\}$
4. $\mathbf{(\exists FG)}$ $\{\sim[(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ \sim(\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\ \&\ \sim[\sim(\exists x)\,(Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(Fx \frown \sim Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown Gx)\ \&\ (\exists x)\,(\sim Fx \frown \sim Gx)]\}$

wahr sind, gilt das logische Gesetz $\mathbf{(Fx \rightarrow Gx) \uparrow (Fx \uparrow Gx)} \equiv (0111)[(1011)(Fx,Gx),(0111)(Fx,Gx)]$. Derselbe Zusammenhang wird direkt durch die bedeutungsgleichen Ausdrücke „$(0111)[(1011)(Fx,Gx), (0111)(Fx,Gx)]$" und „$(Fx \rightarrow Gx) \uparrow (Fx \uparrow Gx)$" dargestellt[117].

Die vier konjugierten Erfüllbarkeitsaussagen stellen jeweils Aussagen über mögliche logische Zusammenhänge zwischen irgendwelchen Prädikaten dar; Möglichkeit bedeutet hier widerspruchsfreie Konstruierbarkeit:

1. Es kann keine logische Relation konstruiert werden, die voraussetzt, dass für zwei Prädikate F und G zugleich $(Fx \rightarrow Gx)$ und $(Fx \uparrow Gx)$ gilt – denn für diese Prädikate würde dann gelten, dass $Fx \frown Gx$ zugleich realmöglich und nichtrealmöglich ist, ebenso dass $Fx \frown \sim Gx$ zugleich realmöglich und nichtrealmöglich ist.
2. Es kann eine Relation konstruiert werden, die voraussetzt, dass zwei Prädikate F und G wohl in der Beziehung $(Fx \rightarrow Gx)$, nicht aber in der Beziehung $(Fx \uparrow Gx)$ steht: diese Relation ist die Relation $(Fx \rightarrow Gx)$.
3. Es kann eine Relation konstruiert werden, die voraussetzt, dass zwei Prädikate F und G wohl in der Beziehung $(Fx \uparrow Gx)$, nicht aber in der Beziehung$(Fx \rightarrow Gx)$ stehen; es ist dies die Relation $(Fx \uparrow Gx)$.
4. Es können Relationen konstruiert werden, die voraussetzen, dass weder $(Fx \rightarrow Gx)$ noch $(Fx \uparrow Gx)$ gilt; dies ist etwa die Relation $(Fx \leftarrow Gx)$.

Ob ein logisches Gesetz gültig ist, auf welches ein derartiger prädikatenlogistischer Ausdruck verweist, kann nur mit dem Verfahren beweisen werden, das ich im ersten Teil , Kapitel 3 dargelegt habe; es muss Bezug genommen werden auf die Bedingungen der Verträglichkeit und Unverträglichkeit logischer Relationen. Die begriffsschriftliche Darstellung der logischen Gesetze erfordert darüber hinaus die *explizite* Quantifikation über Prädikate.

Aus der Tatsache, dass schließlich doch alle logischen Formen begriffsschriftlich darstellbar sind, darf nicht geschlossen werden, dass schließlich auch **Frege**s Vorgehen – die Konstruktion der Gedankengefüge auf dem Boden einer Dissoziation von Allgemeinheit und logischer Form – eine zutreffende und fachgemäße Erkenntnis der logischen Formen und Gesetze ermöglicht. In Wirklichkeit verbaut **Frege**s Logikentwurf jede Einsicht in Struktur und Gehalt der logischen Formen.

In welcher Weise logische Formen überhaupt mit den Darstellungsmitteln der *Begriffsschrift* dargestellt werden können, kann in Rahmen des fregeschen Logikentwurf gar nicht beurteilt, ja nicht einmal problematisiert werden; in diesem Entwurf gelten ja schon die Gedankengefüge als logische Formen, und diese Missdeutung wird in den Bereich der Prädikatenlogistik übernommen, und bedingt auch dort ein durchgehendes Unverständnis der tatsächlichen Bedeutung der prädikatenlogistischen Ausdrücke. Auch die in **FREGE**s Konzeption unvermeidliche Verwischung der Unterschiede von logischen Formen und Gesetzen zerstört jeden vernünftigen Begriff der logischen Form. Wenn logische Formen auch mit Hilfe von informationsverschleiernden Gedankengefügen dargestellt werden können, so spielen hierbei ausschließlich das *und* und das *nicht* eine unverzichtbare Rolle; der Gebrauch anderer Gedankengefüge ist eine unnötige Umständlichkeit, welche obendrein zu den logischen Missdeutungen verleitet. Wenn ich die Form $(\circ\bullet\circ\circ)(Fx, Gx)$ begriffsschriftlich darstelle durch „$\exists x(Fx \Rightarrow Gx)$“ so ist das ein fruchtlose Verkomplizierung, denn ich muss ja das sekundäre Zeichen $\Rightarrow$ durch seine primäre Darstellung ersetzen, um die Bedeutung des Ausdrucks zu verstehen: $\exists x \sim (Fx \,\&\, Gx)$.

Wie weit und in welcher Weise in der Prädikatenlogistik logische Formen und Gesetze berücksichtigt, lässt sich nur einsehen, wenn die präzise Kenntnis der Struktur der logischen Formen vorhanden ist; diese Voraussetzung ist in der „modernen Logik“ nicht vorhanden. Im Grunde können die Logistiker über einen prädikatenlogistischen Ausdruck nichts weiter sagen, als dass er erfüllbar oder allgemeingültig ist oder nicht.

4.3.9. „Multiforme Quantifikation“

Alle logischen Gesetze, die wir für einstellige Prädikatoren entwickelt haben, gelten ebenso für beliebig-stellige Prädikate und jede logische Relation kann zwischen Prädikaten beliebiger Stelligkeit bestehen. So ist das Gesetz *Wenn ein Gegenstand x ein Mensch ist, dann ist x sterblich* ein Beispiel für eine Implikation, die zwischen einstelligen Prädikaten besteht und die durch den Ausdruck „$Px \rightarrow Qx$“ dargestellt werden kann. Das Gesetz *Wenn eine Person x Vater einer Person y ist, dann ist x mit y in erstem Grad verwandt* ist eine Implikationsbeziehung zweistelliger Prädikate, in allgemeiner Darstellung: $\mathbf{R}_1(x, y) \rightarrow \mathbf{R}_2(x, y)$. Bei der Darstellung des Verkettungsgesetzes $((p\rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ können die Beliebig-Element-Zeichen für Ereignisklassen/Sachverhalte bestimmter Art auf Prädikate beliebiger Stelligkeit verweisen. Die allgemeine Darstellung des Verkettungsgesetzes $\mathbb{CCC}$ für dreistellige Prädikate lautet:

$$\{[\mathbf{R}_1(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_2(x,y,z)] \wedge [\mathbf{R}_2(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_3(x,y,z)]\} \rightarrow [\mathbf{R}_1(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_3(x,y,z)]$$ [118]

Wichtig ist dabei, dass bei der Darstellung einer logischen Relation wie der Implikation „$Fx \rightarrow Gx$“ oder „$\mathbf{R}_1(x,y,z) \rightarrow \mathbf{R}_2(x,y,z)$“ usw. immer auf dasselbe Ereignis-Bezugsystem verwiesen wird: wenn das erste Prädikat irgendeinem n-Tupel zukommt, dann kommt auch der zweite Prädikator notwendig ($\mathcal{N}$) eben diesem n-Tupel zu[119]. Wir können festhalten, dass die Struktur der logischen Formen und die Gültigkeit logischer Gesetze von der Stelligkeit der involvierten Prädikate ganz unberührt bleiben. Mehrstellige Prädikate kommen nicht einzelnen Gegenständen, sondern n-Tupeln von Gegenständen zu[120].

4.3.9.1. Die „Fixierung“ mehrstelliger Prädikate

Der zweistellige Prädikator „x *ist bezüglich der Körpergröße kleiner als* y“ ist für *Paare* von Lebewesen definiert, er kommt demnach einem Paar von Lebewesen zu oder nicht zu; wenn nun ein Relatum dieser Relation durch einen bestimmten Gegenstand definitiv „fixiert“ oder „gebunden“ ist – z.B. „x *ist kleiner als Charly Chaplin*“, dann haben wir einen *ein*stelligen Prädikator: der Prädikator *x ist kleiner als Charly Chaplin* kommt dem einen Lebewesen zu, dem anderen nicht; der Prädikator kann, so fixiert, nicht mehr Paaren von Gegenständen zugesprochen werden. Zweistellig ist der Prädikator „x ist mit y verheiratet“; hingegen einstellig ist der Prädikat „x ist mit Mary Smith verheiratet“ oder „x ist mit einer Pariserin verheiratet“ oder auch nur „x ist verheiratet“. Durch derartige „Fixierungen“ werden aus mehrstelligen Prädikaten Prädikate geringerer Stelligkeit.

4.3.9.2. „Quantorfixierung“

Eine Fixierung einer zweistelligen Relation **R** ist auch dann gegeben, wenn feststeht, dass jemand zu keinem, zu allen, zu (genau, mindestens, höchstens) einem oder zu (genau, mindestens, höchstens) *n* Elementen einer bestimmten Gesamtheit **B** in der zweistelligen Relation **R** steht. Dies ist beispielsweise der Fall bei den Prädikatoren „x ist der Kleinste seiner/ihrer Schulklasse“, „ist der Klassenbeste“ usw. „ist der viertschnellste Läufer im Verein“; im Gegensatz zu den zweistelligen Relationen „ x ist leistungsmäßig besser als y“, „x ist bezüglich der Körpergröße kleiner als y“ usw. sind diese quantitativ spezifizierten Prädikatoren einstellig. Diese Fixierungen mehrstelliger Prädikatoren können mit Hilfe der beiden Quantoren ∀ und ∃ ausgedrückt werden.

Viele einstellige Prädikate involvieren eine Beziehung des Prädikanden zu Gegenständen, und wird ein solches Prädikat prädiziert, so ist immer vorausgesetzt (*Präsuppositionen* als konstitutive Voraussetzungen sinnvoller Äußerungen), dass es (zumindest) einen derartigen Gegenstand gibt, von dem die Beziehung zum Prädikanden behauptet wird. Das Prädikat *Halbwaise* besagt, dass derjenige, dem dieses Prädikat zukommt, *genau einen und nur einen* lebenden Elternteil hat; das Prädikat *Waise* besagt, dass der Prädikand *keinen* lebenden Elternteil hat. Dass Hans Vollwaise ist, kann mithilfe einer Quantorfixierung der Relation *y ist lebender Elternteil von x* ausgedrückt (paraphrasiert) werden: *Es gibt kein y, so dass gilt, y ist ein lebender Elternteil von Hans*. Das Prädikat *kinderreich* besagt, dass die Familie, der dieses Prädikat zukommt, *zumindest drei* Kinder hat. Das Prädikat *einstimmig* besagt, dass der Beschluss, dem dieses Prädikat zukommt, von *keinem* der Beschließenden abgelehnt (von *allen* Beschließenden beschlossen) worden ist.

Es gibt viele Prädikate, die besagen, dass es keine Gegenstände oder dass es einige Gegenstände (zumindest einen Gegenstand) gibt, die zum Prädikanden in einer ganz bestimmten Relation stehen; diese Prädikate lassen sich mit Hilfe des Quantors ∃ zum Ausdruck bringen:

> **Verheiratet(x)** ≡ (∃y) (y ist Ehegatte von x) – es gibt ein Individuum, das Ehegatte von x ist;
> **Kinderlos(x)** ≡ (~∃y)(y ist das Kind von x) – es gibt keinen Gegenstand y, der Kind von x ist;
> **Hausbesitzer(x)** ≡ (∃y)(y ist ein Haus und y gehört x)
> **Großelter(x)** ≡ (∃y) (y ist Kind eines Kindes von x)
> generell: ~(∃y) (R(y,x) oder (∃y) (R(y,x)

Es kann auch sein, dass irgendein Gegenstand x zu allen Gegenständen einer vorgegebenen, stets näher zu spezifizierenden Gesamtheit **B** in einer Beziehung R steht, was sich mit Hilfe des Allquantors ausdrücken lässt:

> x sorgt für alle seine Kinder ≡ (∀y∈{y | y ist ein Kind von x})(x sorgt für y)
> x behandelt alle seine Kunden freundlich ≡ (∀y∈{y | y ist ein Kunde von x})(x behandelt y freundlich)
> x kennt alle Psalmen auswendig ≡ (∀y∈{y | y ist ein Psalm})(x kennt y auswendig)
> Allgemein: (∀y∈$\mathbf{B}_x$) (xRy)

Ich nenne solche Prädikatoren *quantorfixierte Prädikatoren*; zwischen ihnen bestehen stets ganz bestimmte logische Beziehungen: Die Sachverhalte „x sorgt für alle seine Kinder“ und „x genügt den Normen, die die Familienbeziehungen regeln“ sind jeweils realmöglich; zwischen diesen Prädikatoren besteht die logische Beziehung der Implikation: „Wenn jemand den Normen, die die Familienbeziehungen regeln genügt, dann sorgt er für alle seine Kinder“. Auch das Gesetz „Wenn jemand für alle seine Kinder sorgt, dann ist er nicht kinderlos“ – (∀y∈{y | y ist ein Kind von x})(x sorgt für y) → (∃z)(z ist ein Kind von x) – ist ein solches Implikationsgesetz.

4.3.9.3. Besonderheiten der „multiformen Quantifizierung“

Im Zusammenhang mit mehrstelligen Prädikaten, die quantorfixiert sind, reden Logistiker von einer „Kombination der Quantoren“, von der „nicht-uniformen, multiformen Quantifizierung“, von der „Quantifikation im weiteren Sinne“, von „Quantoren innerhalb von Quantoren“ (**QUINE**), von „verzweigten Quantoren“ (**QUINE**), von der „erweiterten Methode der Quantifikation“ (**KLEINKNECHT/WÜST**), von einer „multiplen Quantifikation“ **E.TUGENDHAT/U.WOLF**). Das sind durchweg unspezifische, auf den Ausdruck zentrierte Kennzeichnungen, die das Wesentliche ausklammern, nämlich die Verminderung der Stelligkeit von Prädikaten durch Fixierung von Stellen durch Quantoren. *Diese fixierenden Quanto-*

ren gehören zur Bedeutung des Prädikats und dienen so nicht dem Ausdruck einer logischen (kategorischen) Gesetzesbeziehung zwischen Prädikatoren.

Im dem Ausdruck eines beliebigen Prädikators „Px“ verweist P auf das Prädikat, x verweist auf die möglichen Prädikanden; die Quantifikation eines solchen Prädikators – etwa $\forall x\, Px$ – ist eine (kategorische) Gesetzesquantifikation, die auf alle möglichen Prädikanden (die Gegenstände des Bezugsbereichs des Prädikats P[121]) verweist; der Quantor dient hier dem Ausdruck einer *logischen* Relation: einer Relation zwischen dem Begriff, der den Bezugsbereich festlegt und dem Prädikatbegriff. Im Ausdruck der quantorfixierten Prädikatoren $(\mathfrak{Q}y)\mathsf{R}(x, y)$ oder $(\mathfrak{Q}_1y)(\mathfrak{Q}_2z)\mathsf{R}(x,y,z)$ gehören die fixierenden Quantoren $(\mathfrak{Q}_1y)(\mathfrak{Q}_2z)$ zum Prädikat, während alleine das Beliebig-Element-Zeichen x auf die möglichen Prädikanden dieses Prädikats verweist; nur ein zusätzlicher, auf das x bezogener Quantor würde hier eine *logische* Relation zum Ausdruck bringen; die fixierenden Quantoren hingegen drücken keine logische Relation aus. Im Ausdruck „$\mathfrak{Q}_3x\,[(\mathfrak{Q}_1y)(\mathfrak{Q}_2z)\mathsf{R}(x,y,z)]$“ ist also nur „$\mathfrak{Q}_3x$“ ein eine logische Relation ausdrückender Gesetzesquantor; die Quantifikation „$\mathfrak{Q}_3x\,[(\mathfrak{Q}_1y)(\mathfrak{Q}_2z)\mathsf{R}(x,y,z)]$“ – was im Ausdruck zum Prädikat gehört, ist rot – ist dabei nur ein Spezialfall der Quantifikation $\mathfrak{Q}_3x\,Px$ und logisch auf dieselbe Weise zu behandeln.

In den Ausdrücken $(\mathfrak{Q}y)\mathsf{R}(\mathbf{x}, y)$ oder $(\mathfrak{Q}_1y)(\mathfrak{Q}_2z)\mathsf{R}(\mathbf{x},y,z)$ gehören die Gegenstände der Bezugsbereiche von y und z zu den fixierenden Quantoren; den Gegenständen y und z kann dieses quantorfixierte Prädikat nicht zugeschrieben werden, sie sind mit den sie fixierenden Quantoren Teile des Prädikats. Im Allgemeinen sind die Bezugsbereiche des Gesetzesquantors und diejenigen der fixierenden Quantoren verschieden und müssen jeweils genau angeführt werden. Beliebige Bezugsbereiche bezeichne ich durch die Zeichen $\mathbf{B}_i$; bei der Darstellung von quantorfixierten Prädikaten ist immer der jeweilige Bezugsbereich anzugeben, etwa auf folgende Weise: $(\mathfrak{Q}_1y \in \mathbf{B}_1)(\mathfrak{Q}_2z \in \mathbf{B}_2)\mathsf{R}(\mathbf{x}, y, z)$.

Die Bezugsbereiche des Gesetzesquantors und der fixierenden Quantoren müssen sorgfältig unterschieden werden. Gehen wir von einem einmal quantorfixierten Prädikator $(\mathfrak{Q}y)\,\mathsf{R}(x, y)$ aus; der Bezugsbereich der x gehört zum Prädikat, insofern den x das Prädikat zu oder abgesprochen wird; der Bezugsbereich der y gehört zum fixierenden Quantor. Die Bezugsbereiche können in den folgenden verschiedenen Verhältnissen stehen:

1. Die x und y gehören demselben Bezugsbereich an:

   Das Lebewesen x hat mit jedem Lebewesen y zumindest ein Gen gemeinsam.
   „$(\forall y)\,[(x+y) \in \mathbb{N}]$“: „x ergibt zu jeder Zahl y addiert eine natürliche Zahl“ $\{x,y \in \mathbb{N}\}$

2. Die x und y gehören unterschiedlichen Bezugsbereichen an[122]:

   a. Jedes x wird auf denselben Bezugsbereich $\mathbf{B}_1$ bezogen

      x kann alle Psalmen auswendig.
      x kennt alle Großstädte von allen europäischen Ländern.

   b. Jedes x wird auf eine eigene, nur zu ihm gehörende Bezugsmenge der y bezogen; diesen Bezug des Bezugsbereich der y auf das jeweilige x stelle ich durch $\mathbf{B}_x$ dar – $(\mathfrak{Q}y\in \mathbf{B}_x)\,\mathsf{R}(x, y)$

      x liebt alle seine Kinder y.
      Sie hatte einen Ring an jedem Finger. (**Quine**, Grundzüge, S.171)
      Wer auf jedes Pferd setzt, das im Rennen ist, verliert wenig. (**Quine**)[123]

Viele Formulierungen sind mehrdeutig; im Ausdruck „Es gibt ein y, zu welchem jedes x in der Beziehung R steht“ ist nicht klar, ob jedes x sich auf dasselbe oder jeweils auch auf andere y bezieht. So sind **Quine**s Beispiele „Es gibt ein Bild, das alle Kritiker bewundern“ und „Es gibt einen Philosophen, dem alle Philosophen widersprechen“ (Grundzüge, S. 165) zweideutig; es ist nicht deutlich, ob jeder Kritiker auf ein und dasselbe Bild, bzw. jeder Philosoph auf ein und denselben Philosophen bezogen wird. Der Unterschied muss durch eine sorgfältigere und umfassendere Formulierung kenntlich gemacht werden; er kann etwa durch die Stellung und Funktion der Quantoren verdeutlicht werden:

Jedes Element x steht zu mindestens einem Element y in der Relation **R** (nicht jedes x zu ein und demselben y): $(\forall x)\,[(\exists y)(y\mathbf{R}x)]$; hier gehört x zum Gesetzesquantor

und

Es gibt ein (ganz bestimmtes) y, zu welchem jedes Element x in der Relation **R** steht: $(\exists y)\,[(\forall x)\,(y\mathbf{R}x)]$; hier gehört y zum Gesetzesquantor.

4.3.9.4. Diese Formen bilden eine „Prädikatorfamilie“

Quantorfixierte Prädikate sind keine eigentlichen logischen Formen als Beziehungen von verschiedenen Begriffen (wie $p \rightarrow q$ oder $[p, q, r\ \mathbb{X}\mathbb{B}]$), sondern nur spezielle Prädikate; der Ausdruck „$(\forall y)\,\mathsf{R}(x, y)$“ bezeichnet einen einstelligen Prädikator, der Ausdruck „$(\exists z)(\forall u)(\exists v)\mathsf{R}(x,y,u,v,z)$“ einen speziellen zweistelligen Prädikator. Allerdings gehören alle diese quantorfixierten Prädikatoren umfangreichen Gruppen solcher Prädikatoren an, zwischen denen jeweils wohlbestimmte logische Verhältnisse bestehen. Ist ein beliebiger Prädikator eines bestimmten Typs gegeben, so lassen sich – ohne dass irgendwelchen empirischen Informationen berücksichtigt werden müssten, alle anderen Prädikatoren der betreffenden Gruppe konstruieren; man kann eine solche Gruppe „**Prädikatorfamilie**“ nennen.

Die Prädikatorfamilie, der der einfache einstellige Prädikator P(x) angehört, ist die Menge $\{P(x), \sim P(x)\}$: mit dem Prädikator P(x) ist immer auch der kontradiktorische Prädikator $\sim P(x)$ gegeben; die beiden Mitglieder der Familie stehen in der Beziehung $\mathbb{J}$.

Ist ein zweistelligen Prädikator $\mathbf{R}(x, y)$ gegeben, lässt sich der kontradiktorische Prädikator $\sim\mathbf{R}(x, y)$ konstruieren – $\mathbf{R}(x, y)$ und $\sim\mathbf{R}(x, y)$ stehen in der Beziehung $\mathbb{J}$. Ausgehend von $\mathbf{R}(x, y)$ kann die konverse Relation $\check{\mathsf{R}}(x, y)$ hergeleitet werden: besteht zwischen x und y die Relation R, dann besteht zwischen y und x die konverse Relation $\check{\mathsf{R}}$. Auch für die konverse Relation gibt es die Kontradiktion $\sim\check{\mathsf{R}}(x, y)$. Wir erhalten so vier Elemente der Prädikatorfamilie. Nehmen wir als Beispiel die arithmetische Relation $a < b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; die kontradiktorische Relation ist $a \geq b$; die konverse Relation ist $a > b$; die Konverse der kontradiktorischen Relation ist schließlich $a \leq b$. Zwischen den vier Elementen der Prädikatorfamilie bestehen die folgenden logischen Verhältnisse:

$(a < b) \succ\!\prec (a \geq b)$
$(a < b) \uparrow (a > b)$
$(a < b) \rightarrow (a \leq b)$
$(a \geq b) \vee (a \leq b)$
$(a \geq b) \leftarrow (a > b)$
$(a > b) \succ\!\prec (a \leq b)$

Für den dreistelligen Prädikator $\mathbf{R}(x,y,z)$ gibt es die Kontradiktion $\sim\mathbf{R}(x,y,z)$, und die 3! Konversen $\check{\mathsf{R}}_1(x,y,z)$, $\check{\mathsf{R}}_2(x,z,y)$, $\check{\mathsf{R}}_3(y,x,z)$, $\check{\mathsf{R}}_4(y,z,x)$, $\check{\mathsf{R}}_5(z,x,y)$ und $\check{\mathsf{R}}_6(z,y,x)$. Ein weiteres Beispiel für eine Prädikatorfamilie sind die Prädikatorverknüpfungen; ausgehend von zwei beliebigen Prädikatoren Fx und Gx lassen sich alle möglichen Prädikatorverknüpfungen konstruieren und die zwischen ihnen bestehenden logischen Beziehungen ermitteln.

Die zu einem quantorfixierten Prädikator gehörende Familie ist besonders umfangreich. Von einem einfachen Prädikator Px ist nur der kontradiktorische Gegensatz $\sim Px$ mitgegeben, von einem einmal quantorfixierten Prädikator $(\mathbb{Q}y)\,\mathsf{R}(x, y)$ gibt es drei verschieden *andere* einmal-quantorfixierte Prädikatoren: $\sim(\mathbb{Q}y)\,\mathsf{R}(x, y)$, $(\mathbb{Q}y) \sim\mathsf{R}(x, y)$ und $\sim(\mathbb{Q}y) \sim\mathsf{R}(x, y)$; jedem $\forall$-Ausdruck ist jeweils ein $\exists$-Ausdruck bedeutungsgleich:

x steht mit allen y in der Relation **R** ≡ es gibt kein y, mit dem x nicht in der Relation **R** steht.	$(\forall y)\ \mathbf{R}(x,y)] \equiv (\sim\exists y) \sim\mathbf{R}(x,y)$
x steht nicht mit allen y in der Relation **R** ≡ es gibt ein y, zu dem x nicht in der Reaktion **R** steht	$\sim(\forall y)\ \mathbf{R}(x,y)] \equiv (\exists y) \sim\mathbf{R}(x,y)$
nicht mit allen y steht x nicht in der Relation **R** ≡ x steht mit zumindest einem y in der Relation **R**	$(\sim\forall y) \sim\mathbf{R}(x,y) \equiv (\exists y)\ \mathbf{R}(x,y)]$
zu allen y steht x nicht in der Relation **R** ≡ es gibt kein y, zu welchem x in der Relation **R** steht	$(\forall y) \sim\mathbf{R}(x,y) \equiv \sim(\exists y)\ \mathbf{R}(x,y)]$

Die logischen Beziehungen zwischen diesen Prädikatoren lassen sich leicht ermitteln, ohne dass auf irgendwelche empirischen Sachverhalte Bezug genommen werden müsste:

	(∀y) **R**(x,y) ≡ ~(∃y) ~**R**(x, y)	(∀y) ~**R**(x,y) ≡ ~(∃y) **R**(x, y)	(∃y) **R**(x, y) ≡ ~(∀y) ~**R**(x, y)	(∃y) ~**R**(x, y) ≡ ~(∀y) **R**(x, y)
(∀y) **R**(x, y) ≡ ~(∃y) ~**R**(x, y)	$\mathbb{E}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{J}$
(∀y) ~**R**(x, y) ≡ ~(∃y) **R**(x, y)	$\mathbb{D}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{C}$
(∃y) **R**(x, y) ≡ ~(∀y) ~**R**(x, y)	$\mathbb{B}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{A}$
(∃y) ~**R**(x, y) ≡ ~(∀y) **R**(x, y)	$\mathbb{J}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{E}$

Jede dieser Prädikatoren kann jeder der möglichen *Gesetzes*quantifikationen unterzogen werden; es ergeben sich dann logische Formen der Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}_1$x [($\mathfrak{Q}_2$y) **R**(x, y); für jede dieser Formen gibt es drei bedeutungsgleiche Formen:

(∀x) [(∀y) R(x, y)] ≡ (∀x) [~(∃y) ~R(x, y)] ≡ ~(∃x) ~[(∀y) R(x, y)] ≡ ~(∃x) [(∃y) ~R(x, y)]	**(∀x)** [(∀y) ~**R**(x, y)] ≡ (∀x) ~(∃y) R(x, y) ≡ ~(∃x) ~[(∀y) ~R(x, y)] ≡ ~(∃x) [(∃y) R(x, y)]	**(∀x)** [(∃y) **R**(x, y)] ≡ (∀x) ~(∀y) ~R(x, y) ≡ ~(∃x) ~[(∃y) **R**(x, y)] ≡ ~(∃x) [(∀y) ~**R**(x, y)]	**(∀x)** [(∃y) ~**R**(x, y) ≡ (∀x) [~(∀y) R(x, y)] ≡ ~(∃x) ~[(∃y) ~**R**(x, y) ≡ ~(∃x) [(∀y) R(x, y)]

usw.

Auch die logischen Beziehungen dieser Formen „($\mathfrak{Q}_1$x) [$\mathfrak{Q}_2$y) **R**(x, y)]“ lassen sich eindeutig ermitteln[124].

Die Prädikatorfamilie für **zweimal quantorfixierte dreistellige Relationen** soll am Beispiel des Prädikators „*x zeigt allen seinen Freunden alle seine Bilder*“ dargelegt werden; die Bezugsbereiche der fixierenden Quantoren variieren mit dem jeweiligen x.

quantorfixierte dreistellige Relation ($\mathfrak{Q}_1$y)($\mathfrak{Q}_2$z)R(x,y,z)	**Beispiel**	**Äquivalenzen**
(1) Der Fall: **alle – alle** **(∀y)** (∀z) R(x,y,z) ≡ ~(∃y) ~(∀z) R(x,y,z) (∀y)(~(∃z) ~R(x,y,z) ≡ ~(∃y)(∃z) ~R(x,y,z)	Hans zeigt allen seinen Freunden alle seine Bilder ≡ Allen seinen Freunde zeigt Hans nicht eines seiner Bilder nicht ≡ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle seine Bilder ≡ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans eines der Bilder nicht	allen – alle ≡ allen – nicht eines nicht ≡ nicht einem – nicht alle ≡ nicht einem – eines nicht
(2) Der Fall: **alle – nicht alle** **(∀y)** ~(∀z) R(x,y,z) ≡ ~(∃y)(∀z) R(x,y,z) **(∀y)** (∃z) ~R(x,y,z) ≡ ~(∃y) ~(∃z) ~R(x,y,z)	Hans zeigt allen seinen Freunde nicht alle seine Bilder[125] ≡ Allen seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines der Bilder nicht ≡ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder ≡ Nicht einem von seinen Freunden zeigt Hans nicht eines der Bilder	alle – nicht alle ≡ alle – eines nicht ≡ nicht einem – alle ≡ nicht einem – nicht eines nicht

	nicht	
(3) Der Fall: **alle – eines** $(\forall y)(\exists z)R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)\sim(\exists z)R(x,y,z)$ $(\forall y)\sim(\forall z)\sim R(x,y,z)\ \ \sim(\exists y)(\forall z)\sim R(x,y,z)$	Hans zeigt allen seinen Freunde zumindest eines seiner Bilder ≡ Hans zeigt allen seinen Freunden nicht alle seine Bilder nicht ≡ Nicht einem seiner Freunden zeigt Hans nicht eines seiner Bilder ≡ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder nicht	alle – eines ≡ alle – nicht alle nicht ≡ nicht einem – nicht eines ≡ nicht einem – alle nicht
(4) Der Fall: **alle – nicht eines** $(\forall y)\sim(\exists z)R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)(\exists z)R(x,y,z)$ $(\forall y)\sim(\forall z)R(x,y,z) \equiv \sim(\exists y)(\forall z)R(x,y,z)$	Hans zeigt allen seinen Freunde nicht eines seiner Bilder ≡ Hans zeigt allen seinen Freunden alle seine Bilder nicht ≡ Nicht einem seiner Freunden zeigt Hans eines seiner Bilder ≡ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle seine Bilder nicht	alle – nicht eines ≡ alle – alle nicht ≡ nicht einem – eines ≡ nicht einem – nicht alle nicht
(5) Der Fall: **nicht alle – alle** $\sim(\forall y)(\forall z)R(x,y,z) \equiv (\exists y)\sim(\forall z)R(x,y,z)$ $\sim(\forall y)\sim(\exists z)\sim R(x,y,z) \equiv (\exists y)(\exists z)\sim R(x,y,z)$	Hans zeigt nicht allen seinen Freunden alle Bilder ≡ Hans zeigt nicht allen seinen Freunden nicht eines seiner Bilder nicht ≡ Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle Bilder ≡ Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines seiner Bilder nicht	nicht alle – alle ≡ nicht alle – nicht eines nicht ≡ einem – nicht alle ≡ einem – eines nicht
(6) Der Fall: **nicht alle – nicht alle** $\sim(\forall y)\sim(\forall z)R(x,y,z) \equiv$ $\sim(\forall y)(\exists z)\sim R(x,y,z) \equiv$	Hans zeigt nicht allen seinen Freunden nicht alle seine Bilder ≡ Hans zeigt nicht allen seinen Freunden zumindest eines seiner Bilder nicht ≡ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde alle seine Bilder ≡ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde nicht eines der Bilder nicht	nicht allen – nicht alle ≡ nicht allen – eines nicht ≡ einem – alle ≡ einem – nicht eines nicht
(7) Der Fall: **nicht alle – eines** $\sim(\forall y)(\exists z)R(x,y,z) \equiv$ $\sim(\forall y)\sim(\forall z)\sim R(x,y,z) \equiv$	Hans zeigt nicht allen seinen Freunden zumindest eines der Bilder ≡ Hans zeigt nicht allen seinen Freunden nicht alle Bilder nicht ≡ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde nicht eines der Bilder ≡ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde alle seiner Bilder nicht	nicht allen – eines ≡ nicht allen – nicht alle nicht ≡ einem – nicht eines ≡ einem – alle nicht

(8) Der Fall: **nicht alle – nicht eines** $\sim(\forall y) \sim(\exists z) R(x,y,z)$ ≣ $(\exists y) (\exists z) R(x,y,z)$ $\sim(\forall y) (\forall z) \sim R(x,y,z)$ ≣ $(\exists y) \sim(\forall z) \sim R(x,y,z)$	Hans zeigt nicht allen seiner Freunde nicht eines der Bilder ≣ Hans zeigt nicht allen seiner Freunde alle Bilder nicht ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde zumindest ein Bilder ≣ Hans zeigt zumindest einem seiner Freunde nicht alle der Bilder nicht	nicht allen – nicht eines ≣ nicht allen – alle nicht ≣ einem – eines ≣ einem – nicht alle nicht
(9) Der Fall: **eines – alle** $(\exists y) (\forall z) R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y) \sim(\forall z) R(x,y,z)$ $(\exists y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y) (\exists z) \sim R(x,y,z)$	Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder ≣ Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans nicht alle seiner Bilder ≣ Hans zeigt nicht allen seiner Freunde zumindest eines der Bilder nicht	Einem – alle ≣ einem– nicht eines nicht ≣ nicht allen – nicht alle ≣ nicht allen – eines nicht
(10) Der Fall: **eines – nicht alle** $(\exists y) \sim(\forall z) R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z)$ $(\exists z) \sim R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y) (\forall z) R(x,y,z)$	Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines der Bilder nicht≣ Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle der Bilder ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder	einem – nicht alle ≣ Einem – eines nicht ≣ nicht allen–nicht eines nicht ≣ nicht allen – alle
(11) Der Fall: **eines – eines** $(\exists y) (\exists z) R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y) \sim(\exists z) R(x,y,z)$ $(\exists y) \sim(\forall z) \sim R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall) (\forall z) \sim R(x,y,z)$	Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans zumindest eines der Bilder ≣ Zumindest einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle der Bilder nicht ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder ≣ Nicht allen seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder nicht	Einem – eines ≣ einem – nicht alle nicht ≣ nicht allen – nicht eines ≣ nicht allen – alle nicht
(12) Der Fall: **eines – nicht eines** $(\exists y) \sim(\exists z) R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y) \sim(\forall z) \sim R(x,y,z)$ $(\exists y) (\forall z) \sim R(x,y,z)$ ≣ $\sim(\forall y)(\exists z) R(x,y,z)$	Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans alle seine Bilder nicht ≣ Mindestens einem seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder ≣ Nicht allen seinen Freunden zeigt Hans nicht alle Bilder nicht ≣ Nicht allen seinen Freunden zeigt	einem – nicht eines ≣ Einem – alle nicht ≣ nicht allen–nicht alle nicht ≣ nicht allen – eines

	zumindest eines der Bilder	
(13) Der Fall: **nicht einem – alle** $\sim(\exists y)(\forall z)\, R(x,y,z) \equiv (\forall y) \sim(\forall z)\, R(x,y,z)$ $\sim(\exists y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv (\forall y)\,(\exists z) \sim R(x,y,z)$	Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder ≡ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht alle Bilder ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans zumindest ein Bild nicht	Nicht einem – alle ≡ nicht einem – nicht eines nicht ≡ allen – nicht alle ≡ allen – eines nicht
(14) Fall: **nicht einem – nicht alle** $\sim(\exists y)\sim(\forall z)\, R(x,y,z) \equiv (\forall y)\,(\forall z)\, R(x,y,z)$ $\sim(\exists y)\,(\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv (\forall y) \sim(\exists z) R(x,y,z)$	Nicht einem (= nicht einem) seiner Freunde zeigt Hans eines Bilder nicht ≡ Nicht einem (= nicht einem) seiner Freunde zeigt Hans nicht alle Bilder ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans al-le Bilder ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht eines der Bilder nicht	nicht einem – nicht alle ≡ Nicht einem – eines nicht ≡ allen – alle ≡ allen – nicht eines nicht
(15) **nicht einem – eines** $\sim(\exists y)(\exists z)\, R(x,y,z) \equiv (\forall y) \sim(\exists z) R(x,y,z)$ $\sim(\exists y) \sim(\exists z) \sim R(x,y,z) \equiv (\forall y)\,(\forall z) \sim R(x,y,z)$	Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans eines Bilder ≡ Nicht einem seiner Freunde zeigt Hans nicht alle Bilder nicht ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht eines der Bilder ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans al-le Bilder nicht	Nicht einem – eines ≡ nicht einem – nicht alle nicht ≡ allen – nicht eines ≡ allen – alle nicht
(16) **nicht einem– nicht eines** $\sim(\exists y) \sim(\exists z)\, R(x,y,z) \equiv (\forall y)\,(\exists z) R(x,y,z)$ $\sim(\exists y)\,(\forall z) \sim R(x,y,z) \equiv (\forall y) \sim(\forall z) \sim R(x,y,z)$	Nicht einem (= nicht einem) seiner Freunde zeigt Hans alle Bilder nicht ≡ Nicht einem (= nicht einem) seiner Freunde zeigt Hans nicht eines der Bilder ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans zumindest eines der Bilder ≡ Allen seinen Freunden zeigt Hans nicht alle Bilder nicht	nicht einem – nicht eines ≡ Nicht einem – alle nicht ≡ allen – eines ≡ allen – nicht alle nicht

Weil jeder ∀-Ausdruck genau einem ∃-Ausdruck Äquivalenz ist, sind von den in der Tafel erfassten 16 Fällen immer jeweils zwei äquivalent:

(1) und (14) (2) und (13) (3) und (16) (4) und (15)
(5) und (10) (6) und (9) (7) und (12) (8) und (11)

Ein dreistelliger Prädikator R(x,y,z) kann also auf 8 paarweise bedeutungsverschiedene Weisen zweimal quantorfixiert werden, d.h. in die Ausdrucksgestalt $(\mathbb{Q}_1 y)(\mathbb{Q}_2 z)$ **R**(x,y,z) gebracht werden. Für jedes dieser fixierten dreistelligen Prädikate gibt es drei bedeutungsgleiche Paraphrasen. Die zwischen diesen 8 Formen bestehenden logischen Beziehungen sind einfach zu bestimmen; sie sind in der folgenden Relationenmatrix dargestellt. Die Form $(\forall y)(\forall z)$R(x,y,z) stelle ich abkürzend durch den Ausdruck „$\forall - \forall$", die Form $(\forall y)(\exists z)$R(x,y,z) durch den Ausdruck „$\forall - \exists$", und die Form $(\exists y)(\forall z)\sim$R(x,y,z) durch den Ausdruck „$\exists - \forall\sim$", usw. dar.

Die Gesetze werden bewiesen, indem jeder der vier möglichen Vorkommenskombinationen auf ihre Realmöglichkeit hin überprüft werden. Um etwa die logische Beziehung zwischen den Prädikatoren $\forall - \forall$ [= $(\forall y)$ $(\forall z)$ R(x,y,z)] und $\exists - \forall\sim$ [= $(\exists y)(\forall z)$ $\sim$R(x,y,z)] zu ermitteln (Gesetz Nr. 6) ist zunächst zu prüfen, ob beide Prädikatoren zugleich gelten können : dies ist nicht der Fall, denn bei *alle – alle* kann nicht gelten *eines – keines* (Vorkommenskombination I ist also nichtrealmöglich). Der Prädikator $\forall - \forall$ kann gelten, ohne dass auch $\exists - \forall\sim$ gilt, was unmittelbar aus der Bedeutung dieser Prädikatoren hervorgeht (Vorkommenskombination II ist realmöglich). Es ist möglich, dass $\exists - \forall\sim$ gilt, ohne dass $\forall - \forall$ gilt; dies ist etwa der Fall, wenn $\forall - \forall\sim$ gilt (Vorkommenskombination II ist realmöglich). Es ist schließlich möglich, dass beide Prädikatoren nicht gelten: dies ist der Fall, wenn gilt $\forall - \exists\exists$ (x steht zu allen y und zu einigen, aber nicht allen z in der Beziehung R), d.h. Vorkommenskombination IV ist realmöglich. Es gilt also das Gesetz [$(\forall y)$ $(\forall z)$ R(x,y,z)] $\uparrow$ [$(\exists y)(\forall z)$ $\sim$R(x,y,z)].

In untenstehender Tabelle steht über den Beziehungen der logischen Relationen Nummer, des jeweiligen logischen Gesetzes; die Ziffer in Klammern bezeichnet die Nummer jenes logischen Gesetzes, das die bedeutungsgleiche Konverse des Gesetzes darstellt.

Tabelle 12: Die logischen Beziehungen zwischen den zweifach quantorfixierten Prädikatoren der Form ($\mathbb{Q}_1$y) ($\mathbb{Q}_2$z) R(x,y,z)

	∀–∀ ≡ ∀–~∃~ ≡ ~∃–~∀ ≡ ~∃–∃~	∀–~∀ ≡ ∀–∃~ ≡ ~∃–∀ ≡ ~∃–~∃~	∀–∃ ≡ ∀–~∀~ ≡ ~∃–~∃ ≡ ~∃–∀~	∀–~∃ ≡ ∀– ∀~ ≡ ~∃–∃ ≡ ~∃–~∀~	∃–∀ ≡ ∃–~∃~ ≡ ~∀–~∀ ≡ ~∀–∃~	∃–∀~ ≡ ∃–~∃ ≡ ~∀–~∀~≡ ~∀–∃	∃–∃ ≡ ∃–~∀~ ≡ ~∀–~∃ ≡ ~∀–∀~	∃–∃~ ≡ ∃–~∀ ≡ ~∀–~∃~≡ ~∀–∀
∀–∀ ≡ ∀–~∃~ ≡ ~∃–~∀ ≡ ~∃–∃~	1 E	2 (9) D[126]	3 (17) C[127]	4 (25) D[128]	5 (33) C	6 (41) D[129]	7 (49) C	8 (57) J[130]
∀–~∀ ≡ ∀–∃~ ≡ ~∃–∀ ≡ ~∃–~∃~	9 (2) D	10 E	11 (18) V[131]	12 (26) B[132]	13 (34) J[133]	14 (42) V[134]	15 (50) A[135]	16 (58) C[136]
∀–∃ ≡ ∀–~∀~ ≡ ~∃–~∃ ≡ ~∃–∀~	17 (3) B	18 (11) V	19 E	20 (27) D[137]	21 (35) V[138]	22 (43) J[139]	23 (51) C[140]	24 (59) A[141]
∀–~∃ ≡ ∀–∀~ ≡ ~∃–∃ ≡ ~∃–~∀~	25 (4) D	26 (12) C	27 (20) D	28 E	29 (36) D	30 (44) C[142]	31 (52) J[143]	32 (60) C[144]
∃–∀ ≡ ∃–~∃~ ≡ ~∀–~∀ ≡ ~∀–∃~	33 (5) B	34 (13) J	35 (21) V	36 (29) D	37 E	38 (45) V[145]	39 (53) C[146]	40 (61) A[147]
∃–∀~ ≡ ∃–~∃ ≡ ~∀-~∀~ ≡ ~∀–∃	41 (6) D	42 (14) V	43 (22) J	44 (30) B	45 (38) V	46 E	47 (54) A[148]	48 (62) C[149]
∃–∃ ≡ ∃–~∀~ ≡ ~∀–~∃ ≡ ~∀–∀~	49 (7) B	50 (15) A	51 (23) B	52 (31) J	53 (39) B	54 (47) A	55 E	56 (63) A[150]
∃–∃~ ≡ ∃–~∀ ≡ ~∀– ~∃~≡ ~∀–∀	57 (8) J	58 (16) B	59 (24) A	60 (32) B	61 (40) A	62 (48) B	63 (56) A	64 E

Das Gesetz Nr. 59 lautet in Bezug auf unser Beispiel: Entweder zeigt jemand einem seiner Freunde eines der von ihm gemalten Bilder nicht, oder er zeigt allen seinen Freunden zumindest eines der Bilder oder er tut beides.

Das Gesetz Nr. 60 lautet für unser Beispiel: Nur wenn jemand einem seiner Freunde eines seiner Bilder nicht zeigt, zeigt er allen seinen Freunden nicht eines seiner Bilder. Eine andere Formulierung: Jemand kann allen seinen Freunden nur dann nicht eines seiner Bilder zeigen, wenn er zumindest einem seiner Freunde nicht alle seiner Bilder zeigt.

Wird eine solche Form als ganze negiert, kann diese Negation bei Vertauschung von *alle* und *eines* schrittweise an das Ende des Ausdrucks gebracht werden. Nehmen wir als Beispiel die Negation des Prädikators „x bekennt allen Mitgliedern seiner Gemeinde alle seine Sünden“:

nicht(x bekennt allen Mitgliedern seiner Gemeinde alle Sünden) ≡
(x bekennt nicht allen Mitgliedern seiner Gemeinde alle Sünden) ≡
(x bekennt zumindest einem Mitglied seiner Gemeinde nicht alle Sünden) ≡
(x tut zumindest einem Mitglied seiner Gemeinde zumindest eine Sünde nicht bekennen).

Allgemein:

$\sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}(x,y,z)] \equiv$
$[\sim(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}(x,y,z)] \equiv$
$[(\exists y)\ \sim(\forall z)\ \mathbf{R}(x,y,z)] \equiv$
$[(\exists y)\ (\exists z)\ \sim\mathbf{R}(x,y,z)]$[151]

Wie aus der obigen Tabelle hervorgeht, besteht zwischen den möglichen zweifachen Quantorfixierungen derselben dreistelligen Relation eine der Beziehungen 𝔼, 𝕍, 𝔸, 𝔻, 𝕁 und die Totalform 𝔹 bzw. ℂ. Unter welchen Bedingungen stehen zwei derartige Formen in einer dieser Beziehungen?

Kontradiktion 𝕁: Jede Form steht zu ihrer Negation in der Beziehung des kontradiktorischen Gegensatzes (𝕁): Die Negation etwa von ∀-∀ wird in der angegebenen schrittweisen Weise durchgeführt: ∼(∀ - ∀) ≡ ∃ - ∼∀ = ∃ - ∃∼ oder ∼(∃ - ∃) ≡ ∀ - ∼∃ ≡ ∀ - ∀∼, usw.

Unverträglichkeit (Kontrarietät) 𝔻:

es gibt drei *elementare* Quantorverhältnisse:

alle (∀)
einige, aber nicht alle (≡ einige nicht, aber nicht keines) (∃∃)
keines (≡ alle nicht)[152] (∀∼)

Das zweite dieser Verhältnisse erhält in der Prädikatenlogistik keinen direkten und elementaren Ausdruck (durch einen einzigen Quantor). Jeder dieser drei elementaren Quantoren bildet zu jedem der beiden anderen jeweils einen konträren Gegensatz (𝔻); jeder elementare Quantor steht zu jenem nichtelementaren Quantor, der seine beiden konträren Gegensätze zusammenfasst, im kontradiktorischen Gegensatz (𝕁):

Alle ist konträr erstens zu *einige und nicht alle* und zweitens zu *keines*: ***alle*** ist kontradiktorisch zu *eines nicht* (entweder *einige und nicht alle* oder *keines*)

Alle nicht ist konträr erstens zu *einige und nicht alle* und zweitens zu *alle;* ***alle nicht*** ist kontradiktorisch zu *eines* (entweder *alle* oder *einige und nicht alle*)

Einige, aber nicht alle ist konträr erstens zu *alle* und zweitens zu *keines*, und kontradiktorisch zu *alle oder keines*.

Die nichtelementaren Quantoren *Einige* (∃ = ∼∀∼), dann *einige nicht* (∃∼ = ∼∀) und *alle oder keines* (∼∃∃) umfassen jeweils zwei Möglichkeiten: *einige* sind entweder *alle* oder *einige und nicht alle*; *einige nicht* sind entweder *keine* oder *einige und nicht alle*; *nicht einige, aber nicht alle* sind entweder *alle* oder *keines*. Für nichtelementare Quantoren gibt es keine konträren Gegensätze, sondern nur einen kontradiktorischen Gegensatz (der ein elementarer Quantor ist):

Einige hat den kontradiktorischen Gegensatz *keines*.
Einige nicht hat den kontradiktorischen Gegensatz *alle*.

Bei der Kombination von zwei Quantoren ergeben sich so die folgenden Gegensätze:

alle – alle hat drei konträre Gegensätze: *alle–keines*, *alle–eines nicht* und *eines–keines*, sowie den kontradiktorischen Gegensatz *eines – eines nicht*.

alle – alle nicht hat drei konträre Gegensätze: *alle – alle*, *alle – eines* und *eines – alle*, sowie den kontradiktorischen Gegensatz *eines – eines*.

alle – eines hat den einen konträren Gegensatz *alle - nicht eines* und den kontradiktorischen Gegensatz *eines – keines*

alle - eines nicht hat den einen konträren Gegensatz *alle - alle* und den kontradiktorischen Gegensatz *eines – alle*.

eines – alle hat den einen konträren Gegensatz: *alle – keines* und den kontradiktorischen Gegensatz *alle – eines nicht*

eines - alle nicht hat den einen konträren Gegensatz: *alle – alle* und einen kontradiktorischen Gegensatz *alle – eines nicht*.

eines – eines hat keinen konträren Gegensatz, sondern nur den kontradiktorischen Gegensatz *alle – keines*

eines – eines nicht hat ebenfalls nur den kontradiktorischen Gegensatz alle – alle

Wenn beide fixierenden Quantoren Allquantoren sind (∀ oder ∀~), gibt es drei konträre Gegensätze, ist einer der fixierenden Quantoren ein Allquantor, der andere ein Existenzquantor (~∀ = ∃~) haben wir nur einen konträren Gegensatz; sind beide fixierenden Quantoren Existenzquantoren gibt es gar keinen konträren Gegensatz.

Alternative $\mathbb{A}$:

Wenn zwei Formen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in der Beziehung der Kontrarietät stehen, dann stehen ihre kontradiktorischen Gegensätze $\sim\mathfrak{F}_1$ und $\sim\mathfrak{F}_2$ in der Beziehung der verträglichen Alternative $\mathbb{A}$. Dies ist ein Spezialfall des logischen Gesetzes: $(p \mid q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$. Stehen zwei Formen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ in der Beziehung der Kontradiktion, so stehen ihre jeweiligen Kontradiktionen wiederum in der Beziehung der Kontradiktion; dies ergibt sich aus dem logischen Gesetz: $(p \rtimes\!\!\ltimes q) \leftrightarrow (\sim p \rtimes\!\!\ltimes \sim q)$.

Independenz $\mathbb{V}$:

Zwei Formen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sind independent, wenn sich für beide, ob unnegiert oder negiert, keine Gegensätze ergeben.

Beispiel: *alle – eines nicht* und *alle – eines*; bei *alle–eines nicht* gilt: entweder *alle–keines* oder *alle – teilweise*; bei *alle – eines nicht* gilt entweder *alle–alle* oder *alle–teilweise*; damit kann beides jeweils mit oder ohne das andere gelten.

Auf jeden Fall sind die Beziehungen zwischen allen möglichen Formen ohne Mühe bestimmbar; man stützt sich dabei auf die elementaren Quantorgesetze und die oben angesprochene schrittweise Negation. Man muss systematisch die Realmöglichkeit aller Vorkommenskombinationen überprüfen, und dabei muss man für jede dieser Formen die Bedingungen der Geltung und der Nichtgeltung berücksichtigen.

4.3.9.5. Die quantorfixierten Prädikate sind in der Logik wie die nicht-quantorfixierten Prädikate zu behandeln

Die quantorfixierten Prädikate, sieht man ab von ihren vielfachen Beziehungen (mehrere bedeutungsgleiche Papaphrasen, Äquivalenzen, sonstige logischen Verhältnisse), sind wie nicht-quantorfixierte Prädikate zu behandeln und stehen wie diese in einer ganz bestimmten logischen Totalform und allen von dieser Totalform involvierten logischen Relationen. In den Ausdrücken logischer Gesetze können statt der Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalts-/Ereignisklassen oder für Prädikatoren auch Beliebig-Element-Zeichen für quantorfixierte Prädikate eingesetzt werden[153]. Der Ausdruck „$Fx \rightarrow Gx$" bezeichnet die Implikation zweier einstelliger Prädikate, der Ausdruck $\sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \rightarrow \sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}_2(x,y,z)]$ bezeichnet die Implikationsbeziehung zweier zweimal quantorfixierten ebenfalls einstelliger Prädikate; die Relata können durch einen bedeutungsgleichen Ausdruck ersetzt werden: „$[(\exists y) \sim(\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \rightarrow [(\exists y)\ (\exists z) \sim\mathbf{R}_2(x,y,z)]$ drückt dieselbe Implikation aus. Das logische Gesetz $(Fx \rightarrow Gx) \uparrow (Fx \uparrow Gx)$ kann auch für beliebige quantorfixierte Prädikate formuliert werden, etwa: $\{[(\exists y) \sim(\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \rightarrow [(\exists y)\ (\exists z) \sim\mathbf{R}_2(x,y,z)]\} \uparrow \{\sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}_1(x,y,z)] \uparrow \sim[(\forall y)\ (\forall z)\ \mathbf{R}_2(x,y,z)]\}$. Jede logische Form, jedes logische Gesetz kann mit Hilfe quantorfixierter Prädikate formuliert werden; es resultieren unbegrenzt viele sinnvolle und entscheidbare Formeln.

Quantorfixierte Prädikatoren können ohne weiteres unter alle geeigneten logischen Gesetze subsumiert werden. So können wir etwa zeigen, dass die einmal quantorfixierten zweistelligen Relationen $(\forall y)\mathbf{R}(x, y)$ und $(\exists y)\ \mathbf{R}(x,y)$ in der Beziehung der Implikation, die Prädikatoren $(\exists y\in)\ \mathbf{R}(x, y)$ und $(\forall y) \sim\mathbf{R}(x, y)$ zueinander kontradiktorisch sind. Diese Sachverhalte lassen sich unter das logische Verkettungsgesetz $\mathbb{CJD}$ subsumieren, und wir können den folgenden Schluss ziehen:

Weil gilt

$(\forall y)\mathbf{R}(x, y) \rightarrow (\exists y)\ \mathbf{R}(x, y)]$ – Subsumtionsprämisse 1

und weil gilt

$(\exists y\in)\ \mathbf{R}(x, y) \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail (\forall y) \sim\mathbf{R}(x, y)$, – Subsumtionsprämisse 2

gilt aufgrund des Verkettungsgesetzes

$[(p \rightarrow q)\ \&\ (q \rightarrowtail\!\!\!\!\leftarrowtail r)] \rightarrow (p \uparrow r)$ – Gesetzesprämisse

die Konklusion

$(\forall y)\ \mathbf{R}(x, y)\ \uparrow\ (\forall y) \sim\mathbf{R}(x, y)]$[154]

4.3.10. Gesetze der „Quantorenverteilung“ und „Quantorenverschiebung“

Es gibt noch zwei spezielle Arten allgemeingültiger prädikatenlogistischer Ausdrücke: sie tragen die Namen „Gesetze der Quantorenverteilung“ und „Gesetze der Quantorenverschiebung“.

4.3.10.1. Gesetze der Quantorenverteilung

Die so genannten Gesetze der **„Quantorenverteilung“** haben im Gegensatz zu den Ausdrücken des SFG einen genuin logischen Gehalt; sie drücken – begriffsschriftlich abgeschwächt – einen logischen Zusammenhang aus (es sind spezielle Fregerelationsgesetze); es geht darum,

was bei $\mathfrak{Q}_1(Fx \oplus Gx)$ für $\mathfrak{Q}_2(Fx)$ und $\mathfrak{Q}_3(Gx)$ folgt,
was bei $\mathfrak{Q}_1(Fx \oplus Gx)$ und $\mathfrak{Q}_2(Fx)$ für $\mathfrak{Q}_3(Gx)$
was bei $\mathfrak{Q}_1(Fx \oplus Gx)$ und $\mathfrak{Q}_3(Gx)$ für $\mathfrak{Q}_2(Fx)$ folgt.

Da wir den drei involvierten Aussageformen die ihnen eineindeutig entsprechenden Fregerelationen zuordnen können, ist es mit den im ersten Teil entwickelten Verfahren leicht, die logischen Beziehungen dieser drei logischen Formen zu bestimmen.

Beispiel 1: Die Aussageformen $\forall x(Fx\ \&\ Gx)$, $\forall x Fx$ und $\forall x Gx$ entsprechen der Reihe nach den Fregerelationen $(1000)(Fx, Gx)$, $(\circ\circ 00)(Fx, Gx)$ und $(\circ 0 \circ 0)(Fx, Gx)$; es gelten die Fregerelationsgesetze

$$\forall x(Fx\ \&\ Gx) \leftrightarrow (\forall x Fx\ \&\ \forall x Gx)$$

$$\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x Fx$$

$$\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x Gx$$

Die begriffsschriftliche Abschwächung dieser Fregerelationsgesetze ergibt die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formeln:

$$(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \Leftrightarrow [(\forall x)Fx\ \&\ (\forall x)Gx]$$
$$(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \Rightarrow (\forall x)Fx$$
$$(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \Rightarrow (\forall x)Gx$$

Diese logischen Gesetzeszusammenhänge können dann geeigneten logischen Gesetzen subsumiert werden, etwa folgt aus $\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \forall x Fx$ und $\forall x Fx \rightarrow \exists x Fx$ nach dem Verkettungsgesetz $\mathbb{CCC}$ das Fregerelationsgesetz $\forall x(Fx\ \&\ Gx) \rightarrow \exists x Fx$ [damit die Allgemeingültigkeit der Aussageform $\forall x(Fx\ \&\ Gx) \Rightarrow \exists x Fx$]; aus $(\forall x)(Fx\ \&\ Gx) \leftrightarrow [(\forall x)Fx\ \&\ (\forall x)Gx]$ und $[\forall x Fx\ \&\ \forall x Gx] \rightarrow [\forall x Fx\ \triangledown\ \forall x Gx]$ folgt nach dem Verkettungsgesetz $\mathbb{ECE}$ das logische

Gesetz $\forall x(Fx \,\&\, Gx) \rightarrow (\forall x Fx \triangledown \forall x Gx)$ — allgemeingültig ist also die prädikatenlogistische Aussageform $\forall x(Fx \,\&\, Gx) \Rightarrow (\forall x Fx \triangledown \forall x Gx)$. Usw.

Beispiel 2: $\forall x\,(Fx \triangledown Gx) \triangleq (\circ\circ\circ 0)(Fx, Gx)$; $(\exists x Fx \triangledown \exists x Gx) \triangleq (\circ\circ\bullet\bullet\smile\circ\bullet\circ\bullet)(Fx, Gx)$[155]; es gilt das logische Gesetz $\forall x\,(Fx \triangledown Gx) \rightarrow (\exists x Fx \triangledown \exists x Gx)$ und die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formel $\forall x\,(Fx \triangledown Gx) \Rightarrow (\exists x Fx \triangledown \exists x Gx)$.

Beispiel 3: $\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx) \triangleq (\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$; $(\exists x \sim Fx \triangledown \exists x Gx) \triangleq (\bullet\bullet\circ\circ\smile\circ\bullet\circ\bullet)(Fx, Gx)$; es gilt das logische Gesetz $\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx) \rightarrow (\exists x \sim Fx \triangledown \exists x Gx)$ und die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formel $\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx) \Rightarrow (\exists x \sim Fx \triangledown \exists x Gx)$.

Beispiel 4: $\forall x(Fx \triangledown Gx) \triangleq (\circ\circ\circ 0)(Fx, Gx)$; $\forall x \sim Gx \triangleq (0\circ 0\circ)(Fx, Gx)$; $\forall x Fx \triangleq (\circ\circ 00)(Fx, Gx)$; wegen $[\forall x(Fx \triangledown Gx) \,\&\, \forall x \sim Gx] \triangleq (0100)(Fx, Gx)$ erhalten wir das logische Gesetz $[\forall x(Fx \triangledown Gx) \,\&\, \forall x \sim Gx] \rightarrow \forall x Fx$ und die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formel $[\forall x(Fx \triangledown Gx) \,\&\, \forall x \sim Gx] \Rightarrow \forall x Fx$.

Beispiel 5: $\forall x(Fx \Rightarrow Gx) \triangleq (\circ 0\circ\circ)(Fx, Gx)$; $\forall x Fx \triangleq (\circ\circ 00)(Fx, Gx)$; $[\forall x(Fx \Rightarrow Gx) \,\&\, (\forall x)Fx] \triangleq (1000)(Fx, Gx)$; $\forall x Gx \triangleq (\circ 0\circ 0)(Fx, Gx)$; es gilt also das logische Gesetz $[\forall x(Fx \Rightarrow Gx) \,\&\, \forall x Fx] \rightarrow \forall x Gx$ und die prädikatenlogistische Aussageform $[\forall x(Fx \Rightarrow Gx) \,\&\, \forall x Fx] \Rightarrow \forall x Gx$ ist allgemeingültig.

Wir können auf diese Weise beliebig viele „Gesetze der „Quantorenverteilung“ konstruieren; die involvierten Fregerelationen können dabei von beliebiger Komplexität sein.

4.3.10.2. Gesetze der Quantorenverschiebung

Die „moderne Logik“ präsentiert außerdem einen speziellen Typ prädikatenlogistischer Formeln, die sowohl Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen (A, B,…) als auch Beliebig-Element-Zeichen für Prädikatoren (Fx, Gx,…) enthalten; diese Formeln werden als „Gesetze der Quantorenverschiebung“ vorgestellt, ihre generelle Ausdrucksform ist

$$\mathbf{(A \oplus \mathfrak{Q}_1 x\, Fx) \ominus \mathfrak{Q}_2 (A \otimes Fx)}$$

Es handelt sich um **gemischte Aussageformen**[156], die für jede kombinierte Wahl einer wahrheitswertdefiniten Aussage $\mathfrak{A}$ für A und eines konkreten Prädikates $\mathfrak{F}$ für F zu einer wahrheitswertdefiniten Aussage werden.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\mathfrak{A}}_{\text{Aussage}} \quad \oplus \quad \underbrace{\mathfrak{Q}_1 x \mathfrak{F}x)}_{\text{Erfüllbarkeitsaussage}}}_{\text{Gedankengefügeaussage}} \quad \ominus \quad \underbrace{\mathfrak{Q}_2 \quad \underbrace{(\mathfrak{A} \quad \otimes \quad \mathfrak{F}x)}_{\text{Gedankengefügeaussageform}}}_{\text{Erfüllbarkeitsaussage}}}_{\text{Gedankengefügeaussage}}$$

[157]

Diese Gesetze bringen keinerlei logischen Zusammenhang zwischen irgendwelchen Aussagen A und Prädikatoren Fx zum Ausdruck; die Aussageformen A und $\mathfrak{Q}_1 x Fx$ erhalten ihre Werte ganz unabhängig von einander; es gibt deshalb für $A \oplus \mathfrak{Q}_1 x Fx$ wie für die Aussageform $A \oplus B$ alle vier Wahrheitswertkombinationen; damit ist der Wahrheitswert von $(A \oplus \mathfrak{Q}_1 x\, Fx)$ „wahrheitsfunktional“ festgelegt – je nachdem, was das Gedankengefüge $\oplus$ behauptet, ist die Gedankengefügeaussage wahr. Durch jede Wahl einer konkreten Aussage für A und für jede Wahl eines konkreten Prädikats für F steht der Wahrheitswert von $(A \oplus \mathfrak{Q}_1 x\, Fx)$ fest. Jede nur mögliche Ersetzung von A und Fx führt auf genau eine der Wahrheitswertkombinationen:

$$\mathcal{W}(A) \frown \mathcal{W}(\mathfrak{Q}_1 xFx)$$
$$\mathcal{W}(A) \frown \mathcal{F}(\mathfrak{Q}_1 xFx)$$
$$\mathcal{F}(A) \frown \mathcal{W}(\mathfrak{Q}_1 xFx)$$
$$\mathcal{F}(A) \frown \mathcal{F}(\mathfrak{Q}_1 xFx).$$

Ein logischer Zusammenhang kommt erst dadurch ins Spiel, dass die Bedeutung der Quantifikation $\mathfrak{Q}_1$xFx festlegt, ob der Wahrheitswert des Teilausdrucks $\mathfrak{Q}_2$x(A⊗Fx) durch eine Wahl von A und $\mathfrak{Q}_1$xFx überhaupt festgelegt ist. Diese Abhängigkeit sei am Beispiel (A⊕∀x Fx) ⊖ ∀x (A ⊗Fx) erläutert:

Ist ∀x Fx wahr für ein Prädikat F, dann ist Fx für jede Wahl von x wahr, folglich kann bei wahrem ∀x Fx der Wahrheitswert von ∀x (A ⊗Fx) für jeden Wert von A bestimmt werden. Ist ∀x Fx hingegen falsch, dann ist Fx zumindest für ein x falsch und es ist ungewiss, ob Fx für jedes x falsch ist. Gilt für einen gegebenen Wert von A: von $\mathfrak{w}$(A) demnach: ($\mathfrak{w}$(A)⊗$\mathcal{F}$ ist $\mathcal{W}$) und ebenso ($\mathfrak{w}$(A) ⊗ $\mathcal{W}$ ist $\mathcal{F}$), kann der Wahrheitswert von ∀x(A⊗Fx) nicht bestimmt werden, weil nicht feststeht, ob Fx immer falsch, ob also ∀x(A⊗Fx) wahr ist. Bei ∀x Fx ist der Wahrheitswert von ∀x(A⊗Fx) für jene Gedankengefüge nicht bestimmt, bei denen entweder die Wahrheitswertkombination $\mathcal{W}\frown\mathcal{F}$ mit $\mathcal{W}$ und die Wahrheitswertkombination $\mathcal{W}\frown\mathcal{W}$ mit $\mathcal{F}$ bestimmt ist (die Gedankengefüge **D**, **G**, **J** und **L**), oder bei denen die Wahrheitswertkombination $\mathcal{F}\frown\mathcal{F}$ mit $\mathcal{W}$ und die Wahrheitswertkombination $\mathcal{F}\frown\mathcal{W}$ mit $\mathcal{F}$ bestimmt ist (die Gedankengefüge **B**, **E**, **G** und **X**). Für alle anderen Gedankengefüge ∀x(A⊗Fx) gibt es für jeden Wert von A und ∀x Fx für die gesamte Formel (A⊕∀x Fx) ⊖ ∀x (A ⊗ Fx) einen Wahrheitswert; für ⊕ und ⊖ können alle Gedankengefüge gewählt werden. Soll die Formel (A⊕∀x Fx) ⊖ ∀x (A ⊗Fx) jedoch allgemeingültig sein, gibt es für die Wahl von ⊖ Restriktionen:

Das Gedankengefüge ⊖ wird den beiden Aussageformen (A⊕∀x Fx) und ∀x (A ⊗Fx) prädiziert; für diese beiden Aussageformen gibt es – anders als für die Aussageformen A und ∀x Fx – nicht alle nur möglichen Wahrheitswertkombinationen. Die folgende Tabelle zeigt, wie die Wahrheitswerte von (A ▽ ∀x Fx) bzw. (A ⇒ ∀x Fx) und ∀x(A▽Fx) von der Wahrheitswerten von A und ∀x Fx abhängen, und dass sich aufgrund dieser Abhängigkeit für (A⊕∀x Fx) und ∀x (A ⊗Fx) nicht alle Wahrheitswertkombinationen bestimmt sind:

A	∀x Fx	(A ▽ ∀x Fx)	(A ⇒ ∀x Fx)	∀x(A▽Fx)
$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$
$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$

Die Aussageformen (A▽∀x Fx) und ∀x (A ▽Fx) haben immer denselben Wahrheitswert; für alle Gedankengefüge ⊖, die zumindest die Wahrheitswertkombinationen $\mathcal{W}\frown\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}\frown\mathcal{F}$ beide nicht ausschließen (für **V**, **C**, **B** und **E**), ist demnach die Aussageform (A▽∀x Fx) ⊖ ∀x (A ▽Fx) allgemeingültig. Ebenso ist die Allgemeingültigkeit der prädikatenlogistischen Formeln (A⇒∀x Fx) ▽ ∀x (A ▽Fx) und (A⇒∀x Fx) ▽ ∀x (A ▽Fx) ersichtlich.

Die folgende Tabelle präsentiert alle möglichen Abhängigkeiten, die zwischen $\mathfrak{Q}_1$xFx und $\mathfrak{Q}_2$x(A ⊗ Fx) bestehen:

	∃xFx		**∃x~Fx**	
	$\mathcal{W}$ ∃xFx	$\mathcal{F}$ ∀x~Fx	$\mathcal{W}$ ∃x~Fx	$\mathcal{F}$ ∀xFx
∀x (A ⊕ Fx)	$\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{W} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{F} = \mathcal{F}$ Ob Fx für ein x falsch wird, ist ungewiss, deshalb ist ungewiss, ob ∀x (A ⊕ Fx) wahr oder falsch ist Unentscheidbar sind: **C**, **E**, **H**, **K** **A**, **G**, **J**, **M**	Fx ist immer falsch, die Aussageform (A ⊕ Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert und ∀x (A ⊕ Fx) ist für jedes Gedankengefüge wahrheitswertdefinit.	$\mathfrak{w}$(A)⊕$\mathcal{F} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}$(A)⊕$\mathcal{W} = \mathcal{F}$ Ob Fx für zumindest ein x wahr wird, ist ungewiss, deshalb ist nicht entscheidbar, ob ∀x (A ⊕ Fx) falsch wird. Unentscheidbar sind: **D**, **G**, **J**, **L** **B**, **E**, **G**, **X**	Fx ist immer wahr — (A ⊕ Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.
	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$
∃x (A ⊕ Fx)	$\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{W} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{F} = \mathcal{W}$ Es ist ungewiss, ob Fx falsch sein kann, ob also ∃x (A ⊕ Fx) wahr sein kann. Unentscheidbar sind: **D**, **G**, **J**, **L** **B**, **E**, **G**, **X**	Fx ist immer falsch, die Aussageform (A ⊕ Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.	$\mathfrak{w}$(A)⊕$\mathcal{F} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}$(A)⊕$\mathcal{W} = \mathcal{W}$ Ob Fx für zumindest ein x wahr wird, ist ungewiss, deshalb ist nicht entscheidbar, ob ∀x (A ⊕ Fx) wahr ist. Unentscheidbar sind: **C**, **E**, **H**, **K** **A**, **G**, **J**, **M**	Fx ist immer wahr, (A⊕Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.
	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$
∀x (A ⊕ ~Fx)	$\mathfrak{w}$(A)⊕$\mathcal{F} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}$(A)⊕$\mathcal{W} = \mathcal{F}$ Es ist ungewiss, ob Fx falsch sein kann, ob ~Fx wahr und damit ∀x (A ⊕ ~Fx) falsch ist. Unentscheidbar sind: **C**, **E**, **H**, **K** **A**, **G**, **J**, **M**	Alle x sind ~F, A ⊕ ~Fx hat für jede Einsetzung einen Wert.	$\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{W} = \mathcal{W}$ $\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{F} = \mathcal{F}$ Es ist ungewiss, ob es ein x gibt, dem F zukommt, ob also ~Fx falsch sein kann und damit ∀x (A ⊕ ~Fx) falsch. Unentscheidbar sind: **C**, **E**, **H**, **K** **A**, **G**, **J**, **M**	Fx ist immer wahr, (A⊕Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.
	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$
∃x (A ⊕ ~Fx)	$\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{F} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{W} = \mathcal{W}$ Es ist ungewiss, ob Fx falsch sein kann, ob ~Fx wahr und damit ∃x (A ⊕ ~Fx) falsch ist. Unentscheidbar sind: **C**, **E**, **H**, **K** **A**, **G**, **J**, **M**	Alle x sind ~F, A ⊕ ~Fx hat für jede Einsetzung einen Wert.	$\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{W} = \mathcal{F}$ $\mathfrak{w}$(A) ⊕ $\mathcal{F} = \mathcal{W}$ Es ist ungewiss, ob ~Fx einmal falsch ist, deshalb ist ungewiss, ob ∃x (A ⊕ ~Fx) wahr ist.. Unentscheidbar sind: **D**, **G**, **J**, **L** **B**, **E**, **G**, **X**	Fx ist immer wahr, (A⊕Fx) hat also für jede Einsetzung einen Wert.

Es können alle nur möglichen „Gesetze des Quantorenverschiebung“ systematisch hergeleitet werden: zuerst ist zu prüfen, für welche Gedankengefüge ⊗ der Ausdruck $\mathfrak{Q}_2$x(A⊗Fx) bei gegebenen $\mathfrak{Q}_1$xFx überhaupt bestimmt ist; dann muss, wie angegeben, untersucht werden, welche Wahrheitswerte die Ausdrücke A⊕$\mathfrak{Q}_1$xFx und $\mathfrak{Q}_2$x(A⊗Fx) für jede Wahrheitswertkombination von A und $\mathfrak{Q}_1$xFx annehmen, und schließlich kann dann festgestellt werden, für welche Gedankengefüge ⊖ die Formel (A⊕$\mathfrak{Q}_1$xFx) ⊖ $\mathfrak{Q}_2$x(A⊗Fx) allgemeingültig wird. Diese so genannten „Gesetze der

Quantorenverschiebung“ betreffen aber keine neuen, interessanten logischen Zusammenhänge, vor allem keine Zusammenhänge zwischen irgendwelchen Aussagen A und Prädikatoren Fx; der triviale logische Gehalt, den diese Gesetze ausdrücken, besteht darin, dass für jede Ersetzung von F bei ∀xFx der Prädikator Fx für alle x bestimmt ist, und dass bei ∃x Fx der Ausdruck Fx nicht für alle x bestimmt ist.

4.3.11. Zusammenfassung: die Arten prädikatenlogistischer Ausdrücke und ihre Entscheidbarkeit

Ein Teil der prädikatenlogistischen Formeln ist SFG-analog; in die Ausdrücke von Fregegesetzen werden die „Aussagevariablen“ durch irgendwelche prädikatenlogistischen *Aussageformen* oder Erfüllbarkeitsaussagen ersetzt; Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit der SFG-Formeln bleiben erhalten. Diese SFG-analogen prädikatenlogistischen Formeln lassen sich wie die SFG-Formeln beliebig expandieren und Gesetzen des SFG subsumieren. Bei diesen Bildungen dürfen nur „Prädikatvariablen“ verwendet werden. Daneben gibt es prädikatenlogistische Ausdrücke, die auf logische Formen und logische Gesetze verweisen, die – außer in dem Falle, dass in kontradiktorischen Verhältnissen stehende logische Formen ausgeschlossen werden – nicht aus SFG-Formeln gewonnen werden können, und für die es auch keine „wahrheitsfunktionalen“, SFG-analogen Entscheidungsverfahren gibt. In folgender Tabelle versuche ich einen Überblick über diese Ausdrücke zu geben:

prädikatenlogistischer Ausdruck		Ausdruck, der aus einer Ersetzung der „Aussagevariablen“ im Fregegesetz **A ⇒ (B⇒A)** resultiert	Bewertung des resultierenden Ausdrucks
beliebige Prädikatoren	Fx, Gx, Hx,…	Fx ≎ A; Gx ≎ B: (A1) Fx ⇒ (Gx ⇒ Fx)	Ausdruck (A1) ist in zweifacher Weise unvollständig: Da weder Fx und Gx, noch Fx ⇒ (Gx ⇒ Fx) bereits Aussageformen darstellen, ist immer implizit die Allgemeingültigkeit dieser Formeln behauptet: also (A1') ∀x [Fx ⇒ (Gx ⇒ Fx)]; von dieser Erfüllbarkeitsaussageform (A1') wird die Allgemeingültigkeit im Bereich der Prädikate behauptet: (A1'') **∀F,G** {∀x [Fx ⇒ (Gx ⇒ Fx)]}
beliebige Gedankengefügeprädikatoren	Fx⊕Gx; Fx⊕(Gx⊖Hx); usw.	Fx ▽ Gx ≎ A; Fx⇓Hx ≎ B: (A2) (Fx ▽ Gx) ⇒ [(Fx⇓Hx) ⇒(Fx ▽ Gx)]	Wie der Ausdruck (A1) zweifach unvollständig; gemeint ist die Allgemeingültigkeitsbehauptung (A2'') **∀F,G,H** {∀x [(Fx ▽ Gx) ⇒ [(Fx⇓Hx) ⇒ (Fx ▽ Gx)]}]
beliebige quantorfixierte Prädikatoren	($\mathfrak{Q}$y) **R**(x,y); ($\mathfrak{Q}_1$y $\mathfrak{Q}_2$z) **R** (x,y,z), usw.	(∀y) $\mathbf{R}_1$(x,y) ≎ A ; (∃y ∀z) $\mathbf{R}_2$(x,y,z) ≎ B : (A3) [(∀y) $\mathbf{R}_1$(x,y)] ⇒ {[(∃y ∀z) $\mathbf{R}_2$(x,y,z)] ⇒ [(∀y) $\mathbf{R}_1$(x,y)]}	Auch hier besteht eine doppelte Unvollständigkeit, die erst im Ausdruck (A3'') beseitigt ist: (A3'') ∀$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ {∀x [(∀y) $\mathbf{R}_1$(x,y)] ⇒ {[(∃y ∀z) $\mathbf{R}_2$(x,y,z)] ⇒ [(∀y) $\mathbf{R}_1$(x,y)]}}

Es können dann auch durch Gedankengefüge „verbundene“ quantorfixierte Prädikatoren in Fregegesetze eingesetzt werden, eben so wie alle begriffsschriftlichen Darstellungen der folgenden logischen Formen und Gesetze; diese Ausdrücke sind ja stets Aussageformen, die bei geeigneten Variablenersetzungen zu wahrheitswertdefiniten Aussage werden oder wahrheitswertdefinite Gesetzesaussagen; die stets involvierte Quantifikation im Bereich der Prädikate ist zu beachten. Die Bezeichnungen beliebiger Prädikatoren können in diesen Formeln immer durch Bezeichnungen quantorfixierter Prädikatoren ersetzt werden. Es können so beliebig viele und beliebig komplexe SFG-analoge prädikatenlogistische Formeln konstruiert werden; trotz ihres „beeindruckenden“ Aussehens sind diese Formeln logisch bedeutungslos, ihr ganzer Gehalt beschränkt sich, wie der der allgemeingültigen Ausdrücke der „Aussagenlogik“, auf die Behauptung, dass eine Aussage nicht zugleich wahr und falsch sein kann.

Die prädikatenlogistischen Ausdrücke, die auf logische Formen verweisen, sind durchweg keine „Wahrheitsfunktionen“ und die begriffsschriftlich dargelegten logischen Gesetze können nur durch logische Erwägungen, d.h. durch die Beachtung der Geltungsbedingungen der betreffenden logischen Formen bewiesen werden[158]. In diesen Ausdrücken können die Ausdrücke einstelliger Prädikatoren immer durch Ausdrücke von Prädikatoren beliebiger Stelligkeit ersetzt werden, wobei diese Prädikatoren quantorfixiert sein können oder nicht; es werden dann eben nur besondere Fälle der entsprechenden logischen Formen und Gesetze dargestellt. Alle begriffsschriftliche Darstellungen dieser logischen Gesetze sind allgemeingültige Aussageformen (allgemeingültig im Bereich der Prädikate).

1) Wir haben zunächst die *elementaren Quantoren*: die Ausdrücke „$\forall x\, Px$“, „$\sim\exists(x)\,P(x)$“, usw. die logische Formen benennen (Beziehungen zwischen den Begriffen die den Bezugsbereich der Gegenstände); in der Prädikatenlogistik erscheinen diese Ausdrücke als erfüllbare Erfüllbarkeitsaussageformen (z.B. *es gibt Prädikate P, für welche die Aussageform $\forall x Px$ wahr wird*, usw.)

2) Es gibt die begriffsschriftlichen Abschwächungen der *Gesetze des Quantorenquadrats*, z.B. das Gesetz: $(\forall x\, Px) \Uparrow (\forall x\, \sim Px)$; in der Prädikatenlogistik erscheinen diese Ausdrücke als allgemeingültige Aussageformen (z.B. Für jede Ersetzung der „Prädikatvariablen“ P werden die beiden Aussageformen $(\forall x\, Px)$ und $(\forall x\, \sim Px)$ nicht zugleich wahr.

3) Die elementaren Fregerelationen haben die Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$, die komplexen Fregerelationen haben die Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)$ oder $[\mathfrak{Q}_1x(Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x(Fx \otimes Gx)] \oslash [\mathfrak{Q}_3x(Fx \odot Gx) \ominus \mathfrak{Q}_4x(Fx \circledast Gx)]$, usw.; sie erscheinen (mit Ausnahme der Ausdrücke, die auf die Allrelation verweisen) in der Prädikatenlogistik als erfüllbare, nicht allgemeingültige Aussageformen; die Fregerelationsgesetze (logische Beziehungen zwischen Fregerelationen) erscheinen als allgemeingültige Aussageformen, Ausdrücke, die auf die leere logische Relation verweisen erscheinen als nicht erfüllbare Aussageformen.

4) Die so genannten „Gesetze der Quantorenverteilung“ sind spezielle Fregerelationsgesetze.

5) Es gibt schließlich noch die „Gesetze der Quantorenverschiebung“, Aussageformen die neben Prädikatoren auch Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen enthalten, deren Allgemeingültigkeit auf die oben skizzierte Weise nachgewiesen oder widerlegt werden kann. Sie allenfalls triviale logische Bedeutung.

Andere „wohlgeformte“ und sinnvolle Ausdrücke der Prädikatenlogistik gibt es nicht; von allen diesen Aussageformen läst sich Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und Nichterfüllbarkeit erweisen, entweder durch Herleitung aus einem Fregegesetz oder durch Bezug auf die logischen Sachverhalte, auf die ein prädikatenlogistischer Ausdruck eineindeutig verweist; diese Bedeutung ist immer durch die festgelegten Bedeutungen der prädikatenlogistischen Zeichen (Gedankengefüge, Prädikatoren, Quantoren) eindeutig vorgegeben, sie darf allerdings nicht durch die gebräuchlichen logischen Missdeutungen der Gedankengefüge und Fregerelationen verwischt werden. Die sachgerechte Beurteilung der prädikatenlogistischen Ausdrücke ist nur möglich auf dem Boden des im ersten Teil dieser Arbeit entwickelten Begriffs der logischen Formen, der eine präzise und vollständige Konstruktion und Kenntnis aller logischen Formen und den Nachweis der zwischen ihnen bestehenden logischen Beziehungen (das sind die logischen Gesetze) erlaubt.

Anmerkungen zu Teil II, Kapitel 4

1 Bedingungslogische Gesetzeszusammenhänge werden von **FREGE** meistens „ursächliche Zusammenhänge“ oder „ursächliche Verknüpfungen“ genannt; vgl. etwa BS 6, 23, 28, 33.

2 „Die Verbindung von Bedingung und Folge erscheint bei mir in zwei Bestandteile zerlegt, von denen der eine die Allgemeinheit ist, bezeichnet mittels lateinischer Buchstaben, während der andere durch das Zeichen ‚$\Rightarrow$‘ bezeichnet wird. Diese Zerlegung ist bei Herrn **PEANO** nicht deutlich erkennbar, weil beides: der Gebrauch“ der *lettres variables* und des Zeichen ‚$\supset$‘ zusammen erklärt wird.“ (Def 165)

3 Die Anführungszeichen sollen die Auffassung zurückweisen, es könne eine Logik geben, die nicht „Prädikatenlogik“ wäre, in der also noch keine Prädikate/Begriffe und die logischen Beziehungen zwischen Prädikaten/Begriffen berücksichtigt sind. Im Zusammenhang mit **FREGE**s Logikentwurf kann erst die „Prädikatenlogik“ mit Fug und Recht als Logik angesprochen werden – denn erst im Rahmen der Prädikatenlogik, keinesfalls schon im Rahmen der „Aussagenlogik“ (SFG), berücksichtigt **FREGE** logische Formen – so unzureichend dies auch jetzt geschieht.

Ich nenne die in der Tradition **FREGE**s stehende, an das System der Gedankengefüge anknüpfende „Prädikatenlogik“ in Folgenden *Prädikatenlogistik*.

4 Siehe Teil II, Abschnitt 1.3.3. Die Reifikation und Verabsolutierung der Gedanken. Freges Psychologie des Gedankenfassens

5 *Jede* Feststellung hat beispielsweise, welches auch ihr besonderer Inhalt sei, die allgemeine Form P(a) – ein (Ousia-, Eigenschafts-, Zustands-)Begriff kommt einem Gegenstand a zu.

6 „Einen Satz wie ‚Zwei ist eine Primzahl‘ können wir in zwei wesentlich verschiedene Bestandteile zerlegen: in ‚Zwei‘ und ‚ist eine Primzahl‘.“ (LPM 191f; auch BS 15f)

7 Diese Auffassung steht im Widerspruch zur Freges Theorie von Sinn und Bedeutung$_F$, in welcher drei grundlegende Arten von Ausdrücken – Eigennamen, Begriffswörter und Sätze – unterschieden werden; im Rahmen des Begriff-Gegenstand-Dualismus werden die Sätze zu Eigennamen der beiden Wahrheitswerte, die **FREGE** irrtümlich nicht für Prädikate, sondern für Gegenstände hält. Damit gibt **FREGE** die Unterscheidung zwischen benennenden Ausdrücken (Begriffswörter, Eigennamen) und behauptenden Ausdrücken (Urteile, Sätze) preis, die zu jenen Einsichten gehört, die den Anfang der theoretischen Logik markieren (**PLATON**, *Sophistes* 262bff; **ARISTOTELES**, De Interpretatione, 3, 16b, 34 – 17a 3; 17a 11f); auch Sätze werden von **FREGE** jetzt als benennend aufgefasst; es gibt für ihn nur benennende Ausdrücke.

8 „Der Begriff – wie ich das Wort verstehe – ist prädikativ.“ (BG 67 [193]; auch EL 87)

9 **I. ANGELELLI** nennt **FREGE**s „Idee der Ungesättigtheit“ faszinierend, suggestiv und originell – aber ganz hoffnungslos (Freges Ort in der Begriffsgeschichte, S. 11). Die Ersetzung begrifflicher Klarheit durch eine schillernde Metaphorik rechtfertigt **FREGE** wie üblich: die Zusammenhänge seien unbestimmbar, undefinierbar, „logisch einfach“, auf mehr als ahnungsvolle Intuitionen könne nicht gebaut werden. „ ‚Abgeschlossen‘ und ‚ungesättigt‘ sind zwar nur bildliche Ausdrücke, aber ich will und kann ja hier nur Winke geben.“ (BG 80 [205])

10 An dieser Stelle postuliert **FREGE** einen eigenständigen Wirklichkeitsbereich der Begriffe – dies im Widerspruch zu seiner „Drei-Welten-Theorie“, in der er die Welt der physischen realen Dinge, die „Welt“ der psychisch-subjektiven Vorstellungen und die „Welt“ der objektiven „nicht-realen“ wahrheitswertdefiniten Gedanken unterscheidet; die nicht-wahrheitswertdefinitem Begriffe haben in keiner dieser drei „Welten“ Platz.

11 **FREGE** spricht ja vom Fallen oder der Subsumtion eines Gegenstandes unter einen Begriff (Brief an **HUSSERL**, XIX/3, 42).

12 Die Bedeutungen eines Ausdrucks im Sinne **FREGE**s (Bedeutung$_F$) stellt die realen Dinge und Sachverhalte dar, auf welche die sprachlichen Ausdrücke verweisen (Referenz als Bezug eines Ausdrucks auf Auersprachlich-Reales).

13 Wenn der Eigenname seiner Bedeutung$_F$ nach auf ein objektiv gegenständliches und relativ dauerhaftes Reales verweist, dann muss dies auch für das Begriffswort zutreffen; mit der Wirklichkeit, auf die die Begriffswörter verweisen, kann nicht eine andere Art von Wirklichkeit gemeint sein als die, die von „bedeutungsvollen“ Eigennamen gemeint wird. Denn nur dann ist eine Subsumtionsbeziehung von Gegenstand und dem, worauf das Begriffswort verweist, möglich, nur dann kann einem Satz, der eine solche Subsumtion behauptet, selber sowohl Sinn wie Bedeutung$_F$ zukommen. – Ein Widerspruch ergibt sich bei **FREGE** allerdings dadurch, dass er einerseits die Bedeutung$_F$ als etwas Abgeschlossenes, Selbständiges bezeichnet und dadurch mit seiner Bestimmung des Gegenstandseins konfundiert; die Begriffe (für **FREGE** ist die Bedeutung$_F$ eines Begriffswortes der Begriff selbst – (ASB 34); (BG [193ff]; Über Sinn und Bedeutung, 27, Fn.; Kl. Schriften 144)) hat er aber gerade durch die Unselbständigkeit definiert.

14 Nach **H. J. SCHNEIDER** hat sich **FREGE** bei der „formal-syntaktischen“ Analyse des Verhältnisses von Begriff und Gegenstand an der Frage orientiert „was ist am Ausdruck veränderlich, was bleibt konstant?“ (Begriffe als Gegenstände der Rede, S. 166f). In der *Begriffsschrift* lesen wir in diesem Sinne: „Wenn in einem Ausdrucke … ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen an einer oder an mehreren Stellen vorkommt, und wir denken es an allen oder einigen dieser Stellen durch Anderes, überall aber durch Dasselbe ersetzbar, so nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Teil des Ausdruckes Funktion, den ersetzbaren ihr Argument.“ (BS 16; auch KÜL 217) Die

Orientierung an angeblich veränderlichen und unveränderlichen Teilen des Ausdrucks erlaubt eben keine Unterscheidung von Gegenstand und Begriff, denn sowohl die Ausdrücke für Gegenstände wie für Begriffe können jeweils gleich bleibend bzw. veränderlich gehalten werden. Tatsächlich hat sich **FREGE** nie an solchen nur die Zeichenebene betreffenden Operationen orientiert, sondern an der alten Frage: „Von wem wird etwas ausgesagt? – Was ist ‚Subjekt'/Prädikand?", „Was wird ausgesagt? – Was ist Prädikat?" – so überzeugt er auch gewesen sein mag, mit der logisch grundlegenden und unverzichtbaren Unterscheidung von Subjekt/Prädikand und Prädikat als „unnützer Weitläufigkeit" „aufgeräumt" zu haben.

15 Wir müssen diese epistemologische Aussage ergänzen: es kann auch real, in ontologischer Betrachtung, keinen Gegenstand geben, der nicht mit anderen Gegenständen derselben Art einer bestimmten artgemäßen Gesetzmäßigkeit unterläge – und diese vielen Gegenständen gemeinsame Gesetzmäßigkeit wird durch die Begriffe widergespiegelt, diese objektiv allen derartigen Dingen innewohnende Gesetzmäßigkeit stellt die Bedeutung$_F$ der Begriffswörter dar.

16 Diese Behauptung zeigt, dass sich **FREGE** nie ernsthaft mit der *Synthesisfunktion der logischen Formen* befasst hat. Nur wenn das „Sehen", die verschiedenen Wahrnehmungsbilder in die umfassendere Tätigkeit begrifflich-logischer Bezugsetzung eingeordnet ist, kann ein Gegenstand als identisch und bestimmt erkannt werden. Die Wahrnehmung ist nie hinreichend, um die Erkenntnis identischer Gegenstände zu gewährleisten. Erst die umfassende logische Beziehungsbildung auf der Grundlage begrifflichen Wissens ermöglicht das „Sehen" *eines Gegenstandes*. **FREGE** schlägt die grundlegendsten Einsichten der Philosophie in den Wind.

17 „Es ist eigentümlich, dass **FREGE** fordert, ein Gefüge werde zusammengehalten, indem ein Unvollständiges und ein Vollständiges … einander ergänzen. Wechselseitige Ergänzung könnte besser so erklärt werden, dass alle einander ergänzenden Glieder erst in der Zusammenfügung ihre Vollständigkeit erlangen." (**HANS LENK**, Kritik der logischen Konstanten, S. 508) Dieser Einwand, der auf das Verhältnis der durch Gedankengefüge prädizierten „selbstständigen" Aussagen und der „ungesättigten" Gedankengefüge zielt, trifft generell **FREGE**s Verständnis von Gegenstand und Begriff.

18 **HANS HERMES**, Zur Begriffsschrift und zur Begründung der Arithmetik, Einleitung in **G.FREGE**, Nachgelassene Schriften, S.X)

Diese dualistische Konzeption alles Seienden ist nicht die einzige „Ontologie" **FREGE**s; er entwickelt vielmehr nacheinander drei mit einander unverträgliche Einteilungen des Seienden; sie entsprechen im großen Ganzen dem SFG, dem SFA und der fregeschen „Prädikatenlogik". In der ersten Theorie (der „**Dreiwelten-Theorie**") zerlegt er das Wirkliche in die „Welten" der physischen Gegenstände (das Thema der Naturwissenschaften), der „Vorstellungen" (für **FREGE** der erschöpfende Gegenstand der Psychologie) und der „ansich seienden" Gedanken (angeblich die Thematik der Logik); entsprechend dieser Theorie kann die Logik die ewig und unabhängig von denkenden Menschen bestehenden Gedanken nur mitsamt ihrem jeweiligen besonderen Gehalt (dem fregeschen „begrifflichen Inhalt", in dem Form und Inhalt der Gedanken/Urteile noch völlig ungeschieden sind) und ihrem Wahrheitswert *als gegeben* hinnehmen („fassen") und voraussetzen, was ja zum Charakter der Gedankengefüge als bestenfalls tautologischem Ausdruck des Fürwahrhaltens passt. In einer zweiten Theorie (der **Theorie von Sinn und Bedeutung$_F$**) unterscheidet er drei grundlegende Arten von Ausdrücken, die Eigennamen, die Begriffswörter und die Sätze, denen jeweils ein Sinn und eine Bedeutung$_F$ zugeordnet wird (was **FREGE** „Bedeutung" nennt ist die Referenz, der Realitätsbezug oder das Denotat eines Ausdrucks, daher Bedeutung$_F$; unter Bedeutung versteht man üblicherweise das, was **FREGE** Sinn nennt). Die Bedeutung$_F$ der Eigennamen sind die realen physischen Gegenstände selbst, der Sinn ist die vom subjektiven Standpunkt und vom perspektivischen Erscheinen des realen Gegenstandes abhängige Auffassung des realen Gegenstandes. Die Bedeutung$_F$ der Begriffswörter sollen die Begriffe selbst sein (über den Sinn der Begriffswörter weiß **FREGE** nichts zu sagen). Der Sinn der Sätze sollen die Gedanken als das den Menschen gemeinsame Wissen sein (in der „Dreiwelten"-Theorie sind die Gedanken hingegen ansich seiende, „objektive" Gegebenheiten, die den Subjekten wie physische Gegenstände „gegenübertreten"), und die Bedeutung$_F$ sollen die Wahrheitswerte sein (sie wären dann „Gegenstände" einer ganz neuen Art, die in der „Dreiwelten-Theorie" nicht vorkommen; die Bedeutung$_F$ der Sätze sind in Wirklichkeit nicht die Wahrheitswerte, sondern die objektiven Tatsachen (die objektiv bestehenden Sachverhalte) bzw. bei Sätzen, die Gesetze ausdrücken, die objektiv in der Realität wirkenden Gesetzmäßigkeiten). Jedenfalls entspricht diese theoretische Kehrtwendung dem System der Fregealgebra (SFA), wo wir es nicht mehr mit Aussagen zu tun haben, sondern nur mehr mit zwei „Wahrheitswerten" (richtiger: mit zwei Komplementärwerten), für die alle möglichen monadischen Abbildungen und binären (oder höherstelligen) Verknüpfungen gebildet werden. In der dritten **Theorie von Begriff und Gegenstand** schrumpft die Dreiheit der Ausdrücke Eigenname, Satz, Begriffswort zur dissoziativen Zweiheit Begriff und Gegenstand; jeder Ausdruck benennt nun entweder einen „abgeschlossenen Gegenstand" oder einen „ungesättigten Begriff". Die dritte Theorie entspricht dem fregeschen Missverständnis und der Konfusion von Prädikation und Abbildung/Funktion, die seiner „Prädikatenlogik" zu Grunde liegen.

19 Dass **FREGE** endliche, anzahlmäßig definite Mengen von Dingen wie die Menge der Monde des Planeten Jupiter, die an eine bestimmte Raum-Zeit-Stelle gebunden sind und wie die dinglichen Gegenstände der Ebene des Einzelnen angehören, den überzeitlichen, anzahlmäßig nicht definiten, durch echte Begriffe bestimmten Klassen (wie etwa die Klasse der Monde oder die Klasse der Planeten), die nicht an eine bestimmte Raum-Zeit-Stelle gebunden sind und der Ebene des Allgemeinen angehören, unterschiedslos als „Begriffe" betrachtet, ist einer von vielen Gründen für das Misslingen von **FREGE**s Versuchs einer sachgerechten, nichtzirkulären Bestimmung des Zahlbegriffs.

20 Es „besteht der Begriffsumfang nicht aus den Gegenständen, die ihm angehören… Der Begriffsumfang hat eben seinen Bestand im Begriffe, nicht in den Gegenständen, die ihm angehören; diese sind nicht seine Teile." (LPM 199; auch SVAL 111 [455]) – Es entgeht **FREGE** hier, dass es ein Widerspruch ist, wenn er einerseits die scharfe Begrenzung der Begriffe fordert, und andererseits den Bestand eines jeden Begriffs für unabhängig von Gegenständen erklärt. Die Abgrenzung der Begriffe wird durch das PNW normiert, welches die untrennbare Einheit von Begriff und Gegenstand vorausgesetzt; die Abgegrenztheit eines Begriffs P besteht darin, dass *von jedem Gegenstand* ent-

scheidbar ist, ob ihm dieser Begriff zukommt oder nicht: $P(x) \succ\!\!\prec \sim P(x)$; nur im Hinblick auf die Gegenstände, denen Begriffe zukommen, lassen sich Begriffe gegeneinander abgrenzen.

21 „Es-gibt-Sätze“ sind Sätze wie „Es gibt schwarze Löcher“, „Es gibt Nashörner“, „Es gibt keine Einhörner“, „Es gibt keine reellen Zahlen, deren Quadrat -4 beträgt“.

22 **FREGE** fordert einerseits von der Logik, sich nicht in grammatischen Distinktionen zu verlieren (er wirft dies pauschal der „hergebrachten Logik“ vor); er selbst versucht aber ständig, alle möglichen logischen Bestimmungen, etwa die Grundunterscheidung von Begriff und Gegenstand, alleine an grammatischen Unterschieden festzumachen; **FREGE** ist es, der einen exzessiven „Linguismus in der Logik“ praktiziert.

23 „Ich habe die Existenz Eigenschaft eines Begriffes genannt.“ (BG 73 [199]) Die Leerheit/„Nichtexistenz“ des Begriffs Einhorn bedeutet nicht, dass es diesen leeren Begriff (auf der Ebene des Sinns) nicht gibt, sondern dass es keinen Gegenstand gibt, dem der Begriff zukommt.

24 Die logischen Formen als Beziehungen aller jener Begriffe erster Stufe, die bestimmte Bedingungen erfüllen, stehen dann selber auch jeweils in bestimmten logischen Beziehungen.

25 Niemand sagt, dass der Begriff *Nashorn* existiert, sondern dass Gegenstände existieren, denen dieser Begriff zukommt.

26 Was veranlasst **FREGE**, zwar alle ausgedachten, phantastischen Dinge oder Personen wie den Heiligen Gral, Aladins Wunderlampe, den Odysseus oder Rumpelstilzchen als legitime Gegenstände wissenschaftlicher Untersuchung zu verwerfen, leere Begriffe, also Artbegriffe wie *Schlossgespenst*, *Vampir*, *Hobbit* oder *Erzengel* aber für wissenschaftlich zulässig zu erklären (SVAL 112 [456])? Es ist ungereimt, einen Wirklichkeitsbezug zwar für Gegenstände, nicht aber für Begriffe zu fordern. Einen Grund für **FREGE**s Gleichstellung der leeren und gehaltvollen Begriffe, neben **FREGE**s Unvermögen, die Bedeutung$_F$ von Begriffen zu erfassen, werden wir bald kennen lernen: die logischen Formen, die **FREGE** im Rahmen seiner „Prädikatenlogik“ konstruiert und begriffsschriftlich darstellt, und denen er durchweg eine Deutung gibt, die den durch ihn selbst festgelegten Bedeutungen seiner begriffsschriftlichen Zeichen widerspricht, wie etwa die so genannte „formale Implikation“ $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ sind sehr grobe Relationen, die auch gelten, wenn einer der Begriffe oder beide Begriffe leer sind.

27 In SB S.40 [25] betont **FREGE** gerade diesen Invariantencharakter der Identität: „Die Entdeckung, dass nicht jeden Morgen eine neue Sonne aufgeht, ist wohl eine der folgenreichsten in der Astronomie gewesen. Noch jetzt ist die Wiedererkennung eines kleinen Planeten oder eines Kometen nicht immer etwas Selbstverständliches.“ Im Gegensatz zum vorigen Zitat ist sich **FREGE** hier klar, dass Identität nichts „Logischeinfaches“, Unmittelbares und Selbstverständliches ist, sondern logische Synthesis, Anstrengung des Erkennens, voraussetzt.

28 „ ‚Identisch‘ ist ein zweistelliger Funktor.“ (**A.MENNE**: Einige Aspekte zum Thema ‚Sprache und Logik‘, S.172). Auch **H.WESSEL** spricht von dem „zweistelligen Prädikat der Identität“ (Logik, S. 231)

29 „Wenn gesagt wird ‚a und b sind identisch‘ (symbolisch a = b), so wird damit nicht ausgedrückt, dass die Relation der Identität zwischen zwei unterschiedlichen Objekten a und b besteht, sondern nur dass a und b zwei verschiedene Bezeichnungen („Termini“) für ein und dasselbe Objekt sind.“ (**MENNE**, ebd. S. 232) Aber eben diese verschiedenen Zeichen sind nicht identisch, sondern verschieden, jedoch bedeutungsgleich, wobei die Feststellung der Bedeutungsgleichheit die Identität des Bezeichneten voraussetzt und nicht etwa begründet!

30 Die Identität von Gegenständen ist auch in der beliebten Formel „a = a“ nicht begriffen; es kommt nicht zum Ausdruck, dass die Sichselbstgleichheit der Gegenstände *zugleich* besagt, dass jeder Gegenstand von *jedem anderen* Gegenstand verschieden ist.

31 „Durch das Argument wird die Funktion ergänzt; das, wozu sie ergänzt wird, nenne ich Wert der Funktion für das Argument.“ (GGA I, § 1; zit. 109) Für die als Funktionen missverstandenen Begriffe hieße das: der Gegenstand ergänzt das ihm zugeschriebene Prädikat zu einem Wahrheitswert-„Gegenstand“; der Begriff ist hier ein verschwindendes Moment einer mysteriösen Verwandlung von völlig unterschiedlichen „Gegenständen“ ineinander, es ist schleierhaft, wozu Begriffe dienen.

32 **FREGE** bestimmt Prädikanden (Subjekte) und Prädikate der beiden Sätze „Bei Plateae besiegten die Griechen die Perser“ und „Bei Plateae wurden die Perser von den Griechen besiegt“ nicht korrekt. Prädikate sind ihm nicht die zweistelligen Relationen „x besiegten bei Plateae die y“ und „x wurden bei Plateae von den y besiegt“, sondern die *einstelligen* Prädikate „x besiegten bei Plateae die Perser“ und „x wurden bei Plateae von den Griechen besiegt“. Für einstellige Prädikate kann überhaupt kein Passiv gebildet werden! Subjekt ist ihm im einen Satz die Griechen, im andere die Perser; Subjekt/Prädikand in seinem Beispielssatz sind aber Paare von Gegenständen, (die Griechen, die Perser), bzw. (die Perser, die Griechen).

33 Nun ist dieser Satz aber bedeutungsgleich dem Satz „Der Begriff $\mathfrak{P}$ kommt dem Gegenstand $\mathfrak{a}$ zu“ – ist hier ein Begriff plötzlich Subjekt des gleichbedeutenden Satzes? Tatsächlich haben wir in *beiden* Fällen eine zweistellige Relation zwischen einem Begriff und einem Gegenstand.

34 Da der Satz den Begriffen *Säugetier* und *Landbewohner* eine logische Relation zuschreibt, stellt nicht der Teilausdruck „sind Landbewohner“ das Prädikat dar; Prädikand ist das Paar dieser Begriffe, Prädikat ist die diesen Begriffen zukommende logische Relation.

35 Weil **FREGE** die Begriffe als angeblich „ungesättigt“ den Gegenständen gegenüber verselbstständigt, bestreitet er, dass sich die Ausdrücke „alle Wale“, „jeder (beliebige) Wal“ sich überhaupt auf Tiere bestimmter Art beziehen: „wenn man fragt, von welchen Tieren die Rede sei,

so kann man kein einziges aufweisen. Gesetzt, es liege ein Walfisch vor, so behauptet doch von diesem unser Satz nichts… Das Wort ‚Walfisch' benennt … kein Einzelwesen. Wenn man erwidert, allerdings sei nicht von einem einzelnen, bestimmten Gegenstande die Rede, wohl aber von einem unbestimmten, so meine ich, dass ‚unbestimmter Gegenstand' nur ein anderer Ausdruck für ‚Begriff' ist, und zwar ein schlechter, widerspruchsvoller." (GLA 61 [60f]) In gleicher Weise behauptet **Frege**, das Gesetz „alle Menschen sind sterblich" schließe in seine Geltung nicht den „Häuptling Akpanya" ein, von dem man „vielleicht noch nie gehört hat." (RH 188 [327]; vgl. auch SVAL 111 [454]) Das Begriffswort „Wal" bezeichnet jedes beliebig Wal-Einzelwesen, wie das Wort „Mensch" jeden beliebigen Menschen bezeichnet.

36 **Frege** vernachlässigt die Tatsache, dass es einerseits *benennende*, andererseits *behauptende* sprachliche Ausdrücke gibt, und meint, nur ein behauptender Ausdruck besitze einen Sinn; wenn ein Sachverhaltsausdruck (ein Beliebig-Element-Zeichen von Gegenständen enthaltender „grammatischer Teilsatz") keinen wahrheitswertdefiniten Gedanken ausdrücke, dann, so **Frege**, besage er überhaupt nichts, da man weder seine Wahrheit (Gültigkeit) noch seine Falschheit (Ungültigkeit) behaupten könne (GLG I-III, 296f). Auch **A. Menne** behauptet, benennende Ausdrücke seien „unbestimmt": „Unbestimmte Aussagen … zum Beispiel ‚es regnet' … sind unvollständig und ungenau und darum noch keine Aussagen." (Einführung in die Logik, S. 32) Der Ausdruck „es regnet" ist zwar keine Aussage, aber doch ein eindeutiger, von anderen Sachverhaltsausdrücken wie „es scheint die Sonne", „es donnert" usw. klar abgegrenzter *benennender* Sachverhaltsausdruck. Die Einsicht, dass die sprachlichen Ausdrücke teils benennend, teils behauptend sind, welche bei **Platon** ganz am Anfang der logischen Reflexion stand (*Sophistes* 262 b ff), wird von **Frege** ignoriert. – Diese falsche These, nach der nur behauptende Ausdrücke Sinn und Bedeutung$_F$ besitzen, steht freilich zu jener anderen fundamentalen These **Frege**s im Widerspruch, nach der die Bedeutung$_F$ der Sätze Wahrheitswert-Gegenstände sind, und nach der es überhaupt nur benennende Ausdrücke gibt; von einem Gegenstand kann man ja kaum behaupten, er sei wahr oder falsch.

37 Da dies voraussetzt, dass auch die Sachverhaltsausdrücke, die Teil solcher Sätze sind, sinnvoll sind, schwächt **Frege** seine ansonsten apodiktisch vorgetragene Behauptung der Sinnlosigkeit von Gesetzesaussagen in gewundener Weise ab: jetzt sind diese Ausdrücke nicht mehr sinnlos, sondern nur „nicht von jedem Sinn ganz entfernt" (GLG III-V, 315 [400]). Dieses ständige Sich-Widersprechen ist charakteristisch für **Frege**.

38 Über die beiden Sätze „Wenn *a* ist ein Mensch, so *a* sterblich ist" und „Wenn Napoleon ein Mensch ist, so Napoleon sterblich ist" meint **Frege**: „Der erste Satz drückt nicht wie der zweite ein Gedankengefüge aus, weil ‚*a ist ein Mensch*' ebenso wenig wie ‚*a ist sterblich*' einen Gedanken ausdrückt. wir haben hier eigentlich nur Satzteile, keine Sätze." (LA 171, Fn.)

Heinrich Scholz bestreitet insbesondere den logischen Gesetzen den Aussagecharakter – logische Sätze enthalten nicht nur Beliebig-Element-Zeichen für Individuen, sondern auch Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate. Er meint über das (falsche) logische Gesetz „Wenn F wenigstens einem x zukommt, so kommt F jedem x zu": „Es ist klar, dass diese Redeweise keine Aussage ist; denn die Entscheidung der Frage, ob sie etwas Wahres oder etwas Falsches ausdrückt, hängt zunächst einmal von dem vorgegebenen Individuenbereich ab, sodann, in jedem Falle, in welchem dieser Bereich nicht einzahlig ist, auch noch von der Eigenschaft, die durch ‚F' symbolisiert wird. Ohne diese Informationen kann auch ein absoluter Geist hier nichts entscheiden wollen." (Logik, Grammatik, Metaphysik, S. 187) Auch der Ausdruck des Nichtwiderspruchprinzips "Es gibt kein x, dem F zukommt und *nicht* zukommt." (ebd. 190) ist ihm noch keine wahrheitswertdefinite Aussage – weil angeblich die Rede von irgendwelchen, von beliebigen Prädikaten ohne Sinn sei.

Auch **Łukasiewicz** hält wahrheitswertdefinite logische Gesetzesaussagen für Aussageformen, die erst durch Variablenersetzung zu wahren Aussage gemacht werden müssen. Das wahre logische Verkettungsgesetz ‚wenn alles b a ist und alles a c ist, so ist alles b c' (syllogistischer Modus *Barbara*) wird ihn erst dann zu einer wahrheitswertdefiniten Aussage, wenn „für diese Variablen konstante Werte eingesetzt" werden. (Geschichte der Aussagenlogik, S. 114) Diese Gesetz macht über die 3 logischen Formen *alles b ist a*, *alles a ist c* und *alles b ist c* eine Aussage, indem es diesen logischen Sachverhalten die logische Relation [p, q, r $\mathbb{C}\mathbb{V}$] zuordnet – dies ist eine Aussage.

39 „Jede Konstante hat eine bestimmte Bedeutung. Die Variablen dagegen dienen zum Hinweis auf unbestimmte Gegenstände, Eigenschaften usw." (**Carnap**, Symbolische Logik, S. 16) – „Variable sind bedeutungsleere Zeichen, die nur dazu dienen, die Stellen anzuzeigen, an denen die bedeutungsvollen *Konstanten*, hier die Prädikate, einzusetzen sind." (**Lorenzen**, Formale Logik, S. 4f) – „Eine solche Variable wie ‚x' bedeutet selbst also gar nichts, sondern zeigt nur eine Leerstelle an, in die etwas eingesetzt werden kann… Die Ausdrücke, die fest stehen bleiben, also ihre feste Bedeutung behalten im Gegensatz zur Variablen, heißen *Konstanten*." (**Menne**, Einführung in die Logik, S. 9)

40 **Kondakow**, Wörterbuch der Logik, S.156

41 Es ergibt sich so die Ungereimtheit, dass das Gedankengefüge $\mathbf{C}$, da es irrtümlich mit der logischen Form der Implikation verwechselt wird, einerseits eine wichtige logische Form darstellen müsste, andererseits aber als nur erfüllbare, nicht allgemeingültige „Aussageform" kein logisches Interesse verdient – ist sie doch aus nur außerlogischen Gründen wahr.

42 Die Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit von SFG-„Aussageformen" kann natürlich auch mit Hilfe von Quantoren dargestellt werden; statt „die Aussageform ›$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$‹ ist allgemeingültig" lässt sich sagen: „Für jedes beliebige Paar von Aussagen (A,B) wird ›$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$‹ wahr" oder kurz: „$(\forall A,B) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$" oder auch „$(\forall A,B)\ [A \Rightarrow (B \Rightarrow A)]$".

43 Die Meinung, nicht bereits im Rahmen des üblichen SFG (der normalen „Aussagenlogik"), sondern erst in einem „quantified sentence calculus" höherer Ordnung gebe es Ausdrücke der Art: „$(\forall A)(A \veebar \neg A)$" (**Haack**, S.40; vgl. **H. Wessel**, Logik, S. 189), ist also falsch; es

ist nicht entscheidend, ob ausdrücklich das Allquantorsymbol gebraucht wird, sondern dass jede Behauptung der Allgemeingültigkeit eines Gedankengefügeschemas eine „Allquantifikation" und jede Behauptung der Erfüllbarkeit eines Gedankengefügeschemas eine „Existenzquantifikation" darstellt. Schon im SFG spielen Quantifikationen in der Form der Erfüllbarkeits-/Allgemeingültigkeitsaussagen eine zentrale Rolle.

44 Wenn wir prüfen wollen, ob Aussagen wahr sind, müssen wir ihre Bedeutung (d.h. *was behauptet wird*) kennen; erst unter dieser Voraussetzung kann der Wahrheitswert der Aussagen ermittelt und den Aussagen dann ein Gedankengefüge zugesprochen werden. Da die „Aussagenlogik" am Ergebnis der Wahrheitsprüfung, d.h. am nicht weiter thematisierten Fürwahrhalten ansetzt und dieses zum Thema macht, konnte die falsche Auffassung aufkommen, in der „Logik" könnten die Bedeutungen der Aussagen unbeachtet bleiben – es komme ja nur auf den Wahrheitswert an.

45 Vertreter der „modernen Logik" meinen, der angebliche mathematische Charakter der „modernen Logik" rühre nicht zuletzt daher, dass die Rechen- und Beweisverfahren in der Mathematik ebenso wie angeblich das „aussagenlogische" Vorgehen die Bedeutung der mathematischen Symbole ignorieren könnten und man sich auf ein gedankenlos-automatisiertes Manipulieren „bedeutungsloser Symbole" (die Rede von bedeutungslosen Symbolen oder Zeichen ist eine *Contradictio in adjecto*, ist semiotischer Unsinn) beschränken könne. Die Rechenalgorithmen können in der Tat mechanisch und gedankenlos angewendet werden; bei dieser Anwendung ist es überflüssig, zu wissen, warum der Algorithmus eigentlich funktioniert und auf welchen *mathematischen* Gesetzmäßigkeiten er basiert – das Verfahren muss in den Einzelfällen nur korrekt angewendet werden, nicht als solches gerechtfertigt werden; damit muss auch nicht systematisch auf die mathematische Bedeutung der Ausdrücke, auf die sich das mechanische Rechnen bezieht, eingegangen werden. Die Logistiker trugschließen, dass das Rechnen, die Arithmetik überhaupt unabhängig von der Bedeutung der mathematischen Symbole durchgeführt werden kann — das ist natürlich nicht richtig: die Erfindung und Rechtfertigung der Rechenverfahren muss sich systematisch auf die Bedeutung der mathematischen Symbole in Rechnung stellen, wie ja auch die „metalogische" Rechtfertigung und Begründung der SFG- und SFA-Prozeduren auf die tatsächliche (und nicht logisch missdeutete) Bedeutung der SFG-Ausdrücke eingehen muss.

46 Die Entscheidung der Wahrheit einer *jeden* Aussage muss stets bewerten, ob das, was die Aussage behauptet (die Bedeutung der Aussage) tatsächlich der Fall ist – dies trifft auch für Gedankengefügeaussagen zu: eine $\mathfrak{C}$-Gedankengefügeaussage $A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn zutrifft, was die Aussage ihrer Bedeutung gemäß behauptet, dass nämlich nicht A wahr und B zugleich falsch ist (dies ist die zu beachtende *Bedeutung* der Aussage) – die Bedeutung der Gedankengefüge besteht darin, dass (überflüssigerweise!) die schon vorausgesetzte Wahrheit oder Falschheit von Aussagen tautologisch oder informationsverschleiernd behauptet wird und diese Bedeutung muss bei der Prüfung der Wahrheit von Gedankengefügeaussagen zunächst beachtet werden.

47 „Der Prädikator drückt das Prädikat und seine Zuordnung zu dem Argument aus, enthält also *Beschaffenheit plus Kopula*." (**A. Menne**, Einführung in die Logik, S. 58)

48 Wie die Gedankengefüge „expandiert" werden können, so auch die Gedankengefügeprädikatoren: Da das Gedankengefüge $(A \Rightarrow B) \Leftarrow (A \triangledown B)$ wie das Gedankengefüge $A \Rightarrow B$ besagt, dass jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist, haben auch die prädikatenlogistischen Ausdrücke „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$" und „$(\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)) \Leftarrow (\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x))$" die gleiche Bedeutung, nämlich, dass Gegenständen x jedenfalls nicht $\mathfrak{P}$ ohne $\mathfrak{Q}$ zukommt. Die Expansionen können dabei beliebig komplex sein.

49 **Georg von Wright** ordnet diese Art von SFG-analogen prädikatenlogistischen Ausdrücken einer „*Non-Quantified-Logic of Properties*" zu, welche „‚isomorphous' to the Logic of Propositions" (d.h. „isomorph" zum SFG) sei (On the Idea of Logical Truth, in: Logical Studies, S. 29); da die Prädikatoren und Gedankengefügeprädikatoren als spezielle „Aussageformen" zu wahren Aussagen werden, wenn der jeweilige Prädikator (Eigenschaftsprädikat, property) dem gewählten Gegenstand zukommt, spricht **von Wright** nicht von „Wahrheitsfunktion", sondern von *presence-function* mit den „presence-values" *presence* bzw. *absence of the property in the thing* Er verwechselt dann freilich diese Gedankengefügeprädikatoren wie schon die Gedankengefüge mit logischen Formen: für die Prädikate $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sei „$\mathfrak{P}(x) \triangledown \mathfrak{Q}(x)$" der *disjunction*-name, „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$" der „*implication*-name" von P und Q usw. (30) Wenn der Gedankengefügeprädikator „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(x)$" für einen bestimmten Gegenstand wahr wird, bedeutet dies jedoch in keiner Weise, dass die Prädikatoren $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{Q}(x)$ in der logischen Beziehung der Implikation stehen. Die „Non-Quantified-Logic of Properties" ist ebenso wenig eine Logik wie die „Aussagenlogik" – denn die Gedankengefügeprädikatoren wiederholen wie schon die Gedankengefüge nur die vorgegebenen Wahrheitswerte von Aussagen (oder „presence-values") bestenfalls tautologisch und geben die vorausgesetzte Meinung, dass einem Gegenstand bestimmte Prädikate zukommen oder nicht, mit oder ohne Informationsverschleierung wieder, ohne dass irgendein logischer Zusammenhang bestimmt würde. Der Name *Non-Quantified-Logic of Properties* suggeriert außerdem, in diesem SFG-analogen System würden noch keine Quantifikationen vorgenommen; dies trifft nicht zu, denn die Unterscheidung von „Eigenschaftstautologien" (tautology of the properties) und Eigenschaftsnichttautologien), d.h. von allgemeingültigen und nichtallgemeingültig-erfüllbaren Gedankengefügeprädikatoren (als Aussageformen) stellt bereits eine Quantifikation im Sinne der Logistik dar, auch wenn sie nicht explizit als solche zur Kenntnis genommen und dargestellt wird.

50 Hier wird auch deutlich, dass die fregeschen Vorstellungen von der „Ungesättigtheit", „Ergänzungsbedürftigkeit", „Unselbstständigkeit" der Prädikate, die durch „Gegenstände" gesättigt werden, die im Gegensatz zu ihnen „abgeschlossen", „gesättigt" und „selbstständig" sind, dem logischen Grundverhältnis der Prädikation nicht gerecht wird: denn hier werden die „ungesättigten" Erfüllbarkeitsprädikate durch ebenso „ungesättigte" Aussageformen „gesättigt".

51 **MENNE**, Einführung in die Logik, S.59; Quantoren machen in dem Sinne aus Aussageformen Aussagen, als sie Erfüllbarkeitsprädikate sind, die diesen Aussageformen zugesprochen werden.

GEORG KLAUS, Stichwort: *Konstante, prädikatenlogische*, MLWP 2, S.649: „Zum Unterschied zu den aussagenlogischen Konstanten, mit deren Hilfe aus Aussagen andere Aussagen erzeugt werden können, können durch prädikatenlogische Konstante aus Aussagefunktionen (prädikatenlogische Ausdrücke mit mindestens einer freien Variable) Aussagen erzeugt werden. Prädikatenlogische Konstanten in diesem Sinne sind der sog. Allquantor und der sog. Existenzquantor."

52 In den Erläuterung **BOCHEŃSKI**s und **MENNE**s treten beide Konzeptionen neben- und durcheinander auf: einerseits soll der Ausdruck „$\forall x\, f(x)$" bedeuten „für alle (Gegenstände) x gilt: *f* von x" {das Prädikat *f* kommt x zu}, was eindeutig der objektbezogenen Konzeption entspricht, dann heißt es im selben Absatz, der Allquantor oder „Generalisator bedeutet, dass jede Einsetzung einer Konstanten für die in ihm enthaltenen Variablen in die Aussagefunktion, auf die er sich bezieht, eine wahre Aussage ergibt." (Abriss der Logistik, S.68) Vgl. **S.HAACK**, S.42.
HILBERT und **ACKERMANN** schreiben, dass ein Ausdruck wie „$\forall x\,(Fx \Rightarrow Gx)$" von einer Aussageform die Allgemeinheit behaupte, und behaupten gleich danach , der Ausdruck besage, „dass alles, was eine gewisse Eigenschaft F hat, auch die Eigenschaft G hat." (70)
Sehr deutlich ist die Verwischung beider Konzeptionen bei **STUHLMANN-LAEISZ**: Es sei „das Ergebnis der Anwendung des Allquantors ›für alle a‹ auf die Aussagefunktion ›a ist F‹ der vollständige Satz: ›Alle Entitäten haben die Eigenschaft F‹ oder halbformal: ›für alle a: a ist F‹." (Gottlob Freges ‚Logische Untersuchungen', S.186)

53 **SUSAN HAACK**, Philosophy of Logics, S.42

Klar haben **RUSSELL** und **WHITEHEAD** die substitutionelle Konzeption formuliert: „So gibt es zu irgendeiner Propositionalfunktion $\phi\hat{x}$ einen Bereich oder eine Menge von Werten, bestehend aus allen (wahren oder falschen) Propositionen, die man erhält, indem man dem *x* in $\phi\hat{x}$ jede mögliche Bestimmung gibt. … Nun muss man bezüglich Wahrheit und Falschheit von Propositionen dieses Bereichs drei wichtige Fälle auffassen und symbolisch bezeichnen… Entweder 1. alle Propositionen des Bereichs sind wahr, oder 2. einige {im Sinne von zumindest eine} Propositionen des Bereichs sind wahr, oder 3. keine Proposition des Bereichs ist wahr. Der Tatbestand 1 wird symbolisiert durch ‚$(x)\ \phi\hat{x}$' und 2 wird symbolisiert durch ‚$(\exists x)\cdot\ \phi\hat{x}$'. Von diesen zwei Symbolen wird keine Definition gegeben; sie stellen also zwei neue Grundbegriffe in unserem System dar." (Principia Mathematica, Vorwort und Einleitungen, S.26) (Die Autoren präsentieren hier eine eindeutige, korrekte Definition der Quantoren im Rahmen der substitutionellen Konzeption und erklären im Anschluss daran die so definierten Begriffe zu „undefinierten Grundbegriffen"; solche überraschenden Wendungen sind eine Spezialität der „modernen Logik".)j

Ebenso eindeutig vertritt **QUINE** die substitutionelle Konzeption: „‚$(\exists x)\varphi$' ist … dann und nur dann wahr, wenn die Formel φ nicht für alle Werte der Variablen α falsch ist, also dann und nur dann, wenn φ für einige Werte von α wahr ist." (Von einem logischen Standpunkt, S.85) Korrekt müsste es allerdings heißen: die *Aussage* ‚$(\exists x)\varphi$', welche die Erfüllbarkeit der Aussageform φ behauptet, ist genau dann wahr, wenn zumindest eine von den Aussagen, die aus einer möglichen Variablenersetzung in der Aussageform φ resultieren, wahr ist; dass etwas (die Formel φ, die ja gar nicht wahrheitswertdefinit ist) bald wahr, bald falsch ist, ist ja nicht möglich.

In **TUGENDHAT/WOLF** heißt es richtig, dass in **FREGE**s „neue Auffassung" eine Quantifikationsaussage eine Aussage über die Wahrheit anderer Sätze sind, nämlich diejenigen, die bei der Substitution entstehen; der Satz „Alle F sind G" (er wird verwechselt mit: „$(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$") sei wahr, wenn die Feststellungs-Sätze „a_1 ist nicht F ohne zugleich G zu sein" (verwechselt mit „wenn a_1 F ist, so ist es G") für jedes a_i aus dem Bezugsbereich wahr seien (S.91). Allerdings übersehen die Autoren, dass der Ausdruck „alle F sind G" bzw. „$(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$" erst eine Erfüllbarkeitsaussageform ist, die erst bei der Ersetzung der Beliebig-Element-Zeichen F und G durch Bezeichnungen konkreter Prädikate zu einer Erfüllbarkeitsaussage wird.

Andere Vertreter der „modernen Logik" gebrauchen die Quantoren nur im Sinne der gegenstandsbezogen („objectional") Konzeption; für **WESSEL** sind die Quantoren „logische Operatoren …, die sich auf Termini in Aussagen beziehen" (Logik, S.189); diese Termini sind aber „Variablen", die in „Aussageformen" vorkommen; **WESSEL** übersieht die Tatsache, dass die Quantifikation auf Grund der Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge nicht die Gegenstände oder die sie bezeichnenden „Terme" betrifft, sondern nur die *Aussagen*, die durch Ersetzung der „Variablen" aus einer Aussageform gewonnen werden können. Einerseits ist die Unterscheidung von Aussage und Aussageform für die „moderne Logik" von zentraler Bedeutung, andererseits wird überaus häufig zwischen Aussagen und Aussageformen überhaupt kein klarer Unterschied gemacht.

54 Hier ist deutlich, dass im Rahmen der Konzeption der Aussageformen die Bestimmung logischer Formen wie $\forall x Fx$ und $(\forall x)\,(Fx \Rightarrow Gx)$ abhängig wird vom Nachweis und der Bewertung empirisch-konkreter Prädikate, die mutmaßlich in besagter logischer Beziehung stehen; dies ist mit dem nicht-empirischen Charakter der theoretischen Logik nicht zu vereinbaren; in der theoretischen Logik werden die infinit vielen und beliebig komplexen logischen Formen ganz unabhängig davon bestimmt, ob man Prädikatoren kennt, die vermutlich in diesen Beziehungen stehen.

55 Im Ausdruck des empirischen Gesetzes „$\forall x$ [Mensch(x) $\Rightarrow$ Sterblich(x)]" darf das Beliebig-Element-Zeichen x auch nicht durch die Bezeichnung eines konkreten Individuums ersetzt werden.

56 **S. KONDAKOW**, Wörterbuch der Logik, S. 393; **H. HERMES**: Prädikatenlogik, HWP 7, 1186-1194

57 **QUINE** nennt Gedankengefügeprädikator-Schemata wie „$(Px \Rightarrow Qx)$“ und „$Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ *offene Quantorenschemata*, die zu *abgeschlossenen Quantorenschemata* werden, wenn ihnen ein Quantor über die „freien“ Individuenvariablen vorangestellt wird (Grundzüge der Logik, S. 130). Offenbar merkt **QUINE**, der Aussageformen als Schemata bezeichnet, nicht, dass „$(Px \Rightarrow Qx)$“ und „$Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ noch gar keine Aussageformen sind. **QUINE** meint dann, ein abgeschlossenes Quantorenschema sei *allgemeingültig*, „wenn es unter jeder Interpretation von ›Fx‹, ›Gx‹ usw. wahr ist“ (S. 134); er räumt damit zumindest indirekt ein, dass erst solche abgeschlossenen Quantorenschemata Aussageformen, und zwar Erfüllbarkeitsaussageformen sind, und dass ihre Charakterisierung als allgemeingültig eine Quantifikation im Bereich der Prädikate darstellt. Ein „offenes Quantorenschema“ wie $Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$ sei schließlich selbst allgemeingültig, wenn „der dazugehörige Allsatz“ $\forall x\ [Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]$ allgemeingültig sei (S. 137); dies ist das Zugeständnis, dass Ausdrücke wie „$Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“ implizit als Abkürzungen für „$\forall x\ [Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]$“ aufgefasst werden. Nur von Ausdrücken wie „$\forall x\ [Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)]$“, nicht von „$Qx \Rightarrow (Px \triangledown Qx)$“, kann Allgemeingültigkeit behauptet werden.

Für **HILBERT** und **BERNAYS** ist es eine „Grundformel“, dass $\forall x\ \mathcal{F}(x)$ nicht wahr sein kann, ohne dass $\mathcal{F}(x)$ wahr ist (Grundlagen der Mathematik I, S.104). Ebenso etwa **R.CARNAP** (Symbolische Logik, S. 59), **LUDWIK BORKOWSKI** (Formale Logik, S. 146f), **BOCHEŃSKI**/**MENNE** (Grundriss der Logistik, S. 73)

58 Zweifach elliptisch sind Formeln der Gestalt $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$, einfach elliptisch sind Formeln der Gestalt $\forall(x_1, \ldots, x_n)\ [\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_n)$.

59 Einführung in die Logik, S.59 – Wenn **BOCHEŃSKI** und **MENNE** schreiben „Eine Aussageform ist keine Aussage, kann aber zu einer solchen werden durch Bindung ihrer Variablen durch einen Quantifikator oder durch Einsetzung von Individuenkonstanten für die -variablen“ (Grundriss der Logistik, S. 68), übersehen sie, dass dies nur für Ausdrücke gilt, die keine Prädikatvariablen enthalten, was aber für die Ausdrücke der Prädikatenlogistik nicht zutrifft.

Auch **BORKOWSKI** behandelt „Prädikatvariable“ wie Abkürzungen von gegenständlichen Prädikaten erster Stufe. „Wenn wir annehmen, dass die Prädikate erster Stufe von einem Argument Merkmale (Eigenschaften) von Gegenständen denotieren und die Prädikate erster Stufe von zwei oder mehreren Argumenten zwischen diesen Gegenständen bestehende zwei- und mehrgliedrige Relationen (Beziehungen) denotieren, dann lesen wir den Ausdruck ‚A(x)‘: x hat die Eigenschaft (das Merkmal) A bzw. das Merkmal A kommt x zu, den Ausdruck ‚xRy‘ lesen wir: x steht in der Relation R zu y…“ (Formale Logik, S. 140) Diese Erläuterung ist nicht richtig, denn der Ausdruck „A(x)“ bezeichnet einen *beliebigen* Prädikator, er denotiert keine bestimmte, konkrete Eigenschaft (nicht den Begriff erster Stufe einer Eigenschaft), sondern einen beliebigen Begriff in seinem Bezug zu geeigneten Gegenständen: den allgemeinen logischen Sachverhalt: irgendein Prädikat P kommt irgendeinem Gegenstand des zu P gehörenden Bezugsbereich zu: über diese Sachverhalte können dann durchaus selber Aussagen getroffen werden: etwa: Wenn irgendein Prädikat P irgendeinem geeigneten Gegenstand zukommt, dann ist es unmöglich, dass diesem Gegenstand dieses Prädikat zugleich nicht zukommt.

60 Grundlagen der Mathematik I, S.87

61 **A.OBERSCHELP**, Elementare Logik und Mengenlehre I, S.10

62 **WESSEL**, Logik, S.190

63 Grundzüge der Logik, S.130

64 **H.HERMES**, HWP 7, Sp.1193

KONDAKOW schreibt, es sei charakteristisch für einen *Prädikatenkalkül* der *ersten Stufe*, „dass … nur Quantifizierungen von *Individuenvariablen* zugelassen sind.“ (Wörterbuch der Logik, S.392) „In first-order predicate calculus only ›individual‹ variables, ‚x‘, ‚y‘ … etc., may be bound by the quantifiers; in *second-order* calculi ‚F ‘, ‚G‘ … etc. may also be bound, as in ‚(x) (F) (Fx)‘.” (**HAACK**, S. 40) „Die Quantoren einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe beziehen sich wie die ξ-Quantifikatoren nur auf Einzelgegenstände (Individuen) und nicht auf (durch prädikative Ausdrücke bezeichnete) Eigenschaften. Prädikatenlogische Sprachen, in denen auch über prädikative Ausdrücke quantifiziert wird, nennt man *prädikatenlogische Sprachen höherer Stufen…* Die elementare Logik bezieht sich ausschließlich auf prädikatenlogische Sprachen erster Stufe.“ (**KLEINKNECHT/WÜST**: Lehrbuch der elementaren Logik, Band 2: Prädikatenlogik, S.268f)

65 **FREGE** hält die Bestimmung der *Existenz* für einen Begriff zweiter Stufe (vgl. oben Freges Verständnis der Existenz, S. 199; auch natürliche Zahlen werden zu Unrecht für Begriffe zweiter Stufe gehalten.

66 Nach der Stufigkeitskonzeption der Prädikatenlogistik würden Prädikate erster Stufe erst in der Prädikatenlogik zweiter Stufe prädiziert werden.

67 Wenn ich den Gegenstand *Hans Huckebein* als *Raben* bestimme, dann ordne ich diesen Gegenstand in ein umfassendes Wissen von in bestimmten logischen Verhältnissen stehenden Begriffen erster Stufe ein: ich weiß, dass Hans Huckebein *als Rabe* notwendig ein *Vogel*, notwendig ein *Wirbeltier* ist, dass es unmöglich ist, dass er ein *Säugetier* oder ein *Lurch* ist, dass es möglich ($\mathcal{M}$) ist, dass er ein *Kolkrabe* oder ein *Weißhalsrabe* oder ein *Wüstenrabe* ist; ich weiß, dass er *Allesfresser* ist, dass er kein Fellkleid hat, dass er zuweilen fliegt, dass es aus einem Ei geschlüpft ist. Der Gegenstand wird so einem ganzen Netz von Begriffen erster Stufe subsumiert, deren Beziehungen in Wenn-dann-Gesetzen/Allsätzen/Modalbehauptungen dargelegt werden:

> *Wenn etwas ein* Rabe *ist, dann ist es ein* Vogel *(ein* Wirbeltier*)* ≡ *Alle* Raben *sind* Vögel ≡ *ein* Rabe *ist notwendig (ohne Ausnahme) ein* Vogel.

Wenn etwas ein Rabe *ist, dann ist es kein* Säugetier (Lurch) ≡ *Kein* Rabe *ist ein* Lurch ≡ *es ist unmöglich, dass irgendein* Rabe *ein* Lurch *ist.*
Wenn etwas ein Rabe *ist, dann ist es möglicherweise ein* Kolkrabe (*ein* Wüstenrabe, *ein* Weißhalsrabe) ≡ *Einige (aber nicht alle)* Raben *sind* Kolkraben ≡ *Ein* Rabe *kann (aber muss nicht) ein* Kolkrabe *sein*
Wenn etwas ein Rabe *ist, dann ist es* Allesfresser, hat es kein Fellkleid (kann es fliegen, ist es aus einem Ei geschlüpft, usw.) ≡ *Alle* Raben *sind* Allesfresser, haben kein Fellkleid usw. ≡ *ein* Rabe *ist notwendig ein* Allesfresser usw.

Die teilweise synonymen Wendungen, die die logische Beziehung zwischen den Begriffen erster Stufe ausdrücken, sind kursiv gesetzt.

68 HOYNINGEN-HUENE meint, aus den Ausdrücken konkreter All- und Existenzaussagen könne man „prädikatenlogische Formen" gewinnen, indem man „vom Inhalt des Individuenbereichs (Art und Anzahl der Individuen), vom Sinn der Prädikate und vom Sinn der Individuenkonstanten" *abstrahiere*; von der „Abstraktion" verschont blieben nur Gleichheit, Verschiedenheit und Stelligkeit der Prädikate (Formale Logik, S. 197); an die Stelle der Bezeichnungen konkreter Prädikate erster Stufe würden „Prädikatbuchstaben" gesetzt (S. 201), die zwar nicht bloß als Abkürzungen der ursprünglichen konkreten Prädikate zu betrachten seien, aber doch nur „Prädikatenplatzhalter" darstellten: sie „stehen da, wo vor dem Abstraktionsschritt Prädikate standen", sie halten „den Platz für ein Prädikat frei" (198); es wird unspezifisch von „Prädikatbuchstaben" gesprochen (201).

Die gängige Vorstellung, die Erkenntnis der logischen Formen verdanke sich solchen „Abstraktionen", ist eine unzutreffende, logisch widersprüchliche Darlegung jener komplexen logischen Bezugsetzungs- und Vergleichsoperationen, die zu jenen gehaltvollen Verallgemeinerungen führen, denen sich die Kenntnis der logischen Formen verdankt. Verallgemeinerungen resultieren aus einem systematischen Vergleich der untersuchten Inhalte mit anderen Inhalten hinsichtlich ihrer Unterschiede und Gleichheiten; deshalb können Verallgemeinerungen gar nicht auf „Abstraktionen" beruhen: wenn ich von den Inhalten der zu verallgemeinernden Konzepte „absehe", bleibt nichts mehr übrig, das in verallgemeinernder Perspektive verglichen und bestimmt werden könnte. Wenn ich bei der Betrachtung von Birnen von ihrem Birnen-Sein tatsächlich „abstrahieren" würde, bliebe kein Obst übrig, sondern nur leere Worte; auch bei der Reflexion und Analyse konkreter bedingungslogischer Zusammenhänge bleiben keine „abstrakten" implikativen, konträren usw. Beziehungen übrig, wenn ich von jeweils besonderen Gehalt dieser konkreten bedingungslogischen Zusammenhänge „absehe"; nur dann, wenn ich diese Gehalte/Inhalte in ihrer mannigfaltigen, je besonderen Bestimmtheit systematisch auf bestimmte strukturelle Unterschiede und Gleichheiten hin untersuche, kann ich den Begriff der Implikation, des konträren Verhältnisses usw. gewinnen. Wenn vom Inhalt eines mathematischen Implikationsgesetzes „abstrahiert" wird, verschwindet auch die Implikation, denn diese ist ja die Beziehung, in der die mathematischen Inhalte stehen, und die diesen Inhalten ihre Bestimmtheit verleiht. Die Ansicht, „Abstraktionen" könnten die Grundlage der Erkenntnis allgemeiner Begriffe sein, ist eine ungenaue und undurchdachte erkenntnistheoretisch-logische Konzeption: die Erkenntnis allgemeiner Zusammenhänge entspringt nicht der „Abstraktion" (dem Absehen, Ignorieren, Vernachlässigen der zu verallgemeinernden Inhalte), sondern dem systematischen und umfassenden logischen *Vergleich* der Inhalte; dieser Vergleich wäre gar nicht möglich, wenn von den Besonderheiten, und den unterschiedlichen Gehalten, also von dem, was verglichen werden soll, „abgesehen" würde; die „Abstraktions"-Vorstellung mystifiziert den Aspekt der Gleichheit; sie vereinseitigt die Gleichheit, weil sie diese von den Unterschieden abspaltet: es handelt sich bei einer Verallgemeinerung aber um die Erarbeitung spezifischer Gleichheiten von sich spezifisch Unterscheidenden. Die Verallgemeinerung ignoriert nicht den („sieht nicht ab vom") einzelnen/besonderen Inhalt, sondern macht diesen zu einem beliebigen logisch untergeordneten Fall des Allgemeinen. Die „Abstraktion" – wäre so etwas tatsächlich durchführbar – würde immer beim Einzelnen stehen bleiben, das nur Gehalt und Bestimmtheit verlöre und so zu einer zunehmend leeren Einzelvorstellung würde. Nähme man von einer konkreten All- oder Existenzaussage den spezifischen Gehalt weg, bliebe man bei dieser *einzelnen* Aussagen stehen, diese einzelne Aussage würde nur in ihrem Gehalt verarmt, es bliebe recht besehen, gar nichts von ihr übrig: weder eine einzelne Aussage, noch der allgemeine Begriff aller derartigen Aussagen, deshalb ist „Abstraktion" eine rein imaginäre, nicht wirklich durchführbare Operation. Die Rede von „Abstraktion" ist irreführende, oberflächliche Erkenntnistheorie. Mit dieser Abstraktionsvorstellung verbunden ist die Meinung, die Darstellung einer bestimmten logischen Form bzw. eines bestimmten logischen Gesetzes sei, auf Grund ihrer angeblichen „Abstraktheit", noch einer „Interpretation" zugänglich; indem die Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate durch Bezeichnungen konkreter Prädikate ersetzt würden, werde der „Abstraktionsschritt, der von der Aussage zu ihr {der prädikatenlogischen Formel} geführt hat, vollständig rückgängig" gemacht (HOYNINGEN-HUENE, S. 208). Dass dann erst solcherart „interpretierten" prädikatenlogischen Ausdrücken Sinn und Wahrheitswertdefinitheit zugebilligt wird – dies wird auch von der Konzeption der Aussageformen unterstellt –, zeigt, dass diese Konzeption beim Einzelnen stehen bleibt und gar nicht zur Einsicht der logischen Formen in ihrer Allgemeinheit gelangt.

69 Begriffe erster Stufe unterscheiden sich etwa dadurch, dass sie die Artbestimmtheit, den veränderlichen Zustand oder eine fixe Eigenschaft von Gegenständen bestimmen (die entsprechenden Begriffe zweiter Stufe sind dann: Ousiabegriff, Zustandsbegriff, Eigenschaftsbegriff), dass sie eine quantitative oder qualitative Bestimmung vornehmen, dass sie die Stelligkeit von Begriffen erster Stufe bestimmen, usw.

70 Ein Begriff zweiter Stufe (z.B. der Begriff *Ousiabegriff*), der einem Begriff erster Stufe zukommt (z.B. dem Begriff *Pferd*), ist hingegen nicht übergeordneter Gattungsbegriff des Begriffs erster Stufe.

71 Dass einem Gegenstand x ein Prädikat P *nicht* zukommt, drücke ich durch den Ausdruck „$\sim$Px" aus.

72 Im „Quantorenquadrat" – die Relationenmatrix mit den vier Quantoren – fehlt allerdings in aller Regel jener Quantor, der nicht durch Negation aus $\forall$ oder $\exists$ gewonnen werden kann: einige (zumindest eines), aber nicht alle x sind P. Für diese Form gibt es in der Begriffsschrift keinen elementaren Quantor, er müsste begriffsschriftlich dargelegt werden etwa durch den Ausdruck „$(\exists x)\ Px\ \ \&\ \ (\exists x) \sim Px$"; ich stelle diesen Quantor (einige, aber nicht alle x sind P) durch den Ausdruck $\exists\exists x\, Px$ dar.

73 „Bemerkenswert ist die Äquivalenz ‚∃xFx‘ ⇔ ‚¬∀x¬Fx‘. Ist nämlich Φ ein beliebiges einstelliges Prädikat, so ist ‚es gibt ein x mit der Eigenschaft Φ‘ und ‚nicht für alle x ist nicht Φx der Fall‘ in allen Bereichen gleichbedeutend. Desgleichen ist ‚∀xFx‘ ⇔ ‚¬∃x¬Fx‘.“ **HILBERT/ACKERMANN**, Grundzüge der theoretischen Logik, S. 76 (statt ¬ und ⇔ werden die Zeichen ‾ und äq benutzt).

74 **BOCHEŃSKI** meint, in der „modernen Logik“ seien die Quantoren „‚alle‘ und ‚es gibt‘, welche auf Individuen bezogen sind“, „im Gegensatz zur aristotelischen Tradition, als von der quantifizierten Funktion“ – dem Prädikat P – „und ihrer Kopula getrennt gedacht.“ (Formale Logik, S. 402) Diese Behauptung ist falsch, denn diese Trennung ist unmöglich, da es sich bei der Quantifikation um die Beziehung von zwei Prädikaten handelt; die Negation der Quantoren ist nur bei Einbezug der Prädikate und ihres Zukommens (Kopula) möglich – *nicht alle* bedeutet ja *einige nicht* und *nicht eines* bedeutet *alle nicht* – es wird für einige oder alle das Zukommen (die Kopula) negiert.

75 **BOCHEŃSKI/MENNE**, Grundriss der Logistik, S.71

76 Für den in dieser Matrix vernachlässigten Quantor „(zumindest) eines, aber nicht alle“ hinzugefügt, den ich durch „∃∃x Px“ darstelle, ergeben sich die zusätzlichen Gesetze

∀x Px ↑ ∃∃x Px
∀x ∼ Px ↑ ∃∃x Px
∃x Px ← ∃∃x Px
∃x ∼Px ← ∃∃x Px.

Aus der Bedeutung des Quantors ∃∃x Px ergibt sich außerdem die Äquivalenz (∃∃x Px ↔ ∃∃x ∼Px).

77 Da die Ausdrücke „∀x Px“ und „∃x Px“ jetzt durch das Gedankengefügezeichen „⇒“ verbunden sind, wird die logische Gesetzesaussage „[(∀x) Px] → [(∃x) Px]“ über den logischen Zusammenhang zweier logischer Formen zu einer Erfüllbarkeitsaussage im Bereich der Prädikate.

78 Das 𝔼-Gesetz ∀x Px ↔ ∀x Px lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung „∀ P [∀x Px ⇔ ∀x Px]“ und bedeutet „∀ P [¬ (∀x Px & ¬ ∀x Px) & ¬ (¬ ∀x Px & ∀x Px)]“, wegen der Gesetze des SFG (A & B) ↔ (B & A) und (A & A) ↔ A gleichbedeutend mit ∀ P [¬ (∀x Px & ¬ ∀x Px)] ≡ ∀ P [¬ (¬∃x ¬Px & ∃x ¬Px).

79 Das Gesetz ∃x Px ≻≺ ∀x ∼Px lautet in begriffsschriftlicher Abschwächung „∃x Px ⋈ ∀x ∼Px“ und bedeutet ¬ (∃x Px & ∀x ∼Px) & ¬ (¬ ∃x Px) & ¬ (¬ ∀x ∼Px), wegen des Quantorenquadrat-Gesetzes (∀x ∼Px) ↔ ∼(∃x Px) und der SFG-Gesetze ¬ ¬ A ↔ A, (A & B) ↔ (B & A) und (A & A) ↔ A gleichbedeutend mit ¬ (∃x Px & ¬ ∃x Px) ≡ ∀ P [¬ (∀x¬ Px & ¬ ∀x¬ Px)].

80 Zwischen ∀x Px und ∀x ∼Px besteht ein konträrer Gegensatz (𝔻-Relation) und zwischen ∃x Px und ∃x ∼Px besteht ein subalterner Gegensatz (𝔸-Relation).

81 Der Ausdruck ∃∃x Px verweist auf die logische Form (11•1) (x ∈ **B**, Px) – einem Gegenstand des Bezugsbereichs kommt möglicherweise (𝒦) das Prädikat P zu.

82 **BOCHEŃSKI/MENNE** (Grundriss der Logistik, S. 72) führen als „Grundgesetze“ ein ∀xPx ⇒ Pa (Pa: ein Prädikat P kommt irgendeinem bestimmten Gegenstand a zu), Pa ⇒ ∃xPx und ∀xPx ⇒ ∃xPx (das dritte „Grundgesetz“ folgt schon aus den beiden ersten). Dasselbe bei **HILBERT/BERNAYS** (Grundlagen der Mathematik I, S. 104) Bei **HILBERT/ACKERMANN** werden Gesetze des Quantorenquadrats als nicht weiter begründete „Ableitungsregeln“ eingeführt (Grundzüge der theoretischen Logik, S. 78).

83 **HILBERT/ACKERMANN** (Grundzüge der theoretischen Logik, S. 78f) geben vor, aus einem allgemeingültigen, SFG-analogen prädikatenlogistischen Ausdruck den *nicht*-SFG-analogen Ausdruck „(∃x¬Fx ▿ ∃xFx)“ {≡ „(∀x Fx ⇒ ∃x Fx)“} herleiten zu können. Sie gehen aus von der Formel

(1) „∃x ¬ Fx ▿ **¬ Fy** ▿ ∃x Fx **▿ Fy**“.

Diese Formel ist wegen „… ¬Fy … ▿ Fy“ allgemeingültig („Grundformel“) und kann ausgehend vom Fregegesetz ¬(A & ¬A) ≡ (¬A ▿ A) konstruiert werden: wenn wir die „Aussagevariable“ A durch den Prädikator Fy ersetzen, erhalten wir die Formel Fy ▿ ¬Fy, die zumindest implizit zur Erfüllbarkeitsaussageform ∀y (Fy ▿ ¬Fy) zu vervollständigen ist. Der resultierenden Formel können beliebige ▲-Glieder angehängt werden, ohne dass die prädikatenlogistische Allgemeingültigkeit der Formel Fy ▿ ¬Fy bzw. ∀y(Fy ▿ ¬Fy) davon berührt ist. Indem der Formel Fy ▿ ¬Fy als zwei von einander unabhängige ▲-Glieder ∃xFx und ∃x¬Fx angefügt werden, entsteht die Formel (1); dabei muss beachtet werden, dass die Allgemeingültigkeit der ganzen Formel (1) einzig auf Grund der Allgemeingültigkeit der Glieder Fy ▿ ¬Fy bzw. ∀y(Fy ▿ ¬Fy) besteht, die aus dem ursprünglichen Fregegesetz hergeleitetet ist. Entfernt man aus (1) eines der ▲-Glieder Fy oder ¬Fy, so steht die Allgemeingültigkeit von (1) in Frage.

Auf den Ausdruck (1) wenden die Autoren eine „Ableitungsregel“ (d) an, derzufolge, wenn ∃x𝓕x ▿ 𝓕y als prädikatenlogistisch allgemeingültig erwiesen ist, auch ∃x𝓕x als allgemeingültig behauptet werden darf:

(d) aus ∃x𝓕x ▿ 𝓕y lässt sich ∃x𝓕x herleiten

𝓕 bezeichnet dabei einen Prädikator oder Gedankengefügeprädikator mit der „freien Variable“ x (𝓕x „ist irgendein Ausdruck, der die freie Variable *x* enthält“ (ebd. 78)). Der Ausdruck „𝓕y“ ist implizit gedacht als „∀y 𝓕y“. Die Regel (d) ist freilich nichts anderes als das

Quantorengesetz ∀y Py ⇒ ∃x Px, gleichbedeutend mit „∀x Px ⇒ ∃x Px“. Denn der Ausdruck ∃x𝓕x ⊽ 𝓕y kann nur dann allgemeingültig sein, wenn 𝓕y allgemeingültig ist (das ▲-Glied ∃x𝓕x kann also weggelassen werden); wäre wohl ∃x𝓕x, nicht aber 𝓕y allgemeingültig, müsste entweder die Erfüllbarkeitsaussageform (∃x Px) oder die Erfüllbarkeitsaussageform [∃(x) 𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x) allgemeingültig sein („𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x)“ bezeichnet einen Gedankengefügeprädikator, der die Prädikatoren P_1x, P_2x, … und P_nx durch irgendwelche Gedankengefüge verbindet). Die Erfüllbarkeitsaussageform „∃xPx“ ist jedoch nicht allgemeingültig, weil nicht jedes Prädikat zumindest einem Individuum (aber nicht allen) des zugehörigen Bezugsbereich zukommt. Der Ausdruck ∃(x) 𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x) kann nicht prädikatenlogistisch allgemeingültig sein, ohne dass auch ∀(x) 𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x), und damit 𝓕y, prädikatenlogistisch allgemeingültig ist. Nur wenn der Gedankengefügeprädikator 𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x) die Allrelation ist, gilt ∃(x) 𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x) – aber nur, weil dann auch ∀(x) 𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x) allgemeingültig ist; wenn der Gedankengefügeprädikator nicht die Allrelation ist, gibt es zu ihr immer eine kontradiktorische Relation – und für alle Prädikate die in dieser kontradiktorischen Relation stehen, ist ∃(x) 𝓕⟨P_1,…,P_n⟩(x) falsch. Für den Gedankengefügeprädikator (Fx⇒Gx) z.B. kann die Erfüllbarkeitsaussageform (∃x)(Fx⇒Gx) nicht allgemeingültig sein, denn sie wird falsch für alle Prädikate F und G, die in der zu (∃x)(Fx⇒Gx) ≡ (∘•∘∘) (Fx, Gx) kontradiktorischen Relation (0100)(Fx, Gx) stehen. Damit steht fest: Wenn der Ausdruck „∃x 𝓕x ⊽ 𝓕x“ prädikatenlogistisch allgemeingültig sein soll, dann muss gelten: ∀P_1,…,P_n (∀y𝓕y)“; dann aber ist diese Regel (d) das Gesetz: ∀y𝓕y⇒∃x 𝓕x.

Diese Regel (d) wenden nun **Hilbert**/**Ackermann** zweimal hintereinander auf die Formel (1) an: Zuerst leiten sie aus dem Teilausdruck von (1) „∃x¬Fx ⊽ ¬Fy ⊽…“ die Formel ∃x¬Fx her, danach aus dem Teilausdruck von (1) „∃x Fx ⊽ Fy ⊽…“ die Formel ∃x Fx. Dieses Vorgehen wäre nur dann korrekt, wenn *sowohl* Fy *als auch* ¬Fy in Formel (1) von einander unabhängig als allgemeingültig erwiesen wären; durch die Herleitung von (1) aus dem Fregegesetz (A⊽¬A) ist jedoch wohl ∀y (Fy⊽¬Fy), nicht aber ∀y (Fy) *und* ∀y(¬Fy) als allgemeingültig erwiesen – die implizite Behauptung der Autoren, dass ∀y (Fy) und ∀y(¬Fy) zugleich gelten, ist sogar ein Widerspruch. **Hilbert**/**Ackermann**s Ableitung des Gesetzes ∃xFx⊽∃x¬Fx aus einem Fregegesetz ist logisch inkorrekt und ungültig; es ist prinzipiell unmöglich aus einem Fregegesetz A⊽¬A ein prädikatenlogistisches Gesetz ¬(¬∃xFx & ¬∃x ¬Fx) herzuleiten – eben weil ¬∃xFx und ¬∃x ¬Fx zueinander nicht kontradiktorisch wie A und ¬A, sondern konträr sind.

84 **Frege** und viele seiner Anhänger übersehen bei der Deutung der Fregerelationen, dass die Aussagenbezogenheit der Gedankengefüge sie zur „substitutionellen Auffassung der Quantifikation“ verpflichtet; so meint **Frege**, den Ausdruck „(∀x)(Fx⇒Gx)“ ohne weiteres mit „Wenn etwas die Eigenschaft P hat, dann hat es die Eigenschaft Q“ oder „Jedes P ist ein Q“ oder „Alle P’s sind Q“ übersetzen zu können (BG 23). Weder dieser „objektionale Gebrauch“ der Quantoren, noch diese „Übersetzung“ stimmt mit seiner Bestimmung des Gedankengefüges ◖ überein (nebenbei bemerkt, ist die Erläuterung einer Zeichenkette oder die paraphrasierende Formulierung eines Ausdrucks keine Übersetzung). Quantifikation im Rahmen der „modernen Logik“ ist immer eine Aussage über die aus Variablenersetzungen in einer Aussageform resultierenden Aussagen, nie eine Aussage über Gegenstände eines bestimmten Bezugsbereichs.

85 BS 23; Hervorhebungen von mir, J.P. — Hier ist deutlich, dass **Frege** die Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate F und G wie konkrete Prädikate behandelt; nur wenn ein konkretes Prädikat einem Gegenstand zugesprochen wird, ergibt sich eine Aussage. Die Behauptung **Frege**s ist also falsch; richtig müsste er sagen: „Werden die „Prädikatvariablen“ F und G durch die Bezeichnungen konkreter Prädikate ersetzt, dann ergibt sich in manchen Fällen, dass bei jeder Ersetzung von x durch eine Eigennamen dass (Fx und ∼Gx) falsch ist; in anderen der Ersetzung von F und G durch konkrete Prädikate ist (Fx und ∼Gx) nicht bei jeder Ersetzung von x durch einen Eigennamen falsch“.

86 Die Bedeutung der Fregerelation ∼(∀x)(Fx⊕Gx) kann – unter Anwendung des Äquivalenzgesetzes ∼(∀x)Px ↔ (∃x)∼Px bestimmt werden als (∃x)∼(Fx⊕Gx): Es gibt wenigstens ein x, für welches die Bedingungen für (Fx ⊕ Gx) nicht gelten; es kommen so für ∼(∀x)(Fx ⊕ Gx) alle logischen Relationen außer denen in Frage, die für *alle* x fordern (Fx ⊕ Gx).

Nehmen wir die Fregerelation ∼(∀x)(Fx ⇖ Gx); der Ausdruck „∼(∀x)(Fx ⇖ Gx)“ ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „(∃x)∼(Fx ⇖ Gx)“; die Forderung von (Fx ⇖ Gx), dass dem x jedenfalls F nicht zukommt, wird von mindestens einem x nicht erfüllt; zumindest einem x kommt also F zu; es kommt jede logische Relation in Frage, außer den Formen 𝕄, 𝕏 und 𝔽, die alle drei fordern, dass keinem x F zukommt.

Der Ausdruck „∼(∀x)(Fx ⋈ Gx)“ ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „(∃x)∼(Fx ⋈ Gx)“; die Forderung von (Fx ⋈ Gx), dass dem x von F und G genau eines und nur eines zukommt, wird von mindestens einem x nicht erfüllt; zumindest einem x kommt entweder F und G zusammen, oder weder F und G zu. Es kommt demnach jede logische Relation in Frage, außer den Totalformen 𝕂, 𝕏 und 𝔼, die alle drei fordern, dass jedem x entweder F und G zusammen oder weder F und G zukommen.

87 Für den Ausdruck „Fx⊕Gx“ lässt sich ∼(Fx ⊕ Gx) bestimmen, wenn das Gedankengefüge „⊕“ durch das kontradiktorische Gedankengefüge ersetzt wird. So ist (∀x) ∼(Fx ⇒ Gx) die Relation (∀x) (Fx ⊧ Gx), und (∀x) ∼(Fx ⇔ Gx) ist (∀x) (Fx ⋈ Gx), usw.

Die Bedeutung von „(∀x) (Fx ⋈ Gx)“ besagt, dass für alle x die Vorkommenskombinationen I (Fx⌢Gx) und IV (∼Fx⌢∼Gx) jedenfalls nicht realmöglich sind; dies bedeutet (wenn man die leere Relation 𝕆 ausschließt), dass allen x von den Prädikaten F und G genau eines zukommt; es ist dann möglich, dass allen x nur F zukommt, nicht aber G (es besteht dann die Relation 𝕃), zweitens dass allen x des Bereichs nur G, nicht aber F zukommt (die Relation 𝕄), oder dass einem Teil der x des Bereichs F, aber nicht G, dem restlichen Teil der x G, aber nicht F zukommt (die Relation 𝕁).

Entsprechend bezeichnet der Ausdruck „$(\forall x) \sim(Fx \bowtie Gx)$" die Fregerelation $(\forall x)\ (Fx \Leftrightarrow Gx)$: allen x kommt von den Prädikaten F und G jedenfalls nicht bloß eines zu. Es ist dann möglich, dass allen x beide Prädikate zukommen (Relation $\mathbb{K}$), dass allen x keines der beiden Prädikate zukommt (Relation $\mathbb{X}$), und dass einem Teil der x F und G, dem restlichen Teil der x weder F und G zukommen (Relation $\mathbb{E}$).

88 Aufgrund des Gesetzes $(\forall x)Px \leftrightarrow \sim(\exists x)\sim Px$ bezeichnen die Ausdrücke „$(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$" und „$\sim(\exists x)(Fx \models Gx)$", die Ausdrücke „$(\forall x)(Fx \Uparrow Gx)$" und „$\sim(\exists x)(Fx\ \&\ Gx)$", die Ausdrücke „$(\forall x)(Fx \Leftrightarrow Gx)$" und „$\sim(\exists x)(Fx \bowtie Gx)$", usw., jeweils dieselbe Fregerelation.

89 Diese vier Abbildungen bilden bezüglich ihrer Hintereinanderausführung eine Kleinsche Vierergruppe.

90 Im konzeptionellen Rahmen der Prädikatenlogistik kann diesem normativ-nichtempirischen Charakter der Logik nicht Rechnung getragen werden; „$\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$" ist als eine Aussageform zu nehmen, die nur dann als nicht unerfüllbar gelten kann, wenn es nachweislich zwei konkrete Prädikatoren $\mathfrak{F}x$ und $\mathfrak{G}x$ gibt, die in der Beziehung stehen; die Bestimmung logischer Formen wird von empirischen Gegebenheiten abhängig.

91 **FREGE** war der Ansicht, dass „notwendige Zusammenhänge nicht nur mit Hilfe der formalen Implikation ausgedrückt werden müssen, sondern die formale Implikation auch ausreiche, notwendige Zusammenhänge auszudrücken, die formale Implikation also als die Explikation des Begriffs des notwendige Zusammenhangs zu verstehen ist." (**GABRIEL, GOTTFRIED**, Einige Einseitigkeiten des fregeschen Logikbegriffs, in: **SCHIRN**, Fregestudien, II, 67-86, S.78) **QUINE** nennt die Fregerelation (∘0∘∘) „generalisiertes Konditional" und glaubt, die Gesetzesaussage „Wenn etwas ein Wirbeltier ist, hat es ein Herz" sei ein Beispiel dafür **QUINE**, Grundzüge der Logik, S.43. Diese Einschätzungen sind falsch.

92 **E.SCHRÖDER** behauptet, erst die Ersetzung der traditionellen Syllogismusrelationen durch die vier angegebenen Fregerelationen führe zu einer „exakten Logik", und in einer solchen könnten u.a. die subalternen Modi gar nicht gültig sein (**BOCHEŃSKI**, Formale Logik, S.424f). In der Tat besteht zwischen keinem Paar der vier Fregerelationen die Subalternationsbeziehung $\mathbb{C}$ – das ist jedoch kein Vorzug, sondern belegt, dass diese vier Fregerelationen gröber und kognitiv viel unbedeutender sind als die traditionellen Syllogismusrelationen; wo die Verwirrung derart Platz greift, kann von Präzisierung und Exaktheit keine Rede sein.

93 **B. RUSSELL** beteuert, erst die Ersetzung der traditionellen a-Relation (1011) durch die Fregerelation (∘0∘∘) habe die traditionelle Syllogistik von „Trugschlüssen" – wie etwa dem Modus *Darapti* – befreit, und den Weg zu einer „mathematischen Logik, wie wir sie besitzen", geebnet (**B. RUSSELL**, Philosophie des logischen Atomismus, S. 227f). Werden die Syllogismusrelationen durch die vier Fregerelationen ersetzt, ergeben sich natürlich andere Modi; und der Modus, der dann üblicherweise mit dem *Darapti* verwechselt wird, ist tatsächlich ungültig; das ändert nichts an der Gültigkeit der traditionellen Modi. Es ist erst die logistische Verwechslung ganz verschiedener logischer Relationen, die zu einer Fülle von Ungereimtheiten und scheinbaren Paradoxien führt.

94 Vor diesem Ausdruck und entsprechenden prädikatenlogistischen Ausdrücken müsste stehen „$\forall$ F,G,H…", denn der Ausdruck behauptet, dass bei jeder Ersetzung von F,G,H durch Bezeichnungen konkreter Prädikate die Erfüllbarkeitsaussageformen $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ und $(\forall x)(Gx \Rightarrow Hx)]$ nicht wahr und die Erfüllbarkeitsaussageform $[(\forall x)(Fx \Rightarrow Hx)]$ falsch ist.

95 Dieses Pränonpendenzgesetz besagt, dass keinesfalls $[(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)\ \&\ \sim(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)]$ gelten kann, gleichgültig ob $(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx)$ gilt oder nicht.

96 **FREGE** benützt nicht lateinische, sondern griechische Großbuchstaben.

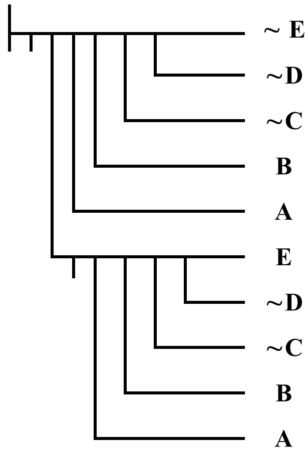
97 Ausnahmen sind die mit Neg1 aus Fregerelationen gebildeten Fregerelationen wie etwa $\sim(\forall x)(Fx \Rightarrow Gx) = (\exists x)(Fx \models Gx) =$ (•1••)(Fx, Gx); hier ist Vorkommenskombination II realmöglich, ohne dass alle restlichen Vorkommenskombinationen notwendigerweise nichtrealmöglich sind; dann aber sind diese restlichen Fälle unbestimmt. Aber unter den mit Neg1 gebildeten Fregerelationen der Form $(\exists x)\sim(Fx \oplus Gx)$ gibt es keine Beziehung, die *definitiv* mehr als eine Vorkommenskombination als realmöglich bestimmt; jede Fregerelation der Form $(\exists x)\sim(Fx \oplus Gx)$ bestimmt nur mindestens einen der Vorkommenskombinationen als realmöglich, die von der Fregerelation $(\forall x)(Fx \oplus Gx)$ ausdrücklich ausgeschlossen werden.

98 Dass ein Ereignis q relativ zu einem Ereignis p notwendig ist, kann nur dann behauptet werden, wenn $p \frown q$ und $\sim p \frown \sim q$ realmöglich sind, $p \frown \sim q$ aber nichtrealmöglich ist. Dass ein Ereignis q relativ zu einem Ereignis p unmöglich ist, kann nur dann behauptet werden, wenn $p \frown \sim q$ und $\sim p \frown q$ realmöglich sind, $p \frown q$ aber nichtrealmöglich ist. Dass ein Ereignis q relativ zu einem Ereignis p möglich ($\mathcal{K}$) ist, kann nur dann behauptet werden, wenn $p \frown q$ und $p \frown \sim q$ realmöglich sind. Es ist im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs vermutlich auch deshalb nie zur Kenntnis genommen worden, dass logische Formen Formen relativer Modalisierung sind, weil alle begriffsschriftlich darstellbaren logischen Relationen irgendeine relative Modalisierung *definitiv* weder bejahen, noch verneinen können.

99 Von zwei Ereignisklassen Fx und Gx darf ich nur dann behaupten, dass Gx die notwendige Folge der hinreichenden und evtl. auch notwendigen Bedingung Gx ist, wenn nicht nur die Vorkommenskombination $Fx \frown \sim Gx$ als nichtrealmöglich bestimmt ist – es gilt dann $\forall x\ (Fx \Rightarrow Gx)$ –, sondern wenn darüber hinaus sowohl Vorkommenskombination $Fx \frown Gx$ wie Vorkommenskombination $\sim Fx \frown \sim Gx$ *ausdrücklich* als realmöglich charakterisiert sind.

100 Nur mit dem „und" („&") und dem „nicht" („~") lässt sich die Nichtrealmöglichkeit zweier Vorkommenskombinationen der logischen Relation von (A,B,C,D,E) – $\sim(A\ \&\ B\ \&\ \sim C\ \&\ \sim D\ \&\ E)\ \ \&\ \sim(A\ \&\ B\ \&\ \sim C\ \&\ \sim D\ \&\ \sim E)$ – direkt und unmissverständlich ausdrücken; die fregesche Darstellung der Nicht-Realmöglichkeit dieser beiden Vorkommenskombinationen mithilfe des „Bedingungsstrichs" $\Rightarrow$ ist dage-

gen sehr unübersichtlich; die tatsächliche Bedeutung des unnötig verkomplizierten Ausdrucks „~{~[A⇒(B⇒(~C⇒(~D⇒E)))] ⇒ [A⇒(B⇒(~C⇒(~D⇒~E)))]}“, der in der fregeschen Notation



noch unübersichtlicher ist, muss erst durch „Rückübersetzung“ in den direkten „nicht“/„und“ - Ausdruck rekonstruiert werden. Auch diese ganz unnötige (und daher unzulässige) Unübersichtlichkeit der Darstellung *einfachster* logischer Verhältnisse leistet den logistischen Fehldeutungen dieser Formen Vorschub.

101 Er ist der Überzeugung, mit Hilfe der *Begriffsschrift* könne man derartige Aufgaben „ohne Schwierigkeit… bewältigen.“ (BRL, S. 51)

102 **Frege** meint in BRL, S. 47f, er müsse, um das logische Verhältnis der anderen Ereignisse unabhängig von E zu bestimmen, aus einem Ausdruck, der alle 5 Ereignisse anführt, das Zeichen für das Ereignis E eliminieren. Er unterstellt fälschlicherweise, im Ausdruck „~C ⇒ (~A ⇒ E)“ mit der Bedeutung ~(~C · ~A · ~E) sei E „Folge“ von ~A und ~C; im Ausdruck „E⇒(A⇒(~D⇒C))“ mit der Bedeutung ~(E · A · ~D · ~C), sei E hingegen „Bedingung“ der anderen Ereignisse; E als „Folge“ könne dann durch seine „Bedingungen“ ersetzt werden, und es resultiere ein Urteil „~C⇒(~A⇒(A⇒(~D⇒~C)))“, in dem E „weggeschafft“ sei. Was auf diese Weise resultiert, ist nun freilich kein Urteil mehr über einen logischen Zusammenhang; es ist das Fregegesetz ~(~C · ~A · A · ~D · ~C), das die gleichzeitige Geltung von A und ~A ausschließt – und das mit dem spezifischen Gehalt der vorliegenden Beziehung zwischen A, B, C, D und E *rein gar nichts* zu tun hat.

103 Generell gilt: Zwischen n logischen Formen besteht eine bestimmte logische Totalrelation, aus der für jeden der möglichen Vorkommenskombinationen von n-1 dieser n logischen Relationen hervorgeht, ob die restliche logische Relation notwendig oder möglicherweise gilt bzw. nicht gilt.

104 Diese Ausdrücke drücken nicht direkt elementare logische Gesetze aus, da (∀x)(Fx⇒Gx) etwa nicht die logische Relation (∘0∘∘)(Fx, Gx) bezeichnet, sondern eine prädikatenlogistische Aussageform: wird diese Aussageform für zwei konkrete Prädikate wahr, dann besteht zwischen eben diesen Prädikaten die logische Beziehung (∘0∘∘)(Fx, Gx). Der Ausdruck (1) besagt: „Wenn$_1$ die Aussageform (∀x)(Fx⇒Gx) für zwei konkrete Prädikate wahr wird, wird auch die Aussageform (∃x)(Fx⇒Gx) für diese beiden Prädikate wahr. Mit der Wahrheit von (1) liegt auch die Wahrheit des elementaren logischen Gesetzes: (∘0∘∘)(Fx, Gx) → (∘•∘∘)(Fx, Gx) fest und umgekehrt. Ausdruck (5) besagt: Die beiden Aussageformen (∃x)(Fx⇔Gx) und (∀x)(Fx ⊧ Gx) können nicht für dieselben zwei Prädikate wahr werden; mit der Wahrheit von (5) liegt die Wahrheit des elementaren logischen Gesetzes (∘••∘)(Fx, Gx) ↑ (0100)(Fx, Gx) fest und umgekehrt. Dies gilt für alle derartigen Ausdrücke. Es besteht bedingungslogische Isomorphie.

105 Ausdrücke in dieser Notation sind nur sinnvoll und zulässig, wenn sie entweder eine logische Form oder ein logisches Gesetz (logische Form von logischen Formen) bezeichnen.

106 **Menne, Albert**: Implikation, HWP 4, Sp. 264

107 Das Fregerelationsgesetz (1*) behauptet die Allgemeingültigkeit der Aussageform, lautet also in vollständiger Darstellung:
∀ F, G [(∀x)(Fx⇒Gx) ⇒ (∃x)(Fx⇒Gx)].

108 Das Gesetz (**1011**) [(∘0∘∘)(Fx,Gx), (∘•∘∘)(Fx,Gx)] wird in seinem Gehalt abgeschwächt zu (**∘0∘∘**) [(∘0∘∘)(Fx,Gx), (∘•∘∘)(Fx,Gx)].

109 Man kann also nur unter Voraussetzung der Kenntnis *aller* zweistelliger logischer Totalformen erkennen, ob ein Ausdruck „$\mathfrak{Q}_1$x(Fx ⊕ Gx) ⊖ $\mathfrak{Q}_2$x(Fx ⊗ Gx)“ die Allrelation bezeichnet oder nicht; diese Voraussetzung ist in der „modernen Logik“ nicht gegeben.

110 Die Verknüpfung schließt aus, dass von den Formen (∘0∘∘)(Fx,Gx) und (∘∘0∘)(Fx,Gx) keine gilt, ausgeschlossen wird also (•11•)(Fx,Gx); die logische Form kann so auch durch „~(•11•)(Fx,Gx)“ dargestellt werden.

Der Ausdruck (∘0∘∘)(Fx,Gx) ⋓ (∘∘0∘)(Fx,Gx) *benennt* direkt die logische Relation ~(•11•)(Fx,Gx); der Ausdruck „(∀x)(Fx ⇒ Gx) ⊽ (∀x)(Fx ⇐ Gx)“ tut dies indirekt; der Ausdruck „(∘∘∘0)(Fx,Gx) ∨ (∘•∘∘)(Fx,Gx)“ schließlich stellt ein falsches logisches Gesetz dar, da gilt (∘∘∘0)(Fx,Gx) ⊤ (∘•∘∘)(Fx,Gx).

111 Diese Darstellung ist abschwächend, weil bei dieser Darstellung nicht nur die Beziehung 𝔸 zwischen $\mathbb{Q}_1$x(Fx ⊕ Gx) und $\mathbb{Q}_2$x(Fx ⊗ Gx) möglich ist, sondern auch, die Beziehungen 𝕀, ℍ, 𝕂, 𝕁, 𝕃 und 𝕄. Diese abschwächende Darstellung ist als Erfüllbarkeitsaussage außerdem indirekt.

112 Eine *pränexe Normalform* „ist ein Ausdruck der Form $Q_1xi_1Q_2xi_2 \ldots Q_nxi_nH$, in dem $Q_1,\ldots,Q_n$ Quantoren sind und *H* ein quantorenfreier Ausdruck ist. … In einer pränexen Normalform dürfen also links von einem Quantor nur Quantoren und quantifizierte Variable stehen…“ (**KONDAKOW**, S. 367)

113 **HILBERT/ACKERMANN**, S. 9

114 Werden in der Gesetzesgleichung $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ die Beliebig-Element-Zeichen durch Bezeichnungen beliebiger reeller Zahlen ersetzt, ergeben sich wiederum wahre Gleichungen $(2+3)^2 = 2^2+2\cdot 2\cdot 3+3^2$, $(7+9)^2 = 7^2+2\cdot 7\cdot 9+9^2$, usw.; insofern haben wir es mit einem kategorischen Gesetz zu tun: was von beliebigen Zahlenpaaren gilt, kann auch von jedem einzelnen Zahlenpaar ausgesagt werden.

115 Es wird mehr als eine Vorkommenskombination definitiv als erfüllbar bestimmt; dem entspricht, dass die entsprechenden Vorkommenskombinationen beide realmöglich sind.

116 Diese Subsumtion kann assertorisch, problematisch oder kontrafaktisch sein.

117 Das logische Gesetz **(Fx → Gx) ↑ (Fx ↑ Gx)** kann nicht abgeschwächt durch „∀x(Fx ⇒ Gx) ⤊ ∀x(Fx ⤊ Gx)“ ausgedrückt werden, denn anders als die Formen (Fx →Gx) und (Fx↑Gx) können die elementaren Fregerelationen ∀x(Fx ⇒ Gx) und ∀x(Fx ⤊ Gx) zugleich gelten. Der Ausdruck „(∀x) (Fx ⇒ Gx) ⤊ (∀x) (Fx ⤊ Gx)“ verweist also auf kein gültiges logisches Gesetz, wohl aber auf eine komplexe Fregerelation, und zwar jene, die gilt, wenn jedenfalls nicht die Fregerelationen R_1: (∀x) (Fx ⇒ Gx) und R_2: (∀x) (Fx ⤊ Gx) beide zusammen gelten:

R_1 ohne R_2: (∘0∘∘) und (1•••), also (10••)
R_2 ohne R_1: (0∘∘∘) und (•1••), also (01••)
Weder R_1 noch R_2: (1•••) und (•1••), also (11••)

Wir erhalten also die Fregerelation ~(00••)(Fx,Gx) = (∘∘••)(Fx,Gx) = (∃x) (Fx ⋦ Gx).

118 Die genaueste Darstellung dieses logischen Verkettungsgesetzes für dreistellige Prädikate ist: [$\mathbf{R}_1$(x,y,z), $\mathbf{R}_2$(x,y,z), $\mathbf{R}_3$(x,y,z) ℂ𝕍]

119 Beispiel: Wenn *irgendeine* erste Person *irgendeine* zweite Person beraubt, dann fügt *diese* erste Person *dieser* zweiten Person Übles zu. Wenn irgendein erster Gegenstand zu irgendeinem zweiten Gegenstand in der Beziehung $\mathbf{R}_1$ steht, dann steht eben dieser erste Gegenstand zu eben diesem zweiten Gegenstand in der Beziehung $\mathbf{R}_2$.

120 Deshalb ist es nicht richtig, wenn **FREGE** meint, gerade die Mehrstelligkeit belege die logische Irrelevanz der Unterscheidung von Subjekt (Prädikand) und Prädikat; diese falsche Meinung kommt auf, wenn nicht der betreffende n-Tupel, sondern nur ein Glied dieses n-Tupels für den Prädikanden (das Subjekt) gehalten wird.

Auch **H.G.V.WRIGHT** (On the Idea of Logical Truth, in: Logical Studies, S. 28) meint, die Unterscheidung ein- und mehrstelliger Prädikate gehe einher mit zwei ganz verschiedenen Arten von Aussagen. „Propositions can be analyzed into parts which are not themselves propositions. There are two principal ways of analysis. The first way we can call the Aristotelian view of propositions. According to it, the proposition attributes a property to a thing (an object, an individual). The second we call the relational view of propositions. According to it, the proposition establishes a relation between a number of things“. Logisch grundlegend ist nicht die Stelligkeit der Prädikate, sondern die Subjekt-Prädikat-Beziehung: in jedem Urteil wird einem Gegenstand oder einem n-Tupel von Gegenständen (dem Subjekt oder Prädikanden) ein ein- bzw. mehrstelliges Prädikat zugesprochen.

121 Der Bezugsbereich eines Prädikats ist die Menge derjenigen Gegenstände oder derjenigen n-Tupel von Gegenständen, denen dieses Prädikat sinnvollerweise zu- oder abgesprochen werden kann.

122 „In einer Aussage, die mit mehreren Quantoren formuliert ist, können Individuenvariable n vorkommen, die verschiedenen Bereichen angehören.“ Die entsprechenden Formeln gehören dann der „mehrsortigen Prädikatenlogik“ an. (**HYOININGEN-HUENE**, S. 191)

123 Grundzüge der Logik, S. 169.

Für jedes einzelne Rennen gibt es für die Pferde einen anderen Bezugsbereich. – Diesen Fall spricht **QUINE** in folgender Aussage an: „›(x)(∃y)‹ sagt: Für jede Wahl von x kann ein y gewählt werden, so dass der folgende Satz wahr wird. Verschiedene x erfordern möglicherweise verschiedene y: Die Wahl von y hängt im Allgemeinen von der Wahl von x ab. Betrachten wir nun einen Satz ‚Fxyzw‘ mit den Variablen ‚x‘, ‚y‘, ‚z‘, ‚w‘. Angenommen, wir wollen sagen: Zu jedem x gibt es ein y, und zu jedem z gibt es ein wahr, so dass Fxyzw.“ (**QUINE**, Grundzüge, S. 102f)

124 Vgl. die Darlegung der logischen Beziehungen zwischen den zweimal quantorfixierten dreistelligen Relationen.

125 Hans zeigt jedem seiner Freunde nicht alle seiner Bilder – d.h. Hans zeigt jedem einzelnen seiner Freunde entweder nur einen Teil seiner Bilder oder keines dieser Bilder.

126 Vorkommenskombination II – $(\forall - \forall) \;\&\; \sim(\forall - \sim\forall)$ – ist realmöglich, wenn *allen – alles*; Vorkommenskombination III – $\sim(\forall - \forall) \;\&\; (\forall - \sim\forall)$ – ist z.B. realmöglich, wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination IV – $\sim(\forall - \forall) \;\&\; \sim(\forall - \sim\forall)$ – ist z.B. realmöglich, wenn *einigen – keines* und *einigen – alles*. Vorkommenskombination ist I – $(\forall - \forall) \;\&\; (\forall - \sim\forall)$ – nichtrealmöglich: denn *alle – alles* und *alle – nicht alles* schließen sich aus.

127 Vorkommenskombination I ist realmöglich bei *allen – alles*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – nur einen Teil (= einige, aber nicht alle)*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, wenn *alle – keines*.

128 Es ist unmöglich, dass zugleich *allen – alles* und *allen – keines (= nicht eines)*; eins ist ohne das andere möglich; nicht beides ist realmöglich, wenn z.B. *einige – alles* und *einige – keines*.

129 Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alles – nur zum Teil*.

130 Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: wenn es falsch ist, dass *allen – alles*, genau dann kann nicht falsch sein, dass *zumindest – eines* und *eines – nicht*.

131 Es ist möglich, dass beides nicht zugleich zutrifft, etwa wenn gilt: *nicht alle –eines nicht*.

132 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, etwa wenn *allen – nur ein Teil*; Vorkommenskombination III ist nichtrealmöglich: bei *allen – keines*, kann *allen – zumindest eines nicht*, nicht nicht gelten; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, etwa wenn *allen – alles*.

133 Vorkommenskombination I ist nichtrealmöglich: genau dann, wenn *einem – alle*, ist *allen - zumindest eines nicht* falsch; Vorkommenskombination II ist realmöglich. z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*; Vorkommenskombination IV ist genau dann nichtrealmöglich, wenn es nicht zutrifft, dass allen eines nicht zukommt, dann kommt zumindest einem alles zu.

134 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *allen – nur ein Teil*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *einigen – allen* und *einigen – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*.

135 Vorkommenskombination I ist realmöglich: z.B. wenn *allen – nur ein Teil*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: wenn *allen – eines nicht* nicht gilt, dann gilt *einem – alles*; dann aber kann *einem – eines* nicht falsch sein.

136 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *allen – keines*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich: wenn *allen – eines nicht*, kann *einem – eines nicht* nicht falsch sein; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *einigen – alles* und *einigen – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *allen – alles*.

137 Vorkommenskombination I ist nichtrealmöglich, denn *alle – eines* und *alle – nicht eines* sind unverträglich; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn gilt *alle – nicht eines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – eines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*.

138 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alle*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *alle – nur teilweise*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*.

139 Genau dann, wenn *alle – eines*, trifft *eines – keines* nicht zu.

140 Wenn *alle – eines* gilt, ist es unmöglich, dass *eines – eines* nicht gilt; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*.

141 Vorkommenskombination I ist realmöglich: *alle – eines* und *eines – nicht alle* liegen z.B. zusammen vor, wenn gilt *alle – nur teilweise*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alles*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn gilt *alle – keines*; Vorkommenskombination IV ist hingegen nichtrealmöglich: die Kontradiktion von *alle – eines* ist *eines – keines*; die Kontradiktion von *eines – nicht alle* ist *alle – alle*; *eines – keines* und *alle – alle* sind unverträglich.

142 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alle nicht*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich, denn bei *allen – keins* gilt auch *zumindest eins - keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, etwa wenn gilt *einige, aber nicht alle – keins*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich, z.B. wenn *alle – eines*.

143 Vorkommenskombination I nichtrealmöglich: *alle – keines* ist unverträglich mit *eines – eines*; Vorkommenskombination II und III; das eine kann jeweils ohne das andere gelten; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: die Negation von *alle – keines* ist *eines - eines*, und die Negation von *eines - eines* ist *alle - nicht eines*; die Negation des einen führt jeweils auf das andere.

144 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*; Vorkommenskombination II nichtrealmöglich: *alle keines* ist unverträglich mit *alle alle*; Vorkommenskombination III realmöglich, z.B. wenn *alle teilweise*; Vorkommenskombination IV realmöglich, bei *alle alle*.

145 Vorkommenskombination I realmöglich, z.B. wenn *einige – alles* und *einige – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. wenn *alle – alle*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – keines*; die beiden Negationen *alle – eines nicht* und *alle – eines* sind verträglich, z.B. wenn *alle – teilweise*.

146 Vorkommenskombination I ist realmöglich, z.B. bei *eines – alle*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich: *eines – alle* ist unverträglich mit *alle – keines*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn *alle – teilweise* gilt; Vorkommenskombination IV ist realmöglich: *alle – eines nicht* und *alle – keines* gelten etwa bei *alle – keines* zugleich.

147 Vorkommenskombination I ist realmöglich, beides gilt etwa bei *einige – alle* und *einige – teilweise*; Vorkommenskombination II ist realmöglich: *eines – alle* und *alle – alle* sind verträglich; Vorkommenskombination III ist realmöglich: *alle – eins nicht* und *eines – eines nicht* sind verträglich; Vorkommenskombination IV nichtrealmöglich: *alle – eines nicht und alle – alle* sind unverträglich.

148 Vorkommenskombination I ist realmöglich: beides gilt z.B. wenn *einige – alle* und *einige – keines*; Vorkommenskombination II ist realmöglich: *eines – keines* und *alle – keines* sind verträglich; Vorkommenskombination II ist realmöglich: *alle – eines* und *eines – eines* sind verträglich; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich: denn *alle – eines* und *alle – keines* sind unverträglich.

149 Vorkommenskombination I realmöglich: bei *eines – keines* gilt auch *eines – eines nicht*; Vorkommenskombination II ist nichtrealmöglich: *eines – keines* ist unverträglich mit *alle – alle*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, z.B. wenn gilt *alle – teilweise*; Vorkommenskombination IV ist realmöglich: *alle – eines* und *alle – alle* sind verträglich.

150 Vorkommenskombination I ist realmöglich, etwa wenn gilt *eines – teilweise*; Vorkommenskombination II ist realmöglich, z.B. bei *eines – eines* und *alle – alle*; Vorkommenskombination III ist realmöglich, wenn gilt *alle – keines* und *eines – eines nicht*; Vorkommenskombination IV ist nichtrealmöglich, denn *alle – keines* und *alle – alle* sind unverträglich.

151 Die Negationen aller zweifach quantorfixierten dreistelligen Relationen (die doppelte Negation nicht nicht hebt sich auf)
nicht(alle – alle) ≡ (eines – nicht alle) ≡ (eines – eines nicht)
nicht(alle – alle nicht) ≡ (eines – nicht alle nicht) ≡ (eines – eines nicht nicht)
nicht(alle – eines) ≡ (eines – nicht eines) ≡ (eines – alle nicht)
nicht(alle – eines nicht) ≡ (eines – nicht eines nicht) ≡ (eines – alle nicht)

nicht(eines – alle) ≡ (alle – nicht alle) ≡ (alle – eines nicht)
nicht(eines – alle nicht) ≡ (alle – nicht alle nicht) ≡ (alle – eine nicht nicht)
nicht(eines – eines) ≡ (alle – nicht eines) ≡ (alle – alle nicht)
nicht(eines – eines nicht) ≡ (alle – nicht eines nicht) ≡ (alle – alle nicht nicht)

152 *Nichtelementar* sind jene Quantoren, bei deren Geltung *zwei* elementare Quantoren möglich sind: so kann bei *nicht alle* ≡ *eines nicht* gelten: entweder: *einige, aber nicht alle* oder *keines*; bei *einige* kann gelten entweder *einige, aber nicht alle* oder *alle*. Diese drei elementaren Quantoren $\forall x Px$, $\forall x \sim Px$ und $\exists\exists x Px$ entsprechen den drei elementaren Modalitäten $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{K}$; die drei nicht-elementaren Quantoren $\exists x Px \equiv \sim\forall x \sim Px$, $\exists x \sim Px \equiv \sim\forall x Px$ und $\sim\exists\exists x Px$ besagen dasselbe wie die nicht-elementaren Modalitäten $\mathcal{P}$ (= $\sim\mathcal{U}$) und C (= $\sim\mathcal{U}$) und $\mathcal{A}$ (= $\sim\mathcal{K}$: entweder $\mathcal{N}$ oder $\mathcal{U}$).

$[(\forall x \in \mathbf{B})\, Px] \leftrightarrow (x \in \mathbf{B})\mathcal{N}(Px)$	genau dann, wenn alle x aus dem Bezugsbereich **B** P zukommt, kommt einem x aus **B** P notwendig ($\mathcal{N}$) zu
$[(\forall x \in \mathbf{B}) \sim Px] \leftrightarrow (x \in \mathbf{B})\mathcal{U}(Px)$	genau dann, wenn keinem x aus dem Bezugsbereich **B** P zukommt, kommt einem x aus **B** P unmöglich ($\mathcal{U}$) zu
$[(\exists\exists x \in \mathbf{B})\, Px] \leftrightarrow (x \in \mathbf{B})\mathcal{K}(Px)$	Genau dann, wenn zumindest einem, aber nicht allen x aus **B** P zukommt, kommt einem x aus **B** P möglicherweise ($\mathcal{K}$) zu
$[(\exists x \in \mathbf{B})\, Px \leftrightarrow (x \in \mathbf{B}) \sim\mathcal{U}(Px)$	Genau dann, wenn zumindest einem x aus **B** P zukommt, ist es nicht unmöglich ($\mathcal{U}$), dass einem x aus **B** P zukommt
$[(\exists x \in \mathbf{B}) \sim Px \leftrightarrow (x \in \mathbf{B}) \sim\mathcal{N}(Px)$	Genau dann, wenn zumindest einem x aus **B** P zukommt, ist es nicht notwendig ($\mathcal{N}$), dass einem x aus **B** P zukommt
$[\sim(\exists\exists x)\, Px \leftrightarrow (x \in \mathbf{B}) \sim\mathcal{K}(Px)$	Genau dann, wenn nicht zutrifft, dass einigen x aus **B** P zukommt und einigen x aus **B** P nicht zukommt, kommt einem x aus **B** P entweder notwendig ($\mathcal{N}$) oder unmöglich ($\mathcal{U}$) zu.

Der nicht elementare Quantor ∃∃x (einige, aber nicht alle) erhält in der „modernen Logik“ keinen eigenständigen Ausdruck, muss aber immer implizit berücksichtigt werden, wenn die logischen Verhältnisse der anderen Quantoren bestimmt werden.

153 So wie etwa auch jede logische Form und jedes logische Gesetz mit Hilfe von Prädikatoren beliebiger Stelligkeit formuliert werden können.

154 Dies Beispiel mit konkreten Prädikatoren in enthymematischer umgangssprachlicher Formulierung: Weil, wenn jemand alle seine Kinder liebt, er zumindest eines seiner Kinder liebt, und weil genau dann, wenn jemand zumindest eines seiner Kinder liebt, er nicht alle von seinen Kindern nicht liebt, deshalb trifft es nicht zu, dass einer nicht alle seiner Kinder nicht liebt, wenn er alle seine Kinder liebt.

155 (∘∘••⌣∘•∘•)(Fx, Gx) soll bedeuten: $((I = 1 \vee II = 1) \vee (I = 1 \vee III = 1)$

156 **Quine** (Grundzüge der Logik, S. 185) spricht von „gemischten Schemata“.

157 Wir haben eine Aussageform der Art: $[1 + 1 = 2 \otimes \text{Mensch}(x)]$, wobei Mensch(x) einer „Aussagevariablen“ entspricht. Für diese Aussageform steht der Wahrheitswert bei einer gegebenen Wahl für A und Fx noch nicht fest!

158 Diese Erwägungen bleiben im Rahmen der „modernen Logik“ freilich durchgängig intuitiv (und entsprechend vage), da hier immer bestimmte logische Gesetze (insbesondere Gesetze des Quantorenquadrats) als „Axiome“ genommen werden, aus denen dann mit Hilfe geeigneter Umformungsregeln (auch diese sind wiederum intuitiv als gültig unterstellte beweisbare logische Gesetze) andere logische Gesetze abgeleitet werden. Das Verständnis dieser auf logische Sachverhalte verweisenden prädikatenlogistischen Ausdrücke bleibt hoffnungslos ungenau, fehlerhaft, verschwommen, solange nicht ein sachgerechter Begriff der logischen Form gewonnen und klar zwischen logischen Formen und Gesetzen unterschieden wird; diese Voraussetzungen sind im Rahmen der „modernen Logik“ nicht gegeben.

II, Kapitel 5: Die Modalitätenlogistik

5.1. Die Motive der Erarbeitung einer Modalitätenlogistik.

Die logischen Formen haben sich als Verhältnisse der relativen Modalisierung des Vorliegens und Nichtvorliegens von Ereignissen und Sachverhalten bestimmter Art erwiesen; es sind Strukturen bedingungslogischer Gesetzeszusammenhänge. Die fregeschen Gedankengefüge hingegen sind unter der Voraussetzung der Zusammenhanglosigkeit der Aussagen konstruiert, denen sie zugesprochen werden, und geben die vorgegebenen Wahrheitswerte dieser Aussage tautologisch oder mit Informationsverschleierung wieder; sie sind gehaltlos und logisch irrelevant. Ihre Gehaltlosigkeit würde sofort offensichtlich, würde ihnen keine andere Bedeutung zugeschrieben als jene, die den klaren und eindeutigen Definitionen als „Wahrheitsfunktionen" entspricht; wenn etwa die Bedeutung des Gedankengefüges $A \Rightarrow B$ korrekt nur als die Behauptung gefasst wird, dass von zwei willkürlich und beliebig zusammengestellten Aussagen A und B jedenfalls nicht die erste wahr und die zweite falsch ist – *und sonst nichts*, liegt die logische Irrelevanz des Gedankengefügeprädikats **C** offen zu Tage. Werden von irgendwelchen verschiedenen Aussagen nur die Wahrheitswerte berücksichtigt, wie es **FREGE** für die Gedankengefüge festsetzt, dann drücken *alle* Gedankengefüge nur die Voraussetzung des logischen Independenz aus: irgendeine Aussage ist wahr bzw. falsch, ob nur eine andere Aussage wahr oder falsch ist. Diese Independenz gehört zu den Konstruktionsprinzipien des SFG. Dass die Gedankengefüge keine logischen Beziehungen darstellen, geht unmittelbar aus ihren klar definierten Bedeutungen hervor.

Weil diese Bedeutung der Gedankengefüge im Rahmen der „modernen Logik" jedoch nicht gemäß ihren doch klaren Definitionen aufgefasst werden, sondern durchweg einer unzulässigen logischen Missdeutung unterzogen werden, um einen nicht vorhandenen logischen Gehalt vorzutäuschen, wurde die logische Gehaltlosigkeit der Gedankengefüge nur indirekt und nur unvollständig bewusst, insbesondere im intuitiv gefühlten Widersinn, der sich aus der logischen Missdeutung bestimmter SFG-Formeln ergibt. Eine vage, eher gefühlte als begriffene, eher verschämte als konsequente „dissatisfaction with the notion … of material implication" wurde dann zum Ausgangspunkt verschiedener Versuche, dem Unbehagen an den aus der Missdeutung resultierenden Paradoxien durch die *zusätzliche* und nachträgliche Berücksichtigung angeblicher modaler Gesichtspunkte zu begegnen. „Die Aufgaben, die am Ausgangspunkt der modernen Modallogik standen", wurden darin gesehen, „die Schwachstellen der materialen Implikation auszubessern."[1] **C. I. LEWIS** stellte der „materialen Implikation" **C** eine „strikte Implikation" zur Seite, die nicht nur wie **C** ausdrücken sollte, dass es faktisch falsch ist, dass eine erste Aussage wahr und eine zweite Aussage falsch ist, sondern dass dies *unmöglich* ist, bzw. dass im Falle der Wahrheit der ersten Aussage die zweite Aussage *notwendig* wahr ist. Bei der logischen Missdeutung *echter*, rein „wahrheitsfunktionaler" **C**-Aussagen wie „Wenn Frege katholisch war, war Wittgenstein ein Österreicher" vermisst das logisch unverdorbene Bewusstsein den an die Partikel *Wenn* gebundenen, durch das Gefühl der Notwendigkeit begleiteten Zusammenhang, der bei den umgangssprachlichen Wenn_1- und Wenn_2-Aussagen immer vorhanden ist. Erweiterungen der „Aussagenlogik" durch modale Konzepte sollten sicherstellen, dass auch der Gebrauch des Gedankengefüges **C** von einem solchen Notwendigkeitsgefühl begleitet ist. Mit **C. I. LEWIS**' Versuch, ein Konzept der Implikation zu entwickeln, das nicht zu den „Paradoxien" führt, die sich aus der logischen Missdeutung des Gedankengefüges **C** ergeben, habe die „modern modal logic properly so called" begonnen[2].

Die aus der logischen Deutung der Gedankengefüge resultierenden Paradoxien haben bislang keine ernsthafte, durchgreifende kritische Überprüfung der fregeschen Begriffsbildungen veranlasst; diese SFG-Konzepte gelten weiterhin als absolut sakrosankte Grundlage der „modernen Logik". Da allenfalls eine „Erweiterung" dieser Konzepte durch modale Bestimmungen als zulässig gilt, mussten die Modalbestimmungen so zugerichtet werden, dass sie mit den Voraussetzungen des SFG, d.h. mit dem Konzept der Gedankengefüge, verträglich waren. Die *modal logics* „will all be based on the propositional calculus…, they will include all the wffs of PC, with the same interpretation as before."[3] An diesem „*Erweiterungspostulat*" orientiert sich die gesamte „moderne Modallogik". Die dieser Forderung verpflichteten „modallogischen" Entwürfe fasse ich im Folgenden unter der Bezeichnung „Modal*logistik*" zusammen: dem Zeichenvorrat des SFG werden Bezeichnungen der Modalitäten („$\Box$", „**N**" oder „**L**" für „notwendig", „$\diamond$" oder „**M**" für „möglich", „**U**" für „unmöglich" – wie sachgerecht auch immer definiert – hinzugefügt[4].

5.2. Die Konzeption der „alethischen Modalitäten“

Die Versuche, die fregesche Gedankengefüge-Konzeption der logischen Formen im Nachhinein um die Betrachtung der Modalitäten zu erweitern und dadurch logisch gehaltvoller zu machen, sind aussichtslos. Alle vorgeschlagenen „modallogischen“ *Erweiterungen*, soweit sie überhaupt Sinn ergeben, erweisen sich als nur scheinbare Erweiterungen des SFG und betreffen Gesichtspunkte, die dem SFG schon von Anfang an zugehören. Eine systematische, vollständige und allgemeine Bestimmung der Modalitäten, wie sie in intuitiv-unreflektierter Weise in Alltag und Wissenschaft in Gebrauch sind, ist auf diese Weise nicht durchführbar. Das Erweiterungspostulat führt zur Vorstellung, die „modalen“ Bestimmungen könnten die *Wahrheitswerte* von Aussagen näher bestimmen und modifizieren; dies steht im Widerspruch zu konstitutiven Voraussetzungen des SFG, insbesondere widerspricht es dem Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit, demzufolge eine Aussage entweder wahr oder falsch ist und sonst nichts. Im Rahmen der Modalitätenlogistik werden die Modalitäten grundsätzlich als „*alethische* Modalitäten“ aufgefasst, d.h. als *zusätzliche* – verstärkende oder abschwächende – Qualifizierungen des Wahr- bzw. Falschseins der Aussagen selbst[5]. Die „modale Aussagenlogik“ behandle „Aussagen, deren Wahrheit bzw. Falschheit notwendig, möglich, unmöglich oder zufällig“ sei; „›**N**A‹ solle bedeuten: ‚die Aussage *A* ist notwendig wahr‘.“[6] „A proposition which is bound to be true we call a *necessarily true* proposition, or simply a *necessary* proposition; one which is bound to be false we call an *impossible* proposition… If a proposition is not impossible, we say it is a *possible* proposition.“[7] Diese „alethischen“, angeblich die Wahrheitswerte modifizierenden „Modalitäten“ gelten als die eigentlich „logischen Modalitäten“; sie sollen „den Grundstock dessen, was man heute ›klassische Modallogik‹“ nenne, bilden[8].

Ist es in Anbetracht des Prinzips des Nichtwiderspruchs (PNW), demzufolge eine Aussage entweder wahr oder falsch ist (tertium non datur), überhaupt möglich, die Wahrheit oder Falschheit von Aussagen durch solche „Modalitäten“ zu graduieren und zu relativieren, d.h. graduelle Unterschiede des Wahr- bzw. Falschseins zu postulieren? Kann man, wie **Hughes** und **Cresswell**, *einerseits* betonen „Every proposition is either true or false“[9], zugleich aber behaupten, es gebe wahre *Aussagen*, die „merely happen to be true“, und wahre Aussagen, die „bound to be true“ sind[10]? Folgende Überlegungen sprechen dafür, dass das SFG durch derartige Bestimmungen nicht erweiterbar ist. Da Gedankengefügeprädikate Aussagen ausschließlich danach beurteilen, ob sie für schlicht wahr oder schlicht falsch gehalten werden, könnten die Gedankengefüge Aussagen nicht mehr zugeschrieben werden, wenn deren Wahrheitswerte durch derartige „modale“ Bestimmungen modifiziert und graduiert würden; das SFG wäre durch die „modalen“ Bestimmung nicht erweiterbar, die Gedankengefüge müssten vielmehr völlig neu definiert werden (eine solche Neudefinition der Gedankengefüge wurde in so genannten „mehrwertigen Logiken“ versucht); die Wahrheit der Gedankengefüge müsste nicht nur für die Fälle bestimmt werden, dass vorgegebene Aussagen wahr oder falsch sind, sondern auch für die Fälle, dass diese Aussage „notwendig wahr“, „möglicherweise falsch“ usw. sind. Auf der anderen Seite müssten Behauptungen wie „Die Aussage A ist notwendig bzw. möglicherweise wahr bzw. falsch“ selber entweder wahr oder falsch sein[11], und solchen Behauptungen dürften Gedankengefüge nur nach Maßgabe dieser vorgegebenen einfachen Wahrheitswerte prädiziert werden, während die „alethischen Modalitäten“ zum „Gedankeninhalt“ dieser Aussagen gehörten, der bei der Bewertung der Wahrheit der Gedankengefügeaussagen gar nicht berücksichtigt wird.

Die Modalitäten **N**, **M** und **U** werden als „Aussageoperatoren“ aufgefasst, die aus Aussagen A selber wieder wahrheitswertdefinite Aussagen „**N**A“, „**M**A“, usw. bilden, und solchen Aussagen können Gedankengefüge nur dann zugesprochen werden, wenn wir die Bedingungen für die schlichte Wahrheit solcher „Modalaussagen“ **N**A oder **M**A kennen. Die Frage, unter welchen Bedingungen genau eine Aussage A über ihr schlichtes Wahr- bzw. Falschsein hinaus „notwendig wahr/falsch“ oder „nicht notwendig wahr/falsch“, „möglicherweise wahr/falsch“ oder „nicht möglicherweise wahr“ ist, wird im Rahmen der „modernen Logik“ nicht oder (zumindest nicht einheitlich) beantwortet. Zum einen bleibt das Verständnis der Modalitäten intuitiv und vortheoretisch; man belässt es dabei, unreflektiert-intuitive, umgangssprachlich ausgedrückte Vorstellungen durch „Symbole“ wie **N**, **M** und **U** darzustellen, und hantiert dann mit den undefinierten und bedeutungsmäßig verschwommenen „Symbolen“, ohne sich um eine präzise und einheitliche nicht-intuitive Definition der Bedeutung dieser Bezeichnungen zu bemühen.

Dieser Umstand ist deutlich im Zusammenhang mit folgender beliebter *zirkulärer Scheindefinition der Modalitäten*; eine der Modalitäten wird zum „unbestimmten Grundbegriff“ („unbestimmter Begriff“ ist eine contradictio in adjecto) deklariert, von dem aus die anderen Modalitäten durch Negationen hergeleitet und dadurch „definiert“ werden sollen. „Die übliche Modallogik verwendet die beiden Funktoren ‚**N**‘ für ‚notwendig und ‚**M**‘ für ‚möglich‘ sowie deren Negationen für ‚nicht notwendig‘ bzw. ‚zufällig‘ und ‚unmöglich‘. Wenn nun der Funktor ‚**N**‘, irgendeine Aussage ‚A‘ und die Negation ‚$\neg$‘ bereits gegeben sind, dann lässt sich die Möglichkeit definieren durch ‚$\mathsf{\mathbf{M}}$A‘ $\stackrel{\text{def}}{=}$ ‚$\neg\mathsf{\mathbf{N}}\,\neg$A‘ (‚es ist möglich, dass A‘ wird definiert durch ‚es ist nicht notwendig, dass nicht A‘). Wird dagegen die Möglichkeit vorausgesetzt, dann lässt sich die Notwendigkeit analog definieren: ‚$\mathsf{\mathbf{N}}$A‘ $\stackrel{\text{def}}{=}$ ‚$\neg\mathsf{\mathbf{M}}\,\neg$A‘. einer der beiden Funktoren bleibt aber innerhalb der Modalitätenlogik indefinabel.“[12]

Gegen diese „Definitionen“ spricht, dass aus der Negation eines nicht oder nur vage Bestimmten keine Bestimmung und keine Definition resultieren kann; wenn ich nicht weiß, was ein undefiniert-bedeutungsloses Lautschema ‚Kobakel‘ bedeutet, weiß ich auch nicht, was ein Nicht-Kobakel ist – wenn der Ausdruck „notwendig wahr“ undefiniert und unbestimmt ist, dann kann auch der Ausdruck „nicht notwendig wahr“ nicht definiert und nicht bestimmt sein. Die Negation eines Unbestimmten ist eine fiktive Operation, eine derartige „negatio“ ist keine determinatio. Diese „Definitionen“ nehmen, genau besehen, nicht auf einen ‚undefinierbaren Grundbegriff‘ Bezug, sondern auf das dem Alltagsdenken implizite intuitiv-unreflektierte Verständnis dieser Ausdrücke; diese Modalitätenausdrücke werden im Rahmen des spontanen-gegenständlichen Erkennens ständig hinreichend adäquat verwendet, ihre Mehrdeutigkeit wird durch den objektiven Kontext ausgeräumt, sie sind aber noch nicht selbst Gegenstand einer systematischen expliziten theoretischen Bewusstwerdung geworden. Verbales Negieren auf der Grundlage intuitiven Verständnisses kann nicht zu einem Begreifen führen, das jenes Vorverständnis an Klarheit und Deutlichkeit übertrifft. Da diese „Definitionen“ bei den schillernden, keineswegs eindeutigen Bedeutungen umgangssprachlicher Modalausdrücke stehen bleiben, sind sie wertlos.

Außerdem erfasst diese Weise der Herleitung nicht alle Modalitäten. Da die Modalität *möglich* hier im Zusammenhang mit der Modalität *notwendig* betrachtet wird, kommt als Modalität der Möglichkeit nur die relative Möglichkeit $\mathcal{K}$ in Betracht – *notwendig* kann ja nur eine relative Modalität sein, für die unbedingten Modalitäten sind diese Negationen also gar nicht durchführbar. *Möglich* im Sinne von $\mathcal{K}$ ist ein Ereignis/Sachverhalt bestimmter Art (und nicht etwa eine Aussage), wenn ein derartiges Ereignis/ein derartiger Sachverhalt *bezüglich bestimmter Umstände* das eine Mal vorliegt, das andere Mal nicht vorliegt. Dann aber ist dieses Mögliche *weder* notwendig ($\mathcal{N}$), *noch* unmöglich ($\mathcal{U}$). In der dargelegten zirkulären Bestimmung wird aber das Mögliche als das Nicht-Unmögliche bestimmt, d.h. als das, was entweder möglich ($\mathcal{K}$) oder notwendig ($\mathcal{N}$) ist. Durch Negation kann man also weder von den apodiktischen elementaren Modalitäten $\mathcal{N}$ und $\mathcal{U}$ zur nicht-apodiktischen Modalität des Möglichen ($\mathcal{K}$), noch kann man von der Modalität $\mathcal{K}$ zu den apodiktischen Modalitäten gelangen; die Modalität des Möglichen ($\mathcal{K}$) lässt sich auf die besprochene Weise überhaupt nicht „herleiten“.

5.2.1. Die Modalitäten sind keine Modifikationen der Wahrheitswerte – weder hinsichtlich der „faktischen Notwendigkeit“ noch der bedingungslogischen Modalisierung

Die Behauptung, eine wahre Aussage sei *notwendig wahr*, wäre nur dann eine nichtredundante weitergehende Charakterisierung ihres schlichten Wahrseins, wenn der Unterschied zwischen *notwendig wahren* und *nicht-notwendig wahren* Aussagen bestimmt werden könnte. Fügt die Behauptung, eine Aussage sei notwendig wahr, der Behauptung, diese Aussage sei wahr, überhaupt etwas hinzu? Aussagen unterliegen den Prinzipien der Identität (PdI) und des Nichtwiderspruchs (PNW); für jede Feststellung $\mathcal{B}(p^*)$[13] gilt: $\vdash \mathcal{B}(p^*) \leftrightarrow\ \vdash \mathcal{B}(p^*)$ (PdI), gleichbedeutend $\vdash \mathcal{B}(p^*) \succ\!\prec \vdash_{\top} \mathcal{B}(p^*)$ (PNW). Daraus ergibt sich: *falls* eine Feststellung $\mathcal{B}(p^*)$ wahr ist, ist die Behauptung *notwendig* wahr (Vorkommensfallschluss $\mathbb{E}/\alpha$ des Identitätsprinzips), bzw. dann ist es *unmöglich*, dass die Behauptung falsch ist (Vorkommensfallschluss $\mathbb{J}/\alpha$ des PNW). *Falls* irgendeine Aussage wahr (bzw. falsch) ist, ist sie demnach *notwendig wahr* (bzw. *notwendig falsch*) in dem Sinne, dass es unmöglich ist, dass sie nicht wahr (bzw. nicht falsch) ist. Auch dann, wenn die Wahrheit bzw. Falschheit einer Aussage als „notwendig“ charakterisiert wird, bleibt das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten für die beiden Wahrheitswerte gültig.

Wie wird begründet, dass eine Feststellung $\mathcal{B}(p^*)$ wahr und damit im eben dargelegten Sinne „notwendig wahr“ ist? Jede noch so elementare Feststellung $\mathcal{B}(p^*)$ kann nur dann als wahr erwiesen werden, wenn sich zeigen lässt, dass im vorliegenden, aktuellen Einzelfall alle notwendigen Bedingungen dafür erfüllt sind, dass ein allgemein bestimmtes/r Ereignis/Sachverhalt der Art p vorliegt. Es muss also das *allgemeine*, die Sachverhalts-/Ereignisklasse p betreffende Wissen von *allen notwendigen* Bedingungen für das Vorliegen derartiger Ereignisse/Sachverhalte p durch einen Schluss auf die aktuelle Einzelsituation übertragen werden. Angenommen, die Sachverhalte/Ereignisse der Art p liegen *genau dann* vor, wenn zugleich die drei Bedingungen $q_1 \frown q_2 \frown q_3$ gegeben sind[14], wenn also das Gesetz $[p \leftrightarrow (q_1 \frown q_2 \frown q_3)]$[15] gilt; ergibt sich nun in einem aktuellen Fall, dass die drei notwendigen Bedingungen für p gegeben sind, liegt also $(q_1{*} \frown q_2{*} \frown q_3{*})$ vor und ist demnach $\mathcal{B}(q_1{*} \frown q_2{*} \frown q_3{*})$ wahr, dann ergibt sich aus der Gesetzesprämisse

$p \leftrightarrow (q_1 \frown q_2 \frown q_3)$ und der Wahrheit der Subsumtionsprämisse $\mathcal{B}(q_1{}^* \frown q_2{}^* \frown q_3{}^*)$, nach dem Schlussschema $\mathbb{E}/\gamma$, dass $\mathcal{B}(p^*)$ „notwendig wahr“ ist[16].

Durch diese modalisierende Erschließung der Wahrheit einer Feststellung $\mathcal{B}(p^*)$ wird das gegebene, *einzelne* Faktische p*, von dem die Feststellung jeweils handelt, in umfassendere, gesetzmäßige Zusammenhänge eingeordnet; es wird auf die allgemeinen, gesetzmäßigen Bedingungen des faktischen Vorliegens *aller* derartigen Sachverhalte/Ereignisse p bezogen. Die Gesetzesprämisse solcher Schlüsse auf das Vorliegen eines Ereignisses/Sachverhalts bestimmter Art ist immer eine logische $\mathbb{E}$-Relation zwischen den beiden Sachverhalts-/Ereignisklassen p und dem Vorliegen *aller notwendigen* Bedingungen wie z.B. $q_1 \frown q_2 \frown q_3$; sowohl p wie $(q_1 \frown q_2 \frown q_3)$ sind jeweils realmöglich – in manchen Fällen liegt p bzw. liegen die Sachverhalte/Ereignisse q_1, q_2 und q_3 zusammen vor, in den anderen Fällen gilt dies nicht. Das Gesetz behauptet dann, dass das eine der beiden Ereignisse immer nur mit dem anderen Ereignis vorliegt: da in allen Fällen, da $q_1 \frown q_2 \frown q_3$ gilt, auch p gilt, ist im Falle, da $q_1{}^* \frown q_2{}^* \frown q_3{}^*$ zutrifft, notwendig auch p* der Fall.

Die $\mathcal{N}$-Modalisierung, die mit allen diesen *Schlüssen des Dass* (Schlüsse auf das Vorliegen eines Faktums, d.h. Schlüsse, die eine Antwort auf die Frage, welche Art von Sachverhalt/Ereignis aktuell vorliegt) verbunden ist, kann man *faktische Notwendigkeit* nennen, denn sie besagt entsprechend dem PNW, dass, was der Fall ist, in dem Sinne notwendig der Fall ist, als es unmöglich ist, dass es nicht der Fall ist. Diese faktische Notwendigkeit stellt keine Graduierung des Wahrheitswertes $\mathcal{W}$, keine „alethische Modalität“ dar, denn sie kennzeichnet ja *jede* wahre Aussage. Diese „faktische Notwendigkeit“ ist keine Bestimmung, die als zusätzliches modales Attribut zum nicht-modalisierten Wahrheitswert hinzukommen oder wegbleiben könnte, sondern kennzeichnet alles Wahrsein als solches; das Wahre ist das hinreichend Begründete. Es gibt keine Aussagen, die wahr, jedoch nicht notwendig wahr in *diesem* Sinne sind; insbesondere kann es keine nicht-notwendig, „möglicherweise wahre“ Aussage geben, d.h. eine Aussage, die bald wahr, bald falsch wäre. Diese redundante Kennzeichnung einer wahren Aussage als „notwendig wahr“, stellt nur heraus, dass die Aussage begründet, d.h. auf die allgemeinen Bedingungen des Vorliegens solcher Sachverhalte/Ereignisse bezogen ist; dieser Hinweis ist im Grunde überflüssig, da wir nur dann berechtigt sind, eine Feststellung wahr zu nennen, wenn wir eine derartige Begründung geben können[17]. Dass eine Aussage in diesem Sinne als notwendig wahr bzw. *notwendig falsch* charakterisiert werden kann, ist also keine modalisierende Graduierung der Wahrheitswerte; es relativiert nicht das PNW, demzufolge eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, und berechtigt auch nicht von „alethischen Modalitäten“ zu sprechen.

Neben des *Schlüssen des Dass*, aus denen hervorgeht, was in einer aktuellen Situation der Fall ist, müssen wir *Schlüsse des Warum* unterscheiden; *Schlüsse des Warum* beantworten nicht die Frage, was für eine Art von Sachverhalt/Ereignis aktuell der Fall ist (die Beantwortung der Frage wird vielmehr vorausgesetzt), sondern sie geben Antwort auf die Frage, warum ein bestimmtes gegebenes Faktum der Fall ist, bzw. in welcher Weise bestimmte gegebenen Umstände dieses Faktische bedingen, u.U. verursachen. Auch hier wird das Faktische durch seine Einordnung in umfassendere gesetzmäßige Zusammenhänge modalisiert; es wird auf jene Sachverhalte/Ereignisse bezogen, die jenes Faktische stets, d.h. notwendig, oder in manchen und nicht in allen Fällen, d.h. möglicherweise ($\mathcal{K}$) bedingen. Die aus Schlüssen des Dass resultierende Notwendigkeit könnte *faktische Notwendigkeit*, die aus Schlüssen des Warum resultierende Notwendigkeit könnte *Gesetzesnotwendigkeit* genannt werden.

Der Unterschied der Schlüsse des Dass und des Warum kann durch folgende Beispiele verdeutlicht werden. Um das faktische Vorliegen einer Sonnenfinsternis zu konstatieren, genügt es, die Bedingungen des jeweils aktuellen Vorliegens zu kennen (die Sonne verdunkelt sich, die Mondscheibe schiebt sich vor die Sonne, Tageslicht und Tageswärme erlöschen, usw.); die schließende Anwendung dieses *Wissens des Dass* ermöglicht es, jederzeit zu entscheiden, ob eine Sonnenfinsternis stattfindet oder nicht. Weiß man darüber hinaus, wie und warum Sonnenfinsternisse durch die relativen, gesetzmäßigen und berechenbaren Bewegungen von Sonne, Mond und Erde hervorgerufen werden, kann man aus dem Gegebensein dieser Bedingungen auf das notwendige (oder mögliche – wenn man nicht alle hinreichenden Bedingungen berücksichtigt) Eintreten von Sonnenfinsternissen schließen. Ob jetzt Vollmond ist, kann ich durch einen Schluss des Dass feststellen, ohne dass ich über die Bedingungen der Mondphasen Bescheid wissen müsste. Ob heute in hundert Jahren Vollmond ist, kann ich jedoch nur durch einen Schluss des Warum auf der Basis eines komplexen bedingungslogischen Gesetzeswissens über die relative Bewegung von Mond und Erde vorhersagen. Während Schlüsse des Dass stets auf die aktuell-situativen Umstände (oder glaubhafte Augenzeugenberichte davon) bezogen sind, sind Schlüsse des Warum auch über zukünftige Ereignisse möglich (oder über vergangene Ereignisse, über die keine Augenzeugenberichte vorliegen); für die Zukunft gibt es keine reine faktische Notwendigkeit, keine Feststellung, die unabhängig vom Warum ist[18]. Das *Wissen des Dass* bezieht sich auf bestimmte vorliegende Gegebenheiten, aus denen zusammen mit dem klassifikatorischen Wissen des Dass hervorgeht, mit welchen Dingen und Ereignissen wir es in der aktuellen Situation zu tun haben. Das *Wissen des Warum* bezieht die Dinge und Ereignisse auf die gegebenen Umstände, und untersucht, inwieweit diese Umstände das Vorliegen oder Nichtvorliegen der Dinge und Ereignisse bedingen. Die von **ARISTOTELES** betonte Sonderstellung der zukünftigen gegenüber den gegenwärtigen und vergangenen Ereignissen besteht darin, dass es für die zukünftigen Ereignisse nur Schlüsse des Warum, nicht aber Schlüsse des Dass geben kann. Die Feststellung des bloßen Faktums, dass gegenwärtig oder in der Vergangenheit ein Ereignis p* vorliegt, ist durch Schlussfolgerungen anderer Art begründet als die *Prognose* und *Erklärung* des Ereignisses; die Begründung dafür, dass etwas der Fall ist, ist einfacher (theoretisch anspruchsloser, erfordert weniger fundiertes Wissen) als die Begründung dafür, warum etwas der Fall ist; ich brauche nur jene *aktuell gegebenen* situativen Bedingungen in Rechnung stellen, die sicherstellen, dass gerade dieses bestimmte und kein anderes Ereignis stattfindet (*Bedingungen der Faktizität*). Ein vergangenes oder gegenwärtiges Ereignis kann ich nur dann erklären, ein *zukünftiges* Ereignis kann ich nur vorhersagen, wenn jetzt schon ursächliche Bedingungen vorhanden sind, die in Zukunft jenes Ereignis unvermeidbar hervorbringen werden (*Bedingungen des Entstehens*).

Modalisierung bestimmt demnach die Faktizität nicht in seiner Isoliertheit, sondern stellt dieses Faktische in einen umfassenderen Zusammenhang: Modalisierung bezieht das Faktische bestimmter Art auf alle Fälle, in denen derartiges Faktisches vorliegt, sie bezieht das Faktische auf die bedingungslogischen Gesetzmäßigkeiten, denen alles derartige Faktische unterliegt: unter Umständen bestimmter Art ist Faktisches betreffender Art stets, d.h. notwendig der Fall, unter anderen Umständen sind sie möglich ($\mathcal{M}$), bei wieder anderen zufällig, bei wieder anderen unmöglich. Modalisierung ist ein Verhältnis von Einzelnem und Allgemeinem.

Dieser Zusammenhang von Faktizität und Modalisierung sei an Beispielen erläutert: Dass es, während jemand an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle läuft, blitzt, wird durch einen Schluss des Dass begründen: falls gezeigt werden kann, dass die Bedingungen für das gleichzeitige Vorliegen beider Ereignisse gegeben sind, ist dies der Fall, es ist unmöglich, dass es nicht der Fall ist. Wenn man nun über diese Feststellung hinaus behauptet, dass es *zufällig* ist, dass es in jener Situation beim Laufen geblitzt hat, werden beide Ereignisse auf einander bezogen und bedingungslogischen Gesetzmäßigkeiten subsumiert, die zwischen den Ereignis*klassen* obwalten, denen die beiden Einzelereignisse zugehören: bezüglich der Tatsache, dass jemand – wann und wo auch immer – einen Spaziergang macht, ist es zufällig ($\mathcal{Z}$), dass es blitzt, das Blitzen ist durch das Spazierengehen in keiner Weise bedingt. Da alle Vorkommensfälle für die beiden Ereignisklassen realmöglich sind, und das Ereignis des Blitzens nicht zu einer wohlbestimmten Menge von Ereignissen gehört, die man beim Laufen zu gewärtigen hat, ist es hinsichtlich des Laufens zufällig, dass es blitzt. Bezüglich anderer gegebener Umstände (etwa dass elektrische Entladungen bestimmter Art in den Wolken an besagter Raum-Zeit-Stelle stattfinden) ist *dasselbe* Faktum des Donnern dagegen notwendig[19]. Diese relative Modalisierung des Blitzens als zufällig (oder in anderer Beziehung als notwendig), bestimmt den Wahrheitswert der Behauptung, dass es beim Laufen geblitzt hat, nicht näher.

Bekanntlich besitzt das Ereignis, dass beim Würfeln die Augenzahl drei erzielt wird, den Wahrscheinlichkeitswert $\frac{1}{6}$ (jeder Wahrscheinlichkeitswert beruht auf der Modalität $\mathcal{M}$, bestimmt sie näher); wenn ich nun beim Würfeln tatsächlich eine Drei würfle, dann ist diese Faktum unumstößlich („notwendig wahr"). Wenn nun behauptet wird, das zweifelsfreie Faktum, dass ich eine Drei gewürfelt habe, sei nicht notwendig, sondern bloß möglich ($\mathcal{M}$) und besitze die Auftretenswahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, dann will ich nicht im Sinne einer „alethischen Modalität" das unumstößliche Faktum, dass ich eine 3 gewürfelt habe, abschwächen, sondern dann beziehe ich den vorliegenden Einzelfall auf alle möglichen Fälle, da gewürfelt wird – nur in einem Sechstel dieser Fälle wird auf lange Sicht eine Drei gewürfelt, und nur bezüglich aller dieser Fälle ist das Faktum nicht notwendig, sondern nur möglich ($\mathcal{M}$). Wenn **GEORG KLAUS** schreibt, „In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird … dem Wahrheitswert *wahr* die Wahrscheinlichkeit 1, dem Wahrheitswert *falsch* die Wahrscheinlichkeit 0, dem dritten Wahrheitswert – etwa *möglich* – die Wahrscheinlichkeit ½ zugesprochen"[20], verwechselt er die Modalitäten mit den Wahrheitswerten: Dass ein Ereignis (beim Würfeln: Augenzahl ≤ 6) den Wahrscheinlichkeitswert 1 hat, bedeutet nicht, dass es wahr ist, dass das Ereignis stattfindet, sondern dass ein derartiges Ereignis in allen Fällen, da ein Würfel geworfen wird, vorliegt – es geht nicht um die Faktizität des Einzelfalls und die Wahrheit seiner Feststellung, sondern um die Beurteilung des Einzelfalls hinsichtlich aller derartiger Fälle. Wenn ein Ereignis mit einem Wahrscheinlichkeitswert von ½ faktisch vorliegt (z.B. gerade Augenzahl), dann ist dies nicht weniger wahr, etwa „halb so wahr" wie das Ereignis mit dem Wahrscheinlichkeitswert 1. Wenn ein Ereignis nicht vorliegt, dann bedeutet dies nicht, dass der Wahrscheinlichkeitswert dieses Ereignisses gleich 0 ist. Wenn ich eine Drei würfle, dann ist es falsch, dass das Ergebnis Nicht-Drei eingetreten ist, aber dieses Ergebnis Nicht-Drei ist hinsichtlich des Würfelns nicht unmöglich, sondern möglich und besitzt einen wohlbestimmten Wahrscheinlichkeitswert. Bei der relativen Modalisierung geht es also nicht darum, ob etwas der Fall ist, sondern das *einzelne* Ereignis wird *auf alle Fälle* bezogen, da derartige Ereignisse bzw. bestimmte Umstände vorliegen. Der Wahrscheinlichkeitswert 1 ist kein Wahrheitswert, sondern er entspricht der Modalität $\mathcal{N}$; er besagt nicht, dass ein bestimmtes Ereignis vorliegt, sondern dass in allen Fällen bestimmter Art ein derartiges Ereignis vorliegt. Die Modalisierung geht also über die einfache Feststellung und seinen Wahrheitswert hinaus.

5.2.2. Die „alethischen Modalitäten" und der Unterschied der empirischen und logisch-mathematischen Sätze

Man hat im Unterschied, den **LEIBNIZ** zwischen so genannten Vernunftwahrheiten (*vérités de raison*) und Tatsachenwahrheiten (*vérités de fait*) festgestellt hat, eine unterschiedliche Modalisierung der Wahrheitswerte sehen wollen. Die Aussagen, die „Vernunftwahrheiten" zum Ausdruck bringen, sollen dabei zeitlich unbeschränkt und notwendig gültig sein; ihnen werden insbesondere die Aussagen der Mathematik zugerechnet. Die auf „Erfahrung" zurückgehenden „Tatsachenwahrheiten" sollen dagegen eine nur relative, und eingeschränkte, prinzipiell zweifelhafte Geltung besitzen. Unzweifelhafte Aussagen werden als *notwendig wahr*, mit Unsicherheiten belastete Aussagen hingegen als *nicht-notwendig* (oder „kontingent", „zufällig" oder „möglicherweise") *wahr* charakterisiert. Beispielsweise gilt etwa die Aussage „2+2=4" als „notwendig wahr", die Behauptung „Florence Nigthingdale starb 1910" hingegen als „nicht notwendig wahr"[21]. Die Behauptung, dass es in unserem Sonnensystem außerhalb der Erde keine Vernunftwesen gibt, und die Behauptung, von zwei verschiedenen natürlichen Zahlen sei die eine größer als die andere, seien zwar „material äquivalent", es handele sich jedoch um modal „verschiedene Arten des Wahrseins"[22]. Dass kein Körper sich schneller als das Licht bewegen kann, sei keine „notwendige wahre" Aussage, weil sie sich auf faktische Gegebenheiten stütze; „notwendig wahr" sei hingegen die Aussage, dass kein Quadrat rund sei[23]. Der wesentliche logische Unterschied der „notwendig wahren" und „nichtnotwendig wahren" Aussagen bestehe darin, dass die Negation einer „notwendig wahren" Aussage A eine Kontradiktion von A sei – d.h. falls A wahr sei, sei nicht-A falsch; von einer empirische Tatsachen behauptenden, „nicht-notwendig wahren" Aussage A hingegen gelte, dass ihre Negation nicht-A durchaus *auch* wahr sein könne, denn als „kontingente Wahrheiten" seien sie nur wahr zu einer bestimmten Zeit[24].

Diese Argumentation enthält zwei schwerwiegende Denkfehler. Es trifft natürlich zu, dass die Gewissheit, die wir mit Aussagen der Mathematik verbinden viel ausgeprägter und unerschütterlicher ist als die Gewissheit, die wir mit einer empirischen Feststellung und einem empirisch erschlossenen Gesetz verbinden können; letztere sind stets mit mehr oder weniger großen Unsicherheiten belastet, müssen stets einer Korrektur oder gar Verwerfung zugänglich sein und erreichen nie die strikte Apodiktizität mathematischer Aussagen[25]. Gleichwohl gilt für *beide* Arten von Aussagen, dass sie entweder wahr oder falsch sind, dass eine wahre Aussage nie falsch, eine falsche Aussage nie wahr ist. Die Aussage dass 2 kleiner als 5 ist, ist nicht wahrer als die Aussage, dass Florence Nightingdale 1910 starb – mögen auch die Sachverhalte, von denen die beiden Aussagen handeln, ihrer Art nach noch so unterschiedlich sein. Dass manche Behauptungen mit einer Ungewissheit belastet sind, bedeutet nicht, dass ihnen, *wenn sie wahr sind*, ein geringerer „Grad" an Wahrheit zukäme. Die Wahrheitswerte sind nicht graduierbar. Eine mathematische Behauptung ist, *wenn sie wahr ist*, nicht wahrer als wahr, und eine empirische Aussage ist, *wenn sie wahr ist*, nicht weniger wahr als wahr. Auch wenn wir uns über die Wahrheit einer Aussage nicht völlig sicher sind, müssen wir davon ausgehen, dass die Aussage entweder wahr oder falsch ist. Die modalen Bestimmungen graduieren also keinesfalls die Wahrheitswerte.

Es trifft also nicht zu, dass die apodiktischen Modalitäten für die mathematischen Aussagen (d.h. für die Aussagen, denen „notwendige Wahrheit" zugemessen wird), die nicht-apodiktischen Modalitäten (möglich $\mathcal{M}$ und zufällig $\mathcal{Z}$) aber für empirische Aussagen (deren Wahrheit als „nicht-notwendig" angesehen wird) zuständig sind. Sowohl die strikt gültigen mathematischen Aussage wie die mit prinzipieller Ungewissheit belasteten empirischen Gesetze stellen Gefüge apodiktischer ($\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$) *und* nicht-apodiktischer ($\mathcal{K}$) Modalisierungen dar; es gibt auch in der Mathematik notwendige wie nicht-notwendige Zusammenhänge: dass eine gerade Zahl durch 2 teilbar ist, ist notwendig, dass eine ungerade Zahl durch 3 teilbar ist, ist hingegen nur möglich ($\mathcal{M}$). Auf der anderen Seite stellen auch die empirischen Gesetze Zusammenhänge apodiktischer wie nicht-apodiktischer Modalisierungen dar: wenn beispielsweise jemand ermüdet ist, lässt seine Konzentration notwendig ($\mathcal{N}$) nach; wenn die Konzentration einer Person nachlässt, ist es möglich ($\mathcal{M}$), dass sie übermüdet ist. Der wichtige Unterschied zwischen dem empirisch-erfahrungsmäßigen und des logisch-mathematischen Wissens entspricht weder einem Unterschied der Wahrheitswerte, noch geht er mit dem Unterschied der apodiktischen und nicht-apodiktischen Modalitäten in dem Sinne parallel, als in der Mathematik nur die apodiktischen, in den empirischen Disziplinen nur nicht-apodiktische Modalitäten vorkämen.

Die unbedingten und relativen Modalisierungen sind für das empirische Wissen genau so konstitutiv wie für mathematisches Wissen, und unterscheiden sich in beiden Weisen des Wissens nicht – ein empirisches Implikationsgesetz hat dieselbe Struktur wie ein mathematisches Implikationsgesetz: nur die *Gewissheit*, die wir mit der Behauptung solcher modaler Verhältnisse verbinden, unterscheidet sich in beiden Fällen. Die Logik stellt die *normativen* Bedingungen dar, die erfüllt sein müssen, wenn diese oder jene bedingungslogische Beziehung gelten soll. Das empirische Wissen unterliegt den Normen der Logik nicht weniger als das mathematische (und das logische) Wissen, es kann diesen Normen nur nicht mit derselben Apodiktizität genügen – das ist jedoch kein Problem der theoretischen Logik, die nur die Bedingungen für die logischen Formen darlegt, in denen wir sowohl empirische wie mathematische Gesetzmäßigkeiten erfassen, ganz unabhängig davon, wie weit diesen Bedingungen in den verschiedenen Wissenschaften Rechnung getragen werden kann.

Zum zweiten unterstellt die Auffassung, die Negation einer „kontingenten" („möglicher"- oder „zufälligerweise") wahren Aussage A, sei keine Kontradiktion von A, und wenn A wahr sei, könne A auch falsch sein[26], dass für derartige Aussagen das PNW/PAD nicht gilt. Aber auch für eine empirisch begründete Aussage gilt, dass sie nicht falsch sein kann, *wenn sie wahr ist*. Wenn wir behaupten, eine Feststellung $\mathcal{B}(p^*)$ sei zwar wahr, aber es sei auch *möglich*, dass p* nicht der Fall ist, dann beurteilen wir in Wirklichkeit gar nicht den Wahrheitswert der Feststellung $\mathcal{B}(p^*)$, sondern wir beurteilen den Einzelsachverhalt (das Einzelereignis) p* bezüglich der Gesetzmäßigkeiten, denen *alle* derartigen Sachverhalte/Ereignisse unterliegen – und diese Gesetzmäßigkeit besagt, dass unter Bedingungen, wie sie im vorliegenden Fall gegeben sind, in den einen Fällen p vorliegt, in *anderen* Fällen aber p nicht vorliegt; die Tatsache jedoch, dass p* vorliegt, d.h. die Wahrheit der Aussage $\mathcal{B}(p^*)$, bleibt von dieser relativen Modalisation unberührt und besitzt „faktische Notwendigkeit".

Die der falschen Konzeption alethischer Modalitäten inhärente Nichtunterscheidung der Wahrheitswerte und der logischen (unbedingten und relativen) Modalitäten geht Hand in Hand mit der synkretistischen Konfusion von (behauptenden, wahrheitswertdefiniten) Aussagen und (nicht-behauptenden, benennenden) Sachverhaltsausdrücken – ein folgenreicher, schwerwiegender Fehler, der ja im Ganzen ein Charakterzug des fregeschen Logikentwurf ist. Die Annahme, die Behauptung „Es regnet (an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle)" sei nicht notwendig wahr, sondern „kontingent wahr", da es ja genau so gut möglich sei, dass es nicht regne, folglich sei die Negation der Aussage nicht falsch, verstößt gegen das PNW und beruht auf der Verwechslung der Tatsache, dass es an besagter Raum-Zeit-Stelle regnet (diese Tatsache ist Gegenstand der erwähnten feststellenden Aussage), mit dem allgemeinen Sachverhalt (der Sachverhalts-/Ereignisklasse), dass es regnet. Möglichkeit, sei es im Sinne der unbedingten ($\mathcal{V}$) oder der relativen ($\mathcal{K}$) Möglichkeit, kann nur von der Sachverhalts-/Ereignis*klasse* behauptet werden: da es bald regnet, bald nicht regnet, ist der allgemeine Sachverhalt *es regnet* realmöglich (unbedingt möglich); hinsichtlich bestimmter Umstände, kann das allgemeine Ereignis *es regnet* möglich im Sinne der relativen Modalität $\mathcal{K}$ sein. Der Ausdruck „es regnet" ist kein Satz, der eine Behauptung ausdrückt, sondern ein Sachverhaltsausdruck, der einen Sachverhalt/ein Ereignis bestimmter Art benennt (d.h. ein Begriffswort). Der Ausdruck „es regnet an dieser bestimmten Raum-Zeit-Stelle" hingegen ist eine Behauptung, die, wenn sie wahr ist, nicht falsch sein kann – der *einzelnen* Tatsache kann keine Möglichkeit zugeschrieben werden; trifft sie zu, dann ist es nicht möglich, dass sie zugleich nicht zutrifft.

Diese Konfusion von wahrheitswertdefiniten Aussagen, denen wohl ein Wahrheitswert, nicht aber eine Modalität zugeschrieben werden kann, mit Sachverhaltsausdrücken, die wohl durch eine Modalität, nicht aber durch einen Wahrheitswert charakterisiert werden können, entspringt dem entscheidenden Dilemma der „modernen Logik": einerseits sind die logischen Formen – wie **FREGE** oft genug selber konstatieren muss – keine Beziehungen von Aussagen; er untersucht dann aber nicht, welcher Art die Relata der logischen Formen sind und erkennt deshalb nicht, dass logische Formen Beziehungen von Sachverhalts-/Ereignisklassen (von Sachverhalten/Ereignissen bestimmter Art), für die wesentlich gilt, dass sie jeweils realmöglich sind (unter bestimmten Umständen vorliegen, unter anderen Umständen nicht vorliegen). **FREGE** postuliert kontrafaktisch, dass logische Formen Beziehungen von Aussagen sein sollen und verwechselt dann seine Gedankengefüge als Verhältnisse von wahrheitswertdefiniten Aussagen mit den logischen Formen, wobei der Bestimmung der Gedankengefüge das Prinzip zu Grunde liegt, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist (und eben nicht bald wahr, bald falsch sein kann). Da nun aber die bedingungslogischen Gesetze (etwa das Implikationsgesetz „Wenn durch einen Draht Strom fließt, erwärmt sich der Draht") durchweg Beziehungen von realmöglichen Sachverhalts-/Ereignisklassen sind[27], stellt sich das Problem, wie diese bedingungslogischen Beziehungen sich mit Hilfe der Gedankengefüge ausdrücken lassen. Die Sachverhaltsausdrücke müssen irgendwie als „Aussagen" erscheinen, damit sie zu Relata von Gedankengefügen werden können. Gerade wenn das Notwendige und insbesondere das Mögliche mit **FREGE**s Logikentwurf verbunden werden sollen, werden Ausdrücke von Sachverhalts-/Ereignisklassen in einer widersprüchlichen Weise zu „Aussagen" gemacht. Man spricht dann etwa von „Aussagen", die veränderliche Wahrheitswerte aufweisen: ein Sachverhaltsausdruck wie „es regnet" wird für **George von Wright** zu einer „generellen" oder „generischen *Aussage*", die jedoch weder wahr noch falsch sei, sondern einen Wahrheitswert erst durch den Bezug auf eine bestimmte Raum- und Zeitstelle erhalte[28]. Aber eben weil ein derartiger Ausdruck keinen Wahrheitswert besitzt und dem PNW/PAD nicht untersteht, ist er keine Aussage, auch keine generische (und auch keine *uneigentliche*, wie **Frege** sagt). „Such sentences are said to describe *generic* states of affairs."[29] Weil diese Ausdrücke Zustände von Dingen und Systemen in allgemeiner Weise benennen (und nicht ihr aktuelles Vorliegen konstatieren), sind diese Ausdrücke keine Sätze! Den nicht wertdefiniten „generischen Aussagen" könnten modale Bestimmungen beigelegt werden. „If a generic proposition is necessary, then every instantiation of it is true", „a generic proposition is possible if … it … has some true instantiations."[30]. In Wirklichkeit sind es nur Sachverhalts-/Ereignisklassen, denen Modalitäten zugeschrieben werden können[31]: ein Sachverhalt/Ereignis bestimmter Art ist (unbedingt) möglich (realmöglich), wenn derartige Sachverhalte/Ereignisse bald vorliegen, bald nicht vorliegen, sie sind unbedingt unmöglich (nichtrealmöglich), wenn sie unter keinen Umständen vorliegen; ein Sachverhalte/Ereignisse bestimmter Art ist relativ möglich ($\mathcal{K}$), wenn derartige Sachverhalte/Ereignisse unter ganz bestimmten Umständen bald vorliegen, bald nicht vorliegen, ein Sachverhalt/Ereignis ist relativ notwendig, wenn es unter ganz bestimmten Umständen stets vorliegt. Modalitäten dürfen prinzipiell nur Sachverhalts-/Ereignisklassen, niemals Aussagen (ob eigentlich oder uneigentlich) und ihren Wahrheitswerten zugeschrieben werden. Es gibt keine alethischen Modalitäten. Die Konzeption der alethischen Modalitäten entspringt dem aussichtslosen Versuch, die modalen Bestimmungen mit dem fregeschen Verständnis der logischen Formen zu vereinen.

5.3. Das Ungewisse als dritter „Wahrheitswert" und die Konstruktion „mehrwertiger Logiken"

In der Umgangssprache hat das Wort „möglich" mehrere unterschiedliche Bedeutungen, es bedeutet nicht nur die objektive unbedingte oder relative Modalität des Möglichen, sondern verweist auch auf den Tatbestand subjektiven Nichtwissens, auf den Tatbestand der Ungewissheit. Sind wir uns, aus welchen Gründen auch immer, im Ungewissen, ob ein bestimmtes einzelnes, an eine bestimmte Raum- und Zeitstelle gebundenes Ereignis p* eingetreten ist, eintritt oder eintreten wird, sagen wir oft „Die Aussage $\mathcal{B}$(p*) ist möglicherweise wahr" oder „es ist möglich, dass $\mathcal{B}$(p*) wahr ist" im Sinne von „Ich weiß nicht, ob $\mathcal{B}$(p*) wahr ist", „Ich kann nicht ausschließen, dass A wahr bzw. falsch ist", „Vielleicht ist A wahr" u.ä. Auch in diesem Falle wird nicht der Wahrheitswert näher bestimmt (modifiziert, eingeschränkt, abgestuft), sondern der Sprecher äußert, dass ihm dieser Wahrheitswert nicht definitiv bekannt ist.

Jan Łukasiewicz behauptet, diese Ungewissheit stelle zumindest in bestimmten Fällen neben dem *Wahren* und *Falschen* einen *dritten Wahrheitswert* dar: „Ich kann ohne Widerspruch annehmen, dass meine Anwesenheit in Warschau in einem bestimmten Zeitmoment des nächsten Jahres, z.B. mittags den 21. Dezember, heutzutage weder im positiven noch im negativen Sinne entschieden ist. Es ist somit *möglich,* aber *nicht notwendig*, dass ich zur angegebenen Zeit in Warschau anwesend sein werde. Unter dieser Voraussetzung kann die *Aussage*: ›ich werde mittags den 21. Dezember nächsten Jahres in Warschau anwesend sein‹, heutzutage *weder wahr noch falsch* sein. Denn wäre sie heutzutage wahr, so müsste meine zukünftige Anwesenheit in Warschau notwendig sein, was der Voraussetzung widerspricht; und wäre sie heutzutage falsch, so müsste meine zukünftige Anwesenheit in Warschau unmöglich sein, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht. Der betrachtete Satz ist daher *heutzutage* weder wahr noch falsch und muss einen dritten, von ›0‹ oder dem Falschen und von ›1‹ oder dem Wahren verschiedenen Wert haben. Diesen Wert können wir mit ›½‹ bezeichnen; es ist eben ›das Mögliche‹, das als dritter Wert neben ›das Falsche‹ und ›das Wahre‹ an die Seite tritt."[32]

Die Ungewissheit über den Wahrheitswerts von Aussagen kann durch die folgenden Gründe bedingt sein:

(1) Zum einen kann ein schlichter Mangel an Wissen bestehen, wobei jedoch prinzipiell die Möglichkeit besteht, sich das entsprechende Wissen zu verschaffen. Das Ereignis, um das es sich hierbei handelt, kann in der Vergangenheit, in der Gegenwart und der Zukunft liegen, es kann sich auch um zeitübergreifende Gesetzmäßigkeiten handeln. Es steht in diesem Falle durch objektive Gegebenheiten fest, dass die Aussage definitiv entweder wahr oder falsch ist, nur kennt der Sprecher den Wahrheitswert aus Gründen, die in seiner persönlichen Lebenslage liegen, nicht.

(2) Der Mangel an Informiertheit kann auch durch objektive, durch menschliche Anstrengung nicht zu beseitigende Umstände bedingt sein. So lassen sich etwa bestimmte vergangene Ereignisse nicht mehr rekonstruie-

ren, weil die dafür vorauszusetzenden Indizien und Spuren des Ereignisses nicht mehr vorhanden sind. Wir wissen zwar, dass die entsprechende Aussage entweder wahr oder falsch ist, aber es gibt keine Möglichkeit, Gewissheit darüber zu erlangen. Wenn die Wahrheit einer vergangene Ereignisse betreffenden Aussage ungewiss ist, dann gilt gleichwohl, dass die Aussage entweder wahr oder falsch ist, ob diese Ungewissheit überwindbar ist oder nicht.

(3) Ein zukünftiges Ereignis ist noch nicht determiniert, d.h. es ist noch objektiv offen, ob es eintreten wird. Es sind nur Vermutungen möglich (auf der Basis allgemeinen Wissens). Ob bei der nächsten Ziehung der Lottozahlen die Nummer 29 gezogen wird, ob der Herr Maier in zehn Jahren noch am Leben ist, ob ich am 21. Dezember nächsten Jahren in Warschau sein werde – solches liegt objektiv heute noch gar nicht fest; niemand kann es sicher wissen.

Gerade dieser dritte Fall, die *objektive* Unentschiedenheit und Offenheit bestimmter zukünftiger Ereignisse soll eine Einschränkung der strikten Geltung des PNW/PAD erfordern; es wird dabei unterstellt, dass die uneingeschränkte Geltung des PNW/PAD zur Annahme eines fatalistischen, absoluten Determinismus verpflichte. Da die strikte Geltung des PNW/PAD bedeute, dass für alle Zeiten und seit jeher unabänderlich feststehen müsse, ob eine Aussage wahr oder falsch sei, müsse auch von jenen Ereignissen, von denen die Aussagen handeln, schon immer feststehen, ob sie eingetreten sind, eintreten oder eintreten werden. Dieser Schluss erscheint insbesondere dann als unumgänglich, wenn man die Aussagen (Gedanken) – wie **FREGE** – gegenüber den Menschen, die sie äußern und verstehen können, und gegenüber den objektiven Tatbeständen, über die etwas ausgesagt wird, reifiziert und verselbständigt. Unter den Voraussetzungen eines solchen absoluten Determinismus wäre es nicht möglich, die Wirklichkeit durch ein planvolles und überlegtes Handeln zu beeinflussen, drohendes Unheil abzuwenden, für eigene Entscheidungen gäbe es weder Möglichkeit noch Notwendigkeit[33]. Man hat oft gemeint, diese nicht annehmbare Folgerung[34] ließe sich nur vermeiden, wenn die ausnahmslose Gültigkeit des PNW/PAD beschränkt würde. Eine Schlüsselrolle in dieser Argumentation spielt die Annahme von **ŁUKASIEWICZ**, einer derartigen *Aussage* müsse, da sie *weder wahr noch falsch* sei, ein *dritter* Wahrheitswert zukommen.

Ein Satz, der ein Ereignis konstatiert, das noch nicht determiniert ist, von dem deshalb offen ist, ob es stattfinden wird oder nicht[35], kann streng genommen gar nicht als Bezeichnung einer *Aussage* angesehen werden, da es noch keinerlei objektive Basis gibt, um den Wahrheitswert dieser „Aussage“ zu entscheiden; der Satz „Am nächsten Sonntag wird die Zahl 29 im Lotto gezogen“ kann nur als Vermutung geäußert werden (als Möglichkeit ($\mathcal{M}$), deren Wahrscheinlichkeitswert sich bestimmen lässt) – aber nicht als wahrheitswertdefinite feststellende Aussage, über deren Wahrheitswert schon definitiv befunden werden kann. Wenn sich objektiv nicht entscheiden lässt, ob ein künftiges Ereignis eintreten wird, dann gibt es auch nicht eine dieses Ereignis konstatierende *wahrheitswertdefinite Aussage* – eine entsprechende Aussage ist schlicht unzulässig. Zu den Bedingungen einer Aussage qua Aussage gehören ja nicht bloß die psychologisch-sprachlichen Voraussetzungen, sondern eben so sehr die Faktizität der objektiven Gegebenheiten, auf die die Aussage verweist; eine Aussage ist weder ein rein innerpsychischer, noch ein rein innersprachlicher Tatbestand.

Auch für noch nicht determinierte zukünftige Ereignisse gilt, dass sie entweder eintreten werden oder nicht eintreten werden – auch wenn über diese disjunkte Alternative noch keine sichere Entscheidung möglich ist. Ungewissheit bedeutet nicht, wie **ŁUKASIEWICZ** behauptet, dass nicht entscheidbare „Aussagen“ (besser: Vermutungen) *weder wahr, noch falsch* sind, sie sind vielmehr in allen angeführten drei Fällen von Ungewissheit *entweder wahr oder falsch – tertium non datur*. Wenn es auch unter bestimmten Bedingungen unmöglich ist zu wissen, ob morgen eine Seeschlacht stattfindet, so steht doch fest: entweder findet die Seeschlacht statt oder sie findet nicht statt – tertium non datur. Es ist unmöglich vorauszusagen, ob am nächsten Sonntag bei der Ziehung der Lottozahlen die Zahl 29 gezogen wird: es steht aber fest, falls die Ziehung vorgenommen wird, wird entweder 29 gezogen oder 29 nicht gezogen – tertium non datur[36]. Der Tatbestand objektiv bedingter Ungewissheit, die teilweise Offenheit der Zukunft und die Unhaltbarkeit des absoluten Determinismus erfordert nicht die Relativierung des PNW/PAD, wohl aber die Zurückweisung der fregeschen Reifikation der Aussagen (Gedanken): hätten die Aussagen mit ihren definitiven Wahrheitswerten ein ewiges, sowohl von aussagenden Subjekten wie ausgesagten Tatbeständen unabhängiges Bestehen, dann freilich wäre alles Geschehen absolut determiniert.

Auf diesem Hintergrund lässt sich die „dreiwertige Logik“ von **ŁUKASIEWICZ** sachlich beurteilen. Da auch von „unbestimmten Aussagen“ gilt, dass sie entweder wahr oder falsch sind (wenn sich auch nicht entscheiden lässt, was von beiden zutrifft), ist diese Unbestimmtheit schon immer ein konstitutiver Bestandteil des SFG. Dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, gehört zu den Voraussetzungen der fregeschen Gedankengefüge. In diesem System wird sogar durch willkürliche Informationsverheimlichung Ungewissheit beim Zuhörer erzeugt[37]. **ŁUKASIEWICZS**’ angeblich „dreiwertiges“, das Ungewisse einschließende System ist gegenüber dem ursprünglichen System der zweiwertigen Gedankengefüge gar nichts Neues – auch in **ŁUKASIEWICZ**s „dreiwertigem“ System bleiben die Gedankengefüge zweiwertig!

Für jedes der fregeschen Gedankengefüge lässt sich entscheiden, ob es wahr ($\mathcal{W}$), falsch ($\mathcal{F}$) oder unbestimmt ($\mathcal{U}$) ist, wenn das Gedankengefüge Aussagen zugesprochen wird, von denen eine oder mehrere unbestimmt sind. *Unbestimmt* hat die Bedeutung: entweder wahr oder falsch. Z.B. ist, wenn ein Sprecher weiß, dass A wahr ist, den Wahrheitswert der Aussage B aber nicht kennt, für eben diesen Sprecher der Wahrheitswert des Gedankengefüges (A & B) und des Gedankengefüges (A ⊧ B) ungewiss, die Gedankengefügeaussagen (A ▽ B) und (A ↙ B) sind wahr, die Gedankengefügeaussagen (A⇩B) und (A⬉B) sind falsch, der Wahrheitswert von (B ⇒ A) ist wahr und der Wahrheitswert von (A ⇒ B) ist ungewiss[38]. Es ist klar, dass auch hier die Zweiwertigkeit vorausgesetzt ist. Für die zweistelligen Gedankengefüge ergeben sich die folgenden „Wahrheitstafeln“, es sind nur solche Wahrheitswertkombinationen berücksichtigt, die zumindest einmal den Wert $\mathcal{U}$ aufweisen: der Wert *ungewiss* wird durch das Zeichen „$\mathcal{U}$“ bezeichnet.

Für Aussagepaare, von denen wenigstens ein Wahrheitswert unbekannt ist, ergeben sich für die Bewertung der zweistelligen Gedankengefüge folgende Werte:

A	B	**V**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**X**	**O**
$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{F}$

Diese Zusammenhänge sind bereits implizit in **FREGE**s Bestimmung der Gedankengefüge enthalten: wenn etwa eine erste Aussage A falsch und der Wahrheitswert einer zweiten Aussage unbekannt ist, dann ist auch unbekannt, ob dem Aussagenpaar das Gedankengefüge **A** zukommt. Es können in dieser nur scheinbaren Modifikation des SFG durch **ŁUKASIEWICZ** keine anderen Gedankengefüge als im SFG vorkommen. Neu ist nur, dass gefragt wird, ob dann, wenn der Wahrheitswert zumindest einer der involvierten Aussagen ungewiss ist, es wahr, falsch oder ungewiss ist, dass den Aussagen die von **FREGE** konstruierten Gedankengefüge zukommen. **ŁUKASIEWICZ** hat diese angeblich „dreiwertigen“ Gedankengefüge zumeist richtig – wie in obiger Zusammenstellung – bestimmt; falsch ist jedoch seine Behauptung, zwei Aussagen mit unbestimmtem Wahrheitswert käme sowohl das Gedankengefüge **C** wie das Gedankengefüge **E** zu[39], ohne dass er diese Auffassung begründen könnte; er beruft sich auf nicht näher nachvollziehbare „Erleuchtungen“[40]. Es bleiben in **ŁUKASIEWICZ**s „dreiwertiger Logik“ alle Fregegesetze gültig und es gibt kein einziges zusätzliches Fregegesetz; der Gehalt der Fregegesetze besagt ja gerade, dass jede Aussage nicht zugleich wahr und falsch ist – und dies ist genau das einzige, was wir über die Wahrheitswerte von ungewissen Aussagen wissen[41].

Wenn wir wie **ŁUKASIEWICZ** versuchen, Systeme zu bilden, die neben den beiden Wahrheitswerten auch andere Werte berücksichtigen, müssen wir natürlich genau und unzweideutig angeben, was genau dieser dritte Wert ist, und wie er sich zu den Werten $\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}$ verhält[42]. Und ebenso klar muss angezeigt werden, wie unter diesen Voraussetzungen die „Junktoren“ konstruiert und definiert werden, was der Gehalt dieser „Junktoren“ ist – auch in der Logik muss man wissen, wovon man spricht.

BOCHEŃSKI führt als „mögliche Interpretationen der 3 Geltungswerte“ einer „dreiwertigen Logik“ die Wertetripel ‚verifizierbar‘, ‚unbekannt‘, ‚falsifizierbar‘; ‚vollgültig‘, ‚teilgültig‘, ‚ungültig‘.“ und auch wahr – möglich/unbestimmt – falsch an[43]. Zuweilen wird zusätzlich zu den Wahrheitswerten *wahr* und *falsch* auch ein Wert *sinnlos* eingeführt. In dem System das sich mit diesen drei Werten erstellen lässt, hat man es allerdings nicht mehr nur mit Aussagen zu tun, weil ein satzförmiger sinnloser sprachlicher Ausdruck eben keine Aussage, sondern allenfalls eine Pseudoaussage ist; von den Gegebenheiten, an welche dieses Systems anknüpft (Aussagen bzw. Pseudoaussagen), gilt dann: sie sind entweder wahr ($\mathcal{W}$) oder falsch ($\mathcal{F}$) (dann handelt es sich um Aussagen) oder sie sind sinnlos ($\mathcal{S}$) (dann handelt es sich um Pseudoaussagen). Die Berücksichtigung dieser drei Werte bedeutet freilich nicht, dass das PNW/PAD und das Zweiwertigkeitsprinzip nicht mehr gültig wäre, denn es gilt immer noch: einem solchen Ausdruck kommt der Wert $\mathcal{W}$ zu oder er kommt ihm nicht zu (dann kommt ihm entweder $\mathcal{F}$ oder S zu) – tertium non datur; einem solchen Ausdruck kommt entweder S zu oder es kommt ihm S nicht zu (dann kommt ihm entweder $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{F}$ zu) – tertium non datur.

Jetzt können in der Manier von **FREGE** alle für die Werte $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ und S möglichen zweistelligen *dreiwertigen* „Gedankengefüge" konstruiert werden: es werden zuerst alle möglichen Wertekombinationen: $\mathcal{W}$-$\mathcal{W}$; $\mathcal{W}$-$\mathcal{F}$; $\mathcal{W}$-S; $\mathcal{F}$-$\mathcal{W}$; $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$; $\mathcal{F}$-S; S-$\mathcal{W}$; S-$\mathcal{F}$ und S-S gebildet. Einem Paar von zulässigen Ausdrücken (Aussagen und Pseudoaussagen) kommt genau eine dieser Wertekombinationen zu: ein dreistelliges Gedankengefüge kann dann einem Ausdruckspaar eine solche Kombination ausdrücklich zusprechen (das sind dann tautologische, nicht informationsverheimlichende „Gedankengefüge") oder es können einem Ausdruckspaar eine oder mehrere dieser Wahrheitswertkombinationen ausdrücklich abgesprochen werden, dem Ausdruckspaar kommt dann genau eine der restlichen Wertekombinationen zu (das sind dann informationsverheimlichende „Gedankengefüge"). Prädikationen solcher dreiwertiger „Gedankengefüge" stellen immer wahrheitswertdefinite Aussagen dar; die Aussage, dass von zwei vorgegebenen Aussagen bzw. Pseudoaussagen zumindest einer sinnlos ist (das „Gedankengefüge" schließt die Wertekombinationen $\mathcal{W}$-$\mathcal{W}$; $\mathcal{W}$-$\mathcal{F}$; $\mathcal{F}$-$\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$ aus), oder dass genau eine der Aussagen sinnlos ist (dieses „Gedankengefüge" schließt die Wertekombinationen $\mathcal{W}$-$\mathcal{W}$; $\mathcal{W}$-$\mathcal{F}$; $\mathcal{F}$-$\mathcal{W}$; $\mathcal{F}$-$\mathcal{F}$ und S-S aus), oder dass die erste Aussage wahr, die zweite sinnlos ist (dieses „Gedankengefüge" schließt alle Wertekombinationen außer $\mathcal{W}$-S aus), usw. – alle diese Prädikationen sind entweder wahr oder falsch, nie aber sinnlos[44].

Diese für die Werte $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ und S definierten „Gedankengefüge" sind nicht identisch mit den fregeschen Gedankengefügen. Das fregesche Gedankengefüge **C** besagt, dass von zwei Aussagen A und B jedenfalls nicht A wahr und B falsch ist; auch jetzt gibt es ein Gedankengefüge, das den Fall ausschließt, dass A wahr und B falsch ist; dieses Gedankengefüge ist jedoch im Gegensatz zu **C** auch dann wahr, wenn von A und B zumindest eines sinnlos ist. Der Fall, dass es sinnlos ist, dass einem Ausdruckspaar eines dieser „Gedankengefüge" zukommt, ist nicht möglich, d.h. es kann nur entweder wahr oder falsch sein, ob einem Ausdruckpaar ein solches Gedankengefügeprädikat zukommt. Der Wert S kann nur den prädizierten Ausdrücken, nicht aber den Gedankengefügeaussagen zukommen. Diese „Gedankengefüge" sind wie die fregeschen Gedankengefüge überflüssig und unnütz; sie sagen nichts über die Bedingungen der Wahrheit, Falschheit und Sinnlosigkeit, sondern setzen einfach wahrheitswertdefinite Aussagen und sinnlose Pseudoaussagen voraus und geben diese Voraussetzung tautologisch oder informationsverheimlichend wider. Diese dreiwertigen Gedankengefüge sind ebenso wenig wie die „klassischen" fregeschen Gedankengefüge logische Formen.

Man nimmt im Rahmen der „modernen Logik" an, es ließen sich auf diese Weise für beliebige endliche Menge von Werten analog zur Bildung der fregeschen Gedankengefüge Systeme von „Aussagenverknüpfungen" herstellen. Nehmen wir etwa die Menge der drei Geltungswerte *vollgültig*, *teilgültig* und *ungültig* an; es sind prädikative Bestimmungen, die Gesetzesaussagen zugesprochen werden. Eine zur Konstruktion der fregeschen Gedankengefüge analoge Konstruktion von „Verknüpfungen" dieser Gesetzesaussagen hätte folgendermaßen vorzugehen. Von jeder Gesetzesaussage ist vorauszusetzen: sie ist entweder vollgültig, oder teilgültig oder ungültig – was natürlich eine klare Abgrenzung von „teilgültig" voraussetzt. Wir erkennen, dass hier – und in allen entsprechenden Fällen – keineswegs das mit dem PNW/PAD verbundene Zweiwertigkeitsprinzip außer Kraft gesetzt wird: denn von jeder Gesetzesaussage gilt ja: sie ist entweder vollgültig oder nicht-vollgültig (tertium non datur), sie ist entweder teilgültig oder nicht-teilgültig (tertium non datur); sie ist entweder ungültig oder nicht ungültig (tertium non datur). Nun lassen sich aus diesen drei Bestimmungen neun verschiedene Wertekombinationen bilden: vollgültig-vollgültig, vollgültig-teilgültig, vollgültig-ungültig, teilgültig-vollgültig, teilgültig-teilgültig, teilgültig-ungültig, usw. Von jedem Paar von Gesetzesaussagen steht fest: es gehört genau einer und nur einer dieser Wertekombinationen an. Nun lassen sich „Verknüpfungen" analog zu den fregeschen Gedankengefügen bilden, indem Paaren von Gesetzesaussagen genau eine dieser Wertekombinationen zugesprochen (es resultieren tautologische Prädikate), oder zumindest eine dieser Wertekombinationen definitiv abgesprochen wird (es resultieren informationsverheimlichende Prädikate). Dann aber hört die Entsprechung auf: denn während es bei fregeschen Gedankengefügen selber entweder wahr oder falsch ist, dass Aussagepaaren ein Gedankengefüge zukommt, ist es jetzt nicht entweder vollgültig oder teilgültig oder ungültig, dass einen Paar von Gesetzesaussagen eine der definierten „Verknüpfungen" zukommt, sondern das ist entweder wahr oder falsch! Werden diese „Verknüpfungen" mit Hilfe von Wertetabellen definiert, dann stehen in den Spalten unter den „Verknüpfungen" nicht die Werte vollgültig, teilgültig oder ungültig, sondern die Werte wahr oder falsch – das heißt Werte, die gar nicht zu den drei zu Grunde gelegten Werten gehören. Diesen Tatbestand mussten wir schon bei den drei Werten wahr, falsch und sinnlos zur Kenntnis nehmen. Für andere Werte als die Wahrheitswerte (und den Wert unbestimmt/ungewiss in der Bedeutung von entweder wahr oder falsch) lassen sich also gar keine den fregeschen Gedankengefügen analogen „Verknüpfungen" konstruieren, weil die „Verknüpfungen“ Prädikate sind, die den entsprechenden Ausdrücken entweder zukommen oder nicht zukommen.

Das System der fregeschen Gedankengefüge wird oft mit dem System fregealgebraischer innerer Verknüpfungen in einer Menge zweier disjunkter Werte verwechselt[45]. Dass dieses System fregealgebraischer Verknüpfungen vom System der fregeschen Gedankengefüge – trotz einer bedingungslogischen Isomorphie – grundverschieden ist, wird auch durch den Tatbestand belegt, dass sich für andere als die beiden Wahrheitswerte keine Prädikate in der Art der Gedankengefüge bilden lassen[46], dass sich aber für beliebige Mengen von Werten *unbeschränkt* Verknüpfungsgebilde nach dem Vorbilde der Fregealgebra konstruieren lassen. Drei- und höherwertige „Fregealgebren“ entsprechen keinen drei- oder höherwertigen Gedankengefügen im Sinne einer bedingungslogischen Isomorphie, wie sie zwischen SFG und SFA besteht – auch dies belegt, dass das SFG und die entsprechende Fregealgebra ganz verschiedene Systeme sind.

Für drei Ausgangswerte a_1, a_2 und a_3, für die nur die paarweise Wohlunterschiedenheit zu fordern ist, lassen sich alle 3^9 binären Verknüpfungen: $\{a_1, a_2, a_3\}^2 \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ konstruieren. Anders als bei der Bildung von den fregeschen Gedankengefügen analogen Prädikaten gibt es hier keine Beschränkungen. Jedes Paar von Werten aus $\{a_1, a_2, a_3\}$ wird wiederum auf einen Wert von $\{a_1, a_2, a_3\}$ abgebildet. Auch für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ können alle Abbildungen der Form $\{a_1, a_2, a_3\}^n \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ kombinatorisch konstruiert werden. Sogar für nicht endliche Mengen (unter der Voraussetzung, dass jedes beliebige Element dieser Menge systematisch konstruiert werden kann) können beliebig viele (freilich nicht „alle“) Verknüpfungen der Form $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}^n \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ gebildet werden. Es ist ohne jede sachliche Berechtigung, wenn diese Verknüpfungen im Nachhinein als Implikation, Äquivalenz, Kontrarietät, Alternative, oder als andere logische Form „interpretiert“ werden.

Zuweilen werden als Elemente solcher Mengen Zahlen genommen; in diesem Falle können einige der überhaupt möglichen Verknüpfungen als arithmetische Verknüpfungen bestimmt werden. Eine der möglichen, rein kombinatorisch ermittelbaren monären Abbildungen $\{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0\} \Rightarrow \{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0\}$ wird durch die Zuordnungstabelle

$x \in \{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0\}$	0	¼	½	¾	1
$\boldsymbol{f}_1(x)$	1	¾	½	¼	0

bestimmt; die Zuordnungsvorschrift kann auch durch die arithmetische Verknüpfung $\boldsymbol{f}_1(x) = 1 - x$, mit $x \in \{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0\}$ bestimmt werden. Eine der möglichen binären Verknüpfung $\{1, \frac{1}{2}, 0\}^2 \Rightarrow \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ kann durch die arithmetische Verknüpfung $f_2(x, y) \overset{\text{def}}{=} \min(1, 1 - x + y)$, mit $x, y \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ definiert werden.

Es ist aber durch nichts gerechtfertigt, wenn man diese *arithmetischen* Abbildungen als logische Formen ausgibt, die Abbildung $\boldsymbol{f}_1(x) = 1 - x$, mit $x \in \{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0\}$ etwa als Łukasiewicz-Tarski–*Negation* und die Verknüpfung $f_2(x, y) \overset{\text{def}}{=} \min(1, 1 - x + y)$, mit $x, y \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ als Łukasiewicz-Tarski–*Implikation*. Wenn man die Werte der Ausgangsmenge – etwa die Werte *wahr*, *falsch* und *ungewiss* wie **ŁUKASIEWICZ** mit den Ziffern 1, 0 und ½ bezeichnet, dann sind diese Ziffern keine Zahlzeichen mehr, sondern Bezeichnungen der Werte *wahr*, *falsch* und *ungewiss*, und für *diese* Werte sind – trotz **FREGE** – die arithmetischen Operationen gar nicht definiert! Wenn die Ziffern jedoch Zahlen bedeuten, die arithmetischen Operationen unterzogen werden, dann ist zu fordern, dass die arithmetischen Verknüpfung auf einen Zahlenwert führt, der Element der Ausgangsmenge ist – dann haben wir es mit Arithmetik, nicht mit Logik zu tun! Der Herstellung derartiger arithmetischer und nichtarithmetischer Verknüpfungsgebilde sind keinerlei Grenzen gesetzt, es sind simple operative Spielchen, ohne jede theoretische Relevanz, Spielchen, die rein gar nichts mit Logik und der Bestimmung logischer Formen zu tun haben und hinter denen auch keine ernsthafte arithmetische Problematik steckt. Diese algebraischen Verknüpfungen sind keine logischen Formen, sie sind nicht einmal Gedankengefüge! Wir können festhalten: in den so genannten „mehrwertigen Logiken“ gelingt es nicht die logischen Modalitäten zu erfassen. Diese Erweiterung der „Aussagenlogik“ ist nichts als eine Erweiterung der Konfusion.

5.4. Die Modalitäten als Erfüllbarkeitsprädikate für (SFG-)Aussageformen

5.4.1. Die Fiktive-Welten-Semantik und das Prinzip des zugelassenen Widerspruchs

Das Mögliche ist bestimmt als das, was sowohl der Fall, als auch nicht der Falls sein kann; die Rede von *möglich-wahr* im Sinne der „alethischen Modalität" involviert so, dass eine wahre Aussage entgegen dem PNW zugleich auch falsch, und eine falsche Aussage zugleich auch wahr sein kann. Die „Semantik der möglichen Welten" ist der hoffnungslose Versuch dazulegen, wie *ein und dieselbe* Aussage zugleich wahr und falsch sein kann, ohne dass gegen das Nichtwiderspruchsprinzip verstoßen wird; es wird vorgeschlagen, den Wahrheitswert ein und derselben Aussage nicht nur für die wirkliche, reale Welt, sondern auch für verschiedene nicht-reale, „mögliche Welten" zu bewerten. Es kann freilich nur in der Fiktion unterstellt werden, dass, was der Fall ist, zugleich nicht der Fall ist; so stellt diese Konzeption das einzelne reale Faktische nicht in den Raum *objektiver* Möglichkeiten, sondern fasst „Möglichkeit" als *Fiktivmögliches*, als Phantastisch-Absurdes. Diese „Semantik" der „möglichen", genauer: der *fiktiven* Welten, lässt sich nur um den Preis der Aufgabe aller fundamentalen logischen Normen vertreten.

„Eine *mögliche Welt* ist … unsere Welt, wie sie aussehen könnte, wenn sie nicht so beschaffen wäre, wie sie ist… Wenn man über unsere Welt redet, so redet man über bestehende Sachverhalte, d.h. über Tatsachen; wenn man über mögliche Welten redet, so redet man über mögliche Sachverhalte, die entweder bestehen oder bestehen könnten, wenn unsere Welt anders aussähe, als es der Fall ist… Eine mögliche Welt … stellt also eine konsistente und fiktive Erzählung über diese Welt dar."[47] „Possible worlds are ways the world might have been but isn't."[48] „Although the actual world is the only world which is actual, yet there are many worlds which *might* have been actual."[49]

Ein und dieselbe Aussage soll dieser Konzeption nach unterschiedliche Wahrheitswerte haben, d.h. *ein- und derselbe* Sachverhalt/*ein und dasselbe* Ereignis soll der Fall sein/vorliegen und ebenso nicht der Fall sein/nicht vorliegen können. Da die Modallogistiker diese unterschiedlichen Wahrheitswerte „ein und desselben" Satzes verschiedenen „möglichen Welten" zuordnen, glauben sie, einen Verstoß gegen das Nichtwiderspruchsprinzip zu vermeiden: es ist jedoch unmöglich, dass *ein und derselbe* Sachverhalt, ein und dasselbe Ereignis unterschiedlichen Raum- und Zeitstellen (gar verschiedenen Welten) und verschiedenen Umständen zugeordnet ist. Die in unserer Welt wahre Feststellung „Fritz Müller aus Adorf lag am 14.6.1961 zu Hause mit Fieber im Bett" betrifft ein bestimmtes, räumlich-zeitlich lokalisiertes Ereignis ausschließlich in unserer, der einzig realen Welt. Diese Feststellung kann in keiner anderen „Welt" als wahr oder falsch bewertet werden, weil sie ja alleine den Fritz Müller in unserer Welt betrifft; wenn es in einer „anderen Welt" auch den Fritz Müller aus Adorf gäbe, der dort an besagtem Datum jedoch nicht krank gewesen sei, dann müsste es sich um einen *anderen* Fritz Müller, um ein anderes Adorf, überhaupt um *andere* Umstände handeln. Eine Feststellung, die einem Gegenstand unserer Welt an einer bestimmten Raum- und Zeitstelle und bezüglich ganz bestimmter einzigartiger Umstände bestimmte Eigenschaften und Zustände zuschreibt, kann niemals auf andere Raum- und Zeitstellen und Umstände, geschweige denn auf „andere Welten" übertragen werden – *ein und derselbe* Gegenstand müsste sich zu gleicher Zeit an verschiedenen Orten befinden und bestimmte Beschaffenheiten sowohl aufweisen wie nicht aufweisen können. Genau diesen logischen Widersinn müssen die Verfechter der Fiktive-Welten-Semantik als das Prinzip der „*trans-world-identity*" (*Quer-Welt-ein-Identität*) vertreten – es handelt sich um ein „Prinzip des zugelassenen Widerspruchs", ein Prinzip der Unlogik.

Jede dieser fiktiven „Welten" ist nur ein leeres Wort oder ein leeres, mit vagen Vorstellungen verbundenes „Symbol", etwa ein indizierter Buchstabe w_i – $w_{1285787392765}$ wäre etwa die „Welt" Nr. 1.285.787.392.765; diese indizierten Buchstaben repräsentieren gewiss nicht das Wissen von einer eigenständigen Welt. Ob in einer solchen fiktiven „Welt" ein bestimmtes Ereignis stattfindet, entzieht sich prinzipiell jeder intersubjektiven Kontrolle; über fiktive „Welten" kann jeder behaupten, was er gerade will. „Aussagen" über eingebildete Vorkommnisse in fiktiven „Welten" liegen außerhalb jeder verbindlichen Überprüfbarkeit; sie sind nicht wahrheitswertdefinit und gerade dadurch charakterisiert, dass sie sich über die Normen der Logik hinwegsetzen. Deshalb bleibt auch jeder Versuch, dieser durch und durch irrationalen Konzeption durch die Darstellung mithilfe eines mengen- und abbildungstheoretischen Jargons ein „wissenschaftliches" („mathematisch" imponierendes) Gepräge zu geben, aussichtslos. „Eine intensionale Interpretation der Sätze einer Sprache über eine Menge möglicher Welten ist nun eine zweistellige Funktion $\Phi_i(A)$, die jeder Welt $i \in I$ und jedem Satz A der Sprache den Wahrheitswert von A in i zuordnet. Die Intension von A ist dann die Funktion $\Phi_i(A)$ als Funktion von i – wir schreiben dafür $\lambda_i\Phi_i(A)$ –, eben jene Funktion mit dem Definitionsbereich I, die jedem Argument i den Wert $\Phi_i(A)$, d.h. die Extension (den Wahrheitswert) von A in i zuordnet.“[50]

Diese „Funktion“ könnte der Bedingung der Wohldefiniertheit von Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift nur dann genügen, wenn die „möglichen Welten“, auf welche die Elemente der Definitionsmenge – „ein und dieselbe Aussage“ in *jeweils* jeder „möglichen Welt“[51] – bezogen sind, sich entweder restlos von jedermann in gleicher Weise aufzählen oder durch ein Konstruktionsverfahren, das jede beliebige „mögliche Welt“ herzustellen und eindeutig zu unterscheiden gestattet, angeben ließen, wie etwa jede beliebige natürliche Zahl oder jede beliebige ereignislogische Relation konstruiert und von jedem anderen Sachverhalt der betreffenden Art eindeutig abgegrenzt werden kann. Für jeden Menschen müsste prinzipiell jede beliebige fiktive Welt eindeutig in gleicher Weise erkennbar sein. Es müsste darüber hinaus ein allgemein verbindliches Verfahren angegeben werden, welches es jedem gestattet, für jede beliebige Aussage den Wahrheitswert in jeder „beliebigen möglichen Welt“ in derselben Weise begründbar und übereinstimmend zu bestimmen. Die schimärische „Menge der fiktiven Welten“ schließt dies aus. Gibt es endlich viele oder unendlich viele „mögliche Welten“? Wer setzt dies, nach welchen rationalen Kriterien, verbindlich fest? Nehmen wir an, es „gäbe“ „unendlich viele mögliche Welten“ w_i; um sie eindeutig zu bezeichnen, könnten wir die „Bezeichnungen“ indizieren, also w_1, w_2, …[52] Wer aber soll verbindlich entscheiden, ob eine Aussage etwa „Cäsar starb im Jahre 33 v.u.Z.“, in $w_{1.423.087.543.219.877.604}$ wahr oder falsch ist? Das könnte nur willkürlich geschehen und außerdem kämen wir, da der Wahrheitswert einer „jeden“ einzelnen Aussage für „unendlich viele Welten“ entschieden werden muss, für keine einzige Aussage je an ein Ende. Die Durchnummerierung dieser fiktiven Welten kann eine durchgehende Abgrenzung und Unterscheidung der verschiedenen fiktiven Welten nicht sichern; nummerieren kann man nur, was man bereits unterscheiden kann (sonst unterscheiden sich *nur* die Nummern, die dann Nummern, und keine Welten bezeichnen – wir hätten dann unterschiedliche Bezeichnungen aber keine diesen entsprechende unterschiedlichen Bezeichneten!). Die Elemente der Definitionsmenge – Aussagen, bezogen auf die unterschiedlichen fiktiven „Welten“ – müssten zudem wohlunterschieden (nicht identisch) sein, hier wird jedoch unterstellt, dass es sich in allen Welten um jeweils ein und dieselbe Aussage handelt. Weder die Definitionsmenge, noch die Zuordnungsvorschrift dieser „Funktion“ lässt sich eindeutig und kohärent bestimmen – ein gedankenloses Hantieren mit den Buchstaben „I“, „i“, „Φ“ usw. sichert diese Wohlbestimmtheit noch lange nicht: es ist eine Pseudofunktion, die Präzision vortäuschen soll, wo es nur Widersprüche und leere Verbalismen gibt; weder die Definitionsmenge noch die Zuordnungsvorschrift dieser „Abbildung“ sind wohlbestimmt.

Der Bezug des Faktisch-Einzelnen auf die fiktiven Welten ist nur ein mystifizierender, untauglicher Ersatz für die Einordnung dieses Faktisch-Einzelnen in seine umfassende allgemeine artbestimmte Gesetzmäßigkeit. Denn wenn ich die Bedingungen dafür kenne, dass eine Feststellung $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ – die auf eine bestimmte Raum- und Zeitstelle in der wirklichen Welt bezogen ist – richtig ist, dann muss ich nicht die illusionären Bedingungen dafür kennen, ob *diese* Feststellung in allen möglichen fiktiven „Welten“ wahr oder falsch ist (das ist ein Pseudoproblem), sondern ich muss wissen, unter welchen Bedingungen ich einem beliebigen *realen* Gegenstand das Prädikat $\mathfrak{P}$ zuschreiben darf – und zwar ausschließlich in der wirklichen Welt. Dieses widerspruchsfreie, im Zentrum der Logik stehende Verhältnis zwischen dem realmöglichen Allgemeinen, dem Begriff $\mathfrak{P}(x)$, und dem auf eine bestimmte Raum- und Zeitstelle bezogenen einzelnen Sachverhalt $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ wird in der Fiktive-Welten-Semantik zu einer widersprüchlichen Vervielfachung des faktischen Einzelnen selbst. Die den logischen Grundsätzen widersprechende „weltenübergreifende“ Geltung eines Satzes wird als seine Bedeutung (meaning) ausgegeben. „The meaning of a sentence is the set of possible worlds in which it is true.“[53] Diese „Bedeutung“ eines Satzes sei seine „Intension“; sie sei eine „Funktion“, die jedem Ausdruck in jeder möglichen Welt einen Wahrheitswert (als seine angebliche „Extension“) zuordne[54]. Kenne man die Bedeutung eines Satzes, lasse sich entscheiden, in welcher fiktiven Welt dieser ein und derselbe Satz wahr sei; „this idea leads directly to what is called *possible-worlds semantics*.“[55] „Wenn man die Bedeutung eines Ausdrucks kennt, so kann man prinzipiell in allen möglichen Welten (unter allen Umständen) seine Extension“ – nämlich seinen Wahrheitswert – „feststellen. Wenn ich den Sinn eines Eigennamens kenne, kann ich unter beliebigen Umständen feststellen, welches Objekt er bezeichnet. Und wenn ich die Bedeutung eines Prädikats wie ‚rot‘ kenne, d.h. weiß, dass es für die Eigenschaft ‚rot‘ steht, so kann ich unter allen Umständen kraft der Fähigkeit, rote und nicht-rote Dinge zu unterscheiden, sagen, auf welche Dinge dieses Prädikat zutrifft… Wenn die Bedeutung eines Ausdrucks festliegt, liegen auch seine Extensionen in allen möglichen Welten fest.“[56] Diese wundersame Fähigkeit, den Wahrheitswert „ein und desselben Satzes“ in allen fiktiven Welten zu bestimmen, nennt **CRESSWELL** „*semantische Kompetenz*“, die „Fähigkeit, den Unterschied der Bedingungen darzulegen, unter denen ein Satz wahr und unter denen er falsch ist“; diese Bedingungen seien identisch mit den „Welten“, in denen ein Satz wahr bzw. falsch sei[57]. Dem ist entgegenzuhalten, dass ein bestimmtes Einzelereignis nicht in verschiedenen „Welten“ stattfinden kann, und eine Aussage auch dann nicht verschiedene Wahrheitswerte haben kann, wenn sie unter Verletzung der PNW auf verschiedene „Welten“ projiziert wird. Was unter verschiedenen Bedingungen in intersubjektiv nachvollziehbarer Weise und alleine in der realen Welt anwendbar ist, sind allgemeine Begriffe, die Realmögliches bestimmen. Jede der Feststellungen, die das Resultat einer solchen Anwendung kundtut, ist von jeder Feststellung wohlunterschieden, die aus der Anwendung desselben Begriffs auf andere Umstände und andere Raum- und Zeitstellen resultiert. Wenn Gegenstände und Ereignisse von ihre eigentümlichen Raum-Zeit-Stelle abgelöst werden, wenn ein und derselbe Gegenstand in (beliebig vielen) Welten in unterschiedlicher Weise vorkommt, wird alle Rede willkürlich und sinnlos.

„Wann ist ein bestimmtes Ding in unserer wirklichen *Welt dasselbe* in einer möglichen anderen Welt… Man benötigt ein *Kriterium für Identität* von Dingen in verschiedenen möglichen Welten. Ohne ein solchen Kriterium würde jeglicher Willkür Tür und Tor geöffnet.“[58] Einige schlaue Argumente sind zur Stützung dieser logisch unsinnigen „trans-world-identity“ (*Quer-Welt-ein-Identität*) erdacht worden[59].

So wird beispielsweise gefordert, dass ein und demselben Individuum zwar nicht alle, aber doch die *wesentlichen* Eigenschaften „in allen Welten“ gleicherweise zukommen sollen; alle Individuen (Plural!), die über dieselben wesentlichen Eigenschaft verfügten, seien „dasselbe“ Individuum (Singular!). Im Sinne dieser Finesse schreibt **VON KUTSCHERA**: „Ist ein Objekt α aus U“ – U ist eine fiktive oder die wirkliche Welt – „ein Mensch, so liegt es nahe, zu sagen, dass α in allen möglichen Welten ein Mensch ist, da ein Mensch in der Welt i z.B. nicht mit einem Vogel in der Welt j identisch sein könnte. Aber das hängt davon ab, welche Grenzen man der Phantasie zieht; ob man nicht auch Märchenwelten als möglich zulässt, in denen sich Menschen in Vögel verwandeln.“[60] Identität setzt Übereinstimmung in allen, gerade auch den zufälligsten Bestimmungen voraus – der geringste Unterschied involviert schon Nicht-Identität, Verschiedenheit.

Es wird auch vorgeschlagen, das „Problem“ von den Prädikaten auf die Namen zu verlagern; die Eigennamen seien „rigid designators“, die immer dasselbe Ding benennen würden, mag dieses Ding in den „verschiedenen Welten“ sein, was es will. Ein Zeichen designiert demnach dasselbe Ding, das aber verschiedene Dinge sein kann! Es bleibt völlig willkürlich, welche verschiedenen Dinge und Ereignisse denselben Namen erhalten. Aus verschiedenen, nicht-identischen Dingen wird nicht ein einziges identisches Ding, wenn sie durch denselben Namen benannt werden; es liegt dann entweder ein Irrtum, eine falsche Benennung vor, oder dieser Name ist vieldeutig. Zudem hängt die Identität eines Gegenstandes nie vom Benennen ab, sondern umgekehrt, eindeutiges Benennen setzt erkannte Identität voraus.

Die Unmöglichkeit, eine derartige „weltenumgreifende ›Identität‹“ zu rechtfertigen, legt einer weiteren Position zufolge nahe, die irrationale Willkür direkt und ohne Ausflüchte zum methodischen Prinzip zu machen. Das objektive Identitätskriterium soll durch die willkürliche „Entscheidung“, welche fiktiven Individuen in den fiktiven „Welten“ dasselbe Individuum sein solle, ersetzt werden.[61]

Andere Autoren ersetzen kurzerhand Identität durch „Doppelgängertum“; sie unterstellen, dass jedes Individuum zwar nur in einer „Welt“ existieren könne, aber in „jeder anderen Welt“ einen „Doppelgänger“ habe, der die Durchführung der „Semantik der möglichen Welten“ erlaube. Eine Aussage über eine Person ist jedoch niemals identisch mit einer Aussage über die Doppelgänger dieser Person. Nach einem ähnlich findigen Vorschlag von **D.LEWIS** kann man jeder „Welt“ i einen eigenen, paarweise durchschnittsfreien Individuenbereich $\mathbf{U}_i$ zuordnen; es wird dann eine „Korrespondenzrelation“ („counterpart relation“) zwischen den Objekten der „verschiedenen Welten“ postuliert; eine vage, unbestimmte „Ähnlichkeit“ tritt an die Stelle der Identität; es gibt von einem wirklichen Ding in den „anderen Welten“ nicht identische Dinge, sondern nur „counterparts“, „Gegenstücke“.[62] Für die Behauptung, es bestehe eine solche (nicht näher bestimmte und nicht näher bestimmbare) Beziehung zwischen (nicht näher bestimmten und nicht näher bestimmbaren) Gegenständen, können keine überprüfbaren Wahrheitsbedingungen angegeben werden.

Völlig haltlose Behauptungen über Möglichkeiten und Grenzen der „Erkennbarkeit“ diese fiktiven „Welten“ werden vorgetragen: Es „ist eine von unserer Welt verschiedene mögliche Welt *rein qualitativ* gegeben und damit auch *rein qualitativ* von ihr verschieden. Man entwickelt von dieser möglichen Welt eine Vorstellung wie von einem fremden Land. Unsere Gedanken überfliegen nicht nur die Wolken und den Wind, sondern sogar noch die Lichtgeschwindigkeit. Wenn wir unser Verstandesteleskop auf die erste, von unserer Welt verschiedene mögliche Welt richten und uns ihr selbst, die äußersten Grenzen der wirklichen Welt weit zurücklassend, geistig nähern, so können wir nur Qualitäten und Relationen beobachten, aber nicht, ob jemand in dieser Welt Napoleon ist.“[63] „Individuen sind danach Realisierungen von ‚Qualitätsbündeln', so dass in manchen möglichen Welten Aristoteles existiert, in anderen nicht, und ebenso in manchen Sherlock Holmes, in anderen nicht."[64] Die Vorstellung, wir könnten zwar Qualitäten und Relationen erfassen, aber unabhängig von identischen Dingen/Gegenständen ist eine logische Absurdität. Wie sollen sich denn diese verschiedenen „Welten" unterscheiden, wenn nicht durch die verschiedenen Dinge, aus denen sie sich zusammensetzen? Was soll denn eine „rein qualitative Welt" sein?

Auch die Unterstellung, Gesetzesaussagen könnten in „unterschiedlichen Welten" verschiedene Wahrheitswerte haben[65], verstößt gegen die logischen Grundprinzipien; jedes Gesetz kennzeichnet Dinge bestimmter Art; wenn nun in einer anderen fiktiven Welt, Dinge einem bestimmten Gesetz nicht unterliegen, dann handelt es sich auch in der Fiktion notwendigerweise um verschiedenartige Dinge, und deshalb auch um verschiedene Gesetze. In diesem Zusammenhang wird von Modallogistikern auch behauptet, die „Intension eines Prädikates F" sei die „Funktion", die jeder „möglichen Welt" i aus der „Menge aller fiktiven Welten" den Umfang von F in i zuordnet. „Dieser Umfang wird von Welt zu Welt in der Regel verschieden sein."[66] *Demselben* Begriff verschiedene Extensionen zuzuordnen, bedeutet, die Grundbedingungen aller Rationalität – die Identität von Gegenständen und von Begriffen und damit das Prinzip des Nichtwiderspruchs – außer Geltung zu setzen. Schon die Gleichstellung von Wahrheit und Fiktion, auf der diese „Semantik der möglichen Welten" beruht, hebt Logik und Vernunft auf. Die theoretische Logik steht vor der Aufgabe, den Unterschied zwischen wahrem und begründetem Wissen und bloßer Meinung und Fiktion auf den Begriff zu bringen; wird dieser Unterschied geleugnet, verschwindet auch die Logik.

Kontrafaktische Argumente sind logisch korrekt und spielen in Alltag und Wissenschaft eine wichtige Rolle. Der widersinnige Bezug auf fiktive Welten darf nicht mit dem kontrafaktischen Argumentieren verwechselt werden. **VON KUTSCHERA** schreibt: „Eine mögliche Welt ist … nicht als ein ferner Kosmos zu denken, sondern als unsere Welt, wie sie aussehen könnte, wenn sie nicht so beschaffen wäre, wie sie ist. Irreale Redeweisen sind uns geläufig; wir reden davon, was hätte passieren können, wenn nicht die und die Ereignisse eingetreten wären. Wir reden dabei über mögliche Sachverhalte."[67] Das „Mögliche", auf welches sich die „Semantik der fiktiven Welten" beruft, ist nicht das Kontrafaktische, wie es uns etwa im kontrafaktischen Konditional begegnet. Eine Feststellung, dass ein Einzelereignis p* der Fall ist, bezieht sich immer auf eine bestimmte Raum- und Zeitstelle; wird dieses der-Fall-Sein nun kontrafaktisch negiert, und in der Vorstellung unterstellt, das p* nicht der Fall ist, so bleibt der Bezug auf diese Raum- und Zeitstelle von p* (in der einzigen, unserer realen Welt) *notwendig* enthalten, denn es ist ja gerade dieses dieser bestimmten Raum-Zeit-Stelle zugeordnete reale Ereignis p*, von dem kontrafaktisch unterstellt wird, dass es nicht der Fall sei. Im Gegensatz zur fiktiven „Möglichkeit", bleibt das Kontrafaktische immer auf dieselbe Raum-Zeit-Stelle bezogen wie das Faktische. Dem Sprecher ist dabei immer klar, dass seine Unterstellung und das, was er aus dem kontrafaktisch Unterstellten schlussfolgert, nicht tatsächlich zutrifft – er zeigt ja diese Nichtwirklichkeit stets ausdrücklich durch bestimmte sprachliche Ausdrucksmittel (durch den Konjunktiv, durch geeignete Adverbiale, usw.) an; da klar zwischen der Faktizität und der Kontrafaktizität *ein und desselben* Ereignisses p* unterschieden wird, liegt kein Widerspruch vor.

5.4.2. Wahrheitswertdefinite Aussagen werden in der Fiktive-Welten-Semantik zu Quasi-Aussageformen.

Alle Argumente im Rahmen der Fiktive-Welten-Semantik setzen die falsche, logisch widersprüchliche „Identität" von verschiedenen Dingen, Ereignissen, Begriffen und Aussagen voraus; alles, was auf dieser Grundlage – ein und dasselbe Ereignis, ein und derselbe Sachverhalt wird an verschiedene Raum-Zeit-Stellen gebunden, ein und demselben Begriff werden unterschiedliche Umfänge zugeordnet, ein und dieselbe Aussage betrifft ganz verschiedene Sachverhalte, usw. – aufgebaut ist, muss als logisch widersprüchlich und absurd verworfen werden. Um jedoch den Aufstellungen der Modalitätenlogistiker weiterhin folgen zu können, müssen wir uns auf den Boden dieses logischen Unsinns stellen: wir müssen voraussetzen, dass es möglich ist, *ein und denselben* Aussagen in verschiedenen fiktiven „Welten" verschiedene Wahrheitswerte zuzuordnen, und dass allen Aussagen für jede dieser nebulosen fiktiven „Welten" ein konstanter, allgemein verbindlicher Wahrheitswert zukommt, über den intersubjektive Übereinstimmung herstellbar ist, dass die „Menge" dieser fiktiven „Welten" wohlbestimmt ist.

Zu den Voraussetzungen des SFG gehört, dass jede wahrheitswertdefinite *Aussage* einen einzigen, konstanten Wahrheitswert besitzt. Im Rahmen der Fiktive-Welten-Semantik jedoch wird jede wahrheitswertdefinite Aussage zu einer *Quasi-Aussageform*, die erst bezüglich der verschiedenen fiktiven „Welten" einen „Wahrheitswert" erhält und zu einer *Aussage* wird. Eine konkrete wahrheitswertdefinite Aussage wie „Frege war Mecklenburger" oder eine wahrheitswertdefinite Gedankengefügeaussage wie „(Carnap war ein Schwabe) ⇒ (Frege war Mecklenburger)“ ist jetzt nicht mehr wahrheitswertdefinit, sondern eine Aussageform, die erst durch ihre Bewertung in einer „bestimmter“ fiktiver „Welt“ zu einer „wahrheitswertdefiniten“ (Fiktiv-)Aussage wird. In jeder fiktiven „Welt“ ist für jede „besondere, spezifische und konkrete Aussage“ definitiv festgelegt, ob sie wahr oder falsch ist[68]. Von einer zur Quasiaussageform gewordenen Aussage $\mathfrak{A}$ kann nicht mehr behauptet werden, sie sei wahr bzw. falsch, sondern diese Bewertung der Aussage muss immer relativ zu einer fiktiven „Welt“ vorgenommen werden: „$\mathcal{W}_{w23779}(\mathfrak{A})$“ würde dann beispielsweise besagen, dass die Aussage $\mathfrak{A}$ ist in der „Welt“ w_{23779} wahr ist. Jede Aussage wird zu einer Quasiaussageform, die eine Variable für fiktive „Welten“ mit sich führt. Dieser Bezug einer Aussage $\mathfrak{A}$ auf eine fiktive „Welten“ w_i muss immer in der Darstellung kenntlich und sichtbar gemacht werden, indem etwa die Bezeichnung der fiktiven „Welt“ w_i als Index zur Bezeichnung der Aussage $\mathfrak{A}$ hinzugefügt wird: $\mathfrak{A}_{wi}$.

> *Eine fundamentale Voraussetzung für die Durchführung der Fiktive-Welten-Semantik ist die Norm, dass jede „Aussage“ in jeweils jeder fiktiven „Welt“ definitiv und unwandelbar entweder fiktiv-wahr oder fiktiv-falsch ist. Daraus folgt, dass diese fiktiven Bewertungen für alle fiktiven „Welten“ verbindlich sind, d.h. eine Aussage, die eine solche Bewertung beinhaltet, kann selbst nicht in der einen fiktiven „Welt“ fiktiv-wahr, in einer anderen fiktiven „Welt“ jedoch fiktiv-falsch sein.*

Für diese *Quasi-Aussageformen* werden dann die folgenden Bestimmungen festgelegt und als „logische Modalitäten“ ausgegeben:

> „Möglich“ (oder „möglich wahr“) soll eine zu einer Quasi-Aussageform gewordene konkrete Aussage $\mathfrak{A}$ dann sein, wenn sie in mindestens einer der fiktiven Welten (stets eingeschlossen die reale Welt) wahr ist. Dieser Sachverhalt wird durch den Ausdruck „$\diamond\mathfrak{A}$“ oder „$\mathbf{M}\mathfrak{A}$“ dargestellt.
>
> „Unmöglich“ (oder „unmöglich wahr“) wird eine derartige Quasiaussageform $\mathfrak{A}$ genannt, die in keiner der fiktiven Welten wahr ist; dieser Tatbestand wird meist durch den Ausdruck „$\mathbf{U}\mathfrak{A}$“ symbolisiert.
>
> „Notwendig“ (oder „notwendig wahr“) soll schließlich eine Quasiaussageform $\mathfrak{A}$ genau dann sein, wenn sie in allen fiktiven „Welten“ wahr ist[69], meist dargestellt durch den Ausdruck „$\Box\mathfrak{A}$“ oder „$\mathbf{N}\mathfrak{A}$“.

Allerdings sind diese Darstellungen unvollständig und somit nicht korrekt: die Aussagen sind ja keine Aussagen mehr, sondern Aussageformen, die eine freie Fiktive-Welten-Variable w_i mit sich führen: es müsste heißen „$\diamond\mathfrak{A}_{wi}$“, „$\Box\mathfrak{A}_{wi}$“, usw. Diese angeblichen logischen Modalitäten sind nichts anderes als Quantoren, die Fiktive-Welten-Variablen binden; durch diese Bindung werden aus den Quasiaussageformen Aussagen:

> $\Box\mathfrak{A}_{wi}$ ist definiert durch den Ausdruck „$\forall w_i\ (\mathfrak{A}_{wi})$“: In allen fiktiven „Welten“ w_i ist $\mathfrak{A}$ wahr.
>
> $\diamond\mathfrak{A}_{wi}$ ist durch den Ausdruck definiert „$\neg\forall w_i\ \neg(\mathfrak{A}_{wi})$“ ≡ „$\exists w_i(\mathfrak{A}_{wi})$: in zumindest einer fiktiven „Welt“ ist die Quasiaussageform A wahr.

Diese „Modalitäten“ sind Prädikate, die Quasiaussageformen zugesprochen werden: „… ist in allen fiktiven ‚Welten‘ wahr“, „… ist in keiner fiktiven ‚Welt‘ wahr“, usw.; genauer sind sie *ein*-fache Quantorfixierungen des zweistelligen FWS-Prädikats „*A* ist (nicht) wahr in der fiktiven ›Welt‹ *w*“, die die Fiktive-Welten-Variablen binden. Der Prädikatausdruck enthält Beliebig-Element-Zeichen zweier verschiedener Typen, nämlich die „Aussagevariable“ *A* und die Fiktive-Welten-Variable *w*. Ich spreche nicht von „logischen Modalitäten“, sondern neutral von „NUM-Prädikaten“.

Diese NUM-Prädikate können auch Gedankengefügeaussagen $\mathfrak{A}\Rightarrow\mathfrak{B}$, wie etwa „„(2+2=4) ⇒ (Frege war Mecklenburger)“ prädiziert werden; auch diese Gedankengefügeaussagen werden im Rahmen der Fiktive-Welten-Semantik zu Quasiaussageformen.

Die NUM-Prädikate können nur konkreten, wahrheitswertdefiniten Aussagen zugeschrieben, diese Aussagen werden dann zu Quasiaussageformen. Sie können im Rahmen der Fiktive-Welten-Semantik nur willkürlich zugesprochen werden. Wie sollte denn jemand widerlegt werden können, der behauptet die Aussage „Frege ist in Wismar geboren“ sei in allen „möglichen Welten“ richtig, also „notwendig wahr“, die Behauptung, Cäsar sei ermordet worden, sei hingegen nicht in allen nur denkbaren Welten wahr (also nur „möglicherweise wahr“)? Solche „Behauptungen“ sind Sache bloßer Willkür.

Nun ergibt sich das folgende, von den Modallogistikern übersehene Problem. Die Modalitätenlogistik ist als eine Erweiterung des SFG konzipiert. In den Formeln des SFG kommen keine wahrheitswertdefiniten Aussagen vor, sondern nur

Aussagevariablen. Als Argumente der NUM-Prädikate kommen nur die ursprünglichen zulässigen Formelausdrücke des SFG in Betracht, nämlich Aussagevariablen *A*, *B*, *C*, … und SFG-Formeln wie $\neg A$, $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, oder $(A \overline{\vee} B) \Rightarrow (B \Uparrow A)$ usw. Die NUM-Prädikate können jedoch nur konkreten wahrheitswertdefiniten Aussagen zugesprochen werden, die zu Quasiaussageformen werden, die erst, wenn sie bezüglich einer fiktiven „Welt“ bewertet werden, zu (Fiktiv-)Aussagen werden. Ausdrücke wie „$\Diamond$A“, „$\neg\Box\neg$(A$\Rightarrow$B)“ oder „$\Box$[A$\Rightarrow$(B$\Rightarrow$A)]“ sind keine „Modalaussagen“ über die fiktive Wahrheit der SFG-Formeln „A“, „A$\Rightarrow$B“, „A$\Rightarrow$(B$\Rightarrow$A)“ usw., sondern Aussageformen, die einerseits Aussagevariable, andererseits Fiktive-Welten-Variablen aufweisen: durch die NUM-Prädikate werden nur die Fiktive-Welten-Variablen gebunden, die Aussagevariablen bleiben „frei“ und „ungebunden“. Der Ausdruck „$\Box$[A$\Rightarrow$(B$\Rightarrow$A)]“ bezeichnet also keine „modallogische“ Gesetzesaussage, sondern eine Aussageform mit den freien Variablen A und B.

> *Ein modallogistisches System muss so konzipiert werden, dass es Ausdrücke enthält, die Argumente dieser NUM-Prädikate sein können. Gelingt dies nicht, ist die Konstruktion der „Modallogik“ als einer Erweiterung der „Aussagenlogik“ misslungen.*

Wie sind Ausdrücke wie „$\Box$[A$\Rightarrow$(B$\Rightarrow$A)]“ zu beurteilen? Der Ausdruck ist unvollständig, denn der Bezug auf die fiktiven „Welten“ ist nicht explizit dargestellt. Nun kann der Bezug der SFG-Formeln auf die Fiktive-Welten-Semantik auf zweifache Weise geschehen. Entweder die Formel als Ganze wird auf eine fiktiv Welt bezogen; ich muss dann schreiben: „$[A \Rightarrow (B \Rightarrow A)]_{wi}$“. Diese Aussageform hat die Bedeutung „in einer fiktiven ‚Welt‘ w_i ist es falsch, dass eine Quasiaussageform A zugleich fiktiv-wahr und fiktiv-falsch ist, und eine Quasiaussageform B fiktiv-wahr ist“ (Version 1). Es ist auch möglich, dass jede Aussagevariable (in der Fiktive-Welten-Semantik wird sie zum Beliebig-Element-Zeichen für Quasiaussageformen) gesondert auf eine fiktive „Welt“ bezogen wir. Ich muss dann schreiben: „$[A_{wi} \Rightarrow (B_{wj} \Rightarrow A_{wi})]$“; die Bedeutung des Ausdruck ist „Es ist falsch, dass eine Quasiaussageform A ist in einer fiktiven ‚Welt‘ w_i nicht zugleich fiktiv-wahr und fiktiv-falsch ist und eine Quasiaussageform B in einer fiktiven ‚Welt‘ w_j fiktiv-wahr ist“ (Version 2).

Wenn wir die NUM-Prädikate in das SFG einführen, erhalten wir in „Version 1“ Ausdrücke wie „$\Box[A \Rightarrow (B \Rightarrow A)]_{wi}$“, eine *Aussageform*, die besagt, dass in allen fiktiven „Welten“ eine Quasiaussageform A nicht zugleich fiktiv-wahr und fiktiv-falsch ist, und eine Quasiaussageform B fiktiv-wahr ist.

In der „Version 2“ ergibt sich das Problem, dass ein Ausdruck wie „$\Box[A_{wi} \Rightarrow (B_{wj} \Rightarrow A_{wi})]$“ keinen Sinn ergibt; denn das NUM-Prädikat „$\Box$“ bedeutet „… ist in allen fiktiven ‚Welten‘ w_i wahr“, es bindet also nur eine einzige Fiktive-Welten-Variable. Um im vorliegenden Ausdruck beide Fiktive-Welten-Variablen zu binden, können wir uns aber der üblichen Quantoren-Schreibweise befleißigen: „$\forall w_i, w_j\ [A_{wi} \Rightarrow (B_{wj} \Rightarrow A_{wi})]$“: Für alle fiktiven „Welten“ w_i und alle fiktiven „Welten“ w_j gilt, dass es falsch ist dass eine Quasiaussageform A in w_i fiktiv-wahr und fiktiv-falsch und eine Quasiaussageform B in w_j fiktiv-wahr ist.

Ausdrücke wie „$\Box[A \Rightarrow (B \Rightarrow A)]_{wi}$“ oder „$\forall w_i, w_j\ [A_{wi} \Rightarrow (B_{wj} \Rightarrow A_{wi})]$“ sind Aussageformen mit nicht-gebundenen Variablen für Quasiaussageformen. Aus diesen Aussageformen werden Aussagen, wenn auch diese Variablen durch Quantoren gebunden werden.

So ist beispielsweise „$\forall A, B\ \{\Box[A \Rightarrow (B \Rightarrow A)]_{wi}\}$“ eine Gesetzesaussage (ein „modallogisches Gesetz“): Für alle Quasiaussageformen A und B ist es in allen fiktiven „Welten“ falsch, dass A fiktiv-wahr und fiktiv-falsch und B fiktiv-wahr ist. Alle allgemeingültigen SFG-Formeln sind auf diese Weise für alle Aussagen (Quasiaussageformen) in allen fiktiven „Welten“ richtig. Sie drücken aber alle nichts weiter aus, als dass eine Quasiaussageform in einer fiktiven „Welt“ eben nicht zugleich fiktiv-wahr und fiktiv-falsch ist. Alle derartigen „modallogischen Gesetze“ drücken so – freilich unvollständig – nur eine Voraussetzung der Fiktive-Welten-Semantik aus, so wie die „aussagenlogischen Gesetze“ nur eine Voraussetzung des SFG ausdrücken. Das ist nicht gerade viel!

Dasselbe gilt für die Version 2.

„$\forall A, B\ [\forall w_i, w_j\ (A_{wi} \Rightarrow (B_{wj} \Rightarrow A_{wi}))]$“ bedeutet: Für jedes Aussagenpaar (A, B) gilt, dass für alle fiktiven „Welten“ w_i und w_j ausgeschlossen ist, dass A in w_i zugleich fiktiv-wahr und fiktiv-falsch ist, und B in w_j fiktiv-wahr ist.

Die eben abgehandelte Möglichkeit, ein Gedankengefüge wie A$\Rightarrow$B den Gegebenheiten der Fiktive-Welten-Semantik anzugleichen, besteht darin, dass die Aussagevariablen A und B zu Variablen für Quasiaussageformen werden und die Formel dann für Belegungen der Variablen in den fiktiven „Welt“ bewertet werden. Die Formel A$\Rightarrow$B wird etwa durch die Quasiaussageformen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ belegt, und die resultierende Gedankengefüge-Quasiaussageform $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ dann in einer bestimmten fiktiven „Welt“ bewertet, z.B. „In der fiktiven ›Welt‹ w_{46} ist es falsch, dass $\mathfrak{A}$ wahr und $\mathfrak{B}$ falsch ist“. Der aus einer Belegung einer SFG-Formel resultierenden Gedankengefüge-Quasiaussageform kann dann ein NUM-Prädikat prädiziert werden, z.B. „Es ist in zumindest einer fiktiven ›Welt‹ falsch, dass $\mathfrak{A}$ wahr und $\mathfrak{B}$ falsch ist“.

Außer diesen nichts sagenden modallogistischen Gesetzen dann auch die Gesetze, die die logischen Beziehungen zwischen den NUM-Prädikaten darstellen.

5.4.3 Die logischen Beziehungen der NUM-Prädikate

Die NUM-Prädikate sind ein System von Prädikaten; die logischen Beziehungen dieser Prädikate liegen eindeutig fest. Für die absoluten und relativen NUM-Prädikat gelten dieselben Beziehungen. W ist die Menge der fiktiven „Welten“, χ ist eine „Bewertungsfunktion“, die jeder Quasiaussageform A für jede fiktive „Welt“ einen Wahrheitswert zuordnet.

Wir haben drei *elementare* NUM-Prädikate:

(1) $\Box A$: eine Quasiaussageform A wird bezüglich aller $w_i \in W$ durch χ auf $\mathcal{W}$ abgebildet.

(2) $\Box\sim A$: eine Quasiaussageform A wird bezüglich aller $w_i \in W$ durch χ auf $\mathcal{F}$ abgebildet.

(3) $\blacklozenge A$: eine Quasiaussageform A wird bezüglich zumindest eines Elements aber nicht aller Elemente $w_i \in W$ durch χ auf $\mathcal{W}$ abgebildet.

Dann haben wir die durch Negation konstruierbaren NUM-Prädikate

(4) $\sim\Box\sim A \equiv \Diamond A$: eine Quasiaussageform A wird bezüglich zumindest eines Elements $w_i \in W$ durch χ auf $\mathcal{W}$ abgebildet.

(5) $\sim\Box A \equiv \Diamond\sim A$: eine Quasiaussageform A wird bezüglich zumindest eines Elements $w_i \in W$ durch χ auf $\mathcal{F}$ abgebildet.

(6) $\sim\blacklozenge A$: eine Quasiaussageform A wird bezüglich aller Elemente $w_i \in W$ durch χ entweder auf $\mathcal{W}$ oder auf $\mathcal{F}$ abgebildet.

Es ergeben sich die folgenden Äquivalenzen:

$$\blacklozenge A \leftrightarrow \Diamond A \ \& \sim\Box A$$

$$\blacklozenge A \leftrightarrow \blacklozenge\sim A$$

$$\Diamond A \leftrightarrow \sim\Box\sim A$$

$$\sim\Box A \leftrightarrow \Diamond\sim A$$

Die logischen Beziehungen der 6 NUM-Prädikate sind in folgender Relationenmatrix dargestellt:

	$\Box A$	$\Box\sim A$	$\blacklozenge A$	$\sim\Box\sim A = \Diamond A$	$\sim\Box A$	$\sim\blacklozenge A$
$\Box A$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{C}$
$\Box\sim A$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
$\blacklozenge A$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{J}$
$\sim\Box\sim A = \Diamond A$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$
$\sim\Box A$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{E}$	$\mathbb{A}$
$\sim\blacklozenge A$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{E}$

Das ist alles sehr trivial.

5.4.4. Die „Zugangsrelation“ zwischen fiktiven „Welten“

Die Fiktive-Welten-Semantik ist auf widersprüchlichen Fundamenten, insbesondere der widersprüchlichen Konzeption der „trans-world-identity“ errichtet; jeder weitere Ausbau dieser Theorie führt unvermeidlich nur zu weiteren Widersprüchen. Das gilt auch für jene Versuche, in denen die fiktiven „Welten“ durch eine „Zugangsrelation“ verbunden werden. Die Einführung dieser Relation – die um diese Relation erweiterte Fiktive-Welten-Semantik wird oft „Relationensemantik“ genannt – sollte insbesondere die Unterschiede der verschiedenen modallogistischen Systeme und die „Iteration“ der Pseudomodalitäten verständlich machen. Also Ausdrücke wie „$\diamond A \Rightarrow \Box\diamond A$“ oder „$\Box(\diamond A \Rightarrow \Box\diamond A)$“ verständlich zu machen und ihre unterschiedliche Geltung in verschiedenen modallogistischen Systemen.

Grundgedanke der „Relationensemantik“ ist, dass man, um bewerten zu können, ob eine Aussage in irgendeiner fiktiven „Welt“ wahr ist, „Zugang“ zu dieser „Welt“ haben muss. Neben einer rein mengentheoretischen Erläuterung dieser Relation wird auch eine „philosophische“ Untermauerung dieser Vorstellung versucht.

Es wird gesagt, eine „Welt“ sei für uns Menschen oder andere “intelligente Wesen“ „zugänglich“, wenn wir sie uns vorstellen, wenn wir sie uns ausdenken könnten[70]. Der „Zugang“ zu den fiktiven „Welten“ ist ebenso widersprüchlich-fiktiv wie schon diese „Welten“. Bisweilen wird gesagt, eine „Welt“ w_2 sei von einer „Welt“ w_1 aus zugänglich, wenn w_2 von w_1 aus möglich sei – eine nebelhafte und obendrein zirkuläre Behauptung[71].

Was hat es mit dem „Sich-Vorstellen-Können“ auf sich? In der Fiktive-Welten-Semantik wurde bislang vorausgesetzt, dass sich jene wahrheitswertdefiniten Aussagen, die sich mit den Tatsachen und den Gesetzmäßigkeiten in unserer realen Welt befassen und Sachverhalte/Ereignisse in unserer wirklichen Welt beschreiben, auf verschiedene fiktive „Welten“ übertragen und dort unterschiedlich bewerten lassen. Jedes Ereignis, jeder Sachverhalt, jedes Gesetzesverhältnis in der wirklichen Welt wird in der Einbildung unter Verletzung der logischen Grundprinzipien vervielfältigt und in beliebig viele fiktive „Welten“ projiziert. Da die Aussagen, die fiktiv bewertet werden, Aussagen sind, die unsere reale Wirklichkeit betreffen, stellen die fiktiven „Welten“ mehr oder weniger modifizierte „Abbilder“ unserer realen Welt dar; die fiktiven „Welten“ sind dadurch bestimmt, dass, was in der realen Welt in Geltung ist, entweder auch in Geltung ist oder nicht in Geltung ist; d.h. Ausgangspunkt für die Konstruktion der fiktiven „Welten“ ist, was bezüglich unserer realen Welt für wahr gehalten wird. Es sind ja die auf unsere reale Welt bezogenen wahrheitswertdefiniten Aussagen, für welche durch diese ihre Projektion in fiktive „Welten“ gesichert werden soll, dass sie „möglich“, d.h. sowohl wahr wie falsch sein können. Nach Einführung der „Zugangsrelation“ ist nicht mehr nur von *unserem* Uns-Vorstellenkönnen fiktiver „Welten“ die Rede, sondern auch den intelligenten Bewohnern anderer „Welten“ werden „Vorstellungs-Zugänge“ zu fiktiven „Welten“ zugebilligt. Wir führen also neue imaginäre Akteure ein, intelligente „Welten“-Bewohner, die nicht mehr „Abbilder“, „Verdoppelungen“, „Doppelgänger“ realer Akteure *unserer* wirklichen Welt sind, sondern von uns völlig verschiedene, ganz selbstständige „Subjekte“, die sich ebenfalls – ausgehend von den „Erfahrungen“ in jeweils ihrer eigenen „Welt“ – fiktive „Welten“ ausdenken und vorstellen können, in die sie die ihre je eigene „reale Welt“ betreffenden Aussagen projizieren.

Es sei w_1 unsere reale Welt und w_2 eine für uns zugängliche fiktive „Welt“. Die wahrheitswertdefiniten Aussagen, die wir in w_1 für wahr halten, betreffen reale Vorgänge, die wesentlich mit unserer Lebenstätigkeit verbunden sind und von denen wir nur aufgrund unserer aktiven Erkenntnisbemühungen wissen. Die „Zugänglichkeit“ der „Welt“ w_2 für uns bedeutet, dass wir jeder in unserer realen Welt w_1 wahrheitswertdefiniten Aussage in der fiktiven „Welt“ w_2 willkürlich eine fiktive Bewertung geben können – wodurch sich die Welt w_2 als fiktive Modifikation der realen Welt w_1 erweist, in der dieselben Aussagen wie in w_1, freilich teilweise abweichend, bewertet werden. Jetzt werden auch noch eigenständige Fabelwesen, die jene für *uns* fiktive „Welt“ w_2 bewohnen und selber zumindest Zugang zu ihrer eigenen, für *sie* realen „Welt“ w_2 haben[72], vorausgesetzt; die widersprüchliche Fiktive-Welten-Semantik wird mit einer Vielzahl neuer Widersprüche beladen. Die fiktive „Welt“ w_2 war bislang für unser „Vorstellen“ nur ein mehr oder weniger getreues fiktives Abbild unserer realen Welt, die Welt w_2 setzt sich keineswegs aus Vorgängen und Ereignissen zusammen, die an die eigenständige Lebenstätigkeit ihrer Bewohner gebunden sind. Und so verhält es sich mit den „Bewohnern“ aller fiktiven „Welten“, die wegen der Einführung der „Zugangsrelation“ postuliert werden müssen – sie können sich unter den bisherigen Voraussetzungen allenfalls Fiktionen von den Vorgängen in *unserer* realen Welt machen. Die Einführung solcher fiktiver „erkennender Wesen“ in den fiktiven „Welten“ passt nicht zusammen mit der ursprünglichen Intention der Fiktive-Welten-Semantik: alle fiktiven „Welten“ waren bestimmt als *unsere* reale Welt, wenn sie nicht genau so wäre, wie wir das von ihr annehmen. Wenn wir nun plötzlich diese fiktiven „Welten“ mit eigenständigen „Lebewesen“ bevölkern, hören sie auf, unselbständige fiktive, projektive Abbilder unsere eigenen Wirklichkeit zu sein, den fiktiven „Welten“ müsste dieselbe Selbstständigkeit zugebilligt werden wie ihren Bewohnern. Damit aber verlieren die fiktiven „Welten“ jene Eigenschaften, die ihre Einführung motiviert hat: nämlich wahrheitswertdefiniten Aussagen. die sich allein mit *unserer* realen Welt befassen, fiktive Wahrheitswerte zuschreiben zu können und sie so zu Quasiaussageformen zu machen, denen NUM-Prädikate (Pseudomodalitäten) prädiziert werden können. Die Einführung der „Zugangsrelation“ ist damit keine umfassendere Ausbildung der Fiktive-Welten-Semantik, sondern sie steht mit den ursprünglichen Intentionen und Annahmen der Fiktive-Welten-Semantik durch die Postulierung eigenständiger „intelligenter Lebewesen“ in diesen fiktiven „Welten“ in Widerspruch. Dass wir den auf unsere reale Welt bezogenen Aussagen fiktive Wahrheitswerte zuschreiben, ist mit viel Entgegenkommen noch nachvollziehbar – aber wie sollen wir eine Erkenntnis von all den jeweils eigenständigen Vorgängen in unendlich vielen anderen „Welten“ mit ihren eigenständigen „Bewohnern“ und ihrem je eigenen Wissen gewinnen können? Unsere eigene Welt stellt einerseits die Gesamtheit jener realen Sachverhalte/Ereignisse dar, die durch die wahrheitswertdefiniten Aussagen dargelegt werden, die in der Fiktive-Welten-Semantik zu Quasiaussageformen werden; zugleich ist unsere reale Welt für alle Lebewesen jeweils aller anderen fiktiven „Welten“, die Zugang zu unserer Welt haben, nur eine fiktive Projektion *ihrer* jeweils eigenen „realen“ „Welt“, die für uns allesamt Fiktionen sind. Dieser fiktive Charakter unserer eigenen Welt für die anderen „Lebewesen“ müsste jetzt auch zur Bestimmtheit unserer realen Welt gehören, wenn dem „Zugang“ anderer „Lebewesen“ zu unserer Welt irgendein Gehalt zugestanden wird; unsere reale Welt ist nicht nur unsere reale Welt, wie sie (unserer Meinung nach) tatsächlich ist, sondern sie ist zugleich jede der anderen „Welten“, wenn diese nicht so wären, wie sie „sind“ (für die sie bewohnenden Fabelintelligenzen).

Zu den Voraussetzungen der Fiktive-Welten-Semantik gehört, dass *jede* beliebige Aussage in jeder fiktiven „Welt“ bewertet werden kann. Diese Bewertungen werden jetzt auf die jeweils „zugänglichen Welten“ beschränkt. Von einer Aussage, die ursprünglich auf unsere Welt bezogen war, muss gleichwohl vorausgesetzt werden, dass sie auch in fiktiven „Welten“ bewertet werden kann, die uns nicht zugänglich sind – dann von Lebewesen, die von ihrer „Welt“ aus Zugang zu der uns nicht zugänglichen fiktiven „Welt“ haben. Wir müssen auch in unserer realen Welt, zu der wir ja auf alle Fälle Zugang haben, ausnahmslos jede beliebige Aussage, die andere Welten, die Vorgänge in diesen „Welten“ und die Handlungen der diese bewohnenden „Lebewesen“ betreffen, bewerten – denn in jeder Welt erhält *jede* Aussage einen fiktiven Wahrheitswert; wir müssen also für uns wie die Bewohner aller übrigen „Welten“ die lückenlose Kenntnis aller Aussagen voraussetzen, auch die Kenntnis der Aussagen, die „Vorgänge“ in fiktiven „Welten“ betreffen, die uns nicht zugänglich sind. Es ist ein Widerspruch, dass einerseits nicht jede fiktive „Welt“ von jeder fiktiven „Welt“ aus „zugänglich“ sein soll, andererseits aber jede Aussage, auf welche fiktive „Welt“ sie auch ursprünglich bezogen sein mag, für die „Bewohner“ jeder fiktiven „Welt“ bekannt sein muss. Von jeder Aussage muss weiterhin vorausgesetzt werden, dass sie für alle Bewohner aller fiktiven „Welten“ in jeder einzelnen fiktiven „Welt“ gleich und konstant bewertet wird.

Stellt man sich auf den Boden dieser absurden Voraussetzungen der „Relationensemantik“, können die NUM-Prädikate nur relativ zu einer bestimmten fiktiven „Welt“ und den dieser zugänglichen „Welten“ getroffen werden[73]. Diese Relativität kann etwa dadurch ausdrücklich gekennzeichnet werden, dass man das Erfüllbarkeitsprädikat (die Pseudomodalität) durch die Bezeichnung jener fiktiven „Welt“ indiziert, von deren Standpunkt aus das Erfüllbarkeitsprädikat zugesprochen wird. „$\Box_{w1}\mathfrak{A}$“ würde dann bedeuten: die Quasiaussageform $\mathfrak{A}$ ist in allen von w_1 aus zugänglichen „Welten“ wahr, $\Diamond_{w356}\mathfrak{A}$ bedeutet: Die Quasiaussageform $\mathfrak{A}$ ist in zumindest einer der von w_{356} aus zugänglichen „Welten“ wahr, usw. Damit ich eine solche relative Erfüllbarkeitsaussage treffen kann, muss ich einerseits wissen, welche fiktiven „Welten“ von der betreffenden fiktiven „Welt“ aus zugänglich sind; zusätzlich muss ich noch selber zu diesen fiktiven „Welten“ „Zugang“ haben.

Eine Quasiaussageform $\mathfrak{A}$ darf bezüglich derselben fiktiven „Welt“ w_i von den Standpunkten unterschiedlicher „Welten“, die „Zugang“ zu w_i haben, nicht unterschiedlich bewertet werden. Wer von welcher „Welt“ auch immer aus überhaupt „Zugang“ zur betreffenden „Welt“ hat, muss alle Quasiaussageformen in *dieser* Welt übereinstimmend bewerten. Daraus folgt, *dass die Erfüllbarkeitsaussagen, die diese fiktiven Bewertungen zusammenfassen, nicht wiederum hinsichtlich verschiedener fiktiver „Welten“ unterschiedliche fiktive Wahrheitswerte erhalten können*; dies würde ja voraussetzen, dass eine Quasiaussageform in zumindest einer fiktiven „Welt“ widersprüchlich bewertet wird. Eine *Erfüllbarkeitsaussage* wie „$\Box_{w1}\mathfrak{A}$“ kann also nicht in verschiedenen fiktiven „Welten“ einen unterschiedlichen Wahrheitswert haben, denn die Aussage ist ja schon auf die Menge der verschiedenen (zugänglichen) „Welten“ bezogen[74]. Von allen diesen NUM-*Aussagen*, die relativ sind zu den jeweils von einer bestimmten fiktiven „Welt“ aus zugänglichen fiktiven „Welten“, wird also vorausgesetzt, dass sie entweder wahr oder falsch sind, sie können nicht zu Quasiaussageformen gemacht werden[75]. Man darf aus diesem Grunde nicht die Aussagen $\mathfrak{A}$, die als Quasiaussageformen hinsichtlich der verschiedenen fiktiven „Welten“ bewertet werden, mit den Erfüllbarkeitsaussagen $\Box_{wi}\mathfrak{A}$, $\Diamond_{wj}\mathfrak{A}$ usw. in einen Topf werfen, die über eine solche Quasiaussageform $\mathfrak{A}$ gemacht werden. Dies bedeutet, dass Ausdrücke wie „$\Diamond(\Box_{wi}\mathfrak{A})$“ oder „$\Diamond_{wj}(\Box_{wi}\mathfrak{A})$“ sinnlos sind[76].

5.4.5. Kripke-Modelle

5.4.5.1. Die Struktur der Kripkemodelle

Es wurde versucht, diese Konzeption der Fiktive-Welten-Semantik, die der „Bewertungsfunktion“ eine „Zugangsrelation“ an die Seite stellt, durch ihre allgemeine, algebraisch-mengentheoretische Struktur darzulegen: die Fiktive-Welten-Semantik wird so zum Spezialfall (zum „Modell“) einer Struktur $\langle A, B, \varphi, R\rangle$, wobei A und B irgendwelche nichtleeren Mengen, φ eine Abbildung $(A\times B) \boldsymbol{\rightarrow} \{a_1, a_2\}$ ist – $\{a_1, a_2\}$ ist eine Menge zweier komplementärer Elemente – und R eine reflexive Relation $R \subseteq B\times B$ sind. Es kann dann eine Vielzahl von Modellen konstruiert werden, die diese Struktur aufweisen. Zu fordern ist immer die Wohlbestimmtheit der Mengen A und B und die Korrektheit der Abbildung φ (Eindeutigkeit von Definitionsmenge $A\times B$ und Zielmenge $\{a_1, a_2\}$, Eindeutigkeit der Zuordnungsvorschrift) und der Zugangsrelation R. Die Abbildungen φ und die Relationen R sind jeweils unabhängig voneinander. Wir haben so eine einfache algebraische Struktur, die auf den Operationen der Mengenbildung, der Bildung zweistelliger Relationen auf der Basis des cartesischen Produkts und der Operation der Abbildung basiert. Es handelt sich um eine sehr einfache operative Spielerei und keine grundlegende mathematische Konstruktion, denn die konstitutiven Operationen sind durch die elementare Mengentheorie vorgegeben.

Die Modalitätenlogistik als Kripkemodell: Es ist jede beliebige wahrheitswertdefinite Aussage in jeder fiktiven „Welt“ zu bewerten (die Aussagen werden zu Quasiaussageformen); wir haben so einmal die „Menge der Aussagen/Quasiaussageformen“ $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots\}$ und die „Menge“ der fiktiven „Welten“ $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$. Die Bewertungsfunktion β bildet jedes Element des cartesischen Produkts $(\mathfrak{A} \times W)$ in die Menge der Wahrheitswerte $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}, \mathcal{F}\}$ ab: $\beta\colon \mathfrak{A}\times W \boldsymbol{\rightarrow} \mathfrak{W}$. Ganz unabhängig davon wird eine zweistellige, *reflexive* „Zugangsrelation“ $\mathfrak{Z} \subseteq W\times W$ festgelegt. Das Kripkemodell ist dann ein Quadrupel $\langle\mathfrak{A}, W, \beta, \mathfrak{Z}\rangle$. Unter der (zweifelhaften) Voraussetzung, der Wohlbestimmtheit von $\mathfrak{A}$ und W, lassen sich dann beliebig viele unterschiedliche Fiktive-Welten-Semantiken konstruieren. Jedes „Modell“ beruht auf der vorgängigen Auswahl einer bestimmten Bewertungsfunktion β und einer bestimmten Zugangsrelation $\mathfrak{Z}$, d.h. jede Aussage/Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ muss in jeder fiktiven „Welt“ durch β eindeutig bewertet sein. Zu beachten bleibt, dass durch β *nur* die vorgegebenen Elemente der Definitionsmenge $(\mathfrak{A}\times W)$ in $\mathfrak{W}$ abgebildet werden können!

> Obwohl „$(\mathfrak{A}_i\times w_j \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W})$“ eine Aussage ist (eine Abbildungsaussage, die besagt, dass die Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ ist in der fiktiven „Welt“ w_j „wahr“ ist), kann der Ausdruck „$\mathfrak{A}_i\times w_j \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W}$“ nicht wiederum durch β auf $\mathfrak{W}$ abgebildet werden, denn *diese* Aussage kann keine Elementaraussage/Quasiaussageform werden, da der Wahrheitswert von $\mathfrak{A}_i\times w_j$ durch β schon definitiv und unverrückbar bestimmt ist.

Diese Strukturen lassen sich mit der „Aussagenlogik“ verbinden. Alle *Abbildungsaussagen* und alle Aussagen über die Zugänglichkeit von „Welten“ können durch Gedankengefüge „verknüpft“ werden. Die Informationen, die durch β und $\mathfrak{Z}$ immer schon vorgegeben sind, werden dabei nur entweder tautologisch oder informationsverschleiernd wiederholt.

Es gibt tautologische Gedankengefügeaussagen: $(\mathfrak{A}_i\times w_j \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W}) \models (\mathfrak{A}_k\times w_h \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W})$ mit der Bedeutung: die Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ wird in der Welt w_j auf $\mathcal{W}$ und die Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ wird in der Welt w_j auf $\mathcal{F}$ abgebildet. Die FWS-Gedankengefügeaussage „$(\mathfrak{A}_i\times w_j \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W}) \models (\mathfrak{A}_k\times w_h \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W})$“ ist genau dann wahr, wenn „$(\mathfrak{A}_i\times w_j \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W})$“ richtig und „$(\mathfrak{A}_k\times w_h \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W})$“ unrichtig ist. Die Bewertung kann sich auf verschiedene fiktive „Welten“ beziehen (Version 1) oder auf ein und dieselbe fiktive „Welt“ (Version 2 – die in der Regel durch die Logistiker favorisiert wird).

Es gibt informationsverschleiernde Gedankengefügeaussagen wie: $(\mathfrak{A}_i\times w_j \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W}) \Rightarrow (\mathfrak{A}_k\times w_h \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{F})$ mit der Bedeutung: es trifft nicht zu, dass die Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ in der Welt w_j auf $\mathcal{W}$ und die Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ in der Welt w_j nicht auf $\mathcal{F}$ abgebildet wird.

Die Abbildungen im Rahmen von Version 1 können folgendermaßen dargestellt werden:

$((\mathfrak{A}_i \Rightarrow \mathfrak{A}_k)\times w_i \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W})$ mit der Bedeutung: in der Welt w_i ist $(\mathfrak{A}_i \Rightarrow \mathfrak{A}_k)$ wahr.

Die Abbildungen im Rahmen von Version 2 können folgendermaßen dargestellt werden:

$(\mathfrak{A}_i\times w_j \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{W}) \Rightarrow (\mathfrak{A}_k\times w_h \boldsymbol{\rightarrow} \mathcal{F})$ mit der Bedeutung: es trifft nicht zu, dass $\mathfrak{A}_i$ in w_j wahr und $\mathfrak{A}_k$ nicht in w_h falsch ist.

Es können auch die durch die Zugangrelation $\mathfrak{Z}$ festgelegten Tatbestände mit Hilfe der Gedankengefüge tautologisch oder informationsverschleiernd ausgedrückt werden: z.B. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_j)$ oder $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_j)$ & $\sim\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_h, \mathfrak{A}_k)$ oder informationsverschleiernd $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_j) \Rightarrow \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}_h, \mathfrak{A}_k)$. — Das alles ist ohne jede kognitive Relevanz; die Informationen, die schon mit β und $\mathfrak{Z}$ gegeben sind, werden bestenfalls tautologisch wiederholt.

Nun kann man die Bewertungsfunktion β noch weiter darlegen: es kann Quasiaussageformen $\mathfrak{A}_i$ geben, die in jeder fiktiven „Welt" auf $\mathcal{W}$ abgebildet werden, was durch den Ausdruck „$\forall w_i$ ($\mathfrak{A}_i \times w_i$ ➡ $\mathcal{W}$)" formuliert wird. Nun kann man für diese spezielle Allaussage natürlich eine zusätzliche zweite, gleichbedeutende Bezeichnung festsetzen, nämlich: $\Box\mathfrak{A}_i$. Ein Ausdruck wie „$\sim \forall w_i$ ($\mathfrak{A}_i \times w_i$ ➡ $\mathcal{F}$)" kann durch $\Diamond\mathfrak{A}_i$ ausgedrückt werden. In diesen Ausdrücken ist w_i ist eine gebundene Variable, $\mathfrak{A}_i$ ist eine Konstante. Die Festlegung der *Abkürzungen* „□" und „◇" ist nichts konzeptuell Neues!

Unter Zugrundelegung von Fregegesetzen (den allgemeingültigen Formeln des SFG) kann man nun Aussagen formulieren, die für beliebige Quasiaussageformen und beliebige fiktive „Welten" richtig sind; diese Aussagen besagen aber alle nur, dass eine Quasiaussageform (Elementaraussage, „atomare Aussage") in einer fiktiven „Welt" nicht zugleich auf $\mathcal{W}$ und auf $\mathcal{F}$ abgebildet werden kann – man bleibt bei diesem trivialen Gehalt stehen, der zu den *Voraussetzungen* dieser „Kripke-Modelle" gehört.

Beispiel: die allgemeingültige SFG-Formel $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$; die Aussagevariablen werden jetzt zu Beliebig-Element-Zeichen für Quasiaussageformen. Aus der trivialen SFG-Aussage „$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$" wird dann die triviale Aussage:

$$\forall A, B \in \mathfrak{A}\ \forall w_i \in W\ ((A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \times w_i) \text{ ➡ } \mathcal{W}.$$

Mit Hilfe des abkürzenden Zeichens □: $\forall A, B \in \mathfrak{A}\ (\Box(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)))$.

Der Teilausdruck „$\Box(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$" drückt diesen Zusammenhang noch nicht aus, denn er ist eine Aussageform, die erst durch Ersetzung der Variablen für Quasiaussageformen durch konkrete Quasiaussageformen oder durch Bindung dieser Variablen durch einen Quantor zu einer Aussage wird. Der Teilausdruck „$\Box(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$" bindet nicht Beliebig-Element-Zeichen für Quasiaussageformen, sondern die Fiktive- Welten- Variablen, die jeweils zu einer Quasiaussageform gehört.

5.4.5.2 Die Zugangsrelation und die „Iteration der Modalitäten"

Weiterhin können die auf die Bewertungsfunktion β Bezug nehmenden NUM-Prädikate mit der Zugangsrelation $\mathfrak{Z}$ verbunden werden – man kann von „**relativen NUM-Prädikaten**" reden: eine Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ wird in allen (bzw. in zumindest einer der) fiktiven „Welten", die zu einer fiktiven „Welt" w_i in $\mathfrak{Z}$ stehen, auf $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{F}$ abgebildet: $\forall w_j \in W$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_j)$ ($\mathfrak{A}_i \times w_j$) ➡ $\mathcal{W}$); man kann das abkürzen durch den Ausdruck „$\Box_{wi}$ ($\mathfrak{A}_i$)". Die Relativierung muss unbedingt ausgedrückt werden! Die Logistiker verzichten regelmäßig darauf.

Bei den relativen NUM-Prädikaten ist der Bereich der Quantifikation beschränkt: i.R. auf die Teilmenge jener Elemente aus W, zu denen ein bestimmtes Element aus W in der Relation $\mathfrak{Z}$ steht. Es kann sich dabei auch um Kompositionen der Relation $\mathfrak{Z}$ handeln (z.B. $\mathfrak{A}_1$ ist in einigen fiktiven „Welten" wahr, zu denen alle fiktive „Welten" Zugang haben, die von einer bestimmten fiktiven „Welt" aus zugänglich sind). Solche Relationen-Kompositionen der Relation $\mathfrak{Z}$ werden von den Logistikern als eine „Iteration" der NUM-Prädikate missinterpretiert.

Zu jedem Element w_i von W gibt es eine Teilmenge $T_{wi} \subseteq W$, die folgendermaßen definiert ist: $T_{wi} = \{w_j \in W \mid \mathfrak{Z}(w_i, w_j)\}$.

Um die Problematik der „Iteration" der NUM-Prädikate zu bearbeiten, ist es notwendig, sich präzise an der **Bedeutung und Struktur der NUM-Prädikate** □ und ◇ zu orientieren. Die NUM-Prädikate sind spezielle Quantifikationen: sie sagen aus, ob eine *Quasiaussageform* $\mathfrak{A}_i$ für alle Elemente aus W oder für zumindest ein Element aus W auf $\mathcal{W}$ oder auf $\mathcal{F}$ abgebildet wird; bei den relativen NUM-Prädikaten ist der Bereich, über den der Quantor läuft, nicht W, sondern eine Teilmenge von W, nämlich jene Teilmenge $T_{wi} \subseteq W$, für die gilt $\{w_j \mid \mathfrak{Z}(w_i, w_j)\}$. Die NUM-Prädikate haben als Prädikand demnach Prädikatoren, und zwar Prädikate der Art: ($\mathfrak{A}_i \times w_i$) ➡ $\mathcal{W}$, mit der Bedeutung: die konkrete Quasiaussageform $\mathfrak{A}_i$ wird durch die Bewertungsfunktion β in $w_i \in W$ auf $\mathcal{W}$ abgebildet. $\mathfrak{A}_i$ ist hierbei eine Konstante, und w_i ist eine Variable (beliebiges Element aus W). Der Ausdruck „($\mathfrak{A}_i \times w_i$) ➡ $\mathcal{W}$" ist ein einstelliges Prädikat, eine Aussageform, aus der eine Aussage wird, wenn das Beliebig-Element-Zeichen w_i durch die Bezeichnung eines Elements aus W ersetzt wird, oder wenn ein Quantor vor den Ausdruck gesetzt wird. Im letzten Fall haben wir eine NUM-Prädikation.

Es kann A auch eine Variable sein: $(A \times w_i) \Rightarrow \mathcal{W}$; dann aber resultiert aus der Bindung der Fiktive-Welten-Variable w_i durch ein absolutes oder relatives NUM-Prädikat eine Aussageform mit der freien Variable A, die ihrerseits durch einen Quantor gebunden werden kann, der – anders als die NUM-Prädikate – nicht über den Bereich der fiktiven „Welten" läuft, sondern über den Bereich der Aussagen (= Quasiaussageformen).

Bei der nicht-relativen NUM-Prädikation haben wir Ausdrücke „$\mathfrak{Q}w_i\ ((\mathfrak{A}_i \times w_i \in W) \Rightarrow \mathcal{W}$", bei der relativen NUM-Prädikation haben wir Ausdrücke „$\mathfrak{Q}w_i\ ((\mathfrak{A}_i \times w_i \in T_{wk}) \Rightarrow \mathcal{W}$", wobei w_k eine Konstante ist (die Bezeichnung eines ganz bestimmten Elements aus W); in beiden Ausdrücken ist nur der Teilausdruck „w_i" eine (gebundene) Variable. Diese Ausdrücke lassen sich durch den Gebrauch der Zeichen □ und ◇, wie oben angegeben, *abkürzen*: der Ausdruck „$\forall w_i\ ((\mathfrak{A}_i \times w_i \in W) \Rightarrow \mathcal{W}$" ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „$\Box\mathfrak{A}_i$", der Ausdruck „$\forall w_i\ ((\mathfrak{A}_i \times w_i \in T_{wk}) \Rightarrow \mathcal{W}$" hat dieselbe Bedeutung wie der Ausdruck „$\Box_{wk}(\mathfrak{A}_i)$"

Jetzt wird offensichtlich, dass Ausdrücke wie „$\Box\Box\mathfrak{A}$" in den Kripke-Modellen undefiniert und sinnlos sind. Denn nur Quasiaussageformen können Argumente der NUM-Prädikate □ und ◇ sein. Doch der Ausdruck „$\Box\mathfrak{A}_i$" bezeichnet keine Quasiaussageform, sondern eine Quantorenaussage über eine ganz bestimmte Quasiaussageform bezüglich der Menge W bzw. einer bestimmten Art von Teilmenge von W. Es kann nur $\mathfrak{A}$, nie aber $\Box\mathfrak{A}$ Argument eines NUM-Prädikats sein.

Die Logistiker unterstellen, dass hier eine rekursive Struktur vorliegt: wenn $\mathfrak{A}$ eine Aussage ist, ist auch $\Box\mathfrak{A}$ eine Aussage; da nun $\Box\mathfrak{A}$ eine Aussage ist, ist auch $\Box\Box\mathfrak{A}$ eine Aussage. Der Haken an der Sache ist, dass das nicht stimmt. Denn damit $\Box\mathfrak{A}$ eine Aussage ist, muss $\mathfrak{A}$ eine Aussage sein, die zur Quasiaussageform werden und Bestandteil der Bewertungsfunktion $(\mathcal{A} \times W) \Rightarrow \mathfrak{W}$ sein kann, was für die NUM- Aussage $\Box\mathfrak{A}$ eben nicht gilt. □A kann keine Quasiaussageform sein, die erst noch auf eine Bewertungsfunktion bezogen werden könnte; denn das „A" in „□A" ist schon auf die Bewertungsfunktion bezogen, ist durch die Bewertungsfunktion vorgegeben.

WANSING meint: „Die große Attraktivität und der nachhaltige Erfolg *der Mögliche-Welten-Semantik* beruht wesentlich auf dem Umstand, dass viele wichtige Eigenschaften zweistelliger Relationen *R*, wie etwa die Transitivität und die Reflexivität, in einem präzisen Sinne mit interessanten modalen Formelschemata korrespondieren."[77] Die Logistiker nennen diesen angeblichen Zusammenhang „*Korrespondenz*"; da aber die meisten dieser „modalen Formelschemata" im Widerspruch zur definierten Struktur der „Kripke-Modelle" stehen, ist diese „Korrespondenz" illusionär.

Die verschiedenen Eigenschaften der Zugangsrelation haben nur Auswirkungen auf die Komposition der Zugangsrelation: Der Bereich W wird mit Hilfe der Zugangsrelation – einfach oder komponiert – eingeschränkt. Die Zugangsrelation und ihre Kompositionen beziehen sich gar nicht auf die „Bewertungsfunktion" wie die NUM-Prädikate, sondern beschränken nur den Bereich der fiktiven „Welten", über den die NUM-Prädikate quantifizieren.

5.4.5.2.1 Reflexivität der Relation Z

Gilt für ein w_i und eine Quasiaussageform A: $\Box_{wi}A$, dann gilt aufgrund der Reflexivität von $\mathfrak{Z}$, dass A in w_i fiktivwahr ist. Diese triviale Gesetzmäßigkeit kann folgendermaßen ausgedrückt werden: Für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $w_i \in W$: $\Box_{wi}A \rightarrow A_{wi}$. Dieser Zusammenhang wird in der Modalitätenlogistik regelmäßig durch den Ausdruck „$\Box A \Rightarrow A$" falsch dargestellt, denn die Relativität des NUM-Prädikats muss zum Ausdruck gebracht werden (abgesehen davon, dass das Gedankengefügezeichen „⇒" nicht die Implikation bezeichnet).

5.4.5.2.2 Symmetrie der Relation $\mathfrak{Z}$

Es sei $\mathfrak{Z}$ symmetrisch und irgendein Element $A \in \mathcal{A}$ werde bezüglich irgendeiner fiktiven „Welt" w_i durch β auf $x \in \{\mathcal{W}, \mathcal{F}\}$ abgebildet. Für alle Elemente w_k aus W mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ gilt dann auch $\mathfrak{Z}(w_k, w_i)$. Für alle diese Elemente w_k gibt es also zumindest ein Element aus W (nämlich w_i), zu dem die Elemente w_k in der Relation $\mathfrak{Z}$ stehen und bezüglich dieses Elements wird das Element A durch β auf das Element *x* abgebildet. Es gilt also im Falle der Symmetrie der Relation $\mathfrak{Z}$ die Implikation:

Für alle $A \in \mathcal{A}$: $[\beta(A, w_i) \Rightarrow \mathcal{W}] \rightarrow [\forall w_k \text{ mit } \mathfrak{Z}(w_i, w_k)\ (\Diamond w_k A)]$
Wenn ein Element A bezüglich eines Elements w_i durch β auf $\mathcal{W}$ abgebildet wird, dann gibt es unter

allen Elementen w_k mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ zumindest ein Element w_j mit $R(w_k, w_j)$, bezüglich dessen dieses Element A durch β auf $\mathcal{W}$ abgebildet wird.

Es geht hier allein um die nähere Bestimmung derjenigen w_k, für die $\Diamond w_k A \equiv \exists w_j$ mit $\mathfrak{Z}(w_k, w_j)$ $(\beta(A, w_j) \Rightarrow \mathcal{W}$ gilt. Zu der NUM-Quantifikation $\Diamond w_k A$ kommt eine *zusätzliche* und *andersartige* Quantifikation, die den Bereich der w_k bestimmt: $\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$: diese Elemente w_k sind jene Elemente aus W, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$.

Die Logistiker stellen diesen Zusammenhang durchweg fehlerhaft dar. Die zusätzliche Quantifikation $\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$… wird fälschlicherweise durch ein NUM-Prädikat dargestellt. Statt des Ausdrucks „$\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $(\Diamond w_k A)$" schreiben sie: $\Box_{wk}\Diamond_{wk}A$. Der logistische Ausdruck „$\Box_{wk}\Diamond_{wk}A$" bedeutet nämlich: Bezüglich aller Elemente, zu denen w_k in der Beziehung $\mathfrak{Z}$ steht, wird das „$\Diamond_{wk}A$" durch β auf $\mathcal{W}$ abgebildet. Der Ausdruck „$\Diamond_{wk}A$" bezeichnet aber kein Element aus $\mathfrak{A}$! Eine NUM-Prädikation wie $\Diamond_{wk}A$ kann niemals selbst durch ein absolutes oder relatives NUM-Prädikat prädiziert werden!

Ein entsprechender Fehler wäre (trotz **Frege**), wenn man die Funktionsgleichung $(x^2 = y)$ oder den Ausdruck „$(3^2 = 9)$" selbst ins Quadrat setzen würde: die Ausdrücke „$(x^2 = y)^2$" und „$(3^2 = 9)^2$" sind in analoger Weise sinnlos wie der Ausdruck „$\Box_{wk}\Diamond_{wk}A$".

Die Logistiker übersehen, dass hier zwei ganz verschiedene Quantifikationen in Spiel kommen: Einmal die auf β bezogene NUM-Quantifikation, dann die auf $\mathfrak{Z}$ bezogene Quantifikation, die den Bereich W einschränkt.
Was bedeutet der Ausdruck „$\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $(\Diamond w_k A)$" genau? Der Teilausdruck „$\Diamond w_k A$" besagt „Es gibt zumindest ein w_j mit $\mathfrak{Z}(w_k, w_j)$ für das gilt: $\beta(A \times w_j) = \mathcal{W}$. Diese NUM-Quantifikation besagt also, dass alle oder einige der Elemente w_j, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_k, w_j)$, durch β auf $\mathcal{W}$ abgebildet wird. Der Teilausdruck $\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ bestimmt diese Elemente w_k näher als alle jene Elemente w_k, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$.

5.4.5.2.3 Transitivität der Relation Z

Angenommen $\mathfrak{Z}$ ist transitiv und bezüglich irgendeiner Quasiaussageform A und irgendeines gegebenen Elements w_i gilt: $\Box_{wi}A$ $\{\equiv \forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $(\beta(A \times w_k) \Rightarrow \mathcal{W})\}$ – eine NUM- Quantifikation. Wenn für Elemente w_k gilt $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ und $\mathfrak{Z}(w_k, w_j)$, gilt aufgrund der Transitivität von $\mathfrak{Z}$ auch $\mathfrak{Z}(w_i, w_j)$ und folglich gilt $\Box_{wk}A$ (d.h. bezüglich aller Elemente w_j mit $\mathfrak{Z}(w_k, w_j)$ wird A durch β auf $\mathcal{W}$ abgebildet):

Im Falle der Transitivität von $\mathfrak{Z}$ gilt für alle $A \in \mathfrak{A}$: $(\Box_{wi}A) \rightarrow \forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $(\Box_{wk}A)$;[78]

die ausführliche Darstellung ist:

Für alle $A \in \mathfrak{A}$: $(\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $(\beta(A \times w_k) \Rightarrow \mathcal{W}) \rightarrow \forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $[\forall w_j$ mit $\mathfrak{Z}$ (w_k, w_j) $(\beta(A \times w_j) \Rightarrow \mathcal{W})]$

Der Ausdruck ist ein Gesetz: es gilt für jedes beliebige Element A und w_i: wenn bezüglich aller Elemente w_k, zu denen *irgendein* Element w_i in $\mathfrak{Z}$ steht, irgendein Element A von β auf $\mathcal{W}$ abgebildet wird, dann wird A bezüglich aller w_j, zu denen jedes der w_k in $\mathfrak{Z}$ steht, wobei *dieses* w_i zu den Elementen w_k in $\mathfrak{Z}$ steht, durch β auf $\mathcal{W}$ abgebildet.

Der Teilausdruck „$\Box_{wk}A$" besagt, dass bezüglich aller w_j, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_k, w_j)$, das Element A durch β auf $\mathcal{W}$ abgebildet wird. Die zusätzliche, unmittelbar davor stehende Quantifikation „$\forall w_k$ mit $R(w_i, w_k)$" bestimmt dann den Bereich dieser w_k als alle jene Elemente, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$. Diese zusätzliche Quantifikation darf nicht, wie es in der Modallogistik geschieht, durch ein NUM-Prädikat ausgedrückt werden.

Die Kripke-„Semantiker" sagen: Ist $\mathfrak{Z}$ transitiv, dann gilt das „Axiom": Wenn eine Aussage notwendig ist, ist sie „notwendig notwendig" und schreiben: $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$.

Zum einen müssten die NUM-Prädikate relativiert sein; also ist zumindest zu schreiben: $\Box_{wi}A \Rightarrow \Box_{wi}\Box_{wk}A$. Das wird dann folgendermaßen gedeutet: Wenn in allen von w_i aus zugänglichen Welten eine Aussage A wahr ist, dann ist es in allen von w_i aus zugänglichen Welten w_k wahr, dass A in allen von den Welten w_k aus zugänglichen Welten wahr ist.

Das ist freilich falsch: denn die Aussage, dass A in allen von w_k aus zugänglichen Welten wahr ist, kann nicht Quasiaussageform werden (denn dies steht ja definitiv aufgrund der Bewertungsfunktion und der Zugangsrelation fest) und deshalb nicht Prädikand eines NUM-Prädikats werden.

Richtig ist nur der Ausdruck: unter der Voraussetzung der Transitivität von $\mathfrak{Z}$ gilt, $\Box_{wi}A \Rightarrow \forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $(\Box_{wk}A)$; mit der Bedeutung: Unter Voraussetzung der Transitivität von $\mathfrak{Z}$ gilt, dass wenn eine Aussage A in allen von irgendeiner Welt w_i aus zugänglichen Welten w_k wahr ist, dann A in allen von w_k aus zugänglichen Welten wahr ist, wobei alle w_k von w_i aus zugänglich sind.

Der Teilausdruck „$\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$" spezifiziert der Bereich der w_k!

5.4.5.2.4 Die Relation Z ist euklidisch

Unter der Voraussetzung der „Euklidizität" der Relation $\mathfrak{Z}$ soll – in der fehlerhaften Darstellung der Logistiker – die Beziehung $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ gelten. Eine Relation R ist euklidisch gdw (wRv & wRu) → vRu. Auch dieser *gemeinte* Zusammenhang ist trivial, wird aber von den Logistikern falsch dargestellt.

Für eine Aussage A und ein Element w_i gelte $\Diamond_{wi}A$. Da die Elemente w_k aus W, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$, auch untereinander paarweise in der Relation $\mathfrak{Z}$ stehen, gilt dann: $\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $(\Diamond_{wk}A)$, in ausführlicher Schreibweise:

Für alle $A \in \mathfrak{A}$: $\exists w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $\beta(A, w_k) \rightarrow \forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ ($\exists w_j$ mit $\mathfrak{z}(w_k, w_j)$ $\chi(A \times w_j) ➡ \mathcal{W}$)

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe der NUM-Prädikate abkürzen:

$\Diamond_{wi}A \rightarrow \forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $\Diamond_{wk}A$.

Ausführlich lautet der Ausdruck: [$\mathfrak{Z}$ ist euklidisch und $\Diamond_{wi}A$] → ($\forall w_k$ mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ $\Diamond_{wk}A$) Es ist ein Implikationsgesetz zwischen den Sachverhaltsklassen S_1 und S_2: S_1 = „Die Relation R ist euklidisch und irgendeine A wird bezüglich zumindest eines Elements w_k mit $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$ durch eine Abbildung β auf $\mathcal{W}$ abgebildet" – S_2 = „*dieses* Element A wird durch *diese* Abbildung β bezüglich zumindest eines Elements w_h, für das gilt $\mathfrak{Z}(w_k, w_h)$, wobei für alle w_k gilt, dass $\mathfrak{Z}(w_i, w_k)$, auf $\mathcal{W}$ abgebildet". Die Sachverhaltsklassen S_1 und S_2 haben ein gemeinsames Ereignis-Bezugssystem.

Falsch ist aber der logistische Ausdruck: $\Diamond_{wi}A_1 \rightarrow \Box_{wk \text{ mit } R(wi,\, wk)}(\Diamond_{wk}A_1)$, denn der Ausdruck „$\Diamond_{wk}A_1$" ist ja eine relative NUM-Prädikation und keine Element aus $\mathfrak{A}$! Noch falscher ist der Ausdruck „$\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$", denn es geht hier ja um eine relative NUM-Prädikation.

Die Komposition der Zugangsrelation als „Iteration" der NUM- Prädikate

In der Modalitätenlogistik werden Ausdrücke wie „$\Box\Box\Box\Box A$" oder „$\Box_{wj}\Box_{wi}\Box_{wh}\Box_{wg}A$" für korrekt erachtet. Der rechts stehende Teilausdruck „$\Box A$" besagt: ein $A \in \mathfrak{A}$ wird von β bezüglich aller Elemente w_f, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_g,w_f)$ auf $\mathcal{W}$ abgebildet. Diese Relativierung wird im logistischen Ausdruck unterschlagen. Der Bereich der w_g bleibt zu bestimmen, und dies geschieht vom unmittelbar links davon stehenden Teilausdruck „$\Box$" bzw. „$\Box_{wh}$": hier werden die w_g näher bestimmt als alle jene $w_g \in W$, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_h, w_g)$; die Elemente w_h sind noch unbestimmt und der Bereich der w_h wird nun vom nächst links stehenden Ausdruck „$\Box$" bzw. „$\Box_{wi}$" spezifiziert: alle jene Elemente $w_h \in W$, für die gilt: $\mathfrak{Z}(w_i, w_h)$. Nun muss der Bereich der w_i bestimmt werden, was durch den nächst links stehenden Ausdruck „$\Box$" bzw. „$\Box_{wj}$" geschieht: alle diejenigen w_i, für die $\mathfrak{Z}(w_j, w_i)$ gilt. Der Ausdruck w_j kann jetzt – der Ausdruck bricht hier ab – auf ein *ganz bestimmtes* Element von W verweisen – dann ist der Ausdruck eine NUM-*Aussage* – oder w_j kann ein Beliebig-Element-Zeichen sein, dann ist der Ausdruck ein Sachverhaltsausdruck mit der freien Fiktive-Welten-Variablen w_j. Dieses Beliebig-Element-Zeichen w_j kann auch durch einen Quantor gebunden sein.

Wenn wir die Reihe hier abbrechen lassen, dann haben wir folgenden *gemeinten* Sachverhalt:

Für alle Elemente w_i, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_j, w_i)$ (mit einem bestimmten Element w_j) gilt: für alle Elemente w_h, für die gilt $R(w_i, w_h)$ gilt: für alle Elemente w_g, für die gilt $R(w_h, w_g)$ gilt: die Quasiaussageform A wird durch β bezüglich aller Elemente w_f, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_g, w_f)$ auf $\mathcal{W}$ abgebildet. Nur dieser letzte Teil darf von einem relativen NUM-Prädikat ausgedrückt werden.

$\forall w_i$ mit $\mathfrak{Z}(w_j, w_i)$: {$\forall w_h$ mit $\mathfrak{Z}(w_{i,\, h})$: [$\forall w_g$ mit $\mathfrak{Z}(w_h, w_g)$: $(\Box_{wg}A)$]} oder ausführlicher:

$\forall w_i$ mit $\mathfrak{Z}(w_j, w_i)$: {$\forall w_h$ mit $\mathfrak{Z}(w_{i,\, h})$: [$\forall w_g$ mit $\mathfrak{Z}(w_h, w_g)$: ($\forall w_f$ mit $\mathfrak{Z}(w_g, w_f)$: $\beta(A_1 \times w_f)$ ➡ $\mathcal{W}$)]}

Nur der ganz rechts stehende (rote) Teilausdruck bezeichnet die NUM-Prädikation; die weiter links stehenden Quantoren bestimmen den Bereich der Elemente w_f aus W näher, die zu den abgebildeten Elementen aus $(A \times w_f)$ gehören. Der ganz links stehende Quantor – im Beispiel $\forall w_i$ mit $\mathfrak{Z}(w_j, w_i)$ – bezieht sich auf ein bestimmtes Element aus W – im Beispiel auf w_j – w_j ist also eine Konstante; wenn w_j eine Fiktive-Welten-Variable wäre, müsste diese Variable durch einen Quantor gebunden sein.

Der korrekte Ausdruck „$\exists w_g$ mit $\mathfrak{Z}(\mathbf{w_h}, w_g)$: ($\forall w_f$ mit $\mathfrak{Z}(w_g, w_f)$: $\beta(A\times w_f) \Rightarrow \mathcal{F}$)“ besagt:

Die Quasiaussageform A wird bezüglich aller Elemente w_f von β auf $\mathcal{F}$ abgebildet, wobei für w_f gilt, dass ein Element oder mehrere Elemente w_g in Relation $\mathfrak{Z}(w_g, w_f)$ stehen, und dass w_g zumindest eines der Elemente ist, für die gilt $\mathfrak{Z}(w_h, w_g)$, wobei w_h eine Konstante ist (ein ganz bestimmtes Element von W). In diesem Ausdruck ist w_f eine Fiktive-Welten-Variable, die durch den Quantor $\forall w_f$ mit $\mathfrak{Z}(w_g, w_f)$… gebunden wird; in diesem Quantorenausdruck ist auch w_g eine Fiktive-Welten-Variable, die durch den Quantor $\exists w_g$ mit $\mathfrak{Z}(\mathbf{w_h}, w_g)$… gebunden wird; w_h ist hingegen eine Konstante (Bezeichnung einer *bestimmten* fiktiven „Welt“).

Der Ausdruck „$\exists w_g$ mit $\mathfrak{Z}(\mathbf{w_h}, w_g)$: ($\forall w_f$ mit $\mathfrak{Z}(w_g, w_f)$: $\chi(A\times w_f) \Rightarrow \mathcal{F}$)“ kann kürzer geschrieben werden; in der Fiktive-Welten-Semantik wäre die korrekte „Interpretation“:

> $\exists w_g$ mit $\mathfrak{Z}(\mathbf{w_h}, w_g)$: $\Box_{wg}{\sim}A$: Für zumindest eine oder mehrere von w_h aus zugänglich Welten w_g gilt, dass in allen von w_g aus zugänglichen Welten die Quasiaussageform A falsch ist.

Es wird die Teilmenge der $\{w_f|$ A in w_f ist falsch & $\mathfrak{Z}(w_g, w_f\} \subseteq W$ bestimmt, wobei diese w_f alle von w_g aus zugänglich sind, w_g aber zumindest eine der von w_h aus zugänglichen Welten ist.

Die falsche logistische Deutung dieses Zusammenhangs lautet: In zumindest einer der von w_h aus zugänglichen Welten w_g ist es wahr, dass A in allen von w_g aus zugänglichen Welten falsch ist.

Das wird wie folgt dargestellt: $\Diamond_{wh}\Box_{wg \text{ mit } \mathfrak{Z}(w_h, w_g)} A$ {noch fehlerhafter ist die Darstellung, die auf Angabe der Relativierungen verzichtet – also die Darstellung $\Diamond\Box$A.}

Dass in irgendwelchen fiktiven „Welten“ die Quasiaussageform A in bestimmter Weise bewertet wird, ist durch die Bewertungsfunktion β bereits festgelegt: jede Aussage, die diese vorgegebenen Festlegungen ausführt – wie etwa die Aussage, dass A in allen von w_g aus zugänglichen Welten falsch ist (wobei dann w_g keine Variable, sondern eine Konstante sein muss), kann selbst keine Quasiaussageform werden, also kann dieser Aussage kein NUM-Prädikat zugeschrieben werden! Freilich ist der Teilausdruck „$\Box_{wg \text{ mit } \mathfrak{Z}(w_h, w_g)} A$“ gar keine Aussage, sondern eine Aussageform, denn w_g ist eine Variable; erst dadurch, dass die Fiktive-Welten-Variable w_g durch den Quantor „$\exists w_g$ mit $\mathfrak{Z}(\mathbf{w_h}, w_g)$“ gebunden wird, ergibt sich eine Aussage: eine Aussage ist also nur der ganze Ausdruck „$\exists w_g$ mit $\mathfrak{Z}(\mathbf{w_h}, w_g)$: $\Box_{wg}{\sim}A_1$“. In der modallogistischen Fehldeutung und Fehldarstellung verschränken sich also zwei schwerwiegende Fehler.

Dazu kommt folgender Fehler: im Rahmen der Kripke-Modelle werden nicht die relativen, sondern die absoluten NUM-Prädikate angeführt: es sind aber eindeutig die relativen NUM-Prädikate, denn sie berücksichtigen neben der Abbildung β auch die Relation $\mathfrak{Z}$.

Wir können festhalten: Die Kripke-Modelle können keinen Aufschluss geben über die Geltungsbedingungen von modallogistischen Ausdrücken wie „$\Box A \rightarrow \Box\Box A$“, „$A \rightarrow \Box\Diamond A$“, „$\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$“, „$\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$“, usw. Diese Ausdrücke stehen vielmehr in Widerspruch zur Struktur dieser „Modelle“, die für jede Quasiaussageform A bezüglich jeder fiktiven „Welt“ eine eindeutige und definitive Bewertung voraussetzt. Dies schließt jede „Iteration“ der NUM-Prädikate – also Teilausdrücke wie „$\Diamond\Box$“, „$\Box\Box\Diamond$“ aus. Wenn die Bewertungsfunktion β festlegt, dass eine Quasiaussageform A in allen von w_i aus zugänglichen fiktiven „Welten“ wahr ist, dann kann dies in keiner fiktiven „Welt“ falsch sein.

5.5. Resümee

Die Modalitätenlogistik kann nicht die Ungereimtheiten beseitigen, die sich aus der nachträglichen logischen Missdeutung der Gedankengefüge ergeben. Im Gegenteil, diese Ungereimtheiten werden durch unglaublichen logischen Widersinn „bereichert“: der logische Widerspruch selbst wird zum Prinzip dieser „neuen Logik“. Man löst Aussagen von den ihnen wesenhaft zugehörigen Raum-Zeit-Stellen, projiziert sie in fiktive „Welten“, die doch in der Logik am allerwenigsten Platz haben dürften, und behauptet es stets mit denselben Aussagen zu tun zu haben.

Das Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit, auf dem doch die fregesche „Aussagenlogik“ beruht (und in dem sich der Gehalt dieser „Logik“ auch schon erschöpft), wird kurzerhand außer Kraft gesetzt.

Anmerkungen zu Teil II, Kapitel 5

1 **STEINACKER**, Modallogik, S. 114f; vgl. **S. HAACK**, S. 176ff; **C.I. LEWIS/C.H. LANGFORD**, Symbolic Logic, S. 261

2 **HUGHES G.E./CRESSWELL E.J.**: An Introduction to Modal Logic, S. 214; **H. WEIDEMANN**, Kalküle und Systeme der Modallogik, Sp. 23

3 **HUGHES/CRESSWELL**, S. 24. Beim Aufbau einer Modallogik solle so nahe wie möglich an der „vertrauten Grundlage“ der „klassischen Logik“ angeknüpft werden. „Wir verfahren darumso, dass wir für die modalen Ausdrucksmittel ‚es ist notwendig, dass…‘ bzw. ‚es ist möglich, dass…‘ entsprechende Zeichen einführen und diese zu den Junktoren der klassischen Aussagenlogik hinzufügen.“ (**STEINACKER**, S. 88f) Als „Modallogiken“ sollten nur solche Systeme gelten, „die die klassische Aussagenlogik als echten Teil enthalten, also eine Erweiterung derselben“ sind“ (ebd. S. 98)

4 **HAACK**, S. 175 – Erweitert man die „Aussagenlogik“ um „die Worte: ‚möglich‘, ‚notwendig‘, ‚unmöglich‘, so gelangen wir zur Modallogik.“ (**STEGMÜLLER,** Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie II, S . 149). „Die Modallogik wäre danach dadurch gekennzeichnet, dass zu den Bedeutungspostulaten für die logischen Ausdrücke die Bedeutungspostulate für die drei erwähnten Modalbegriffe hinzugenommen werden.“ (ebd. S. 150)

Es ist eine oberflächliche und falsche Ansicht, erst der *ausdrückliche* Gebrauch von Wörtern wie „notwendig“, „möglich“ und „unmöglich“ ermögliche die Darlegung modaler Zusammenhänge; diese Auffassung belegt erneut den Sprachzentrismus der „modernen Logik“. Alle Gesetzeszusammenhänge sind Modalisationen, ob ihre Darstellung nun derartige Wörter explizit benutzt oder nicht. Das Wenn$_1$-Gesetz „Wenn ein Kind Masern hat, hat es Fieber“ enthält keinen derartigen Modalausdruck und drückt doch einen umfassenden Zusammenhang relativer Modalisierung aus; das Gesetz besagt, dass ein Kind, das Masern hat, *notwendig* auch Fieber hat, dass ein Kind, das Fieber hat, *möglicherweise* ($\mathcal{K}$) Masern hat, dass ein Kind, das keine Masern hat, *möglicherweise* ($\mathcal{K}$) Fieber hat, schließlich dass ein Kind, das kein Fieber hat, *unmöglich* Masern hat. Die logischen Formen müssen und können nicht durch die Modalitäten zusätzlich „erweitert“ werden; sie sind Formen der relativen Modalisierung und können nur ausgehend von den unbedingten und relativen Modalitäten rekonstruiert werden.

5 „Die Aufgabe des Modaloperators ist es …, das veritative ‚ist‘ zu modifizieren: ‚es ist notwendig, dass‘ wäre sozusagen ein verstärktes veritatives ‚ist‘, ‚es ist möglich, dass‘ ein abgeschwächtes.“ (**TUGENDHAT/WOLF**, Logisch-semantische Propädeutik, S. 247); vgl. **RESCHER**, Modallogik, Sp. 16.

6 **BOCHEŃSKI/MENNE**, Grundriss der Logistik, S. 112 (statt A bei **BOCHEŃSKI/MENNE** p); **STEINACKER**, S. 87f; **HAACK**, S. 170

7 **HUGHES/CRESSWELL**, S. 22

8 **STEINACKER**, S. 87

9 **HUGHES/CRESSWELL**, S. 5

10 Ebd, S. 22

11 Sollten Ausdrücke wie „Eine Aussage A ist notwendigerweise wahr“, „Eine Aussage A ist möglicherweise wahr“ sinnvoll sein, müssten sie ja wohl entweder wahr oder falsch sein (und nicht *mehr als wahr* bzw. *weniger als wahr*); dann aber würde der modale Zusatz im Widerspruch zur Bestimmung der „alethischen Modalitäten“ gar nicht zum Wahrheitswert gehören, sondern zu dem, was **FREGE** den „begrifflichen Inhalt“ eines Gedankens/Urteils nennt.

12 **GEORG KLAUS**, Semiotik und Erkenntnistheorie, Berlin 1972^3, S. 47. Ebenso etwa **STEGMÜLLER**, S. 152f, **JACOBI**, Möglichkeit, S. 931, **TUGENDHAT/WOLF** 1983, S. 247.

13 Der Ausdruck „$\mathcal{B}(p^*)$“ bezeichnet die Behauptung, dass das einzelne Ereignis p*, das einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle zugeordnet ist, stattfindet, wobei das Einzelereignis p* der Ereignisklasse p angehört.

14 Der Ausdruck „$q_1 \frown q_2 \frown q_3$“ bedeutet den allgemeinen Sachverhalt: von drei Sachverhalten/Ereignissen liegen alle drei vor.

15 Der Ausdruck „$p \leftrightarrow (q_1 \frown q_2 \frown q_3)$“ drückt nur unvollständig aus, dass die Sachverhalts-/Ereignisklassen q_1, q_2 und q_3 alle notwendigen Bedingungen für p darstellen; dieser bedingungslogische Zusammenhang wird vollständig durch den Ausdruck „[p, q_1, q_2, q_3 $\mathbb{KODV}$]“ dargestellt (unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Sachverhalte/Ereignisse q_1, q_2, q_3 unabhängig von einander auftreten können).

16 Das Schema dieses Schlusses lautet:

Gesetzesprämisse: $p \leftrightarrow (q_1 \frown q_2 \frown q_3)$
Subsumtionsprämisse: $q_1{*} \frown q_2{*} \frown q_3{*}$

Konklusion nach $\mathbb{E}/\gamma$: $\mathcal{N}(p^*)$

„$\mathcal{B}(p^*)$ ist notwendig wahr“ ist bedeutungsgleich mit „Es ist notwendig ($\mathcal{N}$), dass $\mathcal{B}(p^*)$ wahr ist“.

17 In diesem Sinne sind die Modalitäten für **FREGE** überflüssig; Modalitäten würden nur auf die Sätze verweisen, aus denen ein Satz schließend hergeleitet wird (vgl. **ANGELELLI**, **IGNACIO**.: Freges Ort in der Begriffsgeschichte, S. 15); allerdings wird in **FREGE**s „Aussagenlogik“ kein Satz hergeleitet, die Wahrheiten werden stets fertig, begründet und vorgegeben vorausgesetzt.

18 Bereits bei **ARISTOTELES** findet sich die Unterscheidung zwischen dem *Wissen des Dass* (τὸ ὅτι ἐπίστασθαι) und dem *Wissen des Warum* (τὸ διότι ἐπίστασθαι) und den entsprechenden Schlüssen (*demonstratio quia* und *demonstratio propter quid*). Das Wissen des Dass ist stets Voraussetzung des Wissens des Warum, letzteres jedoch die höhere, umfassendere, erklärende und allein planvolles Verhalten und Prognosen ermöglichende Form des Wissens. (Etwa Anal.post A 13, B 1, B 8)

19 Das Beispiel stammt von **ARISTOTELES**: Wenn es z.B., während man einen Weg geht, blitzt, so ist das akzidentell (συμβεβηκός). Denn es hat nicht wegen des Gehens geblitzt, sondern es ist, sagen wir, per accidens geschehen (συνέβη). Anal. Post A 4, 73 b,11-13)

Auch an anderer Stelle trägt **ARISTOTELES** ein entsprechendes Beispiel der Modalität $\mathcal{Z}$ vor (Met, Δ30, 1025a 15f): jemand gräbt ein Loch und findet einen Schatz. Wenn man sagt, dies sei zufällig, dann wird das Faktum nicht im Sinne einer Graduierung des Wahrheitswerts selbst durch eine „alethische Modalität“ in Frage gestellt: die allgemeinen Kriterien für das Ereignis *Loch graben*, *Schatz finden* sind erfüllt; die Modalisierung durch $\mathcal{Z}$ ordnet das unumstößliche Faktum in einen allgemeinen gesetzmäßig-bedingungslogischen Zusammenhang, der zwischen der Ereignisklasse *Graben eines Lochs* und der Ereignisklasse *Finden eines Schatzes* besteht.

20 Mehrwertige Logiken in: MLWP 2, S.719

21 **VON KUTSCHERA**, Einführung in die intensionale Semantik, S.22

22 **STEINACKER**, S.89f

23 **HUGHES/CRESSWELL**, S.23

24 **LEIBNIZ**, Necessary and Contingent Truths, S. 16; **RESCHER**, Modallogik, Sp. 17f

25 Die Gültigkeit eines rein empirisch-erfahrungsmäßigen Implikationsgesetzes $p \rightarrow q$ kann durch empirische *Beobachtungen* nie vollständig begründet werden; dass p mit q, q ohne p und weder p noch q vorliegen können, ist – unter Voraussetzung objektiv-gültiger Kriterien für derartige Sachverhalte/Ereignisse – direkt beobachtbar; der Fall, dass p ohne q unter keinen Umständen vorliegt, ist hingegen nicht beobachtbar (was für unmöglich gehalten wird, dessen Beobachtbarkeit wird ja ausgeschlossen), man kann sich nur auf die nie hinreichende Erfahrungen in der Vergangenheit (es ist bisher noch nie vorgekommen) und insbesondere auf theoretische Gründe und andere Gesetze stützen; eine Vorläufigkeit und eventuelle Korrektur, eine mögliche Einschränkung des Geltungsbereichs solcher empirischer Gesetzesaussagen muss prinzipiell eingeräumt werden. Anders verhält es sich mit mathematischen Implikationsgesetzen wie „für alle natürlichen Zahlen a: $(a > 1) \rightarrow (a^2 > 1)$“; hier kann auf Grund der eindeutigen Konstruierbarkeit und exakten Bestimmung jeder beliebigen natürlichen Zahl apodiktisch ausgeschlossen werden, dass der Fall auftritt, dass eine natürliche Zahl größer als 1, ihr Quadrat jedoch nicht größer als 1 ist.

26 „A necessary truth is one which could not be otherwise, a contingent truth one which could.“ (**HAACK**, 170)

27 Die Gedankengefügeaussagen (etwa die fregesche Pseudoimplikation „Wenn der Rechberg der höchste Berg der Schwäbischen Alb ist, dann wurde Napoleon ermordet“) sind hingegen Verhältnisse von wahrheitswertdefiniten Aussagen.

28 **VON WRIGHT**, Truth, Knowledge, and Modality, S.6. — „Es gibt doch *Sätze*, die einen bestimmten Sinn haben, der mal falsch, mal wahr ist, – Sätze nämlich, die okkasionelle Elemente enthalten, die seine Verwendung auf Sprecher, Zeit und Ort beziehen.“ (**CARL**, Sinn und Bedeutung, S. 72)

29 Ebd. S.96

30 Ebd. S.104 und 108

31 Nur bei Sachverhalten/Ereignissen ist es möglich, zwischen dem *allgemeinen* Sachverhalt/Ereignis (intensional dem *Begriff*, extensional der Klasse der betreffenden Sachverhalte/Ereignisse) und dem *einzelnen* Sachverhalt zu unterscheiden; es gibt das allgemeine Ereignis des Regnens (die Sachverhalts-/Ereignisklasse) und es gibt das Einzelereignis: es regnet an dieser bestimmten Raum- und Zeitstelle: nur die Feststellung eines solchen Einzelereignisses kann Inhalt einer feststellenden Aussage sein, kann behauptend sein; auf das allgemeine Ereignis (auf die Sachverhalts-/Ereignisklasse, d.h. auf den Begriff derartiger Sachverhalte/Ereignisse kann ich nur in einem benennenden, nicht behauptenden Sachverhaltsausdruck verweisen). Der Ausdruck „Ein Kind ist krank“ *benennt* eine Sachverhalts-/Ereignisklasse (der Ausdruck kann also keine Aussage, auch keine „generische“ sein), der Ausdruck „Dieses Kind ist krank“ behauptet das Vorliegen eines Sachverhalt/Ereignisses. Es ist sachlich falsch und ganz unnötig, aus nicht behauptenden Sachverhaltsausdrücken ohne Rücksicht auf das PNW „Aussagen“ zu machen. Nur das bedingungslose Festhalten an **FREGE**s Logikentwurf, der die logischen Formen als Verhältnisse von Aussagen zu begreifen sucht, führt heutzutage dazu, dass die Bezeichnungen von Sachverhalts-/Ereignisklassen, von allgemeinen Sachverhalten als Sätze aufgefasst werden, „Sätze“ für dann allerdings dem PNW/PAD nicht weiter unterliegen.

32 **Łukasiewicz, Jan**: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, S. 143f (Hervorhebungen von mir, J.P.)

33 Schon **Aristoteles** hat den Zusammenhang von PNW/PAD und Determinismus thematisiert: „Denn wenn es wahr ist, dass etwas weiß oder dass es nicht weiß ist, so muss es weiß oder nicht weiß sein, und wenn es weiß oder nicht weiß ist, so war es wahr, es zu behaupten oder zu bestreiten; … und so ist denn notwendig entweder die Bejahung oder die Verneinung wahr oder falsch. Folglich ist nichts und wird nichts und geschieht nichts durch Glück oder Zufall, noch wird etwas durch Glück oder Zufall sein oder nicht sein, sondern alles ist aus Notwendigkeit … Denn sonst könnte es ebenso gut geschehen wie nicht geschehen. Denn das Zufällige kann ebenso gut so sein oder bevorstehen wie so.

Ferner, wenn etwas jetzt weiß ist, so war es vorher wahr, zu sagen, dass es weiß sein werde, und also war es immer wahr, von allem, was je geworden ist, zu sagen, dass es sei oder sein werde. Wovon es aber unmöglich ist, dass es nicht wird, das muss werden. Also wird alles, was in der Zukunft wird, notwendig und mithin wird nichts durch Glück oder Zufall sein. …

Man kann aber auch nicht behaupten, dass keins von beiden wahr ist, dass nämlich etwas sein kann, was weder sein wird noch nicht sein wird. Denn dann wäre erstens, wenn die Bejahung falsch wäre, die Verneinung nicht wahr, und wenn diese falsch wäre, folgte, dass die Bejahung nicht wahr wäre. Und es muss zweitens, wenn es wahr ist, zu sagen, dass etwas weiß und groß ist, beides sein, und etwas wird, wenn es morgen sein wird, morgen sein. Wenn es aber morgen weder sein noch nicht sein wird, so gäbe es kein Zufälliges, z.B. eine Seeschlacht. Denn es müsste dann morgen eine Seeschlacht weder bevorstehen noch nicht bevorstehen.

Diese und andere solche Ungereimtheiten müssten sich also ergeben, wenn bei jeder entgegengesetzten Bejahung und Verneinung, sei es nun eine allgemeine Aussage von Allgemeinem oder eine Aussage von Einzelnem, die eine notwendig wahr und die andere falsch sein müsste und nichts von alledem, was geschieht, zufällig sein könnte, sondern alles notwendig wäre und geschähe. Man brauchte mithin weder zu überlegen (βουλεύεσθαι) noch sich zu bemühen (πραγματεύεσθαι) in dem Gedanken, dass das und das geschehen werde, wenn man so oder so, und nicht geschehen werde, wenn man nicht so verfährt.“ (De Interpretatione, Kap. 9, 18 a 39 – b 20)

34 Dieser fatalistische, absolute Determinismus widerspricht krass vielen unserer zentralen Erfahrungen; unsere ganze Lebensführung beruht auf der unablässigen Notwendigkeit zur verantwortlichen Entscheidung, zur Wahl zwischen alternativen Möglichkeiten, auf dem Zwang, unablässig in unsre Lebensumstände einzugreifen.

35 Völlig offen ist z.B., ob am nächsten Sonntag im Lotto die Zahl 29 gezogen wird; es gibt keinerlei Fakten und Gesetzmäßigkeiten, aus denen dies mit Sicherheit vorhergesagt werden könnte.

36 Unter den Voraussetzungen von **Łukasiewicz** würden die betreffenden „Aussagen“ im Laufe der Zeit auch ihren Wahrheitswert ändern müssen: was heute unsicher ist, kann morgen entschieden sein.

37 Der eine informationsverheimlichende Gedankengefügeaussage äußernde Sprecher macht aus einer wahren bzw. falschen Aussage eine ungewisse Aussage, von der jedoch feststeht, dass sie entweder wahr oder falsch ist.

38 Ist A wahr und B ungewiss (entweder wahr oder falsch), dann ist A&B ungewiss, denn bei wahrem B ist A&B wahr und bei falschem B ist A&B falsch. Ist A wahr und B ungewiss, dann ist $A \Rightarrow B$ wahr, wenn B wahr ist, und falsch, wenn B falsch ist; und so auch in den anderen Fällen. Alle diese Zuordnungen sind schon durch die fregesche Definition der Gedankengefüge gegeben: aus der fregeschen Definition etwa des Gedankengefüges **C** geht hervor, dass $A \Rightarrow B$ entweder wahr oder falsch (also ungewiss) ist, wenn A wahr und B entweder wahr oder falsch (also ungewiss) ist, dass $A \Rightarrow B$ wahr ist, wenn A falsch und B entweder wahr oder falsch (also ungewiss) ist, und dass $A \Rightarrow B$ wahr oder falsch (also ungewiss) ist, wenn sowohl A und B beide jeweils entweder wahr oder falsch (also ungewiss) sind.

39 **Łukasiewicz**, S. 129; auch **S. Haack**, Logics, S. 206

40 Die „Wahrheitstafeln“ der Gedankengefüge unter Einschluss des Wertes $\mathcal{U}$ habe er erstellt „auf Grund eingehender Überlegungen, die für mich mehr oder minder einleuchtend waren.“ (S.144) Anstatt auf Erleuchtungen zu vertrauen, hätte er sich klar machen sollen, dass sein „dritter Wahrheitswert“ nicht *weder wahr noch falsch* sondern *entweder wahr oder falsch* bedeutet.

41 Nur weil **Łukasiewicz** die „Wahrheitstafeln“ für die Gedankengefüge **C** und **E** falsch bestimmt, kann er meinen, in seinem vorgeblich dreiwertigen System könne es Fregegesetze geben, die im SFG nicht gültig sind, oder manche Fregegesetze seien nicht gültig.

42 Wenn **Stegmüller** zu Recht bezüglich des łukasiewiczschen Systems darauf verweist, dass er „die Natur des dritten Wahrheitswertes überhaupt nicht geklärt“ hat (185), so bedeutet dies, dass man auch nicht von einer „dreiwertigen Logik“ des **Łukasiewicz** reden darf.

43 Grundriss der Logistik, S.119

44 Wenn diese Gedankengefüge mit Hilfe von Wertetafeln dargestellt werden, stehen in den Spalten unter den Gedankengefügen nur die Werte $\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}$. Diese Gedankengefüge lassen sich nicht dadurch bilden, dass man in die 9 (den Wertekombinationen entsprechenden) Stellen dieser Spalten alle möglichen Kombinationen der drei Werte $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{S}$ einträgt.

45 Vgl. II, Kapitel 3: Freges Versuch einer ›Verallgemeinerung‹ des Funktionsbegriff . Das System der Fregealgebra.

46 Für die fregeschen Gedankengefüge gilt, dass sie wie die prädizierten Aussagen entweder wahr oder falsch sind. Wenn ausgehend von anderen Werten analoge Gedankengefüge gebildet werden, gilt nicht mehr, dass den Gedankengefügen genau dieselben Werte zukommen können wie den Gegebenheiten, denen diese Gedankengefüge prädiziert werden.

47 **VON KUTSCHERA**, Einführung in die intensionale Semantik, S.23.

48 **CRESSWELL**, S.1

49 **CRESSWELL**, S.5

50 **VON KUTSCHERA**, S.24; auch **CRESSWELL**, S.26

51 Für jede Aussage wird eine eigenständige Abbildung unterstellt.

52 w_1, w_2, w_3, … sind dann Bezeichnungen bestimmter fiktiver „Welten“, w_i, w_j,… sind Beliebig-Element-Zeichen („Variablen“) für fiktive „Welten“

53 **CRESSWELL**, S.9

54 **VON KUTSCHERA**, S.IX

55 **CRESSWELL**, S.15

56 **VON KUTSCHERA**, S.23f

57 **CRESSWELL**, S.2

58 **STEGMÜLLER**, HGP II,318. Schon die Grundidee der Fiktive-Welten-Semantik, das objektiv Mögliche durch die reine Fiktion zu ersetzen, macht die Logik zur Sache der Willkür. **STEGMÜLLER** sagt zu Recht, dass die Problemstellung schon ihre hoffnungslose Unlösbarkeit impliziert (ebd.318). Die Suche nach einem Kriterium für *Quer-Welt-ein-Identität* ist ein echtes Scheinproblem.

59 Vgl. **S.HAACKS**, S. 191ff

60 **VON KUTSCHERA**, S. 25f. Dass die Lösung eines „logischen Problems“ davon abhängt, welche Grenzen man der Phantasie setzen möchte, kennzeichnet präzis den Zustand der heute vorherrschenden „Logik“.

61 In entsprechender Weise überantwortet **KRIPKE** die Logik der Willkür; man könne von dem bekannten Aristoteles auch dann sprechen, wenn keine jener biographischen Daten, durch die wir diese Persönlichkeit kennen, dieser Person zukäme; es wäre ja auch „möglich“ gewesen, dass **ARISTOTELES** Sohn armer Leute, Matrose usw. gewesen wäre; jede Bestimmung, die wir einem Ding zuschreiben, sei nur ein auf Annahmen beruhender „*Bestandteil unserer Beschreibung dieser möglichen Welt*“. Das Problem der „Querweltein-Identität“ verschwindet bei **KRIPKE**: „Diejenige Identität, für welche in dieser Problemstellung ein Kriterium verlangt wird, *ist jetzt zu einem Bestandteil unserer Charakterisierung der möglichen Welt geworden, über die wir reden*.“ (**STEGMÜLLER**, S. 322f) Wir würden „einfach“ voraussetzen, dass es ein bestimmtes Ding in einer bestimmten „Welt“ gebe und dass diesem Ding eine bestimmte Bestimmung zukäme.

62 **D.LEWIS**, Counterfactual Dependence and Time’s Arrow, S.51ff

63 **STEGMÜLLER** (eine fremde Meinung referierend), ebd., S. 319

64 ebd. S. 324f

65 Die Geltung eines Gesetzes für eine andere als die wirkliche Welt liegt jenseits jeder Überprüfbarkeit.

66 **VON KUTSCHERA**, S.25.

67 Einführung in die intensionale Semantik, S.23

68 **RESCHER, N.**, Modallogik, Sp. 18f.

69 vgl. ebd. — Hier wird deutlich, dass in der Fiktive-Welten-Semantik zugleich vorausgesetzt werden muss, dass eine konkrete Aussage $\mathfrak{A}$ bezogen auf die verschiedenen fiktiven „Welten“ jeweils ein unterschiedliches Element darstellt ($\mathfrak{A}$ wird ja für jede fiktive „Welt“ auf einen Wahrheitswert „abgebildet“, die Elemente dieser „Abbildung“ müssen wohlunterschieden sein), dass $\mathfrak{A}$ jedoch in allen diesen Fällen dieselbe identische Aussage ist – es kann ja nur von ein und derselben Aussage behauptet werden, sie sei „in allen fiktiven ›Welten‹ wahr“. Der Widerspruch ergibt sich daraus, dass die einzelne Aussage in der Fiktive-Welten-Semantik vervielfältigt wird, anstatt dass das einzelne Ereignis, auf das sich die Aussage $\mathfrak{A}$ bezieht, auf die entsprechende Ereignisklasse bezogen wird; in der Fiktive-Welten-Semantik wird das Verhältnis des Einzelnen zum Allgemeinen mystifiziert: das Einzelne wird nicht seinem allgemeinen Begriff und Gesetz subsumiert, sondern gedankenlos und widersprüchlich vervielfältigt.

70 Soll eine „Welt“ w_2 von einer „Welt“ w_1 aus zugänglich sein, dann müssen sich die Bewohner von w_1 die „Welt “ w_2 denken oder vorstellen können, w_2 darf ihrem „Verstand nicht verschlossen bleiben“ „Die Welt w_2 soll *als eine von w_1 aus erreichbare Welt* gelten, wenn es in w_1 mindestens ein Wesen gibt, das sich w_2 denken oder vorstellen kann.“ (**STEGMÜLLER**, S. 155) — “A world, w_2, is accessible to a world, w_1, if w_2 is *conceivable* by some living in w_1.“ (**HUGHES/CRESSWELL**, S. 77; auch **JACOBI**, S. 935)

71 **KRIPKE** zufolge ist eine fiktive „Welt“ w_2 von einer „Welt“ w_1 aus „zugänglich“, wenn die „Welt“ w_2 bezüglich der Welt w_1 in dem Sinne möglich ist, dass jeder in w_2 wahre Satz in der Welt w_1 möglich ist.“ (**BERKA/KREISER**, Logik-Texte, S.161) Das ist eine zirkuläre Bestimmung, denn um beurteilen zu können, ob eine Aussage in w_2 wahr ist, muss ich Zugang zu w_2 haben. — „The accessibility relation **R** holds between worlds w and w**'** iff w**'** is possible given the facts of w.“ (**GARSONS**) Es wird freilich nicht gesagt, auf Grund welcher Fakten eine andere fiktive „Welt“ in genau welchem Sinne „möglich“ ist.

72 Als Minimalerfordernis der „Zugangsrelation“ gilt die Reflexivität – jede fiktive „Welt“ hat „Zugang“ zu sich selber.

73 „A ist in einer Welt genau dann notwendig, wenn A in jeder von dieser Welt aus erreichbaren Welt wahr ist.“ (**STEGMÜLLER**, S.155; bei **STEGMÜLLER** p statt A)

74 Es ist nicht möglich, dass $\mathcal{W}_{wi}(\Box_{w1}\mathfrak{A})$ – in w_i ist wahr, dass $\mathfrak{A}$ in allen von w_1 aus zugänglichen „Welten“ wahr ist – und $\mathcal{F}_{wk}(\Box_{w1}\mathfrak{A})$ – in w_k ist es falsch, dass $\mathfrak{A}$ in allen von w_1 aus zugänglichen „Welten“ wahr ist – mit $w_i \neq w_k$ gelten, da $(\Box_{w1}\mathfrak{A})$ im Gegensatz zu $\mathfrak{A}$ in den verschiedenen fiktiven „Welten“ nicht unterschiedlich bewertet werden kann.

75 Allenfalls kann man beispielsweise sagen: dass $\Box_{w12}\mathfrak{A}$ gilt, ist vom Standpunkt der fiktiven „Welt“ w_{13} nicht erkennbar, weil von w_{13} aus nicht erkennbar ist, welche „Welten“ für w_{12} zugänglich sind.

76 „$\Diamond\Box_{wi}\mathfrak{A}$“ bedeutet: in zumindest einer (zugänglichen) fiktiven „Welt“ ist es wahr, dass $\mathfrak{A}$ in allen von w_i aus zugänglichen fiktiven „Welten“ wahr ist. Tatsächlich aber kann „$\Box_{wi}\mathfrak{A}$“ nicht in der einen fiktiven „Welt“ wahr, in einer anderen fiktiven „Welt“ falsch sein. Wenn „$\Box_{wi}\mathfrak{A}$“ wahr ist, dann in allen fiktiven „Welten“ – denn es ist ja jeweils eine ganz bestimmte „Bewertungsfunktion“ und eine ganz bestimmte Zugangsrelation vorauszusetzen.

77 Wansing, Heinrich, Modallogik, in Enzyklopädie Philosophie, herausgegeben von J.Sandkühler, S.851b.

78 Die roten Teilausdrücke stellen NUM-Quantifikationen dar.

Literatur

(1) **ADAMS, E.W.**, The Logic of Conditionals, Dordrecht, Reidel

(2) **ANDERSON, ALAN ROSS** : An Intensional Interpretation of Truth-Values; in: *Mind*, 83, 1972, S.348-371

(3) **ANGELELLI, IGNACIO**.: Freges Ort in der Begriffsgeschichte, In: Frege und die moderne Grundlagenforschung, Symposion, Gehalten In Bad Homburg Im Dezember 1973,) Herausgegeben Von **CHRISTIAN THIEL**, Meisenheim/Glan 1975

(4) **ANGELELLI, IGNACIO**: The Aristotelian modal Syllogistic in modern modal Logic, In: Konstruktionen versus Positionen, Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie, herausgegeben von **KUNO LORENZ**, Bd.1, Berlin/New York, 1979, S.176-215

(5) **ARNAULD, ANTOINE**: Die Logik oder die Kunst des Denkens. Darmstadt 1972 (La Logique ou L'Art de penser..., 1685; übers. von **CHRISTOS AXELOS**)

(6) **BALLAUF, JOACHIM** 1981: Experimenteller und alltagssprachlicher Ursache-Wirkung-Begriff, in: Kausalität, Neue Texte, hg. von **GÜNTER POSCH**, Reclam, Universal Bibliothek 9997, Stuttgart 1981, S.147-161

(7) **BAKER, A.J.**: ‚If ' and ‚ ⊃ ', in: Mind 76, S.437-438

(8) **BEHMANN, H.**: Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. Math. Annalen. 86, 163-229

(9) **BENNETT, JONATHAN**: II. Meaning and Implication, in: *Mind*, 63, 1954, S.451-463

(10) **BERKA, KAREL/KREISER, LOTHAR**: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, dritte erw. Aufl. Unter Mitarbeit von **S.GOTTWALD** und **W.STELZNER**, Darmstadt 1983

(11) **BERNAYS, PAUL**: Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, Darmstadt 1976

(12) **BERNAYS, PAUL**: Probleme der theoretischen Logik, in: Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, Darmstadt 1976, S.1-16

(13) **BERNAYS, P./SCHÖNFINKEL, M.**: Zum Entscheidungsproblem in der mathematischen Logik, Mathematische Annalen 99, 342-372 (ungekürzter Nachdruck des § 2, S. 350-355), in **BERKA/KREISER**, S.332-336

(14) **BLACK, MAX,** in **KLEMKE**, S.242

(15) **BOCHEŃSKI, J.M./MENNE A.**: Grundriss der Logistik, 4., erweiterte Auflage, Paderborn 1973 (Originalausgabe Bussum, NL, 1949 unter dem Titel „Précis de logique mathématique".)

(16) **BOCHEŃSKI, J.M.**: Formale Logik, zweite erweiterte Aufl., Freiburg/München 1956

(17) **BÖRGER, E./BARNOCCHI D.** 1971: Aussagenlogik, in: HWP 1, Sp.672-678

(18) **BÖRGER, E./BARNOCCHI D.** 1976, Implikation. Paradoxien der Implikation, in: HWP 4, 265-268

(19) **BORKOWSKI, LUDWIK** 1977: Formale Logik, Logische Systeme. Einführung in die Metalogik. Ein Lehrbuch. Herausgegeben von **LOTHAR KREISER**. Verlag C.H.Beck, München.. Polnische Originalausgabe: Systemi logiczne Wstęp do metalogiki; übersetzt von **KARL-HEINZ BESCHONER** und **KARL JÜRGENS MEYER**

(20) **BURKS, ARTHUR W.**: The Logic of Causal Propositions, Mind 60, 1951, S.363-382

(21) **CARL, WOLFGANG**: Sinn und Bedeutung. Studien zu Frege und Wittgenstein, Hain, 1982

(22) **CARNAP, RUDOLF** 1934: Die logische Syntax der Sprache, Wien

(23) **CARNAP, RUDOLF** 1960: Meaning and necessity. A study in semantics and modal logic, 3.Aufl., Chicago. Deutsch: Bedeutung und Notwendigkeit. Eine Studie zur Semantik und modalen Logik. Wien/New York 1972.

(24) **CARNAP, RUDOLF** 1968: Symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Wien/New York 1968, dritte, unveränderte Aufl., Nachdruck 1973

(25) **CHISHOLM, RODERICK M.**: The Contrary-to-Fact Conditional, *Mind*, 55, 1946, S.289-307

(26) **CLARK, MICHAEL**: Ifs and Hooks, in: *Analysis*, 32.2, December 1971, S.33-39

(27) **CLARK, MICHAEL**: Ifs and Hooks: A Rejoinder (zu **YOUNG**), in: Analysis, 34, 1973/74, 77-83

(28) **CLEAVE, JOHN P.**: An Account of Entailment Based on Classical Semantics, Analysis 34 (1974/75), 118-122

(29) **CRESSWELL, M.J**.: Semantical Essays. Possible Worlds and their Rivals. Dordrecht 1988

(30) **DALE, J.**: A Defence of Material Implication, in: Analysis, 34, 1973/74, S.91-95

(31) **DÖHMANN K.:** Die sprachliche Darstellung logischer Funktoren, in: **A.MENNE/G.FREY** (Hg.): Logik und Sprache, Bern 1974. S.28-56

(32) **DOWNING, PETER**: Conditionals, Impossibilities and Material Implications *Analysis*, 35, 1974/75, S.84-91

(33) **DUDMAN, VIC A.**: Appiah on ‚If', *Analysis*, 47, 1987, S.74-79

(34) **DUMMETT MICHAEL**, Freges Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung, in: **DUMMETT**, Wahrheit, Fünf philosophische Aufsätze, Stuttgart 1982 (Reclam 7840)

(35) **DUNCAN-JONES, AUSTIN E.**: Is Strict Implication the Same as Entailment, in: Analysis, 2, 1934, 35, S. 70-78

(36) **MICHAEL DUNN**, Relevance Logic and Entailment, in: **D.GABBAY** and **F.GUENTHNER** (Hg.), Handbook of Philosophical Logic, Vol. III, (D.Reidel Publishing Company) Dordrecht 1986, S.117-224

(37) **EDGINGTON DOROTHY**, Do Conditionals Have Truth-Conditions? in: Conditionals, hrsg. von **F. JACKSON**

(38) **ELEY, LOTHAR**: Philosophie der Logik, Mit einem Beitrag von **HOLGER VAN DEN BOOM**, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1985

(39) **FARIS, J.A.**: Truth-Tables and Implication, in: **IRVING M. COPI**/ **JAMES *A* GOULD** (Eds.): Readings on Logic, Second Edition, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London, S.223-228; Auszug aus: **FARIS, J.A**.: Truth-Functional Logic. New York 1962 (Dover Publications Inc.)

(40) **FRITZ, K.V**.: Philosophie und sprachlicher Ausdruck bei Demokrit, Plato und Aristoteles, Darmstadt 1966

(41) **GABRIEL**, **GOTTFRIED**: Einige Einseitigkeiten des Fregeschen Logikbegriffs, Fregestudien II, hg. v. **M.SCHIRN**, 67-86

(42) **GARSON**, **JAMES W.**: Modal Logic (*Stanford Encyclopedia of Philosophy*) **http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/** *First published: February 29, 2000, Content last modified: February 29, 2000*

(43) **GENTZEN, G.**: Untersuchungen über das logische Schließen, II. Abschnitt: Der Kalkül des natürlichen Schließens, in: Mathematische Zeitschrift 39, 1934-35, S.176-210, S.405-431. Nachdruck in: **BERKA/KREISER**, Logik-Texte, S.206-262

(44) **GOODMAN, NELSON**: Fact, Fiction *and* Forecast; I: Counterfactual Conditionals, Third Edition, The Bobbs-Merrill Company, Inc. Indianapolis, New York,
Deutsch: Tatsache, Fiktion, Voraussage, Frankfurt/Main 1975

(45) **GRAU, JOACHIM**, Grundriss der Logik, Leipzig/Berlin 1918

(46) **GRIZE, PAUL**: Studies in the Ways of Words, Harvard University Press, Cambridge, Mass./London 1989

(47) **HAACK SUSAN**: Philosophy of Logics, Cambridge, London, New York, Melbourne 1978

(48) **HALLER**, **R**.: Urteile und Ereignisse

(49) **HAMMACHER KLAUS**, Bedingung, in: HPG 1, 180-191

(50) **HANSON WILLIAM H.**: Indicative conditionals are Truth-Functional, in: Mind, 100, 1991, 53-72

(51) **HENDERSON**: Causal Implication, in: Mind 63, 1954, 504-518

(52) **HERINGER, H.J.**: Formale Logik und Grammatik, Tübingen 1972 (Germanistische Arbeitshefte, Bd. 6)

(53) **HERMES, H**.: Prädikatenlogik, Prädikatenkalkül, in: HWP 7, Sp.1186-1194

(54) **HILBERT/ACKERMANN**, Grundzüge der theoretischen Logik, 6.Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 1972

(55) **HILBERT/BERNAYS**: Grundlagen der Mathematik I, Berlin, Heidelberg, New York 1968^2

(56) **HOYNINGEN-HUENE, PAUL** 1998: Formale Logik. Eine philosophische Einführung, Stuttgart

(57) **HUGHES, G.E./CRESSWELL, E.J.** 1968: An Introduction to Modal Logic, London (Methuen); Deutsch. Übers.: Einführung in die Modallogik, Berlin/New York, 1978 (reprinted with corrections in 1972).

(58) **JACKSON, FRANK:** Conditionals, Introduction, in: ders.: Conditionals,

(59) **JACOBY**, **GÜNTHER**: Die Ansprüche der Logistiker auf die Logik und ihre Geschichtsschreibung, Stuttgart 1962

(60) **JACOBI, KLAUS**: Möglichkeit, in: Handbuch philosophischer Grundbegriffe, Studienausgabe, Bd. 4, S.930-947

(61) **JOHNSON, W.E.**: Logic, Part I, zit. **V.WRIGHT**, Logical Studies

(62) **KAMBARTEL**, F.: Bedingung, in: HWP 1, Sp.762-765

(63) **KAMLAH W./LORENZEN P.** 1967: Logische Propädeutik oder Vorschule des vernünftigen Redens, Mannheim

(64) **KANT I./JÄSCHE, G.B.**, Logik, in: Werke Band 5 (Schriften zur Metaphysik und Logik), hrsg. von **W.WEISCHEDEL**, Sonderausgabe, Darmstadt 1983

(65) **KAPP, ERNST** 1965: Der Ursprung der Logik bei den Griechen, Göttingen

(66) **KASCHMIEDER, HARTFRIED**: Beurteilbarer Inhalt und Gedanke in der Philosophie Freges, Georg Olms Verlag, Hildesheim/Zürich/New York, 1989

(67) **KIELKOPF, CHARLES F.**: The binary operation called ‚material implication‘ soberly understood, in: *Mind*, ..., S.338-347

(68) **KIM, JAEGWON** : Nichtkausale Beziehungen, in: **POSCH, GÜNTER** (Hg.) 1981: Kausalität, Neue Texte, S. 127-146. (Original: Noncausal Relations. In: Noûs 8 (1974), 41-52, übers. von **ANDREAS SCHREITMÜLLER**)

(69) **KLAUS, GEORG**, Semiotik und Erkenntnistheorie, Berlin 1972[3]

(70) **KLAUS, GEORG/MANFRED BUHR**: Marxistisch-leninistisches Wörterbuch der Philosophie, neu bearbeitete und erweiterte Ausgabe 1975, Reinbek bei Hamburg, 3 Bände

(71) **KLEMKE, E.D**. (Hg.): Essays on Frege, University of Illinois Press, Urbana, Chicago und London 1968,

(72) **KLIEMANN, WOLFGANG/MÜLLER, NORBERT**: Logik und Mathematik für Sozialwissenschaftler 1, Grundlagen formalisierter Modelle in den Sozialwissenschaften, München 1973

(73) **KNEALE W./KNEALE M**.: The Development of Logic, Oxford 1962

(74) **KONDAKOW, N.I**.: Wörterbuch der Logik, Leipzig 1978

(75) **KRAMPITZ, KARL-HEINZ**: Die Begründung der logischen Konstanten bei Frege, in: Jenaer Frege-Konferenz, Jena 1979 S.179-195

(76) **KREISER, LOTHAR/GOTTWALD, SIEGRIED/ STELZNER, WERNER** (Hrsg.): Nichtklassische Logik, Eine Einführung. Berlin 1990 (Akademie-Verlag).

(77) **KUTSCHERA, FRANZ VON**: Einführung in die intensionale Semantik, Berlin/New York: de Gruyter, 1976

(78) **KUTSCHERA, FRANZ VON**: Frege. Eine Einführung

(79) **LARGEAULT**, Logique et philosophie chez Frege **?**

(80) **LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM**: Necessary and Contingent Truths. In: **R.C.SLEIGH**, jr. (Ed.), Necessary Truth, Prentice-Hall

(81) **LENK, HANS**: Kritik der logischen Konstanten. Philosophische Begründungen der Urteilsformen vom Idealismus bis zur Gegenwart. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1968

(82) **LENK**, **H./HEGSELMANN**, R: Partikeln, logische, in. HWP 7, Sp.147-154

(83) **LEWIS CLARENCE IRVING/LANGFORD COOPER HAROLD**: Symbolic Logic, Second Edition, Dover Publications, Ins., New York 1959 (erste Auflage 1932)

(84) **LEWIS, DAVID**: Probabilities of Conditionals and Conditional Probability, in; **JACKSON** (Hg.), Conditionals, Oxford University Press 1991, S. 102 – 110

(85) **LEWIS, DAVID**: Counterfactual Dependence and Time's Arrow, in; **JACKSON** (Hg.), Conditionals, Oxford University Press 1991, S. 46 – 75

(86) **LEWIS, DAVID**: Kausalität, in: Kausalität, Neue Texte, herausgegeben von **GÜNTER POSCH**, Reclam, Universal Bibliothek 9997, Stuttgart 1981
(Original: Causation, in: The Journal of Philosophy, 79 (1973), S. 556-572; übersetzt von **HEINRICH BECKER**)

(87) **LORENZEN, PAUL**: Formale Logik, Berlin 1970, 4. verbesserte Auflage.

(88) **LOWE**, ‚If A and B, Then A', in: Analysis 45, 1985, S.93-98

(89) **ŁUKASIEWICZ, JAN**: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, in: *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovic,* C. III, XXIII, [1930], S.51–77, (Gekürzter Nachruck von S. 51 – 74, in: **BERKA/KREISER**, Logik-Texte, S.135–150

(90) **ŁUKASIEWICZ, JAN**: Zur Geschichte der Aussagenlogik, in: Erkenntnis 5, 1935, S.111-131.

(91) **ŁUKASIEWICZ, JAN**: Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern logic, Oxford 1951

(92) **MAU, J.**: Dilemma, in: HWP 2, Sp247f

(93) **MC CALL, STORRS**: Aristotle's Modal Syllogisms. North-Holland Publishing company, Amsterdam 1963. Reihe: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Hg. von **L.E.J.BROUWER**, **E.W.BETH**, **A.HEYNTING**

(94) **MENNE, ALBERT**: Einführung in die formale Logik. Eine Orientierung über die Lehre von der Folgerichtigkeit, ihre Geschichte, Strukturen und Anwendungen, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1985

(95) **MENNE, ALBERT**: Einführung in die Logik, 2., überarbeitete Aufl., München 1973 (1.Aufl. 1966)

(96) **MENNE, ALBERT**: Implikation, HWP 4, Sp.263

(97) **MENNE, ALBERT**: Obversion, HWP 6, Sp. 1089f

(98) **NELSON, EVERETT, J.**: Intensional Relations, in: *Mind* 1930. S. 440-453

(99) **NØREKLIT, L.**: On If and $\supset$, in: Mind, 82, 1973, S.442-444

(100) **NUTE, DONALD** : Topics in Conditional Logic, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht: Holland/Boston: USA/London: England, 1980, Reihe: Philosophical Studies Series in Philosophy, Vol.20

(101) **NUTE, DONALD**, Conditional Logic, in: In. Handbook of Philosophical Logic, Volume II, Extensions of Classical Logic, Edited by **D.GABBAY** and **F.GUENTHER**, Dordrecht/Boston/Lancaster (D.Reidel Publishing Company) 1984, S.387-439

(102) **OBERSCHELP, ARNOLD**: Elementare Logik und Mengenlehre I und II, Mannheim, Wien, Zürich 1974 und 1978

(103) **O'CONNOR**, **D.J.**: The Analysis of Conditional Sentences, in: *Mind*, 60, 1951, S.351-362

(104) **PARRY, W.T.**: Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation), in *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 4 (1933), Leipzig, Berlin, S.5-6, in **BERKA/KREISER**, Logik-Texte, S. 163f, Nachdruck)

(105) **PATZIG GÜNTHER:** Einleitung zu: G.Frege: Logische Untersuchungen,

(106) **PATZIG GÜNTHER:** Sprache und Logik, 2. durchgesehene und erweiterte Auflage, Göttingen 1981

(107) **PATZIG, GÜNTHER** 1967: Logik. In: **A.DIEMER/J.FRENZEL** (Hg.). Philosophie (Lexikon der Fischer-Bücherei), Frankfurt/Main, S.130-144

(108) **PATZIG, GÜNTHER** 1967: Logistik. In: **A.DIEMER/J.FRENZEL** (Hg.). Philosophie (Lexikon der Fischer-Bücherei), Frankfurt/Main, S.144-156

(109) **PEACOCKE, CH.** 1976: What is a logical constant? J.Philos. 73, S. 221-240

(110) **PENDLEBURY, M.** 1989: The Projection Strategy and the Truth Conditions of Conditional Statements, Mind 100, 1989, 179-205

(111) **PERELMAN, CHAIM**: Logik und Argumentation

(112) **POSCH, GÜNTER** 1980: Zur Semantik der kontrafaktischen Konditionale, Gunter Narr Verlag, Tübingen 1980 (Ergebnisse und Methoden modernen Sprachwissenschaft, hg. von **CHRISTOPH SCHWARZE** und **ARNIM VON STECHOW**, Bd.9)

(113) **POSCH, GÜNTER** (Hg.) 1981: Kausalität, Neue Texte, Reclam, Universal Bibliothek 9997, Stuttgart 1981

(114) **PRIOR, A.N.** 1960: The Runabout Inference-Ticket, in: **IRVING M. COPI/ JAMES A GOULD** (Eds.): Readings on Logic, Second Edition, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London, S.217-218; zuerst in Analysis, Vol.21, No.2 (December, 1960, pp. 39-39)

(115) **QUINE, WILLARD VAN ORMAN**: Grundzüge der Logik, Frankfurt/Main 1969 (Methods of Logic, Revised edition, 1964 by Holt, Rinehart and Wilson, New York/Chicago/San Francisco/Toronto; übers. von **DIRK SIEFKES**)

(116) **QUINE, WILLARD VAN ORMAN** 1973: Philosophie der Logik, Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart/Berlin/Köln/Mainz.(Originalausgabe: Philosophy of Logic, 1970 by Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.)

(117) **QUINE, WILLARD VAN ORMAN** 1979: Von einem logischen Standpunkt: neun logisch-philosophische Essays. Mit einem Nachwort von Peter Bosch. Frankfurt-Main/Berlin/Wien (From a logical point of view, 1953)

(118) **QUINE, WILLARD V.O.** 1980: Wort und Gegenstand (Word and Object), Philipp Reclam jun., Stuttgart

(119) **READ, STEPHEN**: Conditionals are not Truth-Functional: An Argument from Peirce *Analysis*, 52, 1992, S.5-12

(120) **RESCHER, NICHOLAS** 1964: Aristotle's Theory of Modal Syllogisms and Its Interpretation. In: **MARIO BUNGE** (Ed.): The Critical Approach to Science and Philosophy. In Honor of Karl R.Popper. The Free Press of Glencoe, Collier Macmillan Limited. London 1964, S. 152-177.

(121) **RESCHER, NICHOLAS** 1964: Studies in Modality, American Philosophical Quarterly, Monograph Series, Oxford 1974

(122) **RESCHER, NICHOLAS** 1964[2]: Introduction to Logic, St. Martin's Press, New York

(123) **RESCHER, NICHOLAS**: Hypothese III, in: HWP 3, 1266

(124) **RESCHER, NICHOLAS**: Modallogik, in: HWP 6, Sp.16-23

(125) **RUSSEL, L.J.**: If and $\supset$, in: *Mind* 79, 1970, S.135-136

(126) **RUSSELL B**. , Philosophie des logischen Atomismus, München 1979

(127) **RUSSELL, B**.: Die Mathematik und die Metaphysiker

(128) **RUSSELL, B**.: Einführung in die mathematische Philosophie, Wiesbaden o.J.

(129) **RUSSELL, BERTRAND/WHITEHEAD, ALFRED NORTH**: Principia Mathematica, Vorwort und Einleitungen, übersetzt von **HANS MOKRE**, Frankfurt 1986

(130) **SALMON, WESLEY C.** 1983: Logik, Stuttgart, engl. Originalausgabe: Logic. Second edition. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973, übers. von **JOACHIM BUHL**

(131) **SANFORD**, **D.H.**: If *P*, then *Q*. Conditionals and the Foundations of Reasoning., Routledge, London and New York 1989

(132) **SCHENK, GÜNTER**: Zur Geschichte der logischen Form, Erster Band, Einige Entwicklungstendenzen von der Antike bis zum Ausgang des Mittelalters, Berlin 1973.

(133) **SCHNEIDER, HANS JULIUS**: Begriffe als Gegenstände der Rede, in: Logik und Mathematik, Frege-Kolloquium Jena 1993, herausgegeben von **INGOLF MAX** und **WERNER STELZNER**; Walter de Gruyter, Berlin/New York 1995, S. 165-179

(134) **SCHOLZ, HEINRICH**: Abriß der Geschichte der Logik, dritte, unveränderte Aufl., Freiburg/München 1959

(135) **SCHOLZ, HEINRICH**: Logik, Grammatik, Metaphysik. In: **A.MENNE/G.FREY** (Hg.): Logik und Sprache, Bern 1974, S.183-222

(136) **SCHRÖTER, K**.: Was ist eine mathematische Theorie? Nachdruck in: **BERKA/KREISER**: Logik-Texte, S.413-423):

(137) **SEEL, G**. 1982: Die Aristotelische Modaltheorie, Berlin-New York 1982

(138) **SIMONS, LEO**: Intuition and Implication, in: Mind, 74, 1965, S. 79-83

(139) **SLININ, J.A**. 1972: Die Modalitätentheorie in der modernen Logik, in: **WESSEL, H.** (Hg.): Quantoren – Modalitäten – Paradoxien, Berlin.

(140) **STALNAKER, ROBERT C.**: A Theory of Conditionals

(141) **STEINACKER, PETER**: Modallogik. Kapitel 3 der Monografie: **S. GOTTWALD, L. KREISER, W. STELZNER**, Nichtklassische Logik. Akademie-Verlag Berlin 1988, 86-159.

(142) **STEGMÜLLER, WOLFGANG**: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, Eine kritische Einführung, Band II, 8. Auflage, Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1987 (1975)

(143) **STEKELER-WEITHOFER, PIRMIN**: Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft. Berlin/New York: de Gruyter, 1986

(144) **STENIUS, E**.: Raum, logischer, HWP 8, 121

(145) **STEVENSON, JOHN T.**: Roundabout the Runabout Inference-Ticket, in: **IRVING M. COPI/ JAMES A. GOULD** (Eds.): Readings on Logic, Second Edition, The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Limited, London, S.219-222; zuerst in Analysis, Vol.21, 1961, pp.124-128

(146) **STRAWSON, PETER F.**: Introduction to Logical Theory, London (Methuen) 1952, 2.Aufl. 1962

(147) **STUHLMANNL-LAEISZ, RAINER**: Gottlob Freges „Logische Untersuchungen“, Darstellung und Interpretation, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1995

(148) **THIEL, CHRISTIAN** (Hg.): Frege und die Moderne Grundlagenforschung, Symposion, gehalten in Bad Homburg, im Dezember 1973, Meisenheim/Glan 1975

(149) **THOMAS, JAMES**: In Defense of ‚⊃‘. The Journal of Philosophy, 87, 1990, S. 57-70

(150) **TUGENDHAT, ERNST/URSULA WOLF**: Logisch-semantische Propädeutik, Stuttgart 1983

(151) **WAISMANN F.** 1976:Logik, Sprache, Philosophie, Stuttgart

(152) **WALETZKI, WOLFGANG** 1992: Der Irrealis (‚Counterfactual‘) im Rahmen der Konditionallogik, Inauguraldissertation in der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg, Dezember 1992

(153) **WANSING, HEINRICH**: Modallogik, in Enzyklopädie Philosophie, herausgegeben von J.Sandkühler, S.850-854

(154) **WEIDEMANN, H**. 1984: Modallogik II, Kalküle und Systeme der Modallogik, HWP 6; Sp.23-41.

(155) **WEIZSÄCKER, C.F.V**.: Stenographische Notizen über Logik und Mathematik, in: Konstruktionen versus Positionen, Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie, herausgegeben von **KUNO LORENZ**, Bd.1, Berlin/New York, 1979

(156) **WELLS, R.S.**: Is Frege’s Concept of a Function Valid?, in: **E.D.KLEMKE**, Essays on Frege, University of (Illinois Press, Urbana, Chicago und London 1968, S.396)

(157) **WESSEL, HORST** (1984): Logik, Berlin

(158) **WESSEL, HORST** (Hg.) (1972): Quantoren – Modalitäten – Paradoxien. Beiträge zur Logik, Berlin 1972

(159) **WITTGENSTEIN, L.** (1963): Tractatus logico-philosophicus, Frankfurt/Main

(160) **WRIGHT; GEORG HENRIK VON**: On Conditionals, in: Ders.: Logical Studies, London (Routledge and Kegan Paul), 1976**??**, S. 127 – 165 (Erstveröffentlichung 19

(161) **WRIGHT; GEORG HENRIK VON** (1949): Form and Content in Logic, in: Ders.: Logical Studies, London (Routledge and Kegan Paul), 1976**??**, S. 1 – 21 (Erstveröffentlichung 1949)

(162) **WRIGHT; GEORG HENRIK VON** (1976**??**): On the Idea of Logical Truth, in: Ders.: Logical Studies, London (Routledge and Kegan Paul), 1S.22 – 43

(163) **WRIGHT; GEORG HENRIK VON** (1976**??**): The Concept of Entailment, in: Ders.: Logical Studies, London (Routledge and Kegan Paul), S.166 – 191

(164) **WRIGHT; GEORG HENRIK VON** (1984): Truth, Knowledge, and Modality. Philosophical Papers, Volume III; Basil Blackwell, Oxford.

Abkürzende Bezeichnung der fregeschen Schriften

(1) G.FREGE: Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. Herausgegeben und eingeleitet von GÜNTHER PATZIG. 4., ergänzte Auflage, Göttingen 1975

(2) G.FREGE: Begriffsschrift und andere Aufsätze. Dritte Auflage. Mit E.HUSSERLs und H.SCHOLZ' Anmerkungen herausgegeben von I.ANGELELLI, Darmstadt/Hildesheim 1977

(3) G.FREGE: Logische Untersuchungen. Herausgegeben und eingeleitet von G.PATZIG, 2., ergänzte Auflage, Göttingen 1976

(4) G.FREGE: Kleine Schriften. Herausgegeben von IGNACIO ANGELELLI Darmstadt/ Hildesheim 1967

(5) G.FREGE: Nachgelassene Schriften. Herausgegeben von HANS HERMES, FRIEDRICH KAMBARTEL, FRIEDRICH KAULBACH. Hamburg 1969 zit. als NSchr

(6) G.FREGE: Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlass. Herausgegeben mit Einleitung, Anmerkungen, Bibliographie und Register von GOTTFRIED GABRIEL, Hamburg 1971

(7) G.FREGEs Briefwechsel mit D.Hilbert, E.Husserl, B.Russell sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges, mit Einleitungen, Anmerkungen und Register herausgegeben von GOTTFRIED GABRIEL, FRIEDRICH KAMBARTEL und CHRISTIAN THIEL, Hamburg 1980. Ich zitiere aus diesem Buch mit „Briefe" und gebe in eckigen Klammern die Nummer an, unter welcher der betreffende Brief editiert wurde in: G.FREGE: Wissenschaftlicher Briefwechsel, herausgegeben von HANS HERMES, FRIEDRICH KAMBARTEL, CHRISTIAN THIEL, ALBERT VERHAART, Hamburg 1976

ALD	Aufzeichnungen für LUDWIG DARMSTAEDTER, in (5), S.273-277
ASB	Ausführungen über Sinn und Bedeutung, in (6), S.25-34
BG	Über Begriff und Gegenstand, in (1), S.66-80. Zuerst in: Vjschr. f. wissensch. Philosophie 16, 1892, S.192-205
BLF	BOOLEs logische Formelsprache und meine Begriffsschrift, in (5), S.53-59
BP	Über die Begriffsschrift des Herrn PEANO und meine eigene, in (4), S.220-233. Zuerst in: Berichte über die Verhandlungen der königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Klasse, 48.Band 1896, S.361-378
BRL	BOOLEs rechnende Logik und die Begriffsschrift, in (5), S.9-52
BS	Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle a.S., n (2).
BZ	Über den Begriff der Zahl, in (5), S.81-117
Def	Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens, in (5), S.164-170
DPE	Dialog mit PÜNJER über Existenz, in (6), S. 1-22.
EG	Über Euklidische Geometrie, in (5), S.182-184
EL	Einleitung in die Logik, in (6), S.74-91
EMN	Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften, in (5), S.286-294
FB	Funktion und Begriff, in (1), S.17-39. Zuerst in: Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9.Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, H.POHLE, Jena 1891, II, S.1-31
FTA	Über formale Theorien in der Arithmetik, in (4), S.103-111. Zuerst in: Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1885, Sitzung vom 17.Juli 1885. Suppl.z.JZN, 19, NF Bd.12, 1885/86, S.94-104
Ged	Der Gedanke. Eine logische Untersuchung, in (3), S.30-53. Zuerst in: Beitr. zur Philos. des deutschen Idealismus 1, 1918-1919, S.143-157.
Gef	Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge, in(3), S.72-91. Zuerst in: Beitr. zur Philos. des deutschen Idealismus 3, 1923-1926. S.36-51
GGA I	Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Jena 1893. Unveränderter reprographischer Nachdruck, Darmstadt/Hildesheim 1962
GLA	Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Mit ergänzenden Texten kritisch herausgegeben von CHRISTIAN THIEL, Hamburg

	1986, 1.Ausgabe Breslau 1884
GLG I	Über die Grundlagen der Geometrie, in (4), S.262-266. Zuerst in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12.Band, 1903, S.319-324.
GLG II	Über die Grundlagen der Geometrie. II, in (4), S.267-272. Zuerst in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12.Band, 1903, S.368-375.
GLG III-V	Über die Grundlagen der Geometrie, in (4), S. 281-323. Zuerst in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 15.Band, 1906, 293-309.
KL	17 Kernsätze zur Logik, in (6), S.23-24.
KÜL	Kurze Übersicht meiner logischen Lehren, in (5), S.213-218.
LA	Logische Allgemeinheit, in (6), S.166-171.
LM	Logik in der Mathematik, in (5), S.92-165.
LMM	Logische Mängel in der Mathematik, in (5), S.171-181.
Log I	Logik (geschrieben zwischen 1879 und 1891), in (5), S.1-8.
Log II	Logik (geschrieben 1897), in (6), S.35-73.
LPM	Über Schoenflies: Die logischen Paradoxien der Mengenlehre, in (5), S.191-199.
NVG	Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik, in (5), S.298-302.
RH	Rezension von **E.HUSSERL**, Philosophie der Arithmetik, in (5) S.179-192. Zuerst in: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, N.F. 103, 1894, S.313-332.
SB	Über Sinn und Bedeutung, in (1), S.40-65. Zuerst in: Ztschr.f.Philos. u. philos. Kritik, NF 100, 1892, S.25-50.
SVAL	**E.SCHRÖDER**s Vorlesungen über die Algebra der Logik, in (3), S.92-112. Zuerst in: Archiv f. syst. Philos. 1, 1895, S.433-456.
TBZ	Tagebucheintragung über den Begriff der Zahl, in (5), S.282-283.
Vern	Die Verneinung. Eine logische Untersuchung, in (3), S.54-71. Zuerst in: Beitr. zur Philos. des deutschen Idealismus 1, 1918-1919, S.143-157.
WF	Was ist eine Funktion? in (1), S.81-90. Zuerst in: Festschrift für **H.BOLTZMANN**, 1904, S.656-666.
WBB	Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift, in (2), S.106-114. Zuerst in: Ztschr. f. Philos. und philos. Kritik, NF 81, 1882, S.48-56.
Za	Zahl, in (5), S.284-285
ZB	Über den Zweck der Begriffsschrift, in (2), S.97-106. Zuerst in: Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, XVI (1883) Supplement, S.1-10.
ZS	Über die Zahlen des Herrn **SCHUBERT**, in (3), S.113-138. Zuerst in: **H.POHLE**, Jena 12899. VI, 32ff.

Verzeichnis der benutzen Symbole und Abkürzungen

Der Text in geschweiften Klammern {Text}, etwa innerhalb eines Zitates, stammt immer von mir.

Symbole und Abkürzungen

n beliebige natürliche Zahl

|M| ist M eine Menge, so ist |M| die Anzahl einer Menge

$\mathfrak{W}$ Menge der Wahrheitswerte

$\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ die beiden Wahrheitswerte *Wahr* und *Falsch*

$p \leftrightarrows q$ $\mathbb{C} \Cup \mathbb{E}$ (p,q), (10•1)(p,q)

$X \Leftrightarrow Y$ bijektive Abbildung von der Menge X auf die Menge Y

PNW Prinzip des Nicht-Widerspruchs

PAD Prinzip des ausgeschlossenen Dritten

PdI Prinzip der Identität

Die Prädikatenverknüpfungen $\Cup$,$\Cap$ usw. übertragen auf logische Relationen: die logische Relation $\Theta_1(p_1, \dots p_n) \Cap \Theta_2(p_1,\dots, p_n)$ besteht zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen $(p_1,\dots, p_n)$, die sowohl in der Beziehung Θ_1 wie in der Beziehung Θ_2 stehen; die logische Relation $\Theta_1(p_1, \dots p_n) \Cup \Theta_2(p_1,\dots, p_n)$ besteht zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen $(p_1,\dots, p_n)$, die in zumindest einer der Beziehungen Θ_1 und Θ_2 stehen.

$\{x \mid Px\}$ Die Menge all jener Gegenstände x, denen das Prädikat P zukommt.

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ Beliebig-Element-Zeichen für Gedankengefüge

$p \smile q$ von p und q liegt zumindest eines vor (jeder beliebige Fall, da von p und q zumindest eines vorliegt)

$p \frown q$ von p und q liegen beide vor (jeder beliebige Fall, da von p und q beide vorliegen)

p*, q* ein einzelnes bestimmtes Ereignis, das zur Sachverhalts-/Ereignisklasse p bzw. q gehört (es gilt: $p^* \in p$)

Wenn-dann$_1$ und Wenn-dann$_2$: $p \rightarrow q$ und $A \Rightarrow B$

$A \veebar B$ Oder-Enthymem ~ (zu unterscheiden vom Gedankengefüge ▲: $A \triangledown B$)

▲ Gedankengefüge $A \triangledown B$

A, e_A und E_A: Wenn A eine Aussage ist, die das Vorliegen eines einzelnen Sachverhalts/Ereignisses e_A konstatiert, dann ist E_A die entsprechende Sachverhalts-/Ereignisklasse ($e_A \in E_A$)

$(1\bullet\underline{\underline{\circ}}\underline{\circ})(\underline{\underline{\circ}}\underline{\circ}\underline{\underline{\circ}}1)$: Kommt in der Normalmatrix einer logischen Relation das Zeichen „∘" mehrere Male vor, bedeutet dies, dass von den entsprechenden Funktorfällen zumindest einer realmöglich ist; sind die Zeichen „∘" in unterschiedlicher Weise unterstrichen (teils einfach, teils doppelt, teils punktiert, usw.) dann ist jeweils von den Funktorfällen, die den auf dieselbe Weise unterstrichenen Zeichen „∘" entsprechen, zumindest einer realmöglich.

$(1\underline{\underline{0}}01\ \underline{\underline{0}}011)$ Sind in der Normalmatrix einer logischen Relation mehrere Zeichen „0" auf dieselbe Weise unterstrichen, dann ist von den entsprechenden Vorkommensfällen zumindest einer nichtrealmöglich.

$\mathfrak{f}$ die Menge der zweistelligen logischen Totalformen

$\mathfrak{f} \backslash \mathbb{J}, \mathbb{L}, \mathbb{M}$ diejenige logische Relation, die zwischen zwei Ereignisklassen genau dann besteht, wenn zwischen ihnen weder $\mathbb{J}$, noch $\mathbb{L}$, noch $\mathbb{M}$ besteht

≙ … entspricht …

≣ A ≣ B: Der *Ausdruck* A ist gleichbedeutend dem *Ausdruck* B

A ⇳ B der Ausdruck A wird für den Ausdruck B substituiert (A statt B)

ℕ Menge der natürlichen Zahlen

𝔾 Menge der ganzen Zahlen

ℝ Menge der reellen Zahlen

ℚ Menge der rationalen Zahlen

ℤ Menge der negativen Zahlen

$P(x^n)$ irgendein n-stelliges Prädikat – x^n bezeichnet einen n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Beliebig-Element-Zeichen und Abkürzungen

Ich benutze als Beliebig-Element-Zeichen für verbundene Sachverhalts-/Ereignisklassen die Buchstaben p, q, r, …; die Buchstaben 𝔭, 𝔮, 𝔯, …sind hingegen Abkürzungen konkreter verbundener Sachverhalts- /Ereignisklassen (die Zuordnung von Abkürzung und abgekürztem Ausdruck muss immer angegeben werden). Die Buchstaben A, B, C, … sind Beliebig-Element-Zeichen für Aussagen, 𝔄, 𝔅, ℭ, … sind Abkürzungen konkreter Aussagen.

p, q, r,… p_1, p_2, p_3, … bezeichnen beliebig Sachverhalts-/Ereignisklassen, A, B, C, … bezeichnen immer beliebige Aussagen („Aussagevariablen")

Die deutschen Buchstaben 𝔉, 𝔊, ℌ, 𝔓, 𝔔, ℜ sind Abkürzungen konkreter Prädikate.

F, G, H, P, Q, R, … sind Beliebig-Element-Zeichen für Prädikate

𝔞, 𝔟, 𝔠, … Bezeichnungen bestimmter Individuen des Bezugsbereichs

x, y, z, Bezeichnungen beliebiger Elemente der Bezugsbereichs

𝔉(x), 𝔉x, 𝔓(x), usw. sind Bezeichnungen konkreter Prädikatoren oder Sachverhalts-/Ereignisklassen

F(x), Fx, P(x), Px, usw. sind Bezeichnungen beliebiger Prädikatoren (Sachverhalts-/Ereignisklassen)

~Px der Sachverhalt, dass einem Gegenstand das Prädikat P nicht zukommt

rm(p) die Sachverhalts-/Ereignisklasse p ist realmöglich

nrm(p) die Sachverhalts-/Ereignisklasse p ist nichtrealmöglich

Das Beliebig-Element-Zeichen x bezeichnet immer ein beliebiges Element aus dem zu den jeweiligen Prädikaten gehörenden Bezugsbereich.

n, m, k, l, … sind oft Bezeichnungen beliebiger natürlicher Zahlen, a, b, c, … sind oft Bezeichnungen beliebiger reeller Zahlen

N, M sind Bezeichnungen beliebiger Mengen

B der (zu den gegebenen Prädikaten gehörende) Bezugsbereich

𝓤 universeller Bereich (Bezugsbereich für Ousia-Prädikate)

𝔄 Menge der wahrheitswertdefiniten Aussage

$\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_i$ Die Kennzeichnungs-Bezugsmenge eines fixierenden Quantors

$\mathfrak{K}^{\backslash x}$ Die Kennzeichnungs-Bezugsmenge eines die Variable y fixierenden Quantors, wobei die Menge dieser y jeweils auf jedes einzelne Element x bezogen ist; der Ausdruck „$\forall(y\in\mathfrak{K}^{/x})\ (\mathsf{R}(x,y)$" bezeichnet den einstelligen Prädikator „x steht zu allen $y\in\mathfrak{K}^{/x}$ in der Beziehung R, wobei die Bezugsmenge der y jeweils auf das gewählte x bezogen ist.

𝔔 beliebiger Quantor (entweder ∃ oder ∀)

$\boxplus, \boxminus, \boxtimes, \boxdot$ beliebige bedingungslogische Relation

$\oplus, \ominus, \otimes, \oslash, \odot$ beliebiges Gedankengefüge

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ beliebige logische Totalrelationen

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots$ beliebige logische Relation

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ beliebige Gedankengefüge

$\Lambda_1, \Lambda_2\ \Lambda_3, \ldots$ beliebige elementare Fregerelation der Ausdrucksform $\mathfrak{Q}(Fx \oplus Gx)$

$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ beliebige Fregeverknüpfung

Der Ausdruck „$\mathcal{B}(p^*)$" bezeichnet die Behauptung, dass das einzelne Ereignis p*, das einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle zugeordnet ist, stattfindet, wobei das Einzelereignis p* der Ereignisklasse p angehört.

$w_i, w_j, w_k, \ldots$ beliebige fiktive „Welt"

$w_1, w_2, w_3, \ldots$ bestimmte fiktive „Welt"

Mod eine beliebige Modalität

Ständig benutzte Begriffs- und Wortprägungen:

konkrete Aussage: bestimmte, wahrheitswertdefinite Aussage (Gegensatz „Aussageform")

Bedingungslogische Isomorphie

Ereignisklassen p: alle Fälle (jeder beliebige Fall, da ein Sachverhalt/ein Ereignis, das der Sachverhalts-/Ereignisklasse p zugehört, vorliegt. *extensionale Betrachtung*: Sachverhalts-/Ereignisklasse, als die Menge der Fälle, dass ein Ereignis bestimmter Art vorliegt; *intensionale Betrachtung*: Prädikator,

Gedankengefügeaussage im Gegensatz zum **Gedankengefügeschema**: zwei wahrheitswertdefiniten Aussagen wird ein Gedankengefüge zugesprochen, es ergibt sich eine wahrheitswertdefinite Aussage.

Prädizierte Aussagen bezüglich einer Gedankengefügeaussage: es sind jene wahrheitswertdefiniten Aussagen, denen Gedankengefügeprädikate zugesprochen werden

Prädikator, Prädikat, Sachverhalts-/Ereignisklasse

Gedankengefügeschema, SFG-Aussageform A ⊕ B

Durch Gedankengefüge verbundene konkrete Prädikatoren nenne ich ***Gedankengefügeprädikatoren*** – „$\mathfrak{R}(x) \Rightarrow \mathfrak{S}(y)$", usw.

Gedankengefügeprädikat = Gedankengefügeschema oder kurz Gedankengefüge: nicht die Gedankengefügeaussage, sondern das Gedankengefüge selber als der der allgemeine Prädikator der n-Tupeln von Aussagen zugesprochen wird (das ist dann jeweils eine **Gedankengefügeaussage**.

Gedankengefügeprädikator - Schema: $(Fx \oplus Gx)$ – im Sinne der Konzeption der Aussageformen keine Aussageform

fixierender oder prädikatbezogener Quantor vs. Gesetzesquantor

Variablenersetzung: Beliebig-Element-Zeichen für Sachverhalte bestimmter Art werden durch Bezeichnungen von konkreten, einzelnen dieser Sachverhalte ersetzt; **Variablenbeseitigung**: eine Aussageform wird zum Verschwinden gebracht (zur Aussage transformiert – **Aussageformenbeseitigung**), indem alle Variablen konkretisiert werden.

Erfüllbarkeitsbestimmung, Erfüllbarkeitsbehauptung, Erfüllbarkeitssaussage: eine „Aussageform" wird als allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar gekennzeichnet

Erfüllbarkeitsaussageform – etwa $\forall x\, P(x)$; sie führt bei jeder Ersetzung von P zu einer wahrheitswertdefiniten Erfüllbarkeitsaussage „$\forall x\, \mathfrak{P}(x)$"

Begriff – Prädikat – Prädikator -Sachverhalts-/Ereignisklasse: *Mensch* ist ein Ousia*begriff*; *krank* ist ein Zustands*begriff* die einem Gegenstand zugeordnete Begriffsbezeichnung ist ein *Prädikat*; „Px“ oder „P(x)“, das Prädikat in der kopulativen Beziehung zu einem Gegenstand ist ein *Prädikator*; die Fälle, da einem beliebigen geeigneten Gegenstand ein Prädikat zukommt, ist eine *Sachverhalts-/Ereignisklasse*.

Gedankengefügeprädikator: durch Gedankengefüge verbundene konkrete Prädikatoren wie „$\mathfrak{P}(x) \Rightarrow \mathfrak{Q}(y)$“, „$\mathfrak{R}(x) \Rightarrow \mathfrak{S}(y)$“, usw. oder beliebige Prädikatoren wie „$P(x) \Rightarrow Q(y)$“, „$R(x) \Rightarrow S(y)$“, usw.

Fregerelation: mit dem Mitteln der *Begriffsschrift* darstellbare logische Relation; **elementare Fregerelation**: Fregerelation der Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}x\ (Fx \oplus Gx)$; **komplexe Fregerelation**: eine Fregerelation der Ausdrucksgestalt $\mathfrak{Q}_1x\ (Fx \oplus Gx) \ominus \mathfrak{Q}_2x\ (Fx \otimes Gx)$.

Fregerelationsgesetze: die logischen Gesetzesbeziehungen zwischen Fregerelationen.

Logische Formen bei denen im Gegensatz zu den **logischen Totalformen** nicht alle Vorkommensfälle definitiv bestimmt sind heißen **logische Partialformen** (bei einer Partialform ist immer eine wohlbestimmte Menge von Totalformen möglich ($\mathcal{M}$)); Der Oberbegriff zu logischer Total- und Partialform ist einfach *logische Form* oder *logische Relation*.

Verschiedene Typen von Aussageformen:

A, B, C: „Aussagevariablen“

$A \oplus B$: Gedankengefüge-Aussageformen

Px, Qx: Prädikator-Aussageformen

$Fx \oplus Gx$: Gedankengefügeprädikatoren-Aussageformen

$\mathfrak{Q}x\, Fx$; $\mathfrak{Q}x(Fx \oplus Gx)$: Erfüllbarkeits-Aussageformen

Wenn ich von einem Satz spreche, dann ist immer ein wahrheitswertdefiniter Behauptungssatz gemeint.

***Unterscheidung Prädikat* und *Prädikator*:** wie bei **BOCHEŃSKI/MENNE**. „Die Prädikatoren … bereits die Zuordnung der betr. Beschaffenheit {oder Artbestimmtheit, oder zeitweilige Zuständlichkeit} bezeichnen, also zusammen mit ihren Argumenten eine Aussage bilden {$\mathfrak{P}\mathfrak{a}$ ist eine feststellende Aussage, $\mathfrak{P}x$ ist eine konkrete Sachverhalts-/Ereignisklasse, Px ist eine logische Sachverhaltsklasse (der Sachverhalt, dass irgendein Prädikat einem beliebigen geeigneten Individuum zukommt)}. Der Prädikator enthält also das Prädikat + Copula im grammatischen Sinne. die Beschaffenheit, die durch einen Prädikator mit *einem* Argument bezeichnet wird, nennt man Eigenschaft {daneben Artbestimmtheit, Zustand}, bei zwei und mehr Argumenten wird die betr. Eigenschaft Beziehung genannt.“ (Grundriss der Logistik, S. 67)