

# Übersicht über die Logik-Arbeit

**FREGE** hat mit seiner *Begriffsschrift* (1879) eine Umwälzung der theoretischen Logik herbeigeführt; in dieser Arbeit hat er versucht, auf der Grundlage einiger weniger fragwürdiger Postulate, den Begriff der *logischen Form* neu und in endgültiger Weise zu bestimmen; alle möglichen logischen Formen beliebiger Stelligkeit sollten sich nun konstruieren lassen. Diese Neubestimmung der logischen Formen – **FREGE** spricht von *Gedankengefügen*, üblicher sind die Ausdrücke „(Aussage-)Junktoren“, „Aussageverknüpfungen“ – ist der zentrale Kern der gesamten „modernen Logik“, der auch den Charakter aller Erweiterungen dieses Logikentwurfs determiniert.

Es sind zwei Postulate, von denen ausgehend Frege diese „logischen Formen“ zu entwickeln versucht:

- 1) Die *Gedankengefüge* sollen Aussagen sein, die ihrerseits „Beziehungen“ von vorgegebenen wahrheitswertdefiniten (d.h. entweder wahren oder falschen) Aussagen darstellen (Postulat der *Aussagenbezogenheit*).
- 2) Die Wahrheit dieser Gedankengefüge soll *ausschließlich* von der Wahrheit der „verbundenen“ (prädizierten) Aussagen abhängen – ein auf welche Weise auch immer gearteter inhaltlicher Zusammenhang darf nicht vorausgesetzt werden (Postulat der „*Wahrheitsfunktionalität*“ und der *Zusammenhangsglosigkeit*).

Da eine Aussage entweder wahr oder falsch ist (*tertium non datur* – *Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit*), lassen sich  $n$  gegebene wahrheitswertdefinite Aussagen genau  $2^n$  verschiedene Kombinationen der  $n$  Aussagen entsprechend ihrer Wahrheitswerte bilden; für zwei Aussagen A und B ergeben sich 4 die „*Wahrheitswertkombinationen*“

A ist wahr und B ist wahr.  
A ist wahr und B ist falsch.  
A ist falsch und B ist wahr.  
A ist falsch und B ist falsch.

Für 3 Aussagen A, B und C erhalten wir 8 „Wahrheitswertkombinationen“:

A ist wahr und B ist wahr und C ist wahr.  
A ist wahr und B ist wahr und C ist falsch.  
A ist wahr und B ist falsch und C ist wahr.  
A ist wahr und B ist falsch und C ist falsch.  
A ist falsch und B ist wahr und C ist wahr.  
A ist falsch und B ist wahr und C ist falsch.  
A ist falsch und B ist falsch und C ist wahr.  
A ist falsch und B ist falsch und C ist falsch.

Und so für jede  $n$  aus  $\mathbb{N}$  (der Menge der natürlichen Zahlen).

Es ist auf Grund der Wahrheitswertdefinitheit klar, dass jedes  $n$ -Tupel von wahrheitswertdefiniten Aussagen *genau einem und nur einem* der entsprechend  $2^n$  Wahrheitswertkombinationen angehört.

Die Gedankengefüge werden nun als Aussagen über  $n$  vorgegebene<sup>1</sup> Aussagen gebildet: ein Gedankengefüge schließt entweder keine, oder eine, oder zwei, ... oder  $n-1$  oder  $n$  der möglichen Wahrheitswertkombinationen definitiv aus. Für zwei Aussagen bedeutet dies:

- Ein Gedankengefüge besagt, dass ein Aussagenpaar keiner aller vier Wahrheitswertkombinationen angehört. Dieses Gedankengefüge ist für alle Paare wahrheitswertdefiniten Aussagen falsch.
- Vier Gedankengefüge besagen jeweils, dass die zwei Aussagen drei bestimmten Wahrheitswertkombinationen definitiv nicht angehören (es ist dann nur eine Wahrheitswertkombination möglich).
- Sechs der zweistelligen Gedankengefüge drücken jeweils aus, dass ein Aussagenpaar zwei Wahrheitswertkombinationen definitiv nicht angehört (es kommen dann jeweils zwei Wahrheitswertkombinationen in Frage).
- Vier Gedankengefüge sagen jeweils, dass zwei Aussagen einer bestimmten Wahrheitswertkombination nicht angehören (sie gehören dann einer der drei restlichen Wahrheitswertkombinationen an).

- Es wird keine der vier Wahrheitswertkombinationen ausgeschlossen – die beiden Aussagen gehören also einer der vier überhaupt möglichen Wahrheitswertkombinationen an; dieses Gedankengefügeaussage ist für jedes Paar wahrheitswertdefiniter Aussagen wahr.

Diese Konstruktionen werden in der Regel durch so genannte „Wahrheitstafeln“ dargestellt.

Gedankengefüge sind also Prädikate von Aussagen A, B, C, ... wie etwa das Prädikat „A ist wahr und B ist falsch“ oder das Prädikat „es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ (gleichbedeutend: „Entweder sind A und B beide wahr oder beide falsch oder es ist B wahr und A falsch“). Diese Prädikate können gegebenen Aussagen nur dann zugesprochen werden, wenn deren Wahrheitswerte schon bekannt sind.

Gedankengefüge drücken also entweder die schon als bekannt vorausgesetzten Wahrheitswerte vorgegebener Aussagen aus, ohne diesen Voraussetzungen die geringste weitere Information hinzuzufügen (wie dies bei inhaltvollen, nicht-tautologischen Prädikationen der Fall ist) – ein solches inhaltlos-tautologisches Gedankengefüge wäre etwa „A ist falsch und B ist wahr“; oder die Gedankengefüge drücken diese immer vorausgesetzte Bekanntheit der Wahrheitswerte mit willkürlicher und sinnloser Informationsverheimlichung aus: dies ist beispielsweise beim Gedankengefüge „Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ der Fall. Dieses Gedankengefüge kann nur dann behauptet werden, wenn *bereits bekannt* ist, dass B falsch ist (dass also A und B beide falsch sind oder dass A wahr und B falsch ist) oder dass A und B beide wahr sind; diese Voraussetzung wird dann aber von dem, der dieses Gedankengefüge behauptet, nicht vollständig kundgetan. Es ist dieselbe Situation, in der jemand, den montags nach dem heutigen Wochentag gefragt wird, sagt: heute ist Montag oder Donnerstag oder Samstag. Es sagt nichts Falsches, aber er begeht eine sinnlose Informationsverschleierung.

Die Gedankengefüge geben also das vorausgesetzte Wissen der Wahrheitswert vorgegebener Aussagen entweder inhaltlos-tautologisch oder sinnlos-informationsverschleiern wieder. Es sind Bildungen ohne jeden kognitiven Wert – hält man sich an ihre durch ihre Konstruktion eindeutig vorgegebenen Bedeutungen, ist evident, dass es sich nicht um logische Formen handeln kann. Und doch stellen sie – als Kern der „Aussagenlogik“ – die Grundlage der gesamten auf Frege zurückgehenden „modernen Logik“ in all ihren Weiterungen dar.

So behauptet Frege beispielsweise das allgemeine Schema eines jeden Schließens ergebe sich auf der Basis des Gedankengefüges „Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“: denn wenn einerseits dieses Gedankengefüge wahr sei und darüber hinaus auch A wahr sei, dann könne mit absoluter Sicherheit gefolgert werden, dass B wahr sei. Er vergisst dabei, dass er dieses Gedankengefüge als „Wahrheitsfunktion“ definiert hat: die Wahrheit des Gedankengefüges darf sich *nur* aus den vorgegebenen Wahrheitswerten der Aussagen A und B ergeben. Wenn ich aber unter der Voraussetzung, dass A wahr ist zugleich das Gedankengefüge „Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ behaupte, dann muss ich bereits wissen, dass B wahr ist: um also die Prämissen behaupten zu können, muss ich die Wahrheit der angeblichen Konklusion schon *voraussetzen*. Freges „Schlusschema“ ist also ein Trugschlusschema; das gilt für alle angeblichen Schlusschemata, die ausgehend von Gedankengefügen erstellt werden können. Werden also die *Gedankengefüge* in ihrer tatsächlichen, durch Freges Konstruktion eindeutig festgelegten und etwa in „Wahrheitstafeln“ dargestellten Bedeutung aufgefasst, ergibt sich, dass sie inhaltlose, überflüssige Bildungen sind, die das, was man schon weiß und voraussetzt, bestenfalls tautologisch, aber in der Regel informationsverschleiern wiedergeben.

Der Siegeszug des fregeschen Logikentwurfs ist nur möglich gewesen, weil Frege und mit ihm alle Vertreter der „modernen Logik“ den nichtssagenden Gedankengefügen *im Nachhinein* eine Deutung geben, die den eigenen klaren und unmissverständlichen Definitionen dieser Gedankengefüge widerspricht. Es wird behauptet, die Gedankengefüge gäben in präzisierter Weise jene logischen Verhältnisse wieder, die umgangssprachlich durch Partikeln wie „wenn-dann“, „oder“ usw. ausgedrückt werden. In Wahrheit werden bei der Konstruktion *aller* Gedankengefüge nur die Partikeln „und“ und „nicht“ in ihrer unreflektierten, umgangssprachlichen Bedeutung verwendet. So soll das Gedankengefüge „Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ das Verhältnis der Implikation ausdrücken und die Bedeutung der umgangssprachlichen Wendung „Wenn A, dann B“ präzisieren. Die Aussage, dass von zwei Aussagen A und B nicht beide falsch sind, soll gleichbedeutend mit der Aussage „A oder B“ sein.

Die ganze „moderne Logik“ bezieht den Schein einer logischen Relevanz aus dieser *nachträglichen logischen Um- und Missdeutung der Gedankengefüge*. Es handelt sich unbestreitbar um eine Missdeutung, denn in keinem einzigen Fall in Alltag und Wissenschaft werden Partikeln wie „wenn-dann“ und „oder“ „wahrheitsfunktional“ gebraucht. Diese Tatsache ist für die Vertreter der „modernen Logik“ kein Thema, und dies, obwohl gerade diese nachträgliche Missdeutung zu offensichtlichem und beispiellosem logischem Nonsense führt. Es ergeben sich unzählige *logische Paradoxien* der einzelnen Gedankengefüge; richtiger müsste man allerdings von den *logischen*

*Paradoxien der nachträglichen logischen Missdeutung der Gedankengefüge* reden, denn diese Paradoxien verschwinden vollständig, wenn die Gedankengefüge in ihrer korrekten – von Frege festgesetzten – Bedeutung genommen werden – es verschwindet dann freilich auch jeder vorgetäuschte logische Gehalt.

Wird das Gedankengefüge „Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist“ als „Wenn A, dann B“ oder „A impliziert B“ gedeutet, ergibt sich u.a., dass jede falsche Aussage jede beliebige andere Aussage impliziert oder dass jede wahre Aussage von jeder beliebigen anderen Aussage impliziert wird; es müsste gelten, dass wenn von zwei beliebigen Aussagen nicht die erste die zweite impliziert, dann die zweite die erste impliziert; es würde sich ergeben, dass von zwei beliebigen Aussagen zumindest eine die andere impliziert; es würde gelten, dass eine Aussage aus jeder anderen Aussage oder ihrer Negation (oder gar aus beiden!) folgt. Aus der üblichen logischen Missdeutung bestimmter Gedankengefüge als Verhältnisse der Kontradiktion (zwei Aussagen haben verschiedene Wahrheitswerte), Exklusion (Kontrarität) (zwei Aussagen sind nicht beide wahr), Äquivalenz (zwei Aussagen haben denselben Wahrheitswert), der nicht ausschließenden Disjunktion (zwei Aussagen sind nicht beide falsch) würde sich ergeben, dass es möglich wäre, dass zwei Aussagen zugleich im Verhältnis der Äquivalenz und der Exklusion (Kontrarität), oder zugleich im Verhältnis der Kontradiktion, der Exklusion, der nicht ausschließenden Disjunktion und der Implikation stehen können. Dass alle diese Verhältnisse sich gegenseitig ausschließen ist schon seit Aristoteles bekannt. Es gibt so eine Fülle von Ungereimtheiten sowohl für das vortheoretische Verständnis des Alltagsverständes wie auch für die Erkenntnisse, die in der vorfregeschen theoretischen Logik gewonnen worden sind. Außerdem ist eine Bildung wie „*Wenn* die Sonne ein Planet ist, *dann* war Frege katholisch“ für jedes unverdorbene Gemüt offensichtlicher Unsinn, während sie im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs eine sinnvolle und wahre Implikationsaussage darstellt (hingegen wird jeder den Satz „*es ist falsch, dass* die Sonne ein Planet ist *und* Frege *nicht* katholisch war“ als zwar sinnvoll und wahr, freilich aber auch als logisch gehaltlosen und irrelevanten, skurrilen Ausdruck der *Voraussetzung* ansehen, dass die Sonne kein Planet ist und Frege nicht katholisch war, ansehen).

Diese und andere Ungereimtheiten (die Paradoxa der logischen Missdeutung der Gedankengefüge, die Tatsache, dass die „aussagenlogischen Schlusschemata“ durchweg Trugschlusschemata sind, der bizarre Gebrauch von sprachlichen Partikeln, mit denen umgangssprachlich logischen Zusammenhänge dargestellt werden), die sich sogleich und offensichtlich aus der fregeschen Konstruktion der Gedankengefüge und den diesen Konstruktionen zugrunde liegenden Prinzipien ergeben, haben nie zu einer kritischen Überprüfung der fregeschen Konstruktionen und der Berechtigung der logischen Deutung der Gedankengefüge geführt. Die Gedankengefüge in ihrer logischen Missdeutung sind die sakrosankte, dogmatische Basis der gesamten „modernen Logik“.

Wissenschaften bestehen schon lange vor Freges Versuch, die theoretische Logik neu aufzubauen, ebenso beruht die menschliche Lebensform auf einer bewussten, rationalen Praxis, die ohne das Verständnis und den Ausdruck komplexer logischer Zusammenhänge gar nicht möglich wäre. Es ist die Umgangssprache, die die Einsicht und die Kundgabe solcher Zusammenhänge ermöglicht. Die Analyse der Bedeutungen solcher Ausdrücke kann und wird zeigen, ob die Prinzipien, die Frege der Konstruktion der Gedankengefüge zugrunde legt, sachlich angemessen sind.

Eine verallgemeinernde Analyse bestimmter umgangssprachlich formulierter Wenn-dann-Aussagen wie „Wenn durch einen Draht elektrischer Strom fließt, dann erwärmt sich dieser Draht“ zeigt auf, dass derartige Aussagen Verhältnisse nicht zwischen wahrheitswertdefiniten Aussagen, sondern zwischen *realmöglichen Sachverhalts-/Ereignisklassen* betreffen. Dass eine Sachverhalts-/Ereignisklasse wie „durch einen Draht fließt elektrischer Strom“ *realmöglich* ist, bedeutet, dass es einerseits Fälle gibt, dass durch einen Draht elektrischer Strom fließt, und dass es andererseits Fälle gibt, da durch einen elektrischen Draht kein Strom fließt. Diese „Vorkommensfälle“ verschiedener Sachverhalts-/Ereignisklassen lassen sich kombinieren, und für zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen p und q ergeben sich die vier Vorkommenskombinationen

- 1) p liegt vor und q liegt vor (in unserem Beispiel: durch einen Draht fließt Strom und dieser Draht erwärmt sich).
- 2) p liegt vor und q liegt nicht vor (in unserem Beispiel: durch einen Draht fließt Strom und dieser Draht erwärmt sich nicht).
- 3) p liegt nicht vor und q liegt vor (in unserem Beispiel: durch einen Draht fließt kein Strom und dieser Draht erwärmt sich)
- 4) p liegt nicht vor und q liegt nicht vor (in unserem Beispiel: durch einen Draht fließt kein Strom und dieser Draht erwärmt sich nicht)

Eine logische Relation bestimmt nun, welche dieser Vorkommenskombinationen realmöglich sind und für welche dies nicht gilt. Im Falle der logischen Form der Implikation ( $p$  impliziert  $q$ ) gilt, dass die erste, dritte und vierte der angeführten Vorkommenskombinationen realmöglich sind, die zweite Vorkommenskombination hingegen nichtrealmöglich ist. Der entscheidende Unterschied zwischen dem Gedankengefüge, das als (materiale) Implikation ausgegeben wird, und dieser bedingungslogischen Implikation ist, dass im ersten Falle etwa die Tatsache, dass zwei Aussagen  $A$  und  $B$  wahr sind, eine hinreichende Bedingung für die Wahrheit des Gedankengefüges „Es ist falsch, dass  $A$  wahr und  $B$  falsch ist“ darstellt, während die Tatsache, dass von zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen  $p$  und  $q$  die Vorkommenskombination „ $p$  liegt vor und  $q$  liegt vor“ eine notwendige, nicht hinreichende Bedingung für die Geltung der Implikation „ $p$  impliziert  $q$ “ ist. Während für zwei wahrheitswertdefinierte Aussagen genau eine und nur eine der überhaupt möglichen Wahrheitswertkombinationen richtig sein kann, ist es möglich, dass für zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen mehr als eine Vorkommenskombination realmöglich ist. Dieser Unterschied hat eine enorme Tragweite.

Aus dieser Bestimmung der Implikation ergibt sich dann unmittelbar,

1. dass beim Vorliegen von  $p$  das Vorliegen von  $q$  *notwendig* ist (es gibt keinen Fall, in dem durch einen Draht Strom fließt, ohne dass sich dieser Draht erwärmt, sondern nur Fälle, in denen sich der Draht erwärmt)
2. dass beim Nichtvorliegen von  $p$  das Vorliegen von  $q$  *möglich* ist (wenn durch einen Draht kein Strom fließt, dann gibt es Fälle, dass sich der Draht erwärmt, aber auch Fälle, dass sich der Draht nicht erwärmt)
3. dass beim Vorliegen von  $q$  das Vorliegen von  $p$  *möglich* ist (wenn sich ein Draht erwärmt, dann gibt es Fälle, dass durch diesen Draht Strom fließt, aber auch Fälle, dass durch diesen Draht kein Strom fließt)
4. dass beim Nichtvorliegen von  $q$  das Vorliegen von  $p$  *unmöglich* ist (wenn sich ein Draht nicht erwärmt, dann gibt es keinen Fall, in dem durch diesen Draht Strom fließt).

Die logischen Formen – eine infinite Menge wohlbestimmter *bedingungslogischer* Relationen – erweisen sich so als Verhältnisse der relativen Modalisierung.

Im **ersten Kapitel des ersten Teils** der hier vorgestellten Arbeit stelle ich die Konstruktion der bedingungslogischen Formen beliebiger Komplexität und Stelligkeit dar; ich erläutere ihre Struktur als Verhältnisse der relativen Modalisierung; ich zeige, wie die logischen Formen ausgehend von den Begriffen der elementaren relativen Modalitäten *notwendig*, *möglich* und *unmöglich* rekursiv definiert werden können und verweise auf die wichtige Unterscheidung zwischen logischen Totalformen und logischen Partialformen (Kapitel 1).

Im **zweiten Kapitel** befasse ich mich mit den Bedeutungen dieser bedingungslogischen Relationen. Ich erörtere die wichtige Unterscheidung zwischen selbstständigen und obligatorisch unselbstständigen bedingungslogischen Formen, ich zeige wie sich komplexere bedingungslogische Zusammenhänge aus einfacheren zusammensetzen. Schließlich verweise ich auf verschiedenartige Typen logischer Zusammenhänge: je nachdem, ob die Sachverhalts-/Ereignisklassen, um deren bedingungslogischen Gesetzeszusammenhang es geht, auf der Basis von Art- und Gattungsbegriffen (es geht dann um den logischen Zusammenhang solcher Sachverhaltsklassen wie *Etwas ist ein Mensch*), oder von fixen Eigenschaftsbegriffen von Gegenständen bestimmter Art (es geht dann um Zusammenhänge zwischen Sachverhaltsklassen wie *Ein Mensch ist rothaarig*) oder von Begriffen zeitweiliger Zustände (es geht dann um Zusammenhänge von Sachverhalts-/Ereignisklassen wie *Ein Mensch hat Fieber*) gebildet sind, ergeben sich logische Relationen mit spezifischen Unterschieden.

Thema von **Kapitel 3** sind die *logischen Gesetze* und das *Schließen*. Logische Relationen sind selbst Sachverhaltsklassen – die Relation der Implikation ist die Klasse aller Paare von Sachverhalts-/Ereignisklassen, die in diesem logischen Verhältnis stehen; diese *logischen* Sachverhaltsklassen sind realmöglich – d.h. es gibt Fälle, wo zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen im Verhältnis der Implikation stehen, und es gibt Fälle, wo dies nicht der Fall ist. Es lassen sich auch bezüglich verschiedener logischer Sachverhaltsklassen Vorkommenskombinationen bilden: etwa die Vorkommenskombination

1. *zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen im Verhältnis der Implikation und diese Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen im Verhältnis der Exklusion (der logischen Unverträglichkeit)*

2. *zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen im Verhältnis der Implikation und diese Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen nicht im Verhältnis der Exklusion*
3. *zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen nicht im Verhältnis der Implikation und diese Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen im Verhältnis der Exklusion*
4. *zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen stehen weder im Verhältnis der Implikation noch im Verhältnis der Exklusion*

Aus der Bestimmung von Implikation und Exklusion ergibt sich, dass die erste dieser Vorkommenskombinationen nichtrealmöglich, die anderen Vorkommenskombinationen realmöglich sind; dies bedeutet, dass die zwei logischen Formen der Implikation und der Exklusion selbst im Verhältnis der Exklusion stehen.

Ich lege dar, wie die logische Relation eindeutig bestimmt werden kann, die zwischen zwei beliebigen logischen Formen besteht, wobei die eine Form sich auf  $n$  Sachverhalts-/Ereignisklassen, die andere sich auf  $m$  Sachverhaltsklassen bezieht ( $n$  und  $m$  sind beliebige natürliche Zahlen) und die beiden Mengen von Sachverhalts-/Ereignisklassen in jedem möglichen Verhältnis stehen können (identisch, die eine ist in der anderen enthalten, es gibt eine Durchschnittsmenge usw.). Ich zeige wie logische Obversionsgesetze (Beispiel: wenn zwischen zwei Sachverhalts-/Ereignisklassen  $p$  und  $q$  eine bestimmte logische Beziehung besteht, welche Beziehung bezieht dann zwischen den Sachverhalts-/Ereignisklassen nicht- $p$  und  $q$  oder zwischen  $p$  und nicht- $q$  oder zwischen nicht- $p$  und nicht- $q$ ?) und logische Konversionsgesetze (wenn zwischen drei Sachverhalts-/Ereignisklassen  $P$ ,  $q$  und  $r$  eine bestimmte logische Beziehung besteht, in welcher Beziehung stehen dann die Sachverhalts-/Ereignisklassen  $q$ ,  $r$  und  $p$  oder  $r$ ,  $q$  und  $p$  usw.?). Ich befasse mich auch mit den Gesetzen der Verkettung von logischen Relationen (z.B. wenn die Sachverhalts-/Ereignisklassen  $p$  und  $q$  in einer bestimmten logischen Relation stehen und die Sachverhalts-/Ereignisklassen  $q$  und  $r$  in einer bestimmten logischen Relation stehen, in welche logischen Verhältnis stehen dann die Sachverhalts-/Ereignisklassen  $p$  und  $r$ ?).

Endlich lege ich dar, in welcher Weise jeder logischen Form eine wohlbestimmte Menge von Schlusschemata entspricht. Es wird dabei stets ein einzelner oder besonderer Fall einer allgemeinen bedingungslogischen Gesetzmäßigkeit subsumiert; jeder Schluss ist so eine Struktur, in der eine oder mehrer Gesetzesprämissen und eine oder mehrer Subsumtionsprämissen auf eine oder mehrere Konklusionen bezogen sind.

Im **vierten Kapitel des ersten Teils** nehme ich eine eingehendere Analyse der Wenn-dann-Sätze vor. Es gibt zwei grundlegende unterschiedliche *korrekte* Verwendungsweisen des Partikels *Wenn-dann*: einmal zum Ausdruck der bedingungslogischen Gesetzesbeziehung der Implikation (beispielsweise das mathematische Implikationsgesetz „Wenn eine erste natürliche Zahl größer als eine zweite ist, dann ist der unmittelbare Nachfolger der ersten Zahl größer als der unmittelbare Nachfolger der zweiten Zahl“). Zum anderen dient das *Wenn-dann* dem Ausdruck von problematischen oder kontrafaktischen Konditionalen.

Konditionale sind enthymematische Schlüsse (d.h. Schlüsse, bei denen zumindest eine der notwendigen Prämissen unausgesprochen bleibt), die ein Implikationsgesetz als (unausgesprochene) Prämisse voraussetzen; dabei ist sich der Sprecher im Falle des problematischen Konditional darüber im Ungewissen, ob die explizite (ausgesprochene) Prämisse wahr ist; im Falle des kontrafaktischen Konditionals weiß der Sprecher dass die explizite Prämisse falsch ist, er untersucht jedoch was aus der kontrafaktischen Unterstellung der Wahrheit der expliziten Prämisse und der Geltung des entsprechenden Implikationsgesetzes folgt. Der Satz „Wenn  $13^{13}$  größer als  $23^{11}$  ist, dann ist  $13^{13}+1$  größer als  $23^{11}+1$ “ ist ein problematisches Konditional, mit dem obigen arithmetischen Implikationsgesetz als unausgesprochener Prämisse; ob  $13^{13}$  größer ist als  $23^{11}$  weiß der Sprecher nicht, er sagt im Konditional aus, dass, wenn dies der Fall sein sollte, dann *notwendig* auch  $13^{13}+1$  größer ist als  $23^{11}+1$ . Der Satz „Wenn  $13^{13}$  größer als  $23^{11}$  wäre, dann wäre auch  $13^{13}+1$  größer als  $23^{11}+1$ “ ist ein kontrafaktisches Konditional. Der Sprecher weiß, dass  $13^{13}$  nicht größer als  $23^{11}$  ist, er bringt aber zum Ausdruck, was aus der kontrafaktisch unterstellten Wahrheit der Prämisse  *$13^{13}$  ist größer als  $23^{11}$*  und der unausgesprochen vorausgesetzten Gesetzesprämissen „Wenn eine erste natürliche Zahl größer als eine zweite ist, dann ist der unmittelbare Nachfolger der ersten Zahl größer als der unmittelbare Nachfolger der zweiten Zahl“ folgen würde. Es schließt sich eine Analyse des Zusammenhangs der Konditionale mit der bedingten Wahrscheinlichkeit und der logischen Struktur der Wenn-auch-Sätze an.

Der **zweite Teil der Arbeit** befasst sich mit den wesentlichen Begriffsbildungen, die dem fregeschen Logikentwurf zugrunde liegen. Im ersten Kapitel geht es um die so genannte „Aussagenlogik“ – um die ungeprüften und fragwürdigen Präsuppositionen von Freges Bestimmung der logischen Formen (der Gedankengefüge): logische

Formen sollen Beziehungen von wahrheitswertdefiniten Aussagen sein, die selbst Aussagen (bzw. Aussageformen) sein sollen, deren Wahrheitswerte ausschließlich von den vorgegebenen und vorausgesetzten Wahrheitswerten der „in Beziehung stehenden“ Aussagen abhängen soll. Durch diese Postulate ist die Bedeutung der Gedankengefüge schon vollständig determiniert: es sind Aussagen, die die schon bekannte und vorausgesetzte Wahrheit von Aussagen bestenfalls tautologisch, aber zumeist mit Informationsverschleierung wiedergeben. Die Bildung dieser inhaltlosen Gedankengefüge geschieht mit Hilfe von wenigen einfachen umgangssprachlichen Ausdrucksmitteln – es sind *nur* die Wörter „wahr“, „nicht“ und „und“ – die ohne weitere Analyse einfach angenommen sind. Mit diesen Ausdrucksmitteln sind die Gedankengefüge allesamt eindeutig definiert und jede weitere „aussagenlogische“ Erörterung nimmt effektiv auch nur auf diese Festsetzungen Bezug.

Den bereits wohldefinierten Gedankengefügen wird dann nachträglich eine logische Relevanz unterschoben, indem die Gedankengefüge als die Präzisierung des Gebrauch bestimmter umgangssprachlicher Ausdrücke, die logische Zusammenhänge bezeichnen, ausgegeben werden. Im **zweiten Kapitel des zweiten Teils** geht es um diese nachträgliche logische Deutung der Gedankengefüge und die kritische Durchsicht der Argumente, die Vertreter des fregeschen Logikentwurfs zur Rechtfertigung der Diskrepanz zwischen der seit jeher in Alltag und Wissenschaft üblichen Verwendung der logischen Partikeln und ihrem ganz neuartigen Gebrauch im Rahmen der „Aussagenlogik“ anführen, und um die Versuche, die Paradoxa, die aus dieser logischen Missdeutung resultieren, im Rahmen des fregeschen Logikentwurf selbst zu beseitigen (der Widersinn soll also unter ausdrücklicher Beibehaltung seiner Gründe ausgeschaltet werden!). Schließlich gehe ich auf die Widersprüche ein, die sich aus folgender Sachlage ergeben: die Gedankengefüge sind zwar überflüssige und inhaltlose, doch wohlbestimmte Prädikate für vorgegebene wahrheitswertdefinite Aussagen. Die *bedingungslogischen* Zusammenhänge, die zwischen den Gedankengefügen bestehen, können so eindeutig bestimmt werden: beispielsweise impliziert das Gedankengefüge *A ist wahr und B ist wahr* das Gedankengefüge *Es ist falsch, dass A wahr und B falsch ist* (und zwar im Sinne der im ersten Teil dargelegten bedingungslogischen Form der Implikation). Diese *bedingungslogischen* Gesetzmäßigkeiten nenne ich *Gesetze des Systems der fregeschen Gedankengefüge* (SFG). Frege verwechselt die Gedankengefüge mit den logischen Formen und setzt an die Stelle der bedingungslogischen Beziehungen zwischen den Gedankengefügen selbst Gedankengefüge; so wird aus dem angeführten Gesetz des SFG eine Gedankengefügeaussage über Gedankengefüge: es ist falsch, dass einerseits A und B beide wahr sind und es andererseits falsch ist, dass es falsch ist, dass A wahr und B falsch ist – was auf die Aussage hinausläuft, dass es falsch ist, dass B wahr und zugleich falsch ist. Diese Gedankengefügeaussagen über Gedankengefüge (ich spreche von *Fregegesetzen*) werden dann einerseits mit den Gesetzen des SFG (bedingungslogische Beziehungen zwischen Gedankengefügen) und obendrein mit den logischen Gesetzen (bedingungslogische Beziehungen zwischen bedingungslogischen Formen) verwechselt – es handelt sich aber um drei ganz verschiedene Sachverhalte. Diese Konfusion kann freilich nur dann erkannt werden, wenn den Gedankengefügen keine andere Bedeutung gegeben wird, als von Frege ursprünglich (etwa mit Hilfe der „Wahrheitstafeln“) festgesetzt wurde und auf die logische Missdeutung der Gedankengefüge verzichtet wird.

Die Gedankengefüge sind Prädikate, die  $n$ -Tupeln von Aussagen prädiert werden; so kann man irgendwelchen Aussagepaaren die zweistelligen Prädikate „... ist wahr und ... ist falsch“ oder „es ist falsch, dass ... und ... beide falsch sind“ zusprechen und es resultiert dann eine wahr oder falsche Gedankengefügeaussage. Nun werden jedoch die Gedankengefüge von Frege zugleich als (binäre) innere algebraische Verknüpfungen ausgegeben. Dies steht in Zusammenhang mit der Versuch Freges, die Operation der Prädikation mit der Operation der Abbildung (Funktion) zu identifizieren. Dieser Versuch steht in eklatantem Widerspruch zur korrekten Definition der Abbildungsoperation durch Angabe einer wohlbestimmten Definitionsmenge (Menge der Urbilder einer Abbildung), einer wohlbestimmten Zielmenge (Menge der Bilder einer Abbildung) und einer eindeutigen Zuordnungsvorschrift, die jedem Element der Definitionsmenge eindeutig ein bestimmtes Element der Zielmenge als Bild (Funktionswert) zuordnet.

Die Umdeutung der (zweistelligen) Gedankengefüge zu (binären) inneren algebraischen Verknüpfungen ersetzt unter der Hand die Aussagen, auf die sich die Gedankengefüge beziehen, durch die Menge der zwei Wahrheitswerte (genau genommen mit einer Menge von irgendwelchen zwei komplementären Werten) und die Gedankengefüge mutieren zu verschiedenen Abbildungen (ich spreche von *Fregeverknüpfungen*), die jeweils jedes Paar von „Wahrheitswerten“ eindeutig auf einen „Wahrheitswert“ abbilden. Es ist ein simples, aber kohärentes System von algebraischen Verknüpfungen, das sich aber vom System der Gedankengefüge trotz bedingungslogischer Isomorphie grundlegend unterscheidet. So ist beispielsweise die Gedankengefügeaussage, die zwei wahren Aussagen das Gedankengefüge „es ist falsch, dass ... und ... beide wahr sind“ falsch, während die entsprechen-

de Fregeverknüpfung, die das Wertepaar (*wahr*, *wahr*) auf den Wert *falsch* abbildet, nicht falsch, sondern korrekt ist. Es ist möglich, dass für beliebig viele komplementäre Werte derartig innere Verknüpfungen gebildet werden, während der Versuch, eine „mehrwertige Aussagenlogik“ (neben *wahr* und *falsch* soll es noch weitere „Wahrheitswerte“ geben) zu konstruieren, nur zu logischem Unsinn führt.

Freges Versuch, den Begriff der Abbildung/Funktion zu verallgemeinern, das System der Fregeverknüpfungen, der Versuch, dieses System als einen „logischen Kalkül“ auszugeben und die Unterschiede zwischen den Gedankengefügen, den Fregeverknüpfungen und den logischen Formen sind Gegenstand des **dritten Kapitels des zweiten Teils**.

Thema des **vierten Kapitels** ist die Erweiterung der „Aussagenlogik“ zur „Prädikatenlogik“. Frege war sich durchaus darüber im Klaren, dass etwa die Relata einer bedingungslogischen Wenn-Gesetzesaussage nicht Aussagen, sondern Prädikatore, Sachverhaltsklassen, also Allgemeines sind. Er meinte jedoch (ohne es irgend begründen zu können) die logischen Formen in ihrer „Reinheit“ nur dann darstellen zu können, wenn er von ihnen diesen Aspekt der Allgemeinheit abtrennt; diese Trennung von logischer Form und Allgemeinheit ist Freges zentraler Irrtum – denn Allgemeinheit ist von den logischen Relationen nicht zu trennen.

In der „Prädikatenlogik“ werden die Gedankengefüge wiederum in der Weise mit der Allgemeinheit verbunden, dass zum „Vokabular“ der „Aussagenlogik“ Prädikatore hinzugefügt werden: „ $P(x)$ “ in der Bedeutung „einem beliebigen Gegenstand (aus einem bestimmten Bezugsbereich) kommt ein Prädikat  $P$  zu“. Die fregesche Theorie über das Verhältnis von Begriff und Gegenstand wird dann kritisch erörtert.

Frege dissoziiert und dichotomisiert Begriff und Gegenstand in unangemessener Weise: jeder Ausdruck ist entweder präzifizierbarer („ungesättigter“) Begriff oder präzifizierter, „selbstständiger“ Gegenstand. So nimmt er an, dass Begriffe, wenn sie, wie es im Rahmen der theoretischen Logik unabdingbar ist, nicht prädikativ verwendet, sondern selbst thematisiert und zu Gegenständen von Aussagen gemacht werden müssen, aufhören, Begriffe zu sein und zu Gegenständen werden; dies würde eine theoretische Logik unmöglich machen, weil Aussagen über Begriffe als Begriffe nicht möglich wären. Ich gehe ein auf die fregesche Gleichstellung leerer und gehaltvoller Begriffe, auf seine Behandlung der Problematik der Identität, auf seine Verwerfung der Subjekt-Prädikat-Struktur.

In der Prädikatenlogistik werden neben Prädikatore auch Quantoren dem Ausdrücken der „Aussagenlogik“ hinzugefügt. Quantoren dienen dem Ausdruck von Gesetzesbeziehungen, indem sie Aussagen über alle bzw. über zumindest eines der Gegenstände eines bestimmten Bereich (dargestellt durch die „Individuenvariable“  $x$ ) ermöglichen: Allen  $x$  kommt das Prädikat  $P$  (nicht) zu; zumindest einem der  $x$  kommt  $p$  (nicht) zu. Quantoren beziehen sich üblicherweise also auf allgemeine Prädikatore (Begriffe, Sachverhalts-/Ereignisklassen). Dies führt zu Komplikationen, wenn die Quantoren zusammen mit Gedankengefügen verwendet werden, denn diese sind ja in der Tat für Aussagen, nicht für allgemeine Sachverhalte/Ereignisse definiert. Ausweg ist dann die *Konzeption der Aussageformen*. Die Quantoren werden dann zu Erfüllbarkeitsprädikaten für Aussageformen: der „Allquantor“ besagt dann, dass sich aus jeder Substitution der Individuenvariablen in einer Aussageform durch die Bezeichnung eines Gegenstandes eine wahre Aussage ergibt.

Es schließt sich die Untersuchung an, welche sinnvollen Ausdrücke sich aus den Elementen der Prädikatenlogistik – aus Aussagevariablen, Gedankengefügen, Prädikatvariablen und Quantoren – bilden lassen. Die Bedeutung dieser „Elemente“ ist wohlbestimmt (eindeutig festgesetzt), sofern sie nicht mit der nachträglichen logischen Missdeutung insbesondere der Gedankengefüge vermennt wird. Hält man sich strikt und ausschließlich an die Bedeutungen, die **FREGE** für alle diese Zeichen eindeutig und unmissverständlich festgelegt hat, lässt sich von *jeder* beliebigen Kombination dieser Zeichen eindeutig entscheiden, ob sie einen sinnvollen Ausdruck darstellt, was jeder sinnvolle Ausdruck bedeutet, ob die sinnvollen Ausdrücke benennend oder behauptend sind, und ob schließlich die behauptenden Ausdrücke wahr oder falsch sind. Es lassen sich einerseits beliebig viele SFG-analoge prädikatenlogistische Ausdrücke bilden, die jedoch wie die Ausdrücke des SFG selbst keine logische Bedeutung besitzen. Es ist aber auch möglich, im Rahmen der Prädikatenlogistik logische Formen darzustellen; jetzt handelt es sich aber nicht mehr um „Wahrheitsfunktionen“. Die Konstruktion dieser in der Prädikatenlogistik konstruierbaren logischen Formen geschieht unsystematisch und unvollständig, und diese prädikatenlogistisch darstellbaren logischen Formen werden wiederum einer systematischen Missdeutung unterzogen. Die Konzeption der Aussageformen führt dazu, dass die zentrale Unterscheidung von logischen Formen und logischen Gesetzen verloren geht; die logischen Gesetze erscheinen selbst als – allgemeingültige - logische Formen. Wie unzureichend das fregesche Verständnis der logischen Formen auch jetzt bleibt, zeigt sich an der Art und Weise,

wie er bestimmte logischen Probleme löst. Erst im Rahmen des im ersten Teil dargelegten Systems der bedingungslogischen Formen lassen sich diese prädikatenlogistischen Ausdrücke beurteilen.

Schließlich gehe ich auf die „multiforme Quantifikation“ ein; hier liegt in einem Ausdruck eine unterschiedliche Verwendung der Quantoren vor; diese dienen einmal zum Ausdruck eines Gesetzes oder sie sind Bestandteil der Bedeutung des Prädikats. So drückt im Satz „Alle  $x$  stehen in der Relation  $R$  zu allen  $y$  aus dem Bereich  $B_y$  und zu einigen  $z$  aus dem Bereich  $B_z$ “ nur erste „Alle“ die logische Gesetzesbeziehung aus und die anderen Quantoren gehören zum Prädikat; logisch betrachtet liegt ein Sachverhalt wie „Allen  $x$  kommt  $P$  zu“ vor.

**Kapitel 5 des zweiten Teils** befasst sich mit der „Modallogik“, wie sie im Rahmen des fregeschen Logikentwurfs versucht worden ist. Die Erweiterung der „Aussagenlogik“ durch Modalbegriffe, sollte die Unzufriedenheit mit den Widersprüchen und Paradoxa der logischen Missdeutung der Gedankengefüge beseitigen. Einerseits sollen die Ungereimtheiten der logischen Deutung der Gedankengefüge beseitigt werden – dann aber wird ohne Einschränkung an diesen Bildungen festgehalten. Von vornherein werden die Gründe für die Paradoxa ignoriert.

Im Zentrum dieser *Modalitätenlogistik* stehen die „alethischen Modalitäten“ – eine fragwürdige Konzeption, denn die „Modalisierung“ der Wahrheitswerte („notwendig wahr“, „möglicherweise wahr“) steht in Widerspruch zu SFG-Prinzip der Wahrheitswertdefinitheit, demzufolge Aussagen entweder wahr oder falsch – man kann diese Wahrheit oder Falschheit nicht noch weiter modal graduieren. Eine (Feststellungs-)Aussage konstatiert ein einzelnes Faktum: dieses Faktum besteht oder es besteht nicht – die entsprechende Aussage ist wahr oder sie ist falsch. Eine solche Aussage wäre: „Dieser Wurf dieser Münze (an dieser bestimmten Raum-Zeit-Stelle) hat *Kopf* zum Ergebnis.“ Dies ist entweder wahr oder falsch, es kann nicht ganz besonders und auch nicht nur ein bisschen wahr bzw. falsch sein. Wenn dieses Ereignis modalisiert wird (wenn gesagt wird, dieses Resultat des Münzenwurfs ist nicht notwendig, sondern nur möglich, dann wird dieses einzelne Faktum auf alle Fälle derartiger Ereignisse (Münzenwurf) bezogen, das Einzelne wird seiner allgemeinen Gesetzmäßigkeit subsumiert: diese Art von Ereignis hat nicht immer *Kopf* zur Ergebnis, sondern oft auch *Zahl*. Wenn ein Ereignis bestimmter Art unter bestimmten Umständen nur möglicherweise (etwa mit dem Wahrscheinlichkeitswert  $\frac{1}{2}$ ) auftritt, dann bedeutet dies nicht, dass, falls es auftritt, dies nur zur Hälfte wahr ist – sondern es ist wahr oder falsch, es gibt kein Drittes. Dieser Wesenskern aller Modalisierung – Einordnung des Einzelnen in umfassendere gesetzmäßige Zusammenhänge – bleibt in der Modalitätenlogistik unbeachtet.

Die Gleichstellung von Modalitäten (einschließlich der Wahrscheinlichkeitswerte) und der Wahrheitswerte ist falsch; auch die Gleichstellung der subjektiven oder objektiven Ungewissheit mit den Wahrheitswerten (etwa in manchen Versionen einer „dreiwertigen Logik“) ist nicht richtig.

Der entscheidende Fehler Freges war, dass er nicht erkannt hat, dass Sachverhalts-/Ereignisklassen (d.h. alle Fälle, da ein Sachverhalt, ein Ereignis bestimmter Art vorliegt) die Relata der logischen Verhältnisse sind, sondern postuliert hat, dies sollten wahrheitswertdefinite Aussagen sein. Aber eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, sie kann nicht möglicherweise wahr (manchmal wahr und manchmal falsch) sein. Dies wäre ein Verstoß gegen das Prinzip des Nichtwiderspruchs. Ein Versuch, diesen Verstoß zu vermeiden, und Aussagen doch bisweilen wahr und bisweilen falsch sein zu lassen, stellt die „Semantik der möglichen Welten dar“: alle Aussagen werden nicht nur für die wirkliche, sondern auch bezüglich „möglicher“ Welten beurteilt. Es kann freilich nur in der Fiktion unterstellt werden, dass, was real der Fall ist, zugleich nicht der Fall ist; so stellt diese Konzeption das einzelne reale Faktische nicht in den Raum *objektiver* Möglichkeiten (d.h. das Einzelne in den Raum allgemeiner Gesetzmäßigkeit), sondern fasst „Möglichkeit“ als *Fiktivmögliches*, als Phantastisch-Absurdes. Diese „Semantik“ der „möglichen“, genauer: der *fiktiven* Welten, lässt sich nur um den Preis der Aufgabe aller fundamentalen logischen Normen vertreten.

In dieser Konzeption wird jede *konkrete* Aussage zu einer Quasiaussageform, die erst durch eine (prinzipiell nicht kohärent durchführbare) „Bewertungsfunktionen“ für „jede“ dieser fiktiven „Welten“ einen eindeutigen Wahrheitswert erhält. : jede Aussage wird zu einer Quasiaussageform (die eine Fiktive-Welten-Variable bei sich führt), die für jede fiktive Welt einen eindeutigen fiktiven Wahrheitswert erhält. „Notwendig“ sollen dann jene Aussagen sein, die in allen fiktiven „Welten“ wahr sind, „möglich“ jene Aussagen, die in zumindest einer fiktiven „Welt“ wahr sind.

Eine gewisse Krönung erhalten diese Vorstellungen in ihrer Weiterentwicklung zu so genannten Kripke-Semantik. Den Mengen aller Aussagen, der „Menge“ der fiktiven „Welten“ und der „Bewertungsfunktion“ wird eine „Zugangsrelation“ beigegeben. Die „Modalitäten“ werden dann auf die von einer bestimmten fiktiven „Welt“ aus

zugänglichen fiktiven „Welten“ bezogen. Auf diese Weise soll der Unterschied zwischen verschiedenen modallogistischen Systemen und die so genannte „Iteration der Modalitäten“ erklärt werden. Dies muss jedoch misslingen: denn es wird unterstellt, dass die Bewertungen einer Aussage bezüglich einer bestimmten Menge von fiktiven „Welten“ selbst noch einmal fiktiv bewertet werden kann: dies ist unmöglich, denn die Bewertungen der vorausgesetzten Bewertungsfunktion sind für alle fiktiven „Welten“ verbindlich. Deshalb lassen sich auch diese „Modalitäten“ nicht iterieren. In jedem modallogistischen Ausdruck kann nur eine dieser „Modalitäten“ auftreten; die restlichen „Modalitäten“ stellen stets Kompositionen der „Zugangsrelation“ dar. Aus dem den Voraussetzungen der Kripkesemantik entsprechenden Satz „In allen von  $w_1$  aus zugänglichen Welten  $w_2$  ist A wahr, wobei die Welten  $w_1$  alle Welten sind, die von der bestimmten fiktiven „Welt“  $w$  aus zugänglich sind“, in dem nur das erste *alle* eine „Modalität“ darstellt und das zweite *alle*, die fiktiven „Welten“ näher bestimmt, auf die sich die „Modalität“ bezieht, wird der in Widerspruch zu den Voraussetzungen der Kripkesemantik stehende Satz „In allen von  $w$  aus zugänglichen „Welten“  $w_1$  ist es wahr, dass A in allen von  $w_1$  aus zugänglichen Welten wahr ist.“

---

1  $n$  bezeichne eine beliebige natürliche Zahl.